ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN-PASCAL ANSEL
CHRISTOPHE STRICKER

Couverture des actifs contingents et prix maximum

Annales de l'I. H. P., section B, tome 30, nº 2 (1994), p. 303-315
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1994__30_2_303_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 30, n° 2, 1994, p. 303-315. *Probabilités et Statistiques*

Couverture des actifs contingents et prix maximum

par

Jean-Pascal ANSEL et Christophe STRICKER

Laboratoire de Mathématiques, U.R.A. C.N.R.S. 741
U.F.R. Sciences et Techniques
16, Route de Gray, 25030 Besançon Cedex
France

RÉSUMÉ. — Le problème de l'évaluation des actifs contingents à partir de la dynamique des prix de certains actifs du marché dans le cadre d'un marché complet est un problème résolu. Afin d'éviter des opportunités d'arbitrage on suppose l'existence d'une loi de martingale qui sera unique lorsque le marché est complet. L'évaluation de l'actif contingent sera alors obtenu en calculant son espérance par rapport à cette loi de martingale. En revanche, lorsque le marché est incomplet, il existe plusieurs lois de martingale. Dans cet article, nous allons montrer que la borne supérieure de tous ces prix est atteinte si et seulement s'il existe une stratégie de couverture pour cet actif..

Mots clés : Loi de martingale, arbitrage, semimartingale, actif contingent, couverture, prix maximum.

ABSTRACT. — The problem of pricing contingent claims from the price dynamics of some securities is well understood in the context of a complete financial market. In order to avoid any arbitrage opportunity, we assume the existence of a martingale measure which is unique in a complete market. Then the price of a contingent claim is its expectation with respect to this martingale measure. On the other hand when the market is incomplete there are several martingale measures and therefore several

Classification A.M.S. : 60 H 05.

prices of a contingent claim. In this paper we study the relationship between the maximum price and the existence of an hedging strategy and we give necessary and sufficient conditions for a contingent claim to be representable with respect to the discounted price process.

---

1. INTRODUCTION

Dans cet article nous étudions le problème d'évaluation du prix d'un actif contingent à partir de la dynamique des prix de certains titres du marché dans le cadre d'un marché incomplet. Ce problème a été étudié par de nombreux auteurs: H. Pagès [14] et I. Karatzas, J. P. Lehoczky, S. E. Shreve, G. L. Xu [12] lorsque la filtration est engendrée par un mouvement brownien, N. El Karoui et M. C. Quenez [13] lorsque la filtration est quasi-continue à gauche et que l'actif est majoré par la valeur terminale d'un portefeuille, F. Delbaen [4] lorsque l'ensemble des lois de martingale est faiblement compact, enfin S. D. Jacka [11] qui vient d'obtenir de manière indépendante le même résultat que nous. Nous allons montrer que la borne supérieure de tous ces prix est atteinte si et seulement s'il existe une stratégie de couverture pour l'actif considéré. La démonstration de ces résultats fournit des conditions suffisantes pour que l'intégrale stochastique d'un processus prévisible par rapport à une martingale locale reste une martingale locale. Enfin nous étudions l'évaluation d'un actif indépendant du processus des prix.

2. NOTATIONS

Pour les définitions et résultats généraux concernant le calcul stochastique, nous invitons le lecteur intéressé à se reporter aux livres de C. Dellacherie et P. A. Meyer [5], ou J. Jacod [9]. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{0 \leq t \leq 1}, P)$ un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles. On suppose que $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1$ et que $\mathscr{F}_0$ est la tribu dégénérée. Toutes les filtrations et tous les processus considérés seront indexés par [0, 1]. Les vecteurs x de $\mathbb{R}^d$ seront identifiés à des matrices $d \times 1$, x^* désignera la transposée de x et $\|x\|^2 := x^* x$. L'intégrale stochastique vectorielle (voir Jacod [10] pour une définition précise) du processus prévisible

H à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ par rapport à la semimartingale vectorielle $X=(X^1, \ldots, X^d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est notée $(H^*.X)_t$. Nous conviendrons que $(H^*.X)_0=0$. Le système des *prix actualisés* est décrit par un processus X, càdlàg, adapté, nul en 0, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. De nombreux auteurs ont montré que si le marché ne présente pas d'opportunités d'arbitrage en un sens raisonnable, il existe une loi de martingale pour X, c'est-à-dire une loi Q équivalente à P sous laquelle X est une martingale locale. Dorénavant nous supposerons que P *est déjà une loi de martingale pour* X et nous désignerons par :

$\mathscr{M}(P)$ l'ensemble des lois absolument continues par rapport à P sous lesquelles X est une martingale locale

D (P) l'ensemble des densités par rapport à P des lois de $\mathscr{M}(P)$.

$\mathscr{M}^e(P)$ l'ensemble des lois équivalentes à P appartenant à $\mathscr{M}(P)$.

$D^e(P)$ l'ensemble des densités par rapport à P des lois de $\mathscr{M}^e(P)$.

$\mathscr{M}^b(P)$ l'ensemble des lois de $\mathscr{M}^e(P)$ dont les densités par rapport à P sont bornées.

$D^b(P)$ l'ensemble des densités par rapport à P des lois de $\mathscr{M}^b(P)$.

$H^1(P)$ l'ensemble des P-martingales M telles que $E[\sup_{0 \leq t \leq 1} \|M_t\|] < +\infty$.

M (P) l'ensemble des P-martingales.

Lorsque $Q \in \mathscr{M}(P)$, nous noterons $\mathscr{L}^1(X,1, Q)$ la fermeture dans $H^1(Q)$ des combinaisons linéaires de 1 et des intégrales stochastiques $H^i.X^i$ où $H^i.X^i$ appartient à $H^1(Q)$. Tout élément Y de $\mathscr{L}^1(X, 1, Q)$ peut s'écrire sous la forme $Y=x+(H^*.X)_1$ où $x \in \mathbb{R}$ et H est intégrable par rapport à X (*voir* Jacod [9] et [10]). Enfin si $\mathscr{C}$ désigne une classe de processus, nous dirons que le processus Y appartient à $\mathscr{C}_{loc}$ s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt (T_n) tendant stationnairement vers 1 tels que le processus arrêté Y^{T^n} appartienne à $\mathscr{C}$.

Comme il a été rappelé dans l'introduction, l'objet principal de cet article est la caractérisation des actifs contingents qui peuvent être couverts grâce à une stratégie d'investissement appropriée. A cet effet, nous commençons par préciser le modèle mathématique sous-jacent. Un portefeuille est la donnée d'un couple (x, ξ) où x est un réel positif (placement initial) et ξ un processus prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ intégrable par rapport à X, qui représente la stratégie d'investissement. La valeur de ce portefeuille à l'instant t est donnée par $V_t := x + (\xi^*.X)_t$. Un actif contingent B est une v.a. positive, et $\mathscr{F}$ mesurable. On dit que B est Q-simulable ou qu'on peut le couvrir s'il existe un portefeuille (x, ξ) dont la valeur V_1 est égale à B, et une loi Q appartenant à $\mathscr{M}^e(P)$ telle que $V_t := x + (\xi^*.X)_t$ soit une Q-martingale.

3. COUVERTURE ET PRIX MAXIMUM D'UN ACTIF CONTINGENT

Dans leur article, N. El Karoui et M. C. Quenez [13] modélisent les prix sous la forme:

$$dX_t^0 = X_t^0\, r_t\, dt \qquad dX_t^i = X_t^i \left[b_t^i\, dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{ij}\, dW_t^j \right] \qquad i=1, \ldots, n \leqq d$$

où: r, b, σ sont des processus prévisibles bornés relativement à une filtration vérifiant les conditions habituelles, quasi-continue à gauche et telle que W soit un mouvement brownien. Avec des arguments de programmation dynamique et l'existence d'une loi minimale (*voir* [2] pour une étude détaillée de ce problème) elles montrent:

Proposition 3.1. – *Si* $Q \in \mathcal{M}^e(P)$ *et si* B *est un actif majoré par* V_1, *valeur finale d'un portefeuille* (x, ξ) *où* ξ *est borné, on a l'équivalence entre*:

(i) B *est* Q-*simulable*,

(ii) $\forall R \in \mathcal{M}^e(P)\ E^R[B] \leqq E^Q[B]$,

(iii) $E^R[B]$ *est une constante indépendante de* $R \in \mathcal{M}^e(P)$.

Ce résultat généralise celui de H. Pagès [14] ou de I. Karatzas, J. P. Lehoczky, S. E. Shreve, G. L. Xu [12] lorsque X est modélisé de la même façon et que la filtration est celle du brownien. Leur démonstration qui fait appel à la propriété de représentation prévisible du brownien, ne permet pas de traiter le cas général.

Enfin F. Delbaen [4] a obtenu des résultats analogues si D(P) est $\sigma(L^1, L^\infty)$ compact: sa démonstration repose sur le profond théorème de James (*voir* Diestel [7]). Le théorème suivant démontré indépendamment par S. D. Jacka établit en toute généralité l'équivalence entre (i) et (ii). Rappelons aussi une conjecture de Harrison et Pliska qui a été démontrée dans [16]: si l'actif contingent B est borné et Q-simulable, alors il est aussi R-simulable pour tout $R \in \mathcal{M}^e(P)$ et de plus $E^R[B]$ ne dépend pas de R. En revanche, W. Schachermayer vient de montrer que (ii) n'implique pas (iii) en général.

Théorème 3.2. – *Soient* B *un actif contingent et* Q *une loi appartenant à* $\mathcal{M}^e(P)$. *On a l'équivalence entre*:

(i) B *est* Q-*simulable*,

(ii) $\forall R \in \mathcal{M}^e(P)\ E^R[B] \leqq E^Q[B] < +\infty$.

Avant d'aborder la démonstration de ce théorème nous allons établir la proposition suivante dont le corollaire servira à démontrer que (i) implique (ii). Nous remercions M. Emery de nous avoir suggéré de modifier une première version de la proposition 3.3 afin d'obtenir une condition nécessaire et suffisante.

PROPOSITION 3.3. — *Soient* X *une martingale locale et* H *un processus prévisible tous deux à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$. *On suppose que* $H^*.X$ *existe. Alors* $H^*.X$ *est une martingale locale si et seulement s'il existe une suite de* t.a. (T_n) *tendant vers* $+\infty$ *et une suite de* v.a. (θ_n) *intégrables à valeurs négatives telles que* $H^* \Delta X^{T_n} \geqq \theta_n$.

Démonstration de la proposition 3.3. — Montrons que la condition est suffisante. Il s'agit d'établir que pour tout n $H.X^{T_n}$ est une martingale locale. Par souci de simplification on écrira X et θ au lieu de X^{T_n} et θ_n, la démonstration étant la même pour tout n de $\mathbb{N}$. Introduisons le processus

$$U_t := \sum_{s \leqq t} 1_{\{ \| \Delta X_s \| > 1 \text{ ou } | H_s^* \Delta X_s | > 1 \}} \Delta X_s.$$

D'après la proposition 3 de Jacod page 167 nous savons que $Y = X - U$ est une semimartingale spéciale de décomposition canonique $Y = N + B$ où N est une martingale locale, B un processus prévisible à variation finie, $H^*.B$ existe au sens de Stieltjes et $H^*.N$ au sens des martingales locales. Si $V := B + U$, alors $H^*.V$ existe au sens de Stieltjes et V est une martingale locale à variation finie. Il s'agit alors de montrer que $H^*.V$ est aussi une martingale locale. Par arrêt nous pouvons supposer que N et V sont dans H^1 et que $\int_0^1 |dB_s| < +\infty$. Soit $H^\alpha = 1_{\{ \| H \| \leqq \alpha \}} H$. Observons que $(H^\alpha)^* \Delta Y \geqq \theta$ pour tout α si bien que pour tout t.a. prévisible R on a :

$$E[\theta \mid \mathscr{F}_{R-}] \leqq E[(H_R^\alpha)^* \Delta Y_R \mid \mathscr{F}_{R-}] = (H_R^\alpha)^* \Delta B_R.$$

On en déduit que

$$E[((H_R^\alpha)^* \Delta B_R)^-] \leqq E[|\theta|]$$

puis, compte tenu de l'inégalité $H^* \Delta U \geqq \theta$, pour tout t.a. S on a

$$E[((H_S^\alpha)^* \Delta U_S)^-] \leqq E[|\theta|].$$

Comme $H^*.U$ (resp. $H^*.B$) existe au sens de Stieltjes, nous pouvons choisir un processus croissant U' (resp. un processus croissant prévisible B') et un vecteur optionnel $a := (a^i)$ tels que $U^i = a^i . U'$ et $H^*.U = (H^* a).U'$ (resp. un vecteur prévisible $b := (b^i)$ tels que $B^i = b^i . B'$ et $H^*.B = (H^* b).B'$). Soient les t.a. $S_p := \inf\{ t : (|H^* a| . U')_t \geqq p \}$ et les t.a. prévisibles $R_p := \inf \{ t : (|H^* b| . B')_t \geqq p \}$.

Puisque H^α est borné, le processus $(H^\alpha)^*.V)_{S_p \wedge R_p}$ est une martingale d'espérance nulle. En outre

$$((H^\alpha)^*.V)_{S_p \wedge R_p} = ((H^\alpha)^*.V)_{S_p \wedge R_p -} + (H_{S_p \wedge R_p}^\alpha)^* \Delta V_{S_p \wedge R_p}$$

et

$$((H^\alpha)^*.V)^-_{S_p\wedge R_p} \leqq ((H^\alpha)^*.U)^-_{S_p\wedge R_p-} + ((H^\alpha)^*.B)^-_{S_p\wedge R_p-}$$
$$+ ((H^\alpha_{S_p\wedge R_p})^*\Delta U)^-_{S_p\wedge R_p} + ((H^\alpha_{S_p\wedge R_p})^*\Delta B)^-_{S_p\wedge R_p}$$
$$((H^\alpha)^*.V)^-_{S_p\wedge R_p} \leqq 2p + ((H^\alpha_{S_p})^*\Delta U)^-_{S_p} + 2p + ((H^\alpha_{R_p})^*\Delta B)^-_{R_p} + 2p$$

si bien que les majorations précédentes avec $S := S_p$ et $R := R_p$ entraînent

$$E[((H^\alpha)^*.V)^-_{S_p\wedge R_p}] \leqq 6p + 2E[|\theta|]$$

et

$$E[|(H^\alpha)^*.V|_{S_p\wedge R_p}] \leqq 12p + 4E[|\theta|].$$

Grâce au lemme de Fatou on en déduit que

$$E[|H^*.V|_{S_p\wedge R_p}] \leqq 12p + 4E[|\theta|].$$

Ainsi le processus $|H^*.V^{S_p\wedge R_p}|$ est majoré par la v.a. intégrable $2p + |H^*.V|_{S_p\wedge R_p}$. Notons que

$$|(H^\alpha)^*.V^{S_p\wedge R_p}| \leqq 2p + |(H^\alpha_{S_p\wedge R_p})^*\Delta V_{S_p\wedge R_p}|$$
$$\leqq 2p + |H^*_{S_p\wedge R_p}\Delta V_{S_p\wedge R_p}|$$
$$\leqq 2p + |H^*.V|_{S_p\wedge R_p} + |H^*.V|_{S_p\wedge R_p-}$$
$$\leqq 4p + |H^*.V|_{S_p\wedge R_p}.$$

Mais $(H^\alpha)^*.V^{S_p\wedge R_p}$ est une martingale locale (V est une martingale locale et H^α est borné) dominée par la v.a. intégrable $4p + |H^*.V|_{S_p\wedge R_p}$. Une application immédiate du théorème de convergence dominée entraîne que $H^*.V^{S_p\wedge R_p}$ est une martingale et donc $H^*.V$ est une martingale locale.

Vérifions que la condition est nécessaire. Comme $H^*.X$ est une martingale locale, elle est localement dans H^1. Il existe donc une suite de t.a. (T_n) tendant vers $+\infty$ avec $H^*.X^{T_n} \in H^1$. Or

$$\sup_{0\leqq t\leqq 1} (H^*\Delta X^{T_n})^-_t \leqq 2 \sup_{0\leqq t\leqq 1} |H^*.X^{T_n}_t|$$

qui est intégrable et $H^*\Delta X^{T_n} \geqq \theta_n := -\sup_{0\leqq t\leqq 1} (H^*\Delta X^{T_n})^-_t$.

Remarques 3.4. — (i) M. Emery [8] a construit une martingale réelle X et un processus prévisible réel H tels que H.X existe mais ne soit pas une martingale locale. En outre il a établi la proposition ci-dessus lorsque $\theta = 0$ et $d = 1$.

(ii) Il est bien connu que le processus prévisible H est intégrable par rapport à la semi-martingale X si et seulement si la suite $(1_{\{\|H\|\leqq n\}}H^*).X$ converge au sens de la topologie des semi-martingales. Rappelons le résultat suivant établi dans [17]. Soient D un processus croissant localement intégrable fixé et $\mathscr{S}''_D$ l'ensemble des semi-martingales spéciales X dont la décomposition canonique $X=M+A$ vérifie la condition $|\Delta M|\leqq D$. Alors $\mathscr{S}''_D$ est fermé et si $X^n=M^n+A^n$ converge dans $\mathscr{S}''_D$ vers $X=M+A$, alors M^n converge vers M. La proposition 3.3 nous dit que lorsque $M^n=H^n.M$, on peut ôter la valeur absolue dans la condition ci-dessus. En revanche il est facile de construire une suite de martingales (M^n) bornées inférieurement par -1, qui converge au sens de la topologie des semi-martingales vers un processus M qui n'est pas une martingale locale. Soit $\Omega:=[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue P. Considérons la filtration définie par $\mathscr{F}_t:=\mathscr{F}_0$ (tribu dégénérée) pour $t<1$ et $\mathscr{F}_1:=\mathscr{F}$. On pose $M^n_t=0$ pour $t<1$ et $M^n_1=-1_{[0,(1/2)]}+n\,1_{[(1/2\,n),\,1]}$. Alors (M^n) est une suite de martingales convergeant au sens de la topologie des semi-martingales vers le processus à variation finie $M_t=-1_{[0,(1/2)]}1_{\{t=1\}}$ qui n'est pas une martingale locale. On peut d'ailleurs observer qu'il existe une suite de martingales locales M^n convergeant vers 0 mais n'appartenant à aucun ensemble $\mathscr{S}''_D$, D processus croissant localement intégrable. A cet effet, il suffit de reprendre l'espace probabilisé filtré précédent et de choisir une suite de v.a. M^n_1 telles que $E[M^n_1]=0$, $E[|M^n_1|]\to+\infty$ et $M^n_1\to 0$ en probabilité.

Corollaire 3.5. — *Soient* X *une martingale locale et* H *un processus prévisible tous deux à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$. *On suppose que* $H^*.X$ *existe et que* $V:=x+H^*.X$ *est un processus positif. Alors* V *est aussi une martingale locale.*

Démonstration. — Considérons la suite de t.a. $T_n=\inf\{t:V_t\geqq n\}$. Alors $(V^{T_n})_{t^-}\leqq n$ et $V^{T_n}\geqq 0$ si bien que $\Delta(H^*.X^{T_n})\geqq -n$. Une application immédiate de la proposition 3.4 montre que V est une martingale locale.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 3.2. Vérifions d'abord que (i) $\Rightarrow$ (ii). Puisque B est simulable, il existe un portefeuille (x,ξ) dont la valeur V_1 est égale à B, et une loi Q appartenant à $\mathscr{M}^e(P)$ telle que $V_t:=x+(\xi^*.X)_t$ soit une Q-martingale. Soit R une loi appartenant à $\mathscr{M}^e(P)$. D'après le corollaire 3.5, le processus V est une R-martingale locale positive, donc une R-surmartingale et $E^R[V_1]\leqq x=E^Q[V_1]=E^Q[B]$, si bien que (i) $\Rightarrow$ (ii). Pour la réciproque nous avions développé une preuve assez technique reposant sur la décomposition de Kunita-Watanabe (voir [3] pour une étude détaillée de cette décomposition). En revanche la dualité H^1-BMO considérée d'abord par Jacod et Yor [9] dans les problèmes de représentation prévisible puis récemment par S. D. Jacka [11] fournit une démonstration bien plus élégante. C'est celle que nous allons reproduire ici. Rappelons notre hypothèse (ii): $\forall R\in\mathscr{M}^e(P)$ $E^R[B]\leqq E^Q[B]<+\infty$.

Lemme 3.6. — *Si* $Z\in D^e(Q)$, *alors pour tout temps d'arrêt* T *la v.a.* $Z_T:=E^Q[Z\,|\,\mathscr{F}_T]$ *appartient à* $D^e(Q)$.

Démonstration. — Posons $Z_T := E^Q[Z \mid \mathscr{F}_t]$. Par hypothèse Z et X sont des martingales locales orthogonales sous Q. Il en sera alors de même pour Z^T et X, c'est-à-dire $Z_T \in D^e(Q)$.

LEMME 3.7. — *Soit* $B_t := E^Q[B \mid \mathscr{F}_t]$. *Alors pour tout* t.a. T *et toute loi* $R \in \mathscr{M}^e(P)$ *on a* $E^R[B_T] \leqq E^Q[B_T] = E^Q[B]$.

Démonstration. — Soit Z_1 la densité $\dfrac{dR}{dQ}$. On a :

$$E^Q[B_T Z_1] = E^Q[B_T Z_T] = E^Q[B_1 Z_T]$$

D'après le lemme 3.6 $E^Q[B_1 Z_T] \leqq E^Q[B_1] = E^Q[B_T]$.

Ce lemme plutôt anodin est en réalité fondamental pour la suite de la démonstration. En effet il nous permet de remplacer B qui est seulement Q intégrable, par B^T qui est dans $H^1(Q)$ à condition de choisir convenablement le t.a. T. Sachant que (B_t) est dans $H^1_{loc}(Q)$, on procède alors par recollement pour montrer que B est simulable. Dorénavant nous supposerons que B est dans $H^1(Q)$. La dualité $H^1(Q) - BMO(Q)$ est donnée par $c(M) = E^Q[Y, M]_1$ pour tout $M \in H^1(Q)$, Y étant la martingale de BMO(Q), associée à la forme linéaire continue c. Soit c une forme linéaire continue sur $H^1(Q)$ qui s'annule sur $\mathscr{L}^1(X, 1, Q)$. En particulier $c(1) = 0$, c'est-à-dire $Y_0 = 0$. Il s'agit de montrer que $c(B) = 0$. Or il est bien connu que $BMO(Q) \subset H^\infty_{loc}(Q)$. Soit (T_n) une suite croissante de t.a. tendant stationnairement vers 1 telle que $Y^{T_n} \in H^\infty(Q)$. Si c^n est la forme linéaire associée à Y^{T_n}, on remarque que $c^n(M) = 0$ pour $M \in \mathscr{L}^1(X, 1, Q)$ car les deux martingales Y^{T_n} et M sont orthogonales ($\mathscr{L}^1(X, 1, Q)$ est un sous-espace stable et $E^Q[Y, N]_1 = 0$ pour tout $N \in \mathscr{L}^1(X, 1, Q)$). Vérifions alors que $c^n(B) = 0$, ce qui entraînera par passage à la limite que $c(B) = 0$ et $B \in \mathscr{L}^1(X, 1, Q)$, c'est-à-dire B est simulable. Posons $a_n = \| Y^{T_n} \|_{H^\infty}$ et considérons la loi R de densité $\dfrac{dR}{dQ} = 1 + \dfrac{Y_{T_n}}{2a_n}$. La nullité de c^n sur $\mathscr{L}^1(X, 1, Q)$ entraîne que Y^{T_n} et X sont orthogonales, c'est-à-dire que $R \in \mathscr{M}^e(P)$. Or $E^R[B] = E^Q[B] + \dfrac{1}{2a_n} E^Q[Y_{T_n} B]$. Comme $E^R[B] \leqq E^Q[B]$ on voit immédiatement que $E^Q[Y_{T_n} B] \leqq 0$. En procédant de même avec la loi R' de densité $\dfrac{dR'}{dQ} = 1 - \dfrac{Y_{T_n}}{2a_n}$, on obtient finalement $E^Q[Y_{T_n} B] = 0$. Mais l'appartenance de Y^{T_n} à $H^\infty(Q)$ implique que $c^n(B) = E^Q[Y_{T_n} B]$ et le théorème 3.2 est démontré.

Remarques 3.8. — (i) Une lecture attentive de la démonstration ci-dessus montre que, si $\forall R \in \mathscr{M}^b(P)\, E^R[B] \leqq E^Q[B] < +\infty$, alors B est simulable.

(ii) On peut noter que la condition (i) du théorème 3.2 entraîne que $\forall R \in \mathcal{M}(P)\ E^R[B] \leqq E^Q[B] < +\infty$. Plus généralement on démontre facilement que pour tout actif contingent B on a l'égalité:

$$x := \sup_{R \in \mathcal{M}(R)} E^R[B] = \sup_{R \in \mathcal{M}^e(P)} E^R[B] := y.$$

En effet on a manifestement l'inégalité $x \geqq y$.

Réciproquement soit R_n une suite de $\mathcal{M}(P)$ telle que $E^{R_n}[B]$ tende en croissant vers x. Posons $\lambda_n := 1 - \frac{1}{n}$ et $Q_n := \lambda_n R_n + (1-\lambda_n) P$. Alors $Q_n \in \mathcal{M}^e(P)$ et $\sup_n E^{Q_n}[B] = x$, ce qui démontre l'égalité $x = y$. Toutefois x peut être atteint pour une loi $R \in \mathcal{M}(P)$ mais pour aucune loi $Q \in \mathcal{M}^e(P)$ (voir par exemple l'article de N. El Karoui et M. C. Quenez [13]).

(iii) Comme $\mathcal{M}^e(P)$ (resp. $\mathcal{M}(P)$) est convexe, l'ensemble des prix possibles pour l'actif contingent B, c'est-à-dire $\{E^R[B] : R \in \mathcal{M}^e(P)\}$ (resp. $\{E^R[B] : R \in \mathcal{M}(P)\}$) est un intervalle.

Nous allons maintenant construire un processus càdlàg adapté borné X, deux lois équivalentes P et Q, tels que X soit une P et Q martingale, et un processus prévisible H intégrable par rapport à X, de sorte que H.X soit une Q martingale mais pas une P martingale locale. Cet exemple souligne l'importance du corollaire 3.5. Il montre aussi qu'on ne peut pas espérer obtenir l'égalité

$$\mathcal{L}^1(X, 1, P) = \{ M \in H^1(P) : M \in M_{loc}(R)$$

pour tout $R \in \mathcal{M}^e(P) \}$ même si X est borné mais qu'en revanche

$$\mathcal{L}^1(X, 1, P) = \{ M \in H^1(P) : M \in M_{loc}(R) \text{ pour tout } R \in \mathcal{M}^b(P) \}$$

et

$$\mathcal{L}^1_+(X, 1, P) = \{ M \in H^1_+(P) : M \in M_{loc}(R) \text{ pour tout } R \in \mathcal{M}^e(P) \}$$

(voir par exemple Jacka [11]). Par commodité, les filtrations et processus considérés seront indexés par $\mathbb{R}^+$; bien entendu on peut se restreindre à l'intervalle [0, 1] en arrêtant tout à l'instant 1. Notre exemple s'inspire d'un modèle étudié par C. Dellacherie [5] et repris par M. Emery [8]. On munit $\Omega := \mathbb{R}^+$ de sa tribu borélienne $\mathcal{F}^0$ et on désigne par S l'application identité de Ω sur $\mathbb{R}^+$. La loi P sur $(\Omega, \mathcal{F}^0)$ vérifie les conditions: $P(S=0)=0$ et $P(S>t)>0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Enfin pour chaque t on désigne par $\mathcal{F}^0_t$ la tribu engendrée par $S_\wedge t$ et par $\mathcal{F}_t$ la tribu engendrée par $\mathcal{F}^0_t$ et les ensembles P négligeables. Alors (*voir* C. Dellacherie [5]):

PROPOSITION 3.9. — *La projection duale prévisible du processus croissant* $A := 1_{[S, +\infty[}$ *est égale à* $\tilde{A}_t = \int_0^{t \wedge S} \frac{dF(u)}{1-F(u-)}$ *où* F *est la fonction de répartition de la loi* P.

Soient $\Omega := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ muni de sa tribu borélienne $\mathscr{F}_0$, S et T les applications coordonnées, P la probabilité qui fait de S et T des v.a. indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1, $(\mathscr{F}_t)$ la plus petite filtration complétée faisant de S et T des temps d'arrêt. On pose $A := 1_{[T, +\infty[}$, $B := 1_{[S, +\infty[}$. Les projections duales prévisibles sont $\tilde{A}_t = t_\wedge T$ et $\tilde{B}_t = t \wedge S$. Soient N la martingale $N := A - \tilde{A} - (B - \tilde{B})$ et X la martingale $X := N^{S_\wedge T} = (A-B)^{S_\wedge T}$. Le processus $H_t = \frac{1}{t}$ est intégrale au sens de Stieltjes par rapport à X car X est nulle avant le temps p.s. strictement positif $S_\wedge T$ et

$$H.X = \left(\frac{1}{T} 1_{\{T \leqq S\}} - \frac{1}{S} 1_{\{T \geqq S\}}\right) 1_{[S_\wedge T, +\infty[}$$

Mais le processus à variation finie H.X n'est pas une semi-martingale spéciale car sa variation n'est pas localement intégrable. En effet, soit R un temps d'arrêt non identiquement nul; puisqu'il ne se passe rien avant $S_\wedge T$, R est constant sur $\{R < S_\wedge T\}$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $R \geqq S_\wedge T$ sur $\{S_\wedge T < \varepsilon\}$. Ainsi $R \geqq S_\wedge T_\wedge \varepsilon$ mais comme $S_\wedge T$ suit une loi exponentielle, la v.a. $\int_0^{S_\wedge T_\wedge \varepsilon} |H_s|\,|dX_s| = \frac{1}{S_\wedge T} 1_{\{S_\wedge T < \varepsilon\}}$ n'est pas dans L^1. Effectuons maintenant un changement de loi équivalente Q, tel que S et T restent des variables indépendantes de fonction de répartition $F(u) = u^2 1_{[0, 1/2]} + \frac{4u-1}{4u+2} 1_{]1/2, +\infty[}$. On voit aisément que H est intégrable par rapport à $\tilde{A}^Q$, projection duale prévisible de A sous Q:

$$H.\tilde{A}^Q_t = \int_0^{T \wedge t} \frac{1}{u} \frac{dF(u)}{1 - F(u)}$$

$$= 2 \int_0^{T_\wedge t} \left(\frac{1}{1-u^2} 1_{[0, 1/2]}(u) + \frac{1}{u(2u+1)} 1_{]1/2, +\infty[}(u)\right) du.$$

Ainsi $H.(A - \tilde{A}^Q)$ est une martingale sous cette loi. De même pour $H.(B - \tilde{B}^Q)$. Or $\tilde{A}^Q = \tilde{B}^Q$ sur $[0, S_\wedge T]$ si bien que $H.X = H.(A - \tilde{A}^Q)^{S_\wedge T} - H.(B - \tilde{B}^Q)^{S_\wedge T}$ est une Q martingale.

4. PRIX D'UN ACTIF INDÉPENDANT DES PRIX

Si Y est une v.a., $\sigma(Y)$ désigne la tribu engendrée par cette v.a. Dans ce paragraphe nous supposerons que X est une P-martingale.

PROPOSITION 4.1. — *Soit* B *un actif contingent. Si* $\sigma(B)$ *et* $\sigma(X_1)$ *sont conditionnellement indépendantes par rapport à* $\mathscr{F}_t$ *pour tout* $t \in [0, 1]$, *alors*

$$x := \sup_{R \in \mathscr{M}^e(P)} E^R[B] = \operatorname{ess\,sup}(B)$$

$$y := \inf_{R \in \mathscr{M}^e(P)} E^R[B] = \operatorname{ess\,inf}(B)$$

Démonstration. — Considérons un réel α vérifiant $0 < \alpha < \operatorname{ess\,sup}(B)$. Pour $\varepsilon > 0$ on définit la v.a. strictement positive d'espérance $1 : Z := \frac{1_{\{B > \alpha\}} + \varepsilon\, 1_{\{B < \alpha\}}}{P(B \geqq \alpha) + \varepsilon P(B < \alpha)}$. Cette variable vérifie en vertu de l'indépendance conditionnelle :

$$E[ZX_1 \mid \mathscr{F}_1] = E[Z \mid \mathscr{F}_t] E[X_1 \mid \mathscr{F}_t] = E[Z \mid \mathscr{F}_t] X_t$$

Si Q est la loi de densité $\frac{dQ}{dP} := Z$, alors $Q \in \mathscr{M}^e(P)$ et $x \geqq E^Q[B] = E^P[BZ] \geqq \frac{\alpha P(B \geqq \alpha) + \varepsilon E[B\, 1_{\{B < \alpha\}}]}{P(B \geqq \alpha) + \varepsilon P(B < \alpha)}$. En faisant tendre ε vers 0, puis α vers $\operatorname{ess\,sup}(B)$ on a $x \geqq \operatorname{ess\,sup}(B)$. L'inégalité inverse étant évidente, on obtient en réalité une égalité. Le résultat pour l'ess inf se démontre de manière analogue.

Remarques 4.2. — (i) L'hypothèse de la proposition 4.1 est notamment vérifiée lorsque :

— $\sigma(B)$ est indépendante de $\mathscr{F}_1^X$ et que la filtration vérifie $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_t^X$ pour $t < 1$. ($\mathscr{F}_t^X$ désigne la filtration naturelle de X).

— La filtration est de la forme $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_t^X \vee \mathscr{F}_t^Y$ pour $t \leqq 1$, X est indépendant de Y et B appartient à $\mathscr{F}_1^Y$. C'est le cas dans N. El Karoui, M. C. Quenez [13] où les auteurs déterminent le prix maximum d'un actif dans le cadre brownien.

(ii) Si l'on réduit l'hypothèse à : $\sigma(B)$ indépendante de $\mathscr{F}_1^X$ alors le prix maximum de B peut être strictement inférieur à l'essentiel sup comme le montre l'exemple suivant qui a été simplifié par un referee.

Soit $\Omega = \{-1, +1\}^3$, muni de $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme P. Les coordonnées ε_1, ε_2 et ε_3 sont i.i.d. et centrées. Posons $\mathscr{F}_t = \{\varnothing, \Omega\}$, si $t \in [0, 1/2[$, $\sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, si $t \in [1/2, 1[$ et $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}$. On définit X en posant $X_t = 0$ si $t \in [0, 1/2[$, $X_t = \frac{\varepsilon_2}{2}$ si $t \in [1/2, 1[$ et $X_1 = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2}$. X est une P-martingale et $\mathscr{F}_1^X = \sigma(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$. La variable aléatoire $B = 1_{\{\varepsilon_1 = \varepsilon_3\}}$ est indépendante de $\mathscr{F}_1^X$ et si $Z \in D(P)$, on a

$$E(ZX_1 \mid \mathscr{F}_{1/2}) = E(Z \mid \mathscr{F}_{1/2}) \frac{\varepsilon_2}{2},$$

ce qui entraîne $E(Z\,\varepsilon_3 \,|\, \mathscr{F}_{1/2})=0$. D'où :

$$E(ZB)=E\left(Z\left(\frac{1+\varepsilon_1\varepsilon_3}{2}\right)\right)=\frac{E(Z)}{2}=\frac{1}{2}.$$

Ainsi on a montré que $\sup_{Q\in\mathscr{M}(P)} E^Q[B]=\frac{1}{2}$ tandis que ess sup$(B)=1$. Pour établir que le prix maximum de B est $\frac{1}{2}$ on aurait aussi pu remarquer que $B=\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon_1}{2}(X_1-X_{1/2})$ et invoquer le théorème 3.2.

RÉFÉRENCES

[1] J. P. ANSEL et C. STRICKER, Lois de martingale, densités et décomposition de Föllmer-Schweizer, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. **28**, n° 3, 1992, p. 375-392.

[2] J. P. ANSEL et C. STRICKER, Unicité et existence de la loi minimale, *Séminaire de Probabilités XXVII, Lect. Notes Math.*, n° **1557**, Springer-Verlag. 1993, p. 22-29.

[3] J. P. ANSEL et C. STRICKER, Décomposition de Kunita-Watanabe, *Séminaire de Probabilités XXVII, Lect. Notes Math.*, n° **1557**, Springer-Verlag. 1993, p. 30-32.

[4] F. DELBAEN, Representing Martingale Measures when Asset Prices are continuous and bounded, *Mathematical Finance* 2, 1992, p. 107-130.

[5] C. DELLACHERIE, Capacités et processus stochastiques, *Ergebnisse der Math.*, vol. **67**, Springer-Verlag, 1972.

[6] C. DELLACHERIE et P. A. MEYER, *Probabilités et potentiel*, Chapitres V à VIII, *Théorie des Martingales*, Hermann, 1980.

[7] J. DIESTEL, Geometry of Banach Spaces. Selected Topics, *Lect. Notes Math.*, n° **485**, Springer-Verlag, 1975.

[8] M. EMERY, Compensation de processus à variation finie non localement intégrables, *Séminaire de Probabilités XIV, Lect. Notes Math.*, n° **784**, Springer-Verlag, 1980, p. 152-160.

[9] J. JACOD, Calcul stochastique et problème de martingales, *Lect. Notes Math.*, n° **714**, Springer-Verlag, 1979.

[10] J. JACOD, Intégrales stochastiques par rapport à une semi-martingale vectorielle et changements de filtration, *Séminaire de Probabilités XIV, Lect. Notes Math.*, n° **784**, Springer-Verlag, 1980, p. 161-172.

[11] S. D. JACKA, A Martingale Representation Result and an Application to Incomplete Financial Markets, *Mathematical Finance* 2, 1992, p. 239-250.

[12] I. KARATZAS, J. P. LEHOCZKY, S. E. SHREVE et G. L. XU, Martingale and Duality Methods for Utility Maximisation in an Incomplete Market, SIAM, *J. Control Optimization*, vol. **29**, 1991, p. 702-730.

[13] N. EL KAROUI et M. C. QUENEZ, *Dynamic Programming and Pricing of Contingent Claims in an Incomplete Market* (à paraître).

[14] H. PAGÈS, *Optimal Consumption and Portfolio policies when markets are incomplete*, MIT mimeo, 1987.

[15] W. SCHACHERMAYER, *A Counter-Example to Several Problems in Mathematical Finance* (à paraître).

[16] C. STRICKER, Integral Representation in the Theory of Continuous Trading, *Stochastics*, vol. **13**, n° 4, 1984, p. 249-257.

[17] C. STRICKER, Quelques remarques sur la topologie des semi-martingales, Applications aux intégrales stochastiques, *Séminaire de Probabilités XV*, *Lect. Notes Math.*, n° **850**, Springer-Verlag, 1981, p. 499-522.

(*Manuscrit reçu le* 23 *septembre* 1992;
révisé le 22 *février* 1993.)