ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

D. CONCORDET

Estimation de la densité du recuit simulé

Annales de l'I. H. P., section B, tome 30, nº 2 (1994), p. 265-302

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1994__30_2_265_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 30, n° 2, 1994, p. 265-302. *Probabilités et Statistiques*

Estimation de la densité du recuit simulé

par

D. CONCORDET

École Nationale Vétérinaire de Toulouse
23, chemin des capelles, 31076 Toulouse Cedex

RÉSUMÉ. — Nous utilisons la méthode des inégalités de Sobolev faibles de Bakry-Michel pour obtenir quand t tend vers l'infini, une borne inférieure et une borne supérieure de la densité du processus du recuit simulé.

Mots clés : Recuit simulé, inégalités de Sobolev faibles.

ABSTRACT. — We use the weak Sobolev inequalities Bakry-Michel's method to get lower bound as well as upper bound on the density of the simulated annealing process when t goes to infinity.

0. INTRODUCTION

L'algorithme du recuit simulé est une méthode d'optimisation probabiliste pour chercher les minima globaux d'une fonction U sur un espace **E**. Ici, comme dans [HS], [Mi], [HKS], nous nous sommes intéressés à des processus en temps continus, définis sur une variété riemannienne compacte et connexe ou sur un espace fini.

La méthode que nous proposons, introduite par [HS], repose sur l'utilisation d'inégalités de Sobolev logarithmiques. Plus précisément, nous utilisons les inégalités de Sobolev faibles tendues de [BM] qui permettent d'obtenir une minoration de la dérivée de Radon-Nykodym de la loi du processus du recuit par rapport à sa mesure invariante instantanée.

Lorsque l'espace **E** est fini, il est muni d'une probabilité μ_0 chargeant tous les points et d'une probabilité de transition $q_0(.,.)$ réversible par rapport à μ_0. On supposera de plus que q_0 est irréductible sur **E**.

Pour tout x, y éléments de **E**, on pose

$$q_\beta(x, y) = \begin{cases} \exp(-\beta(\mathrm{U}(y) - \mathrm{U}(x))_+)\, q_0(x, y), & \text{si } x \neq y \\ 1 - \sum\limits_{z \neq x} q_\beta(x, z), & \text{si } y = x \end{cases}$$

où x_+ désigne la fonction max $\{x, 0\}$.

Les quantités $q_\beta(x, y)$ représentent les probabilités de transitions instantanées d'un état x vers un état y.

Ces probabilités dépendent de la température $1/\beta$ qui prend la valeur $1/\beta(t)$ à l'instant t. On peut remarquer qu'il est possible que le processus « saute » d'un état x vers un état y même si $\mathrm{U}(x) < \mathrm{U}(y)$. Ce sont ces perturbations aléatoires qui permettent au processus de ne pas rester gelé dans des minima locaux. Le processus ainsi défini n'est donc pas homogène dans le temps.

De même, quand l'espace **E** est une variété riemannienne compacte connexe, nous appelons μ_0 la mesure riemannienne normalisée pour en faire une probabilité. Pour $\beta \geqq 0$, on définit l'opérateur L_β par

$$\forall f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{E}),$$
$$\mathrm{L}_\beta f = \Delta f - \beta \nabla \mathrm{U} . \nabla f$$

où Δ désigne l'opérateur de Laplace Beltrami et ∇ l'opérateur gradient.

Ces opérateurs seront les générateurs infinitésimaux des diffusions considérées. Dans tous les cas $\mu_{\beta(t)}(dx) = \mathrm{Z}_{\beta(t)}^{-1} \exp(-\beta(t)\, \mathrm{U}(x))\, \mu_0(dx)$ est la probabilité invariante instantanée, c'est-à-dire, la probabilité qui serait invariante si le processus était homogène dans le temps avec une température constante égale à $\beta^{-1}(t)$. L'intérêt de cette probabilité réside dans le fait qu'elle se concentre sur les points où U atteint son minimum quand β tend vers l'infini. Toute notre analyse est basée sur l'étude des variations de la dérivée de Radon-Nikodym h_t de la loi du processus à l'instant t par rapport à sa mesure invariante instantanée μ_β; β varie au cours du temps, et prend la valeur β_t au temps t.

L'objectif est d'exhiber des conditions pour que la quantité h_t tende vers 1 et d'évaluer la vitesse de convergence.

Dans l'étude, deux nouvelles quantités apparaissent : l'énergie et l'entropie du système. Ces deux quantités peuvent être comparées à l'aide d'inégalités construites à partir d'inégalités de Sobolev faibles tendues que nous obtenons en utilisant le fait que l'opérateur L_β possède deux propriétés essentielles :

– il vérifie une inégalité de Sobolev faible sous la mesure μ_β ;

– il possède un trou spectral dont nous connaissons des estimées lorsque β tend vers l'infini.

Dans une première partie, nous définissons le processus du recuit dans les cas où **E** est un espace fini ou une variété compacte, et, nous donnons certaines propriétés de l'opérateur L_β et de la mesure μ_β.

L'objet de la second partie est de constuire les inégalités énergie-entropie dont nous avons besoin pour étudier le signe de $f(t)=\| h_t \|_{L^{p(t)}_{\mu_{\beta_t}}}$.

Enfin, dans la troisième partie nous développons la méthode de [BM] qui consiste à comparer la dérivée de $\| h_t \|_{L^{p(t)}_{\mu_{\beta_t}}}$ aux inégalités précédentes quand $p(t)$ est une fonction réelle dérivable de t qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ en temps fini.

Cette méthode conduit à un système différentiel qui fournit un encadrement uniforme de h_t de la forme suivante :

Il existe une constante γ (la hauteur du plus haut col de U) telle que, si $\Gamma>\gamma$ et si $\beta(t)$ est de la forme $\frac{1}{\Gamma}\log(1+t)$ alors :

– quand **E** est une variété riemannienne compacte, pour tout $x, y\in \mathbf{E}$, quand $t\to\infty$ on a :

$$\exp\left\{-\frac{K[\log(t)]^{5n}}{t^{1-(\gamma/\Gamma)}}\right\}\leqq h_t(x, y)\leqq \exp\left\{\frac{K'\log^{5n+1}(t)}{t^{1-(\gamma/\Gamma)}}\right\},$$

où n représente la dimension de **E**,

– et quand **E** est un espace fini, pour tout $x, y\in\mathbf{E}$, quand $t\to\infty$ on a :

$$\exp\left\{-\frac{K\log(t)^2}{t^{1-(\gamma/\Gamma)}}\right\}\leqq h_t(x, y)\leqq \exp\left\{\frac{K'\log^3(t)}{t^{1-(\gamma/\Gamma)}}\right\}.$$

K et K' sont des constantes ne dépendant que de **E**, U et de Γ.

1. PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DU PROCESSUS DU RECUIT

A. Cas d'un ensemble fini

Soit **E** un ensemble fini, muni d'une probabilité μ_0 chargeant tous les points et d'une probabilité de transition $q_0(.,.)$ avec

$$\sum_{y\in\mathbf{E}} q_0(x, y)=1.$$

Nous supposerons d'une part que q_0 est réversible par rapport à μ_0, en d'autres termes :

$$\forall x,\ y \in \mathbf{E},\ \alpha(x, y) = \mu_0(x)\, q_0(x, y) = \alpha(y, x),$$

et d'autre part irréductible sur $\mathbf{E}$, c'est-à-dire, $\forall x,\ y \in \mathbf{E}$, il existe une famille $(x_i)_{0 \leqq i \leqq n}$ d'éléments de $\mathbf{E}$, telle que

$$x_0 = x, \qquad x_n = y$$

et,

$$\forall\, 0 \leqq i \leqq n-1, \qquad q_0(x_i, x_{i+1}) > 0.$$

Une telle famille d'éléments de $\mathbf{E}$ sera par la suite appelée chemin reliant x à y. Soit U la fonction dont on veut trouver les minima globaux.

L'algorithme du recuit reste inchangé si on ajoute une constante à la fonction à optimiser U. On supposera donc par la suite que $\min_{x \in \mathbf{E}} \mathrm{U}(x) = 0$.

Définissons maintenant les générateurs infinitésimaux des processus que nous allons utiliser pour localiser les minima de U.

Pour tout x, y éléments de $\mathbf{E}$, on pose

$$q_\beta(x, y) = \begin{cases} \exp(-\beta(\mathrm{U}(y) - \mathrm{U}(x))_+)\, q_0(x, y), & \text{si} \quad x \neq y \\ 1 - \sum_{z \neq x} q_\beta(x, z), & \text{si} \quad y = x \end{cases} \tag{1.1}$$

avec $x_+ = \max\{x, 0\}$.

Les quantités $q_\beta(x, y)$ représentent les probabilités de transitions instantanées d'un état x vers un état y.

Ces probabilités dépendent de la température $1/\beta$ qui évolue au cours du temps. Le processus ainsi défini n'est donc pas homogène dans le temps.

Pour être plus précis, le processus associé X_t, est un processus de Markov sur $\mathbf{E}$ tel que pour tout x, $y \in \mathbf{E}$

$$\lim_{\substack{t \to s \\ t > s}} \frac{\mathrm{P}[\mathrm{X}_t = y / \mathrm{X}_s = x] - \delta_{x, y}}{t - s} = q_{\beta(s)}(x, y).$$

A l'instant t, le générateur infinitésimal du processus du recuit est défini sur l'ensemble des fonctions numériques de $\mathbf{E}$ par

$$\mathrm{L}_{\beta(t)} \Phi(x) = \sum_{y \in \mathbf{E}} (\Phi(y) - \Phi(x))\, q_{\beta(t)}(x, y).$$

Le processus X_t est alors uniquement défini (à la relation d'indistinguabilité près) à partir de L_β : pour tout $x \in \mathbf{E}$,

$$\lim_{\substack{t \to s \\ t > s}} \frac{\mathbb{E}[\Phi(X_t)/X_s = x] - \Phi(x)}{t-s} = (L_{\beta(s)} \Phi)(x)$$

où Φ est une fonction définie sur $\mathbf{E}$.

L'opérateur L_β est symétrique dans $L^2(\mu_\beta)$; μ_β est la mesure que nous avons appelée mesure invariante instantanée,

$$\mu_\beta = \frac{e^{-\beta U}}{Z_\beta} \mu_0, \qquad \beta \geqq 0,$$

et Z_β est le facteur de normalisation $Z_\beta = \sum_{x \in \mathbf{E}} e^{-\beta U(x)} \mu_0(x)$.

Par analogie avec les mesures de Gibbs, la quantité β^{-1} représente la température instantanée du système.

Comme la mesure μ_β est invariante, pour toute fonction Φ on a :

$$\sum_{x \in \mathbf{E}} L_\beta \Phi(x) \mu_\beta(x) = 0.$$

La mesure μ_β est de plus réversible :

$$\sum_{x \in \mathbf{E}} \Psi(x) L_\beta \Phi(x) \mu_\beta(x) = \sum_{x \in \mathbf{E}} \Phi(x) L_\beta \Psi(x) \mu_\beta(x).$$

La fonction de transition du processus du recuit définie par $P_{s,t}(x, y) = P(X_t = y/X_s = x)$ est solution de

$$\frac{\partial}{\partial t}[P_{s,t}\Phi](x) = [P_{s,t} L_{\beta(t)} \Phi](x), \qquad t \geqq s.$$

Cette dernière équation peut encore s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{s,t}(x, y) = [L^*_{\beta(t)} P_{s,t}(x, .)](y), \qquad t \geqq s,$$

$$P_{s,s}(x, y) = \delta_{x,y};$$

où L^*_β est l'opérateur agissant sur les mesures de probabilité définies sur $\mathbf{E}$.

Nous noterons dorénavant, pour tout $\Phi \in L^1(\mu_\beta)$,

$$\langle \Phi \rangle_{\mu_\beta} = \int \Phi(x) \, d\mu_\beta(x) = \sum_{x \in \mathbf{E}} \Phi(x) \mu_\beta(x)$$

et, pour tout Φ, $\Psi \in L^2(\mu_\beta)$,

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_{\mu_\beta} = \int \Phi(x) \Psi(x) \, d\mu_\beta(x) = \sum_{x \in \mathbf{E}} \Phi(x) \Psi(x) \mu_\beta(x).$$

Toute notre analyse est basée sur l'analyse de l'opérateur carré du champ, construit à partir de L_β, et défini par

$$\begin{aligned} 2\Gamma(\Phi, \Psi)(x) &= L_\beta(\Phi\Psi)(x) - \Phi L_\beta(\Psi)(x) - \Psi L_\beta(\Phi)(x) \\ &= \sum_{y \in \mathbf{E}} \{\Phi(x) - \Phi(y)\}\{\Psi(x) - \Psi(y)\} q_\beta(x, y) \end{aligned} \tag{1.2}$$

En utilisant l'égalité précédente, on peut constater que l'opérateur Γ est positif: pour tout $x \in \mathbf{E}$ et toute fonction Φ, $\Gamma(\Phi, \Phi)(x) \geqq 0$.

La forme de Dirichlet associée à L_β est:

$$\mathscr{E}_\beta(\Psi, \Phi) = \int \Gamma(\Phi, \Psi)(x)\, d\mu_\beta(x)$$

où Φ et Ψ sont des fonctions numériques définies sur $\mathbf{E}$.

Comme la mesure μ_β est réversible, on a, pour toute fonction Φ, $\langle L_\beta \Phi \rangle_{\mu_\beta} = 0$. Cette dernière égalité implique:

$$-\langle \Phi L_\beta \Psi \rangle_{\mu_\beta} = \langle \Gamma(\Phi, \Psi) \rangle_{\mu_\beta} = \mathscr{E}_\beta(\Phi, \Psi).$$

Nous en déduisons que l'opérateur L_β est négatif: pour toute fonction Φ, $\langle \Phi, L_\beta \Phi \rangle_{\mu_\beta} \leqq 0$. Un des principaux outils sur lequel est basée toute la méthode, est la connaissance d'estimation asymptotique du trou spectral défini par

$$\text{(TS)} \qquad \lambda(\beta) = \inf_f \frac{-\langle f L_\beta f \rangle_{\mu_\beta}}{\langle f^2 \rangle_{\mu_\beta} - \langle f \rangle_{\mu_\beta}^2}.$$

Rappelons les estimations obtenues par [HS].

Pour x, y éléments de $\mathbf{E}$, on note $\mathscr{P}_{x, y}$ l'ensemble des chemins reliant x à y et pour $p \in \mathscr{P}_{x, y}$, on définit son élévation par:

$$E(p) = \max_{0 \leqq i \leqq n} U(x_i).$$

La plus petite élévation possible sur tous les chemins reliant x à y est donnée par:

$$H(x, y) = \min\{E(p); p \in \mathscr{P}_{x, y}\}.$$

Posons

$$\gamma = \max_{x, y \in \mathbf{E}} \{H(x, y) - U(x) - U(y)\}.$$

Il existe deux constantes $c > 0$ et $C > 0$ telles que pour tout $\beta \geqq 0$

$$c e^{-\gamma\beta} \leqq \lambda(\beta) \leqq C e^{-\gamma\beta}.$$

B. Cas d'une variété riemannienne compacte

Soit E une variété riemannienne compacte, connexe, de classe C^∞. Nous appelerons μ_0 la mesure riemannienne normalisée pour en faire une probabilité. On se donne sur E une fonction U de classe C^∞ dont on veut trouver les minima globaux. On supposera que $\min_{x \in \mathbf{E}} U(x)=0$, et que $\| \, |\nabla U|^2 \|_\infty = 1$. Pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+$, nous noterons: $\mu_\beta = \dfrac{e^{-\beta U}}{Z_\beta} \mu_0$ la mesure de Gibbs associée à U et à la température β^{-1}; la quantité Z_β est la constante de normalisation qui fait de μ_β une probabilité, pour tout $f \in L^1(\mu)$, $\langle f \rangle_{\mu\beta} = \int_{\mathbf{E}} f \, d\mu_\beta$ et pour tout $f, g \in L^2(\mu_\beta)$, $\langle f, g \rangle_{\mu\beta} = \int_{\mathbf{E}} fg \, d\mu_\beta$.

A l'instant t, le générateur infinitésimal L_β que l'on considère s'exprime sur C^∞ par

$$L_{\beta(t)} f = \Delta - \beta(t) \nabla U . \nabla f$$

où Δ est l'opérateur de Laplace Beltrami, ∇ est l'opérateur gradient, et β est une fonction croissante dérivable de t. Le processus X_t est donc défini à partir de la famille $(L_{\beta(t)})_{t \geqq 0}$ comme le processus de Markov inhomogène vérifiant pour toutes les fonctions $f \in C^\infty(\mathbf{E})$

$$\lim_{\substack{t \to s \\ t > s}} \frac{\mathbb{E}[f(X_t)/X_s = x] - f(x)}{t-s} = (L_{\beta(s)} f)(x).$$

Nous savons d'après [SV] que le processus ainsi défini est unique (à la relation d'indistinguabilité près). L_β est un opérateur symétrique (et même autoadjoint) sous la mesure μ_β d'où le nom de mesure invariante instantanée. Comme dans le cas fini, la fonction de transition du processus est définie pour tout B borélien de E par $P(X_t \in B/X_s = x) = P_{s,t}(x, B)$. La propriété de Markov nous montre que $P_{s,t}$ satisfait l'équation de Chapman Kolmogorov: pour tout B borélien de E on a:

$$P_{s,t}(x, B) = \int_{\mathbf{E}} P_{s,u}(x, dy) P_{u,t}(y, B), \qquad 0 \leqq s < u < t.$$

En notant

$$[P_{s,t} f](x) = \int_{\mathbf{E}} f(y) P_{s,t}(x, dy),$$

nous en déduisons que pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbf{E})$, $P_{s,t}$ est solution de l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t}[P_{s,t} f](x) = [P_{s,t} L_{\beta(t)} f](x), \qquad t \geqq s,$$

$$P_{t,t}(x, f) = f(x).$$

Comme L_β est elliptique, nous savons que $P_{0,t}(x, dy)$ admet une densité par rapport à μ_0 que nous noterons $p_t(x, y)$. L'équation précédente peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(x, y) = [L^*_{\beta(t)} p_t(x, .)](y), \qquad t \geqq s,$$

où L^*_β est l'adjoint de l'opérateur L_β sous μ_0. Il est donné par $L^*_\beta f = \Delta f + \beta \nabla U . \nabla f + \beta f \Delta U$.

Tout comme dans le cas fini, toute notre analyse est basée sur l'opérateur carré du champ Γ défini par

$$2\Gamma(f, g) = L_\beta(fg) - f L_\beta g - g L_\beta f.$$

$\Gamma(f, f)$ s'interprète comme $|\nabla f|^2$, c'est-à-dire la longueur au carré du gradient de f. La forme de Dirichlet associée à L_β est :

$$\mathscr{E}_\beta(f, g) = \langle \Gamma(f, g) \rangle_{\mu_\beta}.$$

La mesure μ_β étant réversible, on a pour toutes fonctions $f, g \in C^\infty$:

$$-\langle f L_\beta g \rangle_{\mu_\beta} = \langle \Gamma(f, g) \rangle_{\mu_\beta} = \mathscr{E}_\beta(f, g).$$

Tout comme dans le cas fini, nous pouvons constater que l'opérateur Γ est positif et que l'opérateur L_β est négatif. Avec la définition de Γ, on peut maintenant définir une distance sur $\mathbf{E}$:

$$d(x, y) = \sup_{\phi \in C^\infty(\mathbf{E}),\ \|\Gamma(\phi, \phi)\|_\infty \leqq 1} \{\phi(x) - \phi(y)\}.$$

Comme $\mathbf{E}$ est une variété C^∞ compacte et L_β un opérateur différentiel dont le terme du second ordre est le laplacien, cette distance coïncide avec la distance riemannienne. Nous utiliserons par la suite le diamètre d de $\mathbf{E}$ défini par : $d = \sup_{(x, y) \in \mathbf{E}^2} \{d(x, y)\}$.

Une hypothèse importante pour la suite de l'étude, est la connaissance d'une estimation asymptotique du trou spectral de L_β défini par

(TS) $$\lambda(\beta) = \inf_f \frac{-\langle f L_\beta f \rangle_{\mu_\beta}}{\langle f^2 \rangle_{\mu_\beta} - \langle f \rangle^2_{\mu_\beta}}.$$

Nous utiliserons par la suite le résultat suivant dû à [HKS] :

on appelle chemin un élément g de $C([0, 1]; \mathbf{E})$, et on définit son élévation par $E(g) = \max_{t \in [0, 1]} U(g(t))$. On pose, pour x, y éléments de $\mathbf{E}$,

$$H(x, y) = \inf \{ E(g);\ g \in C([0, 1]; \mathbf{E}),\ g(0) = x,\ g(1) = y \}$$

puis,

$$\gamma = \max_{x, y \in \mathbf{E}} H(x, y) - U(x) - U(y).$$

Il existe c_E et C_E deux constantes ne dépendant que de $\mathbf{E}$, vérifiant $0 < c_E \leqq C_E < \infty$ telles que

$$c_E (\beta \vee 1)^{-5n+2} e^{-\beta\gamma} \leqq \lambda(\beta) \leqq C_E (\beta \vee 1)^{4n+2} e^{-\beta\gamma}.$$

Une différence importante entre le cas où $\mathbf{E}$ est fini et le cas où $\mathbf{E}$ est une variété riemannienne compacte est, en dehors des estimations du trou spectral, la formule du changement de variables. Comme L_β est un opérateur de diffusion, on a pour toute fonction $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ et toutes fonctions $f_1, \ldots, f_n \in C^\infty(\mathbf{E})$,

$$L_\beta \Phi(f_1, \ldots, f_n) = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}(f_1, \ldots, f_n) L_\beta(f_i) + \sum_{i, j} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j}(f_1, \ldots, f_n) \Gamma(f_i, f_j).$$

Plus simplement, la propriété de diffusion peut ici se résumer au fait que:

$$\Gamma(\Psi \circ f, g) = \Psi' \circ f \Gamma(f, g).$$

En particulier, on a pour tout $f \in C^\infty(\mathbf{E})$ et $p \neq 1$:

$$\frac{-p^2}{4(p-1)} \langle f^{p-1} L_\beta f \rangle_{\mu_\beta} = \mathscr{E}_\beta(f^{p/2} . f^{p/2}) = \langle \Gamma(f^{p/2}, f^{p/2}) \rangle_{\mu_\beta}.$$

2. INÉGALITÉS DE SOBOLEV FAIBLES

Dans ce paragraphe, $\mathscr{D}(\mathrm{E})$ désigne l'ensemble des fonctions non nulles de classe $C^\infty(\mathbf{E})$ quand $\mathbf{E}$ est une variété compacte, et l'ensemble des fonctions numériques non nulles définies sur $\mathbf{E}$ quand $\mathbf{E}$ est un ensemble fini.

DÉFINITION 2.1. — *On dira que l'opérateur* L_β *vérifie une inégalité de Sobolev faible d'exposant p de dimension n et de constantes* $c_1 > 0$ *et* $c_2 > 0$ *pour la mesure* μ_β *si, pour toute fonction* $f \in \mathscr{D}(\mathrm{E})$, *l'inégalité suivante est* *vérifiée*:

$\mathrm{SF}\left(p, \frac{n}{2}, c1, c2, \mu\right)$.

$$\langle f^p \log f^p \rangle_{\mu\beta} - \langle f^p \rangle_{\mu\beta} \log \langle f^p \rangle_{\mu\beta} \leqq \frac{n}{2} \langle f^p \rangle_{\mu\beta} \log \left(c_1 - c_2 \frac{\langle f^{p-1}, \mathrm{L}_\beta f \rangle_{\mu\beta}}{\langle f^p \rangle_{\mu\beta}} \right).$$

Quand $c_1 = 1$, on dit que L vérifie une inégalité de Sobolev tendue. Notre objectif dans ce paragraphe est donc de montrer que dans les cas où **E** est fini, et où **E** est une variété compacte et connexe, l'opérateur L_β vérifie pour tout $p \neq 1$ une inégalité $\mathrm{SF}(p, m, 1, \mathrm{C}(p, \beta), \mu_\beta)$ en d'autres termes: pour tout $f \in \mathscr{D}(\mathrm{E})$, (SF1)

$$\langle f^p \log f^p \rangle_{\mu\beta} - \langle f^p \rangle_{\mu\beta} \log \langle f^p \rangle_{\mu\beta} \leqq m \langle f^p \rangle_{\mu\beta} \log \left(1 - \mathrm{C}(p, \beta) \frac{\langle f^{p-1} \mathrm{L}_\beta f \rangle_{\mu\beta}}{\langle f^p \rangle_{\mu\beta}} \right).$$

La constante m et la fonction $\mathrm{C}(p, \beta)$ seront définies ultérieurement.

Remarque. — La constante c_1 joue un rôle important dans la minoration de la densité du semi-groupe (*cf.* [BM]). En effet, prenons l'inégalité de Sobolev tendue; si l'on fait $\mathscr{E}(f, f) = 0$, on obtient alors

$$\langle f^2 \log f^2 \rangle \leqq \langle f^2 \rangle \log \langle f^2 \rangle$$

ce qui n'est réalisé que lorsque f est une constante. Ceci implique une sorte d'ergodicité sur le processus.

Montrons tout d'abord (SF1) quand **E** est un espace fini.

A. Cas où E est un espace fini

Pour montrer (SF1), nous utilisons le résultat suivant dû à [HS].

PROPOSITION 2.2. — *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout* $\beta \geqq 0$ *fixé, l'opérateur* L_β *vérifie sur l'ensemble des fonctions* $\phi \in \mathscr{D}(\mathrm{E})$ *vérifiant* $\langle \phi \rangle_{\mu\beta} = 0$ *l'inégalité de Sobolev*:

$$\langle |\phi|^{2+\varepsilon} \rangle_{\mu\beta}^{2/(2+\varepsilon)} \leqq - \frac{\mathrm{B}}{\lambda(\beta)} e^{\beta(\mathrm{M}\varepsilon/(2+\varepsilon))} \langle \phi, \mathrm{L}_\beta \phi \rangle_{\mu\beta}$$

où $\mathrm{M} = \max_{x \in \mathbf{E}} \mathrm{U}(x)$ *et* B *est une constante strictement positive.*

Comme nous savons que $\lambda(\beta) \geqq c e^{-\beta\gamma}$, l'opérateur L_β vérifie sur l'ensemble des fonctions $\phi \in \mathscr{D}(\mathrm{E})$ telles que $\langle \phi \rangle_{\mu\beta} = 0$ l'inégalité suivante:

$$\text{(S)} \qquad \langle |\phi|^{2+\varepsilon} \rangle_{\mu\beta}^{2/(2+\varepsilon)} \leqq - \mathrm{A}' e^{\beta(\gamma + \mathrm{M}\varepsilon/(2+\varepsilon))} \langle \phi, \mathrm{L}_\beta \phi \rangle_{\mu\beta}$$

où A′ est une constante strictement positive.

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 2.3. — *Pour tout $m \geqq 1$ l'opérateur L_β vérifie l'inégalité de Sobolev faible suivante : pour tout $f \in \mathscr{D}(E)$,*

$$\langle f^2 \log f^2 \rangle_{\mu_\beta} - \langle f^2 \rangle_{\mu_\beta} \log \langle f^2 \rangle_{\mu_\beta} \leqq m \langle f^2 \rangle_{\mu_\beta} \log\left(1 + C(2, \beta) \frac{\mathscr{E}_{\mu_\beta}(f, f)}{\langle f^2 \rangle_{\mu_\beta}}\right),$$

avec $C(2, \beta) = A e^{\beta(\gamma + M/m)}$, et A est une constante strictement positive.

Preuve. — Posons $n = 2 + 4/\varepsilon$ et $c = A' e^{\beta(\gamma + M\varepsilon/(2+\varepsilon))}$. Un argument classique [SC], permet de passer de l'inégalité (S), à l'inégalité suivante : sur l'ensemble des fonctions $\hat{f}$ telles que $\langle \hat{f} \rangle_{\mu_\beta} = 0$

$$(S\phi) \quad \langle \hat{f}^2 \log \hat{f}^2 \rangle_{\mu_\beta} - \langle \hat{f}^2 \rangle_{\mu_\beta} \log \langle \hat{f}^2 \rangle_{\mu_\beta} \leqq \frac{n}{2} \langle \hat{f}^2 \rangle_{\mu_\beta} \log c \frac{\mathscr{E}_{\mu_\beta}(\hat{f}, \hat{f})}{\langle \hat{f}^2 \rangle_{\mu_\beta}}.$$

Soit $f \in \mathscr{D}(E)(E)$, posons $\hat{f} = f - \langle f \rangle_{\mu_\beta}$ et rappelons l'inégalité de Deuschel-Stroock

$$(DS) \quad \langle f^2 \log f^2 \rangle_{\mu_\beta} - \langle f^2 \rangle_{\mu_\beta} \log \langle f^2 \rangle_{\mu_\beta} \leqq \langle \hat{f}^2 \log \hat{f}^2 \rangle_{\mu_\beta} - \langle \hat{f}^2 \rangle_{\mu_\beta} \log \langle \hat{f}^2 \rangle_{\mu_\beta} + 2 \langle \hat{f}^2 \rangle_{\mu_\beta}$$

en reportant (DS) dans $(S\phi)$ nous obtenons alors l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} &\langle f^2 \log f^2 \rangle_{\mu_\beta} - \langle f^2 \rangle_{\mu_\beta} \log \langle f^2 \rangle_{\mu_\beta} \\ &\leqq \langle \hat{f}^2 \rangle_{\mu_\beta} \left(\frac{n}{2} \log\left(c \frac{\mathscr{E}_{\mu_\beta}(\hat{f}, \hat{f})}{\langle \hat{f}^2 \rangle_{\mu_\beta}} \right) + 2 \right) \\ &\leqq \langle \hat{f}^2 \rangle_{\mu_\beta} \frac{n}{2} \log\left(1 + e^{4/n} c \frac{\mathscr{E}_{\mu_\beta}(\hat{f}, \hat{f})}{\langle \hat{f}^2 \rangle_{\mu_\beta}} \right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Pour tout $a > 0$, la fonction $x \to x \log\left(1 + \frac{a}{x}\right)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et on peut majorer $\langle \hat{f}^2 \rangle_{\mu_\beta}$ par $\langle f^2 \rangle_{\mu_\beta}$ dans l'expression précédente. Nous obtenons alors :

$$\langle f^2 \log f^2 \rangle_{\mu_\beta} - \langle f^2 \rangle_{\mu_\beta} \log \langle f^2 \rangle_{\mu_\beta} \leqq \langle f^2 \rangle_{\mu_\beta} \frac{n}{2} \log\left(1 + e^{4/n} c \frac{\mathscr{E}_{\mu_\beta}(f, f)}{\langle f^2 \rangle_{\mu_\beta}} \right). \tag{2.5}$$

La quantité d'intérêt est $e^{4/n} c$, on peut constater que, comme, $m = n/2 \geqq 1$, $e^{4/n} c = A' e^{4/n} e^{\beta(\gamma + M/m)} \leqq A e^{\beta(\gamma + M/m)}$. Il suffit de poser $C(2, \beta) = A e^{\beta(\gamma + M/m)}$ pour avoir le résultat. □

Pour passer à une inégalité de Sobolev faible pour $p \neq 1$ nous utilisons le résultat suivant :

PROPOSITION 2.7. — *Pour tout $p \neq 1$ et pour toute fonction numérique strictement positive sur* $\mathbf{E}$, *on a* :

$$\frac{-p^2}{4(p-1)} \langle f^{p-1} \mathrm{L}_\beta f \rangle_{\mu_\beta} \geqq \mathscr{E}_\beta (f^{p/2}, f^{p/2}).$$

Preuve. — Par définition de L_β on a :

$$-2 \langle f^{p-1} \mathrm{L}_\beta f \rangle_{\mu_\beta} = \frac{1}{\mathrm{Z}_\beta} \sum_{x, y \in \mathbf{E}} [f^{p-1}(x) - f^{p-1}(y)]$$
$$\times [f(x) - f(y)] \, e^{-\beta (\mathrm{U}(x) \vee \mathrm{U}(y))} \alpha(x, y),$$

et

$$2 \mathscr{E}_\beta (f^{p/2}, f^{p/2}) = \frac{1}{\mathrm{Z}_\beta} \sum_{x, y \in \mathbf{E}} [f^{p/2}(x) - f^{p/2}(y)]^2 \, e^{-\beta (\mathrm{U}(x) \vee \mathrm{U}(y))} \alpha(x, y).$$

Soient deux réels X, Y tels que $\mathrm{Y} < \mathrm{X}$ on a alors :

$$\left(\frac{\mathrm{X}^{p/2} - \mathrm{Y}^{p/2}}{\mathrm{X} - \mathrm{Y}} \right)^2 = \frac{p^2}{4} \left[\frac{1}{\mathrm{X} - \mathrm{Y}} \int_{\mathrm{Y}}^{\mathrm{X}} t^{p/2 - 1} \, dt \right]^2$$
$$\leqq \frac{p^2}{4} \frac{1}{\mathrm{X} - \mathrm{Y}} \int_{\mathrm{Y}}^{\mathrm{X}} t^{p-2} \, dt = \frac{p^2}{4(p-1)} \frac{\mathrm{X}^{p-1} - \mathrm{Y}^{p-1}}{\mathrm{X} - \mathrm{Y}}.$$

D'où l'on tire :

$$(\mathrm{X}^{p/2} - \mathrm{Y}^{p/2})^2 \leqq \frac{p^2}{4(p-1)} (\mathrm{X}^{p-1} - \mathrm{Y}^{p-1})(\mathrm{X} - \mathrm{Y}),$$

en remplaçant dans la dernière inégalité X par $f(x)$ et Y par $f(y)$ on obtient le résultat. □

COROLLAIRE 2.8. — *Pour tout $p \in \mathbb{R}$, tout $\beta \geqq 0$, tout $h \in \mathscr{D}(\mathbf{E})$ l'opérateur L_β vérifie* :
(SF1)

$$\langle h^p \log h^p \rangle_{\mu_\beta} - \langle h^p \rangle_{\mu_\beta} \log \langle h^p \rangle_{\mu_\beta} \leqq m \langle h^p \rangle_{\mu_\beta}$$
$$\times \log \left(1 - \mathrm{C}(p, \beta) \frac{\langle h^{p-1} \mathrm{L}_\beta h \rangle_{\mu_\beta}}{\langle h^p \rangle_{\mu_\beta}} \right)$$

avec $m \geqq 1$ et

$$\mathrm{C}(p, \beta) = \mathrm{A} \, e^{\beta (\gamma + \mathrm{M}/m)} \frac{p^2}{4(p-1)}.$$

Preuve. – En faisant le changement de variable $f \to h^{p/2}$ dans l'inégalité (2.5) et en appliquant la proposition (2.7), nous obtenons une inégalité (SF1).

B. Cas où E est une variété compacte

Nous savons d'après [BM] que l'opérateur $L_0 = \Delta$ vérifie sous μ_0 une inégalité de Sobolev faible tendue: il existe $c>0$, tel que $\forall f \in \mathscr{D}(E)$,

$$\langle f^2 \log f^2 \rangle_{\mu_0} - \langle f^2 \rangle_{\mu_0} \log \langle f^2 \rangle_{\mu_0} \leqq \frac{n}{2} \langle f^2 \rangle_{\mu_0} \log\left(1 + c \frac{\mathscr{E}_{\mu_0}(f, f)}{\langle f^2 \rangle_{\mu_0}}\right)$$

où n représente la dimension de **E**. L'objet de la proposition suivante est d'effectuer un changement de mesure pour obtenir une inégalité sous μ_β. Posons $\psi = -\beta U - \log Z_\beta$.

PROPOSITION 2.9. – *Pour tout* $b>1$, $L_\beta = L_0 - \beta \nabla U . \nabla$ *vérifie l'inégalité suivante*:

$$\forall g \in \mathscr{D}(E),\ \langle g^2 \log g^2 \rangle_{\mu_\beta} - \langle g^2 \rangle_{\mu_\beta} \log \langle g^2 \rangle_{\mu_\beta} \tag{2.10}$$

$$\leqq -\langle g^2 \psi \rangle_{\mu_\beta} + \frac{n}{2} \log\left(1 + \frac{c}{4} \frac{b}{b-1} \frac{\langle \Gamma(\psi, \psi) g^2 \rangle_{\mu_\beta}}{\langle g^2 \rangle_{\mu_\beta}} + cb \frac{\mathscr{E}_\beta(g, g)}{\langle g^2 \rangle_{\mu_\beta}}\right) \langle g^2 \rangle_{\mu_\beta}.$$

Preuve. – On suppose que $\forall f \in \mathscr{D}(E)$ on a:

$$\langle f^2 \log f^2 \rangle_{\mu_0} - \langle f^2 \rangle_{\mu_0} \langle \log f^2 \rangle_{\mu_0} \leqq \frac{n}{2} \langle f^2 \rangle_{\mu_0} \log\left(1 + c \frac{\mathscr{E}_{\mu_0}(f, f)}{\langle f^2 \rangle_{\mu_0}}\right).$$

En effectuant le changement de variable $f \to g \exp(\psi/2)$, nous avons:

$$\langle g^2 \exp(\psi) \log(g^2 \exp(\psi)) \rangle_{\mu_0} - \langle g^2 \exp(\psi) \rangle_{\mu_0} \log \langle g^2 \exp(\psi) \rangle_{\mu_0}$$

$$\leqq \frac{n}{2} < g^2 \exp(\psi) \rangle_{\mu_0} \log\left(1 + c \frac{\mathscr{E}_{\mu_0}(g \exp(\psi/2), g \exp(\psi/2))}{\langle g^2 \exp(\psi) \rangle_{\mu_0}}\right).$$

Or,

$$\mathscr{E}_{\mu_0}\left(g \exp\left(\frac{\psi}{2}\right), g \exp\left(\frac{\psi}{2}\right)\right)$$

$$= \langle \Gamma(g, g) \rangle_{\mu_\beta} + \langle \Gamma(g, \psi) g \rangle_{\mu_\beta} + \frac{1}{4} \langle \Gamma(\psi, \psi) g^2 \rangle_{\mu_\beta},$$

et pour tout $b>1$,

$$\langle \Gamma(g, g) \rangle_{\mu_\beta} + \langle \Gamma(g, \psi) g \rangle_{\mu_\beta} + \frac{1}{4} \langle \Gamma(\psi, \psi) g^2 \rangle_{\mu_\beta}$$

$$\leqq b < \Gamma(g, g) \rangle_{\mu_\beta} + \frac{b}{4(b-1)} \langle \Gamma(\psi, \psi) g^2 \rangle_{\mu_\beta}$$

en effet,

$$\Big[\langle b\Gamma(g,g)+\varphi\Gamma(\psi,\psi)g^2\rangle_{\mu_\beta}$$

$$\geqq\langle\Gamma(g,g)\rangle_{\mu_\beta}+\langle g\Gamma(g,\psi)\rangle_{\mu_\beta}+\frac{1}{4}\langle g^2\Gamma(\psi,\psi)\rangle_{\mu_\beta}\Big]$$

$$\Leftrightarrow\quad\Big[\langle(b-1)\Gamma(g,g)-g\Gamma(g,\psi)+\left(\varphi-\frac{1}{4}\right)g^2\Gamma(\psi,\psi)\rangle_{\mu_\beta}\geqq 0\Big].$$

L'opérateur Γ étant positif, nous avons donc

$$|\Gamma(g,\psi)|\leqq\Gamma(g,g)^{1/2}\,\Gamma(\psi,\psi)^{1/2}.$$

L'expression que nous intégrons est positive dès que la forme quadratique $(b-1)X^2-XY+\left(\varphi-\frac{1}{4}\right)Y^2$ le sera, ce qui est réalisé dès que $b>1$ et $\varphi\geqq\frac{1}{4}\,\frac{b}{b-1}$; d'où le résultat. □

Un changement de mesure dans une inégalité $SF\left(2,\frac{n}{2},1,c,\mu_0\right)$ pour l'opérateur L_0 de mesure invariante μ_0 ne permet donc pas d'obtenir une inégalité $SF\left(2,\frac{n}{2},1,c,\mu_\beta\right)$ pour l'opérateur L_β de mesure invariante μ_β. De plus, on peut remarquer que le changement de mesure ne préserve pas la « tension » de l'inégalité. L'objet de la proposition suivante (*voir* [B]) est de passer d'une inégalité énergie-entropie non tendue à une inégalité tendue. Nous utilisons pour cela une propriété supplémentaire : L_β admet un trou spectral $\lambda(\beta)$ dont nous connaissons un encadrement.

Proposition 2.11. – *Soit* $\beta\geqq 0$ *fixé. Si*

$$\forall f\in\mathscr{D}(\mathbf{E}),\ \langle f^2\rangle_{\mu_\beta}=1\Rightarrow\langle f^2\log f^2\rangle_{\mu_\beta}\leqq\Phi(\mathscr{E}_\beta(f,f)),$$

où Φ *est une fonction concave croissante dérivable sur* $[0,\infty[$, *alors*, $\forall f\in\mathscr{D}(\mathbf{E})$,

$$\langle f^2\rangle_{\mu_\beta}=1\Rightarrow\langle f^2\log f^2\rangle_{\mu_\beta}\leqq\hat\Phi(\mathscr{E}_\beta(f,f)),$$

avec $\hat\Phi(x)=\inf(\Phi(x),K_\beta x)$, *et* $K_\beta=\dfrac{(2+\Phi(\lambda(\beta)))}{\lambda(\beta)}$.

Corollaire 2.12. – *Pour tout* $p\in\mathbb{R}-\{1\}$, *tout* $\beta\geqq 0$, *tout* $f\in\mathscr{D}(\mathbf{E})$, *l'opérateur* L_β *vérifie* :

(SF1)

$$\langle f^p\log f^p\rangle_{\mu_\beta}-\langle f^p\rangle_{\mu_\beta}\log\langle f^p\rangle_{\mu_\beta}$$

$$\leqq m\langle f^p\rangle_{\mu_\beta}\log\left(1-C(p,\beta)\frac{\langle f^{p-1}L_\beta f\rangle_{\mu_\beta}}{\langle f^p\rangle_{\mu_\beta}}\right),$$

avec $m \geqq \frac{n}{2}$, *et*

$$C(p, \beta)=\frac{p^2}{4(p-1)}\frac{1}{\lambda'(\beta)}A_1 e^{2 d\beta/m}(1+A_2\beta+A_3\beta^2)^{n/2m};$$

A_1, A_2, A_3 *sont des constantes ne dépendant que de* $\mathbf{E}$ *et de* U, *et*

$$\lambda'(\beta)=c_E(\beta \vee 1)^{-5n+2}e^{-\beta\gamma}.$$

Preuve. – Montrons tout d'abord que L_β vérifie l'inégalité : $\forall f \in \mathscr{D}(E)$

$$\langle f^2 \log f^2 \rangle_{\mu_\beta} - \langle f^2 \rangle_{\mu_\beta} \log \langle f^2 \rangle_{\mu_\beta} \leqq m \langle f^2 \rangle_{\mu_\beta} \log\left(1 - C(2, \beta)\frac{\langle f L_\beta f \rangle_{\mu_\beta}}{\langle f^2 \rangle_{\mu_\beta}}\right). \tag{2.13}$$

Comme $\| |\nabla U|^2 \|_\infty = 1$, nous pouvons utiliser dans (2.10) la majoration suivante $[\|\nabla\psi . \nabla\psi\| \leqq \beta^2] \Rightarrow [|\langle f^2 \psi \rangle_{\mu_\beta}| \leqq \beta d \langle f^2 \rangle_{\mu_\beta}]$ où d est le diamètre de la variété. Nous obtenons ainsi la relation

$$\langle f^2 \log f^2 \rangle_{\mu_\beta} - \langle f^2 \rangle_{\mu_\beta} \log \langle f^2 \rangle_{\mu_\beta} \leqq \beta d \langle f^2 \rangle_{\mu_\beta} + \frac{n}{2}\log\left(1 + \frac{c}{4}\frac{b}{b-1}\beta^2 + cb\frac{\mathscr{E}_\beta(f, f)}{\langle f^2 \rangle_{\mu_\beta}}\right)\langle f^2 \rangle_{\mu_\beta},$$

où b est une constante arbitraire strictement supérieure à 1.

Si nous posons $K_1 = \beta d$, $K_2 = 1 + \frac{c}{4}\frac{b}{b-1}\beta^2$ et $K_3 = cb$, nous obtenons pour tout $f \in \mathscr{D}(\mathbf{E})$

$$[\langle f^2 \rangle_{\mu_\beta} = 1] \Rightarrow \left[\langle f^2 \log f^2 \rangle_{\mu_\beta} \leqq K_1 + \frac{n}{2}\log(K_2 + K_3 \mathscr{E}_\beta(f, f))\right]. \tag{2.14}$$

Soit $\Phi(x) = K_1 + \frac{n}{2}\log(K_2 + K_3 x)$. Φ est concave croissante dérivable donc d'après la proposition précédente,

$$[\langle f^2 \rangle_{\mu_\beta} = 1] \Rightarrow [\langle f^2 \log f^2 \rangle_{\mu_\beta} \leqq \inf(\Phi(\mathscr{E}_\beta(f, f)), K_\beta \mathscr{E}_\beta(f, f))]$$

avec $K_\beta = \dfrac{2 + \Phi(\lambda(\beta))}{\lambda(\beta)}$.

Soit $C_b(2, \beta) = \dfrac{\exp((K_\beta/m)\lambda(\beta))}{\lambda(\beta)}$, montrons que si $m \geqq \frac{n}{2}$ alors pour tout $x \geqq 0$ et tout $b > 1$, on a l'inégalité suivante :

$$\inf(\Phi(x), K_\beta x) \leqq m \log(1 + C_b(2, \beta)x) = g(x). \tag{2.15}$$

Soit x_1 le point tel que $\Phi(x_1) = K_\beta x_1$.
D'après la définition de x_1, on a pour tout $x \leqq x_1$, $\min(\Phi(x), K_\beta x) = K_\beta x$, et pour tout $x \geqq x_1$, $\min(\Phi(x), K_\beta x) = \Phi(x)$.

Remarquons tout d'abord que $x_1 \leqq \lambda(\beta)$.
En effet, $[\Phi(x_1) = K_\beta x_1] \Rightarrow [\Phi(x_1)/x_1 = (2+\Phi(\lambda(\beta)))/\lambda(\beta)]$.
La fonction Φ étant concave et $\Phi(0) \geqq 0$, on en déduit que $\Phi(x)/x$ est décroissante; or $\Phi(x_1)/x_1 \geqq \Phi(\lambda(\beta))/\lambda(\beta)$, donc $x_1 \leqq \lambda(\beta)$.

Montrons maintenant que pour tout $x \leqq x_1$, $g(x) > K_\beta x$.
Comme $g(x)/x$ est décroissante, on a pour tout $x \leqq x_1$,

$$\frac{g(\lambda(\beta))}{\lambda(\beta)} \leqq \frac{g(x_1)}{x_1} \leqq \frac{g(x)}{x}.$$

On sait de plus que par définition de $C_b(2, \beta)$, $K_\beta < \dfrac{g(\lambda(\beta))}{\lambda(\beta)}$. On en déduit que $K_\beta < \dfrac{g(x)}{x}$, ce qui est précisément ce que nous voulons montrer.

Il faut maintenant montrer que pour tout $x \geqq x_1$, $g(x) \geqq \Phi(x)$.

Pour cela, il suffit de remarquer que d'une part, si $m \geqq \dfrac{n}{2}$ la fonction $h(x)$ définie par $h(x) = \dfrac{\exp(\Phi(x)/m)}{x}$ est décroissante, et d'autre part,

$$[g(x_1) \geqq K_\beta x_1] \Rightarrow [C_b(2, \beta) \geqq h(x_1)].$$

On a donc

$$C_b(2, \beta) \geqq h(x_1) \geqq h(x) \geqq \frac{\exp(\Phi(x)/m) - 1}{x},$$

d'où le résultat annoncé.

Nous avons donc montré l'inégalité (2.13) avec $C_b(2, \beta)$. Cette inégalité étant vraie pour tout $b > 1$, elle est vraie pour

$$b_0 = \arg\inf_{b>1} C_b(2, \beta) = 1 + \frac{\beta}{2\sqrt{\lambda(\beta)}}.$$

Nous obtenons alors

$$C_{b_0}(2, \beta) = \frac{1}{\lambda(\beta)} \exp\left(\frac{1}{m}\left(2 + \beta d + \frac{n}{2}\log\left(1 + c\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\lambda(\beta)}\right)^2\right)\right)\right).$$

Rappelons que

$$c_E(\beta \vee 1)^{-5n+2} e^{-\beta\gamma} \leqq \lambda(\beta) \leqq C_E(\beta \vee 1)^{4n+2} e^{-\beta\gamma}$$

où c_E et C_E sont des constantes ne dépendant que de $\mathbf{E}$.

Pour tout $\beta \geqq 0$, $\sqrt{\lambda(\beta)}$ est donc borné supérieurement par une constante A'_1 (si $\gamma > 0$, ce qui est le cas intéressant) ne dépendant que de

E et de U. Nous sommes alors conduit à

$$
\begin{aligned}
C_{b_0}(2, \beta) &= \frac{1}{\lambda(\beta)} \exp\left(\frac{1}{m}\left(2+\beta d+\frac{n}{2}\log\left(1+c\left(\frac{\beta}{2}+\sqrt{\lambda(\beta)}\right)^2\right)\right)\right) \\
&\leqq \frac{1}{\lambda'(\beta)} e^{2/m} e^{2\, d\beta/m} (1+A_1'^2+c\,\beta^2/4+c\,A_1'\,\beta)^{n/2\,m} \\
&= \frac{1}{\lambda'(\beta)} e^{2/m} (1+A_1'^2)^{n/2\,m} e^{2\, d\beta/m} (1+A_2\,\beta+A_3\,\beta^2)^{n/2\,m}.
\end{aligned}
$$

Nous utilisons l'inégalité $m \geqq \frac{n}{2}$, pour majorer la quantité $e^{2/m}(1+A_1'^2)^{n/2\,m}$ par une constante A_1. En posant

$$C(2, \beta) = \frac{1}{\lambda'(\beta)} A_1\, e^{2\, d\beta/m} (1+A_2\,\beta+A_3\,\beta^2)^{n/2\,m},$$

nous obtenons l'inégalité (2.13). Pour passer de (2.13) à SF1, il suffit d'effectuer le changement de variable $f \to h^{p/2}$. Nous obtenons alors

$$
\begin{aligned}
&\langle h^p \log h^p \rangle_{\mu_\beta} - \langle h^p \rangle_{\mu_\beta} \log \langle h^p \rangle_{\mu_\beta} \\
&\qquad \leqq m \langle h^p \rangle_{\mu_\beta} \log\left(1 - C(2, \beta)\frac{p^2}{4(p-1)} \frac{\langle h^{p-1} L_\beta h \rangle_{\mu_\beta}}{\langle h^p \rangle_{\mu_\beta}}\right).
\end{aligned}
$$

En posant $C(p, \beta) = C(2, \beta)\frac{p^2}{4(p-1)}$, nous en déduisons (SF2). □

Nous disposons maintenant d'une inégalité de Sobolev faible tendue sous la mesure μ_β, dans les cas où E est une variété compacte et un ensemble fini. A partir de cette inégalité, nous déduisons dans la proposition suivante des inégalités énergie-entropie (tendues) qui nous serviront pour la majoration et la minoration.

PROPOSITION 2.16. – *Dans les cas où* E *est une variété compacte ou un espace fini l'opérateur* L_β *vérifie* :

(i) *pour tout* $p \in \mathbb{R}$, *tout* $x \geqq 0$ *et toute fonction* $f \in \mathcal{D}(E)$,

$$
\begin{aligned}
\text{(S1)}\quad \langle f^p \log f^p \rangle_{\mu_\beta} - \langle f^p \rangle_{\mu_\beta} \log \langle f^p \rangle_{\mu_\beta} &\leqq -m \frac{C(p, \beta)}{1+x} \langle f^{p-1} L_\beta f \rangle_{\mu_\beta} \\
&\quad + m\left(\log(1+x) - \frac{x}{1+x}\right) \langle f^p \rangle_{\mu_\beta}.
\end{aligned}
$$

(ii) *Pour tout* $p \in \mathbb{R}$, *tout* $x \geqq 0$, *tout* $\alpha \geqq 0$ *et toute fonction* $f \in \mathcal{D}(E)$,

$$
\begin{aligned}
\text{(S2)}\quad & < f^p \log f^p \rangle_{\mu_\beta} - \langle f^p \rangle_{\mu_\beta} \log \langle f^p \rangle_{\mu_\beta} \\
& + \alpha \langle f^p \rangle_{\mu_\beta}^{1/2} [\langle f^p \log f^p \rangle_{\mu_\beta} - \langle f^p \rangle_{\mu_\beta} \log \langle f^p \rangle_{\mu_\beta}]^{1/2} \\
& \leqq \langle f^p \rangle_{\mu_\beta} (\Phi(x) - x\,\Phi'(x)) - C(p, \beta) \langle f^{p-1} L_\beta f \rangle_{\mu_\beta} \Phi'(x).
\end{aligned}
$$

avec $\Phi(x)=m\log(1+x)+\alpha\sqrt{m\log(1+x)}$, *et*, quand **E** *est une variété compacte*, $m \geqq n/2$

$$C(p,\beta)=\frac{p^2}{4(p-1)}\frac{1}{\lambda'(\beta)}A_1 e^{2d\beta/m}(1+A_2\beta+A_3\beta^2)^{n/2m},$$

quand **E** *est un espace fini*, $m \geqq 1$

$$C(p,\beta)=A\,e^{\beta(\gamma+M/m)}\frac{p^2}{4(p-1)}.$$

Preuve. — L'inégalité (S1) (de Sobolev logarithmique tendue) s'obtient à partir de (SF1) en utilisant la concavité de la fonction log. L'inégalité (S2) est obtenue en utilisant la croissance de $H(x)=x+\alpha\sqrt{x}$ et la concavité de la fonction $\Phi(x)=H(m\log(1+x))$. □

Soit $\beta_0 \geqq 1$, et supposons que $\beta \leqq \beta_0$, et que $m=\beta_0$, alors dans le cas où **E** est une variété compacte, la quantité

$$e^{2d\beta/m}(1+A_2\beta+A_3\beta^2)^{n/2m}$$

est alors bornée par une constante K_1 qui ne dépend que de **E** et de U. De même, quand **E** est un espace fini, la quantité $e^{\beta M/m}$ est bornée par une constante K_1 qui ne dépend que de **E** et de U. Comme pour tout $p\in\mathbb{R}$, $-\dfrac{p^2}{4(p-1)}\langle f^{p-1}L_\beta f\rangle \geqq 0$, et comme les inégalités (S1) et (S2) sont satisfaites avec $C(p,\beta)$, elles le sont a fortiori avec tout majorant de $C(p,\beta)$.

Nous nous placerons dans les paragraphes suivants dans le cas où $\beta \leqq \beta_0$ et $m=\beta_0$, nous pouvons donc prendre comme définition de $C(p,\beta)$ quand **E** est une variété compacte la quantité:

$$C(p,\beta)=\frac{K}{\lambda'(\beta)}\frac{p^2}{4(p-1)},$$

avec $K=K_1A_1$. Pour simplifier les notations, nous noterons $\lambda(\beta)$ la quantité $\lambda'(\beta)=c_E(\beta\vee 1)^{-5n+2}e^{-\beta\gamma}$.

Quand **E** est un espace fini, nous pouvons prendre comme définition de $C(p,\beta)$ la quantité

$$C(p,\beta)=\frac{K}{\lambda(\beta)}\frac{p^2}{4(p-1)}.$$

3. ENCADREMENT DE LA DÉRIVÉE DE RADON-NIKODYM

Ce paragraphe comporte trois parties. Tour d'abord, nous utilisons la méthode de Bakry-Michel qui nous conduit à deux systèmes différentiels:

un pour la majoration, et un pour la minoration. La seconde et la troisième partie sont respectivement consacrées à la minoration et à la majoration des solutions de ces systèmes. Dans toute la suite, **E** sera indifféremment un ensemble fini ou une variété compacte.

A. La méthode de Bakry-Michel

Pour mesurer la vitesse de convergence du recuit, on s'intéresse à la dérivée de Radon-Nikodym h_t de la loi de X_t par rapport à la mesure invariante instantanée $\mu_{\beta(t)}$. Soit $h_0 \in L^1_+(\mu_0)$ avec $\langle h_0 \rangle_{\mu_0} = 1$, $dm_0 = h_0\, d\mu_0$ et posons

$$h_t = \frac{d(m_0 P_{0,t})}{d\mu_{\beta(t)}}.$$

L'étude de l'évolution de h_t, se fera à l'aide de la technique de Bakry-Michel ([BM], [G], [D]); en d'autres termes en considérant l'évolution de la fonction

$$f_t = e^{-\hat{m}(t)} \langle h_t^{p_t} \rangle_{\mu_{\beta(t)}}^{1/p_t},$$

où p_t et $\hat{m}(t)$ sont des fonctions de t. La fonction f mesure en quelque sorte la « distance » qui sépare à chaque instant la loi du processus de sa mesure invariante instantanée $\mu_{\beta(t)}$. Quand il n'y aura pas d'ambiguité, nous noterons pour alléger les notations $\langle h \rangle = \int h d\mu_{\beta(t)}$, $h = h_t$, $p = p_t$.

Nous allons montrer les deux propositions suivantes :

PROPOSITION 3.1. — *Fixons $t_0 > 0$ et posons $\beta_0 = \beta(t_0)$. Si $\beta(t) = \frac{1}{\Gamma}\log(1+t)$ avec $\Gamma > \gamma$, s'il existe des fonctions $p(\beta)$, $x(p)$, $\hat{m}(\beta)$ définies respectivement sur $[0, \beta_0]$, $]-\infty, 1]$, $[0, \beta_0]$ vérifiant $p(0) = 1$, $p(\beta_0) = -\infty$, $\hat{m}(\beta_0) < \infty$ telles que :*

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{p^2}{p'_t} = C(p, \beta)\, \Phi'_x(x(p)) \\ &\frac{p^2}{p'_t}\hat{m}'_t = \Phi(x(p)) - x(p)\, \Phi'_x(x(p)) \end{aligned}\right. \tag{3.2}$$

avec

$$C(p, \beta) = \frac{K}{\lambda(\beta)} \frac{p^2}{4(p-1)}, \quad \Phi(x) = \beta_0 \log(1+x) + \alpha\sqrt{\beta_0 \log(1+x)}$$

et,

$$\alpha=2\sqrt{2}\,d\left|p(p-1)\frac{d\beta}{dp}\right|,$$

alors la dérivée de Radon-Nikodym h_{t_0} de la loi du processus par rapport à sa mesure invariante instantanée μ_{β_0} est minorée:

$$\forall y\in\mathbf{E},\qquad h_{t_0}(y)\geqq e^{\hat{m}(t_0)}.$$

PROPOSITION 3.3. – *Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition (3.1), s'il existe des fonctions $p(\beta)$, $x(p)$, $\hat{m}(\beta)$ définies respectivement sur $[0, \beta_0]$, $[1, \infty[$, $[0, \beta_0]$ vérifiant $p(0)=1$, $p(\beta_0)=\infty$, $\hat{m}(\beta_0)>-\infty$ telles que:*

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{p^2}{p'_t}=\dfrac{\beta_0\,\mathrm{C}(p,\beta)}{(1+x(p))}\\[2ex] \dfrac{p^2}{p'_t}\hat{m}'_t=\beta_0\left(\log(1+x(p))-\dfrac{x(p)}{1+x(p)}\right)+d(p-1)p\dfrac{d\beta}{dp}\end{array}\right.\qquad(3.4)$$

avec $\mathrm{C}(p,\beta)=\dfrac{\mathrm{K}}{\lambda(\beta)}\,\dfrac{p^2}{4(p-1)}$, *alors la dérivée de Radon-Nikodym h_{t_0} de la loi du processus par rapport à sa mesure invariante instantanée μ_{β_0} est majorée:*

$$\forall y\in\mathbf{E},\qquad h_{t_0}(y)\leqq e^{\hat{m}(t_0)}.$$

Remarque. – La fonction h_t dépend de la mesure initiale m_0. L'opérateur L_β étant elliptique, cette fonction est régulière, en faisant converger m_0 vers une masse de dirac en x, nous obtenons alors une minoration et une majoration de la dérivée de Radon-Nikodym de la loi du processus issu de x, $h_t(x, y)$ par rapport à sa mesure invariante instantanée.

Nous savons (*cf.* [HS]) que:

$$\frac{d}{dt}f_t=\frac{f_t p'_t}{p^2\langle h^p\rangle}\Big[\langle h^p\log h^p\rangle-\langle h^p\rangle\log\langle h^p\rangle\\ -\frac{p^2}{p'_t}\Big[-\langle h^{p-1}\mathrm{L}_\beta h\rangle-\beta'_t\left(\frac{p-1}{p}\right)\langle h^p(\mathrm{U}-\langle\mathrm{U}\rangle)\rangle+\langle h^p\rangle\hat{m}'_t\Big]\Big].$$

Posons

$$\mathrm{A}=\langle h^p\log h^p\rangle-\langle h^p\rangle\log\langle h^p\rangle\\ -\frac{p^2}{p'_t}\Big[-\langle h^{p-1}\mathrm{L}_\beta h\rangle-\beta'_t\left(\frac{p-1}{p}\right)\langle h^p(\mathrm{U}-\langle\mathrm{U}\rangle)\rangle+\langle h^p\rangle\hat{m}'_t\Big].$$

Pour étudier le signe de A, nous utilisons les inégalités (S1) et (S2) de la proposition (2.16).

Les inégalités (S1) et (S2) ne permettent pas de contrôler directement le signe de A, de par la présence dans A du terme $\langle h^p(\mathrm{U}-\langle\mathrm{U}\rangle)\rangle$.

Deux types de majorations de ce terme ont été utilisés (*cf.* [HKS], [HS], [M]):

1) $|\langle h^p(\mathrm{U}-\langle \mathrm{U}\rangle)\rangle| \leqq \langle h^p\rangle d$

2) $|\langle h^p(\mathrm{U}-\langle \mathrm{U}\rangle)\rangle| \leqq 2\sqrt{2}\, d\langle h^p\rangle \sqrt{\dfrac{\langle h^p \log h^p\rangle - \langle h^p\rangle \log\langle h^p\rangle}{\langle h^p\rangle}}$

où d est le maximum de U.

Ces majorations conduisent aux deux inégalités suivantes:

$$\mathrm{A} \leqq \langle h^p \log h^p\rangle - \langle h^p\rangle \log\langle h^p\rangle + p^2 \left|\beta'_p d \frac{p-1}{p}\right| \langle h^p\rangle - \frac{p^2}{p'_t}[-\langle h^{p-1}\mathrm{L}_\beta h\rangle + \langle h^p\rangle \hat{m}'_t]. \quad (3.5)$$

$$\mathrm{A} \leqq \langle h^p \log h^p\rangle - \langle h^p\rangle \log\langle h^p\rangle + \alpha\langle h^p\rangle \sqrt{\frac{\langle h^p \log h^p\rangle - \langle h^p\rangle \log\langle h^p\rangle}{\langle h^p\rangle}} - \frac{p^2}{p'_t}[-\langle h^{p-1}\mathrm{L}_\beta h\rangle + \langle h^p\rangle \hat{m}'_t] \quad (3.6)$$

avec $\alpha = |\beta'_p(p-1)p|\, 2\sqrt{2}\, d$.

La majoration (3.5), ne permet pas d'exploiter le fait que la quantité $\langle h^p(\mathrm{U}-\langle \mathrm{U}\rangle)\rangle$ s'annule en $p=0$. Les équations différentielles que nous obtenons présente une singularité en $p=0$. Nous l'utilisons donc pour les $p \geqq 1$ en d'autres termes, pour la majoration de la dérivée de Radon-Nikodym de la loi du processus.

Preuve de la proposition 3.1. – En comparant le membre de droite de l'inégalité (3.6) et (S2), nous voyons que si le système (3.2) admet une solution, alors A est une quantité négative. Nous en déduisons que pour t_0 fixé assez grand, si pour tout $t_0 \geqq t \geqq 0$, $p'_t \leqq 0$, alors f est une fonction croissante de t. Or la première équation de (3.2) nous montre que p'_t est du signe de $p-1$. Donc, si $p(0)=1$, $\hat{m}(0)=0$, et $p(\beta_0) = -\infty$ pour $\beta_0 < \infty$, on obtient une minoration de la dérivée de Radon-Nikodym de la loi du processus par rapport à la mesure μ_{β_0}. En d'autres termes:

$$f(0) \leqq f(t_0) \Leftrightarrow \exp(\hat{m}(t_0)) \leqq \| h_{t_0}\|_{-\infty, \mu_{\beta_0}} = \mathrm{essinf}_y\{h_{t_0}(y)\}. \quad \square$$

Preuve de la proposition 3.3. – En comparant le membre de droite de l'inégalité (3.5) et (S1), nous voyons que si le système (3.4) admet une solution, alors A est une quantité négative. Donc, si t_0 est fixé assez grand, et si pour tout $t_0 \geqq t \geqq 0$, $p'_t \geqq 0$, alors f est une fonction décroissante de t. Or la première équation de (3.4) nous montre que p'_t est du signe de $p-1$. Donc, si $p(0)=1$, $\hat{m}(0)=0$, $\beta(t_0)=\beta_0$ et, $p(t_0)=\infty$ pour $\beta_0 < \infty$, on obtient une majoration de la dérivée de Radon-Nikodym de la loi du processus par rapport à la mesure μ_{β_0}.

En d'autres termes:

$$f(0) \geqq f(t_0) \Leftrightarrow \exp(\hat{m}(t_0)) \geqq \| h_{t_0} \|_{\infty, \mu_{\beta_0}} = \sup_y h_{t_0}(y). \quad \square$$

Remarque. — Les propositions précédentes restent vraies quelque soit la forme de la fonction $\beta(t)$: il suffit qu'elle soit croissante et issue de 0.

B. Minoration

L'objet de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant:

THÉORÈME 3.7. — *Soit* L_β *le générateur du processus du recuit, si* $\beta(t) = \frac{1}{\Gamma} \log(1+t)$ *et si* $\Gamma > \gamma$, *alors la dérivée de Radon Nikodym* $h_t(x, y)$ *de la loi du processus issu de x par rapport à sa mesure invariante instantanée* μ_β, *est en temps grand minorée par*:

$$h_t(x, y) \geqq e^{\hat{m}(t)}$$

avec, si **E** *est une variété compacte,*

$$-\hat{m}(t) \leqq \frac{K [\log(t)]^{5n}}{t^{1-(\gamma/\Gamma)}} (1 + o(1)),$$

et, si **E** *est un espace fini*;

$$-\hat{m}(t) \leqq \frac{K \log(t)^2}{t^{1-(\gamma/\Gamma)}} (1 + o(1))$$

où K *est une constante ne dépendant que de* **E**, U *et* Γ *si* **E** *est une variété compacte et de* **E**, U, Γ *et* q_0 *si* **E** *est un ensemble fini.*

Pour montrer ce théorème, nous utilisons le système (3.2). Le calcul optimal consiste à chercher une fonction $x(p) \geqq 0$ définie sur l'intervalle $]-\infty, 1]$ qui à $\beta_0 = \beta(t_0)$ fixé réalise le supremum de $-\hat{m}$ dans le système (3.2). Le calcul de variations auquel nous aboutissons est difficile à résoudre, aussi nous contenterons nous de chercher une fonction $x(p) \geqq 0$ qui donne à $\hat{m}$ une valeur convenable.

Pour un choix $x(p)$ que nous ferons plus tard, β étant une fonction monotone de t, nous choisirons β comme paramètre. Le système (3.2) devient alors

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\Gamma e^{\Gamma\beta}}{C(2, \beta)} \frac{d\beta}{dp} = \frac{\beta_0}{4(p-1)(1+x(p))} \left(1 + \frac{\sqrt{2}\, d\, |p(p-1)|}{\sqrt{\beta_0 \log(1+x(p))}} \left| \frac{d\beta}{dp} \right| \right) \\ &\frac{d\hat{m}}{dp} = [\Phi(x(p)) - x(p)\, \Phi'_x(x(p))] \frac{1}{p^2} \end{aligned} \right. \tag{3.8}$$

avec $\Phi(x)=\beta_0 \log(1+x)+\alpha\sqrt{\beta_0 \log(1+x)}$, $\alpha=2\sqrt{2}\,d\,|p(p-1)\,d\beta/dp\,|$.
Rappelons que $C(p, \beta)=C(2, \beta)\dfrac{p^2}{4(p-1)}$, et que $C(2, \beta)=\dfrac{K}{\lambda(\beta)}$ avec $\lambda(\beta)=c_E(\beta \vee 1)^{-5n+2} e^{-\beta\gamma}$ si **E** est une variété compacte, $\lambda(\beta)=K' e^{-\beta\gamma}$ si **E** est un ensemble fini.

La première équation de ce système

$$\frac{4\Gamma e^{\Gamma\beta}}{C(2, \beta)} \frac{d\beta}{dp}=\frac{\beta_0}{(p-1)(1+x(p))}\left(1+\frac{\sqrt{2}\,d\,|p(p-1)|}{\sqrt{\beta_0 \log(1+x(p))}}\left|\frac{d\beta}{dp}\right|\right) \tag{3.9}$$

nous montre que $\dfrac{d\beta}{dp}$ est du signe de $p-1$, et comme $p<1$ nous en déduisons que $\dfrac{d\beta}{dp}<0$. L'équation (3.9) peut se réécrire de la façon suivante :

$$\frac{d\beta}{dp}\left(\frac{4\Gamma e^{\Gamma\beta}}{C(2, \beta)}-\sqrt{\beta_0}\frac{\sqrt{2}\,d\,|p|}{(1+x(p))\sqrt{\log(1+x(p))}}\right)=\frac{\beta_0}{(p-1)(1+x(p))}. \tag{3.10}$$

D'après la remarque précédente, la quantité

$$X=\left(\frac{4\Gamma e^{\Gamma\beta}}{C(2, \beta)}-\sqrt{\beta_0}\frac{\sqrt{2}\,d\,|p|}{(1+x(p))\sqrt{\log(1+x(p))}}\right)$$

est strictement positive dès que β est solution de 3.9 et tant que $(p-1)(1+x(p))$ reste fini (ce qui sera toujours satisfait, même en $p=1$, car on ne considèrera que des fonctions x telles que $\lim\limits_{p \to 1^-} (p-1)(1+x(p))$ existe dans $\mathbb{R}$).

Si la fonction $x(p)$ est choisie de telle façon que pour tout $p \leqq 1$, la quantité $X>0$, l'équation (3.10) s'écrit comme une équation différentielle de la forme

$$\frac{d\beta}{dp}=V(p, \beta, x(p)) \tag{3.10 bis}$$

avec

$$V(p, \beta, x)=\frac{\beta_0}{4(p-1)(1+x)} \frac{1}{((4\Gamma e^{\Gamma\beta})/(C(2, \beta))-\sqrt{\beta_0}(\sqrt{2}\,d\,|p|)/((1+x)\sqrt{\log(1+x)}))}. \tag{3.11}$$

Nous allons choisir une fonction $x(p, \tau)$ dépendant d'un paramètre τ de telle façon que la solution $\beta(p, \tau)$ de l'équation (3.10 *bis*) vérifie $\beta(1, \tau)=0$

et $\beta(-\infty, \tau)=\beta_0$. Nous établirons de plus un encadrement de la forme

$$\beta_0 \mathrm{H}(\tau) \leqq \mathrm{G}(\beta_0) \leqq \beta_0\left(1+\frac{1}{1-\mathrm{S}/\beta_0}\right)\mathrm{H}(\tau)$$

où S est une constante ne dépendant que de **E** et de U, et les fonctions H et G sont des fonctions continues croissantes. Cet encadrement nous permettra de donner une estimation asymptotique de la fonction $\beta_0 \rightarrow \tau(\beta_0)$.

Pour alléger les notations K désignera dorénavant une constante générique ne dépendant que de **E**, U et Γ (et de q_0 si **E** est un ensemble fini). Définissons dès maintenant les fonctions qui interviendront dans le calcul. Soit

$$\mathrm{G}(\beta)=\int_0^\beta 4\Gamma e^{\Gamma u}\frac{du}{\mathrm{C}(2, u)}, \qquad \beta \leqq \beta_0.$$

Si **E** est une variété compacte, on a

$$\mathrm{G}(\beta)=4\mathrm{K}\Gamma c_{\mathrm{E}}\int_0^\beta e^{(\Gamma-\gamma)u}(u \vee 1)^{-5n+2}\,du=\mathrm{K}\int_0^\beta e^{(\Gamma-\gamma)u}(u \vee 1)^{-5n+2}\,du.$$

Quand β_0 tend vers l'infini,

$$\mathrm{G}(\beta_0)=\mathrm{K}\,e^{(\Gamma-\gamma)\beta_0}\beta_0^{-5n+2}(1+o(1)).$$

De même, quand **E** est un espace fini, on a

$$\mathrm{G}(\beta)=\mathrm{K}\int_0^\beta e^{(\Gamma-\gamma)u}\,du.$$

Pour tout $p \leqq 1$, on définit:

$$\mathrm{H}(p, \tau)=\int_p^1 \frac{du}{(1-u)(1+x(u, \tau))}.$$

Le lemme suivant établit l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation (3.10).

LEMME 3.12. – *Soit $x(p, \tau)$ une fonction telle que*

$$\sup_{p \leqq 1}\mathrm{S}(p)=\sup_{p \leqq 1}\left\{\frac{|p|}{\mathrm{H}(p, \tau)(1+x(p, \tau))\sqrt{\log(1+x(p,\tau))}}\right\}<\mathrm{K} \qquad (3.13)$$

où K *est une constante ne dépendant que de* **E** *et de* U; *si* β_0 *est assez grand, il existe une unique solution à l'équation* (3.10) *vérifiant* $\beta(1, \tau)=0$. *De plus, il existe une constante* S *ne dépendant que de* **E** *et de* U *telle que*:

$$\mathrm{H}(p, \tau) \leqq \frac{\mathrm{G}(\beta(p, \tau))}{\beta_0} \leqq \frac{1}{1-\mathrm{S}/\sqrt{\beta_0}}\mathrm{H}(p, \tau), \qquad (3.14)$$

Preuve. — Établissons tout d'abord l'inégalité (3.14). Reprenons l'équation (3.9) avec nos nouvelles notations

$$\frac{dG}{dp}=\frac{\beta_0}{(p-1)(1+x(p,\tau))}\left(1+\frac{\sqrt{2}\,d|p(p-1)\beta'_p|}{\sqrt{\beta_0}\log(1+x(p,\tau))}\right)\leqq\frac{\beta_0}{(p-1)(1+x(p,\tau))}.$$

Comme $p\leqq 1$, nous en déduisons que $G(\beta)\geqq\beta_0 H(p,\tau)$. Pour établir la majoration de $G(\beta)$ réécrivons l'équation (3.10):

$$\frac{dG}{dp}\left(1-\frac{d\beta}{dG}\sqrt{\beta_0}\frac{\sqrt{2}\,d|p|}{(1+x(p,\tau))\sqrt{\log(1+x(p,\tau))}}\right)=\frac{\beta_0}{(p-1)(1+x(p,\tau))}.$$

Nous savons qu'il existe une constante K_2 ne dépendant que de E et de U telle que

$$\frac{d\beta}{dG}\leqq\frac{1}{K_2 G(\beta)}.$$

En utilisant cette inégalité et sachant que $G(\beta)\geqq\beta_0 H(p,\tau)$, nous obtenons

$$\frac{dG(\beta)}{dp}\left(1-\frac{K_3|p|}{\sqrt{\beta_0}H(p)(1+x(p,\tau))\sqrt{\log(1+x(p,\tau))}}\right)\geqq\frac{\beta_0}{(p-1)(1+x(p,\tau))},$$

avec $K_3=K_2\sqrt{2}\,d$.
Par hypothèse, nous savons que pour tout $p\leqq 1$

$$\frac{|p|}{H(p,\tau)(1+x(p,\tau))\sqrt{\log(1+x(p,\tau))}}\leqq K,$$

où K est une constante ne dépendant que de E et de U. En choisissant $\beta_0>(KK_3)^2$, nous obtenons l'inégalité suivante

$$\frac{K_3|p|}{\sqrt{\beta_0}H(p,\tau)(1+x(p,\tau))\sqrt{\log(1+x(p,\tau))}}\leqq\frac{KK_3}{\sqrt{\beta_0}}=\frac{S}{\sqrt{\beta_0}}<1.$$

Nous en déduisons

$$\frac{dG}{dp}\left(1-\frac{S}{\sqrt{\beta_0}}\right)\geqq\frac{\beta_0}{(p-1)(1+x(p,\tau))},$$

et donc que

$$\beta_0 H(p,\tau)\leqq G(\beta(p,\tau))\leqq\frac{1}{1-S/\sqrt{\beta_0}}\beta_0 H(p,\tau).$$

L'existence et l'unicité de la solution, découle du fait que la fonction $V(p,\beta,x)$ définie par (3.11) est localement lipschitzienne en β. □

Il faut maintenant vérifier qu'il existe τ tel que la solution $\beta(p,\tau)$ de l'équation (3.9) vérifie $\beta(-\infty,\tau)=\beta_0$.

LEMME 3.15. — *Avec les mêmes hypothèses que dans le lemme* (3.12), *si pour tout p, la fonction* $x(p, u)$ *est décroissante en u, pour u appartenant à un intervalle de* $\mathbb{R}$, *et si en la borne supérieure de cet intervalle on a* $\lim_{\tau} \mathrm{H}(-\infty, \tau) = +\infty$, *alors il existe* τ *telle que la solution de l'équation* (3.9) *vérifie* $\beta(-\infty, \tau) = \beta_0$, *avec* β_0 *assez grand.*

Preuve. — Remarquons tout d'abord que la fonction $\mathrm{V}(p, \beta, x)$ est strictement croissante en x. Comme par hypothèse, la fonction $x(p, u)$ est décroissante en u, nous en déduisons que la solution $\beta(p, \tau)$ est une fonction croissante de τ.

Nous disposons d'autre part de l'encadrement suivant :

$$\beta_0 \mathrm{H}(p, \tau) \leqq \mathrm{G}(\beta(p, \tau)) \leqq \frac{1}{1 - \mathrm{S}/\sqrt{\beta_0}} \beta_0 \mathrm{H}(p, \tau)$$

qui nous conduit à l'encadrement

$$\beta_0 \mathrm{H}(-\infty, \tau) \leqq \mathrm{G}(\beta(-\infty, \tau)) \leqq \frac{1}{1 - \mathrm{S}/\sqrt{\beta_0}} \beta_0 \mathrm{H}(-\infty, \tau).$$

Comme les fonctions $\mathrm{G}(.)$ et $\mathrm{H}(-\infty, .)$ sont continues croissantes, nous avons montré l'existence pour β_0 assez grand d'une unique valeur τ telle que $\beta(-\infty, \tau) = \beta_0$. □

Avant de prouver le théorème (3.7), il faut exhiber une fonction $x(p, \tau)$ qui satisfait les conditions des lemmes (3.12) et (3.15), et donner une estimation de τ quand $\beta_0 \to \infty$.

LEMME 3.16. — *Soient* $\tau > 1$ *et*

$$x(p, \tau) = \begin{cases} \dfrac{\exp(-\tau)}{1-p} & \textit{pour} \quad 1 - \exp(-\tau) \leqq p \leqq 1 \\ -\dfrac{1}{\tau} \log(1-p) & \textit{pour} \quad 0 \leqq p \leqq 1 - \exp(-\tau) \\ \dfrac{|p|}{\tau} & \textit{pour} \quad p \leqq 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

alors il existe S *ne dépendant que de* **E** *et de* U *tel si* $\beta_0 = \beta(-\infty, \tau) > \mathrm{S}^2$, *on a*

$$\beta_0 \mathrm{H}(p, \tau) \leqq \mathrm{G}(\beta(p, \tau)) \leqq \frac{1}{1 - \mathrm{S}/\sqrt{\beta_0}} \beta_0 \mathrm{H}(p, \tau),$$

et quand $\tau \to +\infty$

$$\log(2)\tau(1 + o(1)) \leqq \frac{\mathrm{G}(\beta_0)}{\beta_0} \leqq \frac{1}{1 - \mathrm{S}/\sqrt{\beta_0}} \log(2)\tau(1 + o(1)). \tag{3.18}$$

Preuve. — Pour montrer ce lemme, il suffit de vérifier qu'avec le choix (3.17) de la fonction $x(p, \tau)$, la quantité

$$\mathrm{S}(p, \tau) = \frac{|p|}{\mathrm{H}(p, \tau)(1+x(p, \tau))\sqrt{\log(1+x(p, \tau))}}$$

est majorée par une constante ne dépendant que de **E** et de U. Dans un premier temps calculons $\mathrm{H}(p, \tau)$.

$$\mathrm{H}(p, \tau) = \int_p^1 \frac{du}{(1-u)(1+x(u, \tau))}$$
$$= \begin{cases} \tau + \log(1+\exp(-\tau)-p) & \text{si } 1-\exp(-\tau) \leqq p \leqq 1 \\ (\tau+1)\log 2 - \tau \log\left(1 - \dfrac{1}{\tau}\log(1-p)\right) & \text{si } 0 \leqq p \leqq 1-\exp(-\tau) \\ (\tau+1)\log 2 - \dfrac{\tau}{\tau-1}\log\dfrac{1-p\tau^{-1}}{1-p} & \text{si } p \leqq 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

Notons que $\mathrm{H}(-\infty, \tau) = \ln(2)(\tau+1) + \tau(\tau-1)^{-1}\ln(\tau)$, ainsi

$$\lim_{r \to +\infty} \mathrm{H}(-\infty, \tau) = +\infty,$$

donc d'après le lemme 3.15, pour β_0 assez grand, il existe $\tau > 1$ tel que $\beta_0 = \beta(-\infty, \tau)$. Montrons maintenant que sur chacun des intervalles $]1-e^{-\tau}, 1]$, $]0, 1-e^{-\tau}]$, $]-\infty, 0]$ $\mathrm{S}(p, \tau)$ est universellement borné.

Soit $1-e^{-\tau} \leqq p \leqq 1$, posons $p = 1-e^{-\delta}$ avec $\delta \geqq \tau$

$$\mathrm{H}(1-e^{-\delta}, \tau) = \log(1+e^{\tau-\delta}),$$

en posant $u = \delta - \tau \geqq 0$, nous obtenons:

$$\mathrm{S}(1-e^{-(u+\tau)}, \tau) \leqq \frac{1}{(1+e^u)\sqrt{\log(1+e^u)}\log(1+e^{-u})} \leqq \frac{1}{2\log(2)^{3/2}}.$$

Soit $0 \leqq p \leqq 1-e^{-\tau}$ avec les mêmes notations que précédemment on obtient:

$$\mathrm{H}(1-e^{-\delta}, \tau) = \log(2) + \tau\left(\log(2) - \log\left(1 + \frac{\delta}{\tau}\right)\right).$$

Soit, en posant $u = \dfrac{\delta}{\tau} \in [0, 1]$

$$\mathrm{S}(1-e^{-\tau u}, \tau) = \frac{1-e^{-\tau u}}{(1+u)\sqrt{\log(1+u)}(\log(2)(\tau+1) - \tau\log(1+u))}.$$

La fonction

$$u \to (1-e^{-\tau u}) - 2\sqrt{\log(1+u)}(\log(2)(\tau+1) - \tau\log(1+u))$$

étant négative sur l'intervalle [0, 1], on en déduit que

$$S(p, \tau) \leqq 2.$$

Pour $p \leqq 0$, posons $u = -p \geqq 0$:

$$S(-u, \tau) \leqq \frac{u}{(1+u/\tau)\sqrt{\log(1+u/\tau)}\,H(0, \tau)}.$$

Or, le maximum de la fonction $u \to \dfrac{u}{(1+u/\tau)\sqrt{\log(1+u/\tau)}}$ est atteint en un point u_0 de la forme $K\tau$. On en déduit que

$$S(p, \tau) \leqq \frac{K\tau}{H(0, \tau)}.$$

Or comme $H(0, \tau) = (\tau+1)\log(2)$, on a

$$S(p, \tau) \leqq \frac{K\tau}{(\tau+1)\log(2)} \leqq \frac{K}{\log(2)}.$$

Au bout du compte, la fonction $S(p, \tau)$ est universellement bornée. On peut de plus constater que pour tout p, la fonction x est décroissante en τ. La fonction x définie par (3.17) vérifie donc les hypothèses des lemmes (3.12) et (3.15). La vérification de (3.18) est immédiate. □

Passons maintenant à la preuve du théorème.

Preuve du théorème 3.7. – Pour prouver le théorème, il suffit de montrer que la relation entre p et β que nous avons obtenue en choisissant la fonction x dans la première équation du système (3.8) est telle que la quantité $-\hat{m}$ tend vers 0 avec la vitesse annoncée, quand β_0 tend vers l'infini (ou de façon équivalente, quand τ tend vers l'infini).

Rappelons que

$$\begin{aligned} -\hat{m} = \int_{-\infty}^{1} \Bigg[& \beta_0 \left[\log(1+x(p, \tau)) - \frac{x(p, \tau)}{1+x(p, \tau)}\right] \\ & + 2\sqrt{2}\, d\sqrt{\beta_0}\, \frac{|p(p-1)\beta'_p|}{\sqrt{\log(1+x(p, \tau))}} \left(\log(1+x(p, \tau)) - \frac{x(p, \tau)}{2(1+x(p, \tau))}\right)\Bigg] \frac{dp}{p^2} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Il apparaît dans (3.20) la quantité $(p-1)\beta'_p$ que nous majorons en utilisant le lemme (3.12). Notons tout d'abord que

$$(p-1)\frac{d\beta}{dp} = (p-1)\frac{dG}{dp}\,\frac{d\beta}{dG};$$

nous savons d'autre part qu'il existe une constante K' telle que

$$\frac{d\beta}{dG} \leqq \frac{K'}{\beta_0 H(p, \tau)}$$

et enfin que pour $\beta_0 > S^2$,

$$(p-1)\frac{dG}{dp} \leqq \frac{\beta_0}{(1-S/\sqrt{\beta_0})(1+x(p,\tau))}$$

Nous en déduisons donc que pour $\beta_0 > 2S^2$, on a

$$(p-1)\frac{d\beta}{dp} \leqq \frac{K'}{(1-S/\sqrt{\beta_0})\,H(p,\tau)(1+x(p,\tau))} \leqq \frac{K}{(1+x(p,\tau))\,H(p,\tau)}.$$

Nous sommes alors conduit à la majoration

$$-\hat{m} \leqq \int_{-\infty}^{1} \Bigg[\beta_0\left(\log(1+x(p,\tau)) - \frac{x(p,\tau)}{1+x(p,\tau)}\right) + \frac{K|p|\sqrt{\beta_0}}{(1+x(p,\tau))\sqrt{\log(1+x(p,\tau))}\,H(p,\tau)} \times \left(\log(1+x(p,\tau)) - \frac{x(p,\tau)}{2(1+x(p,\tau))}\right)\Bigg]\frac{dp}{p^2}.$$

Posons

$$M_1 = \int_{-\infty}^{1}\left(\log(1+x(p,\tau)) - \frac{x(p,\tau)}{1+x(p,\tau)}\right)\frac{dp}{p^2}$$

et

$$M_2 = \int_{-\infty}^{1} \frac{K|p|}{(1+x(p,\tau))\sqrt{\log(1+x(p,\tau))}\,H(p,\tau)} \left(\log(1+x(p,\tau)) - \frac{x(p,\tau)}{2(1+x(p,\tau))}\right)\frac{dp}{p^2}.$$

Avant de passer à la majoration de $-\hat{m}$ rappelons la définition de $x(p,\tau)$.

$$x(p,\tau) = \begin{cases} \dfrac{\exp(-\tau)}{1-p} & \text{pour} \quad 1-\exp(-\tau) \leqq p \leqq 1 \\[2mm] -\dfrac{1}{\tau}\log(1-p) & \text{pour} \quad 0 \leqq p \leqq 1-\exp(-\tau) \\[2mm] \dfrac{|p|}{\tau} & \text{pour} \quad p \leqq 0 \end{cases}$$

Majoration de M_1 :

$$\int_{1-\exp(-\tau)}^{1}\left(\log(1+x(p,\tau)) - \frac{x(p,\tau)}{1+x(p,\tau)}\right)\frac{dp}{p^2} = 2\log(2)\frac{\exp(-\tau)}{1-e^{-2\tau}} - \frac{\exp(-\tau)}{1+\exp(-\tau)}\log(1-\exp(-\tau))$$

$$-\frac{\exp(-\tau)}{(1+\exp(-\tau))^2}\left(\log(2)-\log(1-\exp(-\tau))+\frac{\exp(-\tau)(1+\exp(-\tau))}{1-\exp(-\tau)}\right).$$

$$\int_0^{1-\exp(-\tau)}\left(\log(1+x(p,\tau))-\frac{x(p,\tau)}{1+x(p,\tau)}\right)\frac{dp}{p^2}$$
$$\leqq\int_0^{1-\exp(-\tau)}\left(\log\left(1+\frac{p}{\tau(1-p)}\right)-\frac{p}{\tau+p(1-\tau)}\right)\frac{dp}{p^2}.$$

En effet la fonction $x\to\log(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$ est croissante et pour tout $p\in(0,1)$ la fonction $-\dfrac{1}{\tau}\log(1-p)$ est majorée par $\dfrac{p}{\tau(1-p)}$.

$$\int_0^{1-\exp(-\tau)}\log\left(1+\frac{p}{\tau(1-p)}\right)-\frac{p}{\tau+p(1-\tau)}\,\frac{dp}{p^2}$$
$$=\left[\left(\frac{1}{p}-1\right)\log\frac{1-p}{1-(1-(1/\tau))p}\right]_0^{1-\exp(-\tau)}$$
$$=\frac{1}{\tau}-\frac{\exp(-\tau)}{1-\exp(-\tau)}\log\left(1+\frac{\exp(\tau)}{\tau}-\frac{1}{\tau}\right).$$

Il reste maintenant à calculer

$$\int_{-\infty}^0\log(1+x(p,\tau))-\frac{x(p,\tau)}{1+x(p,\tau)}\,\frac{dp}{p^2}=\int_{-\infty}^0\log(1-p/\tau)+\frac{p}{\tau-p}\,\frac{dp}{p^2}=\frac{1}{\tau}.$$

Finalement

$$\mathrm{M}_1\leqq 2\log(2)\frac{e^{-\tau}}{1-e^{-2\tau}}-\frac{e^{-\tau}}{1+e^{-\tau}}\log(1-e^{-\tau})$$
$$-\frac{e^{-\tau}}{(1+e^{-\tau})^2}\left(\log(2)-\log(1-e^{-\tau})+\frac{e^{-\tau}}{1-e^{-\tau}}\right)$$
$$+\frac{1}{\tau}-\frac{e^{-\tau}}{1-e^{-\tau}}\log\left(1+\frac{e^{\tau}}{\tau}-\frac{1}{\tau}\right)+\frac{1}{\tau}\leqq\frac{2}{\tau}(1+o(1)).$$

Majoration de M_2 : rappelons que

$$\mathrm{M}_2=\int_{-\infty}^1\frac{\mathrm{K}\,|p|}{(1+x(p,\tau))\sqrt{\log(1+x(p,\tau))}\,\mathrm{H}(p,\tau)}$$
$$\times\left(\log(1+x(p,\tau))-\frac{x(p,\tau)}{2(1+x(p,\tau))}\right)\frac{dp}{p^2}.$$

Tout d'abord,

$$\int_{1-e^{-\tau}}^{1} \frac{K|p|}{(1+x(p,\tau))\sqrt{\log(1+x(p,\tau))}\,H(p,\tau)} \times\left(\log(1+x(p,\tau))-\frac{x(p,\tau)}{2(1+x(p,\tau))}\right)\frac{dp}{p^2}$$
$$\leqq S\int_{1-e^{-\tau}}^{1} \log(1+x(p,\tau))-\frac{x(p,\tau)}{2(1+x(p,\tau))}\,\frac{dp}{p^2}$$
$$=S\left[2\log(2)\frac{e^{-\tau}}{1-e^{-2\tau}}-\frac{e^{-\tau}}{1+e^{-\tau}}\log(1-e^{-\tau})\right.$$
$$\left.-\frac{e^{-\tau}}{2(1+e^{-\tau})^2}\left(\log(2)-\log(1-e^{-\tau})+\frac{e^{-\tau}(1+e^{-\tau})}{1-e^{-\tau}}\right)\right].$$

On peut remarquer que cette dernière expression est majorée par un terme de la forme $K e^{-\tau}$ pour $\tau>1$.

Passons maintenant au calcul de

$$J=\int_{0}^{1-e^{-\tau}} \frac{K|p|}{(1+x(p,\tau))\sqrt{\log(1+x(p,\tau))}\,H(p,\tau)} \times\left(\log(1+x(p,\tau))-\frac{x(p,\tau)}{2(1+x(p,\tau))}\right)\frac{dp}{p^2}.$$

Pour calculer cette intégrale, on ne peut pas utiliser la majoration de $S(p,\tau)$ utilisée ci-dessus, car le majorant ainsi obtenu n'est pas intégrable en $p=0$.

En faisant le changement de variable $u=-\frac{1}{\tau}\log(1-p)$, et en remarquant que pour tout $u\in(0,1)$

$$\frac{1}{(1+u)\sqrt{\log(1+u)}}\left(\log(1+u)-\frac{u}{2(1+u)}\right)\leqq\sqrt{u},$$

nous obtenons:

$$\int_{0}^{1}\frac{\tau K}{(1+u)\sqrt{\log(1+u)}\,(\log(2)(\tau+1)-\tau\log(1+u))} \left(\log(1+u)-\frac{u}{2(1+u)}\right)\frac{e^{-\tau u}\,du}{1-e^{-\tau u}}$$
$$\leqq K\tau\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{u}}{\log(2)(\tau+1)-\tau\log(1+u)}\,\frac{e^{-\tau u}\,du}{1-e^{-\tau u}}.$$

Il reste à majorer cette dernière intégrale : pour cela supposons τ assez grand et considérons les quantités suivantes :

$$J_1 = \tau K \int_0^{1-1/\sqrt{\tau}} \frac{\sqrt{u}}{\log(2)(\tau+1) - \tau \log(1+u)} \frac{e^{-\tau u}\, du}{1-e^{-\tau u}} \quad \text{et} \quad J_2 = J - J_1.$$

On a alors :

$$J_1 \leqq \frac{\tau K}{\log(2)(\tau+1) - \tau \log(2 - 1/\sqrt{\tau})} \int_0^{1-1/\sqrt{\tau}} \sqrt{u} \frac{e^{-\tau u}\, du}{1-e^{-\tau u}}$$

$$\leqq \frac{K}{\sqrt{\tau}(\log(2)(\tau+1) - \tau \log(2 - 1/\sqrt{\tau}))} \int_0^{\infty} \sqrt{u} \frac{e^{-u}\, du}{1-e^{-u}} = \frac{K'}{\tau}(1+o(1));$$

de même,

$$J_2 \leqq \frac{\tau K}{\log(2)} \int_{1-1/\sqrt{\tau}}^{1} \sqrt{u} \frac{e^{-\tau u}\, du}{1-e^{-\tau u}} \leqq K'' e^{-\tau+\sqrt{\tau}}(1+o(1)).$$

Il reste maintenant à évaluer la quantité :

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{K|p|}{(1+x(p,\tau))\sqrt{\log(1+x(p,\tau))}\, H(p,\tau)}$$
$$\times \left(\log(1+x(p,\tau)) - \frac{x(p,\tau)}{2(1+x(p,\tau))} \right) \frac{dp}{p^2}$$
$$\leqq \frac{K}{H(0,\tau)} \int_{-\infty}^{0} \frac{\tau|p|}{(\tau+|p|)\sqrt{\log(1+|p|/\tau)}} \left(\log\left(1+\frac{|p|}{\tau}\right) - \frac{|p|}{2(\tau+|p|)} \right) \frac{dp}{p^2}$$
$$= \frac{K}{H(0,\tau)} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+u)\sqrt{\log(1+u)}} \left(\log(1+u) - \frac{u}{2(1+u)} \right) \frac{du}{u}$$
$$= \frac{K'}{H(0,\tau)} = \frac{K''}{(\tau+1)}.$$

Finalement, quand $\tau \to \infty$,

$$M_2 \leqq \frac{K_2}{\tau}(1+o(1))$$

Un petit développement limité quand $\tau \to \infty$ nous donne :

$$G(\beta_0)/\beta_0 = H(-\infty,\tau)(1+o(1)) = \ln(2)\,\tau(1+o(1)), \quad \text{et}$$
$$-\hat{m} \leqq (\beta_0 M_1 + \sqrt{\beta_0} M_2)(1+o(1))$$

avec

$$M_1 \leqq \frac{K_1}{\tau} \quad \text{et} \quad M_2 \leqq \frac{K_2}{\tau},$$

d'où le résultat. □

Remarque. — La meilleure solution que nous pouvons espérer avec ce système, dans le cas où E est une variété compacte, est obtenue en utilisant l'inégalité

$$G(\beta) \geqq \beta_0 \int_p^1 \frac{dp}{(1-u)(1+x)},$$

et, en remarquant que

$$M = \beta_0 \int_{-\infty}^1 \left(\log(1+x) - \frac{x}{1+x} + \frac{\alpha\sqrt{\beta_0}}{\sqrt{\log(1+x)}} \left(\log(1+x) - \frac{x}{2(1+x)} \right) \frac{du}{u^2} \right.$$
$$\leqq \int_{-\infty}^1 \left(\log(1+x) - \frac{x}{1+x} \right) \frac{dp}{p^2},$$

nous retrouvons alors le problème de variations obtenu par [BM] pour la minoration du semi-groupe de la chaleur. Avec ce problème de variation la meilleure solution que nous pouvons espérer est donc pour β_0 assez grand :

$$\left(4 \frac{G(\beta_0)}{c} e^{-4(G(\beta_0)/nc)} \right) (1 + o(1))$$

où c est la constante qui intervient dans l'inégalité de Sobolev initiale sous μ_0.

C. Majoration

L'objet de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 3.17. — *Soit* L_β *le générateur du processus du recuit si* $\beta = \frac{1}{\Gamma}\log(1+t)$ *et si* $\Gamma > \gamma$, *alors la dérivée de Radon Nikodym* $h_t(x, y)$ *de la loi du processus issu de* x *par rapport à sa mesure invariante instantanée* $\mu_{\beta(t)}$, *est en temps grand, majorée par :*

$$h_t(x, y) \leqq e^{\hat{m}(t)},$$

avec, si **E** *est une variété compacte,*

$$\hat{m}(t) \leqq \frac{K \log^{5n+1}(t)}{t^{1-(\gamma/\Gamma)}} (1 + o(1)),$$

et, si **E** *est un espace fini,*

$$\hat{m}(t) \leqq \frac{K \log^3(t)}{t^{1-(\gamma/\Gamma)}}(1+o(1)).$$

Avant de passer à la preuve, rappelons le système à résoudre pour la majoration :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{p^2}{p'_t} = \frac{\beta_0 C(p, \beta)}{(1+x(p))} \\ &\frac{p^2}{p'_t}\hat{m}'_t = \beta_0\left(\log(1+x(p)) - \frac{x(p)}{1+x(p)}\right) + d(p-1)p\frac{d\beta}{dp} \end{aligned}\right. \tag{3.18}$$

avec $C(p, \beta) = \dfrac{p^2}{4(p-1)}C(2, \beta)$, et

$$\begin{aligned} C(2, \beta) &= \frac{K_1 e^{\beta\gamma}}{(\beta \vee 1)^{-5n+2}}, \text{ si } \mathbf{E} \text{ est une variété compacte} \\ &= K_1 e^{\beta\gamma}, \text{ si } \mathbf{E} \text{ est un ensemble fini.} \end{aligned}$$

Notons comme dans le paragraphe précédent :

$$G(\beta) = \int_0^\beta 4\Gamma e^{\Gamma u}\frac{du}{C(2, u)}.$$

Preuve. — Comme plus haut, nous allons prendre β comme paramètre et choisir une fonction $x(p)$ dépendant de β_0 de telle façon que la solution $\hat{m}(\beta_0)$ de (3.18) admette une majoration conduisant au résultat.

Nous allons choisir pour cela une fonction $x(p, \tau)$ dépendant d'un paramètre τ qui sera telle que la solution $\beta(p, \tau)$ de la première équation de (3.18) vérifie : $\beta(1, \tau)=0$, et $\beta(\infty, \tau)=\beta_0$. La dernière équation donnant la dépendance de τ en fonction de β_0. Nous prendrons

$$x(p, \tau) = \frac{-(p-p_1)(p-p_2)}{p_1 p_2 (p-1)} - 1,$$

avec $p_1 = 1-e^{-\tau}$, $p_2 = 1-\tau$, et $\tau > 1$, on a alors le résultat annoncé. Pour simplifier les notations, nous posons $\mu = -1/p_1 p_2$.

Calcul de $G(\beta_0)$:

$$G(\beta_0) = \int_1^\infty \frac{\beta_0\, du}{\mu(u-p_1)(u-p_2)} = \frac{\beta_0}{\mu(p_1-p_2)}\log\frac{1-p_2}{1-p_1},$$

et, pour tout $\beta \leqq \beta_0$,

$$G(\beta)=\int_1^p \frac{\beta_0\,du}{\mu(u-p_1)(u-p_2)}=\frac{\beta_0}{\mu(p_1-p_2)}\log\frac{(1-p_2)(p-p_1)}{(1-p_1)(p-p_2)}$$

$$=G(\beta_0)+\frac{\beta_0}{\mu(p_1-p_2)}\log\frac{p-p_1}{p-p_2}.$$

En posant $\alpha=\mu(p_1-p_2)/\beta_0$, nous obtenons

$$p=\frac{p_1\,e^{\alpha(G(\beta_0)-G(\beta))}-p_2}{e^{\alpha(G(\beta_0)-G(\beta))}-1}. \tag{3.19}$$

Nous passons maintenant à la majoration de $\hat{m}$: posons

$$M_1=\int_1^\infty\left(\log(1+x)-\frac{x}{1+x}\right)\frac{du}{u^2} \quad \text{et} \quad M_2=\int_1^\infty \frac{\beta_u'(u-1)}{u}\,du.$$

Un calcul montre que:

$$M_1=\log\frac{\beta_0\,\alpha}{p_1-p_2}-1-\frac{p_1-p_2}{\beta_0\,\alpha p_1 p_2}+\frac{p_1-1}{p_1}\left(1-\frac{1}{\beta_0\,\alpha p_1}\right)\log(1-p_1)$$

$$+\frac{p_2-1}{p_2}\left(1+\frac{1}{\beta_0\,\alpha p_2}\right)\log(1-p_2).$$

Calcul de M_2:

$$M_2=\int_1^\infty \frac{\beta_u'(u-1)}{u}\,du=\int_0^{\beta_0}\frac{p(\beta)-1}{p(\beta)}\,d\beta.$$

D'après l'égalité (3.19), nous avons

$$\frac{p-1}{p}(\beta)=\frac{p_2-1}{p_2}\,\frac{(1-e^{-\alpha G(\beta)})}{1+\delta\,e^{-\alpha G(\beta)}}.$$

avec $\delta=-\dfrac{p_1}{p_2}e^{\alpha G(\beta_0)}>0$, d'où

$$M_2=\frac{p_2-1}{p_2}\int_0^{\beta_0}\frac{1-e^{-\alpha G(\beta)}}{1+\delta\,e^{-\alpha G(\beta)}}\,d\beta.$$

si on fait le changement de variable: $u=\dfrac{\beta}{\beta_0}$, on obtient

$$M_2=\beta_0\frac{p_2-1}{p_2}\int_0^1\frac{1-e^{-\alpha G(u\beta_0)}}{1+\delta\,e^{-\alpha G(u\beta_0)}}\,du.$$

En remarquant que

1) Puisque la fonction $G(\beta)$ est convexe et $G(0)=0$, on a, pour tout $u\in(0,1)$, $G(u\beta)\leqq uG(\beta)$;

2) la fonction $x\to\dfrac{1-e^{-\alpha x}}{1+\delta e^{-\alpha x}}$ est croissante sur les $x\geqq 0$, on obtient:

$$\begin{aligned}M2&=\beta_0\frac{p_2-1}{p_2}\int_0^1\frac{1-e^{-\alpha G(u\beta_0)}}{1+\delta e^{-\alpha G(u\beta_0)}}du\\&\leqq\beta_0\frac{p_2-1}{p_2}\int_0^1\frac{1-e^{-\alpha uG(\beta_0)}}{1+\delta e^{-\alpha uG(\beta_0)}}du\\&=\frac{\beta_0}{\alpha G(\beta_0)}\left[\frac{1-p_1}{p_1}\log(1-p_1)+\frac{p_2-1}{p_2}\log(1-p_2)\right].\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}\hat{m}(\beta_0)\leqq\beta_0&\left[\log\left(\frac{\beta_0\alpha}{p_1-p_2}\right)-1-\frac{p_1-p_2}{\beta_0\alpha p_1p_2}+\frac{p_1-1}{p_1}\left(1-\frac{1}{\beta_0\alpha p_1}\right)\log(1-p_1)\right.\\&\left.+\frac{p_2-1}{p_2}\left(1+\frac{1}{\beta_0\alpha p_2}\right)\log(1-p_2)\right]\\&+d\frac{\beta_0}{\alpha G(\beta_0)}\left[\frac{1-p_1}{p_1}\log(1-p_1)+\frac{p_2-1}{p_2}\log(1-p_2)\right].\end{aligned}$$

En remplaçant dans cette dernière inégalité $p_2=1-\tau$, $p_1=1-e^{-\tau}$, nous obtenons le résultat annoncé en faisant tendre τ vers l'infini. □

Remarque. — En remarquant, comme pour la minoration, que

$$\begin{aligned}\hat{m}(\beta_0)&=\int_1^\infty\left[\log(1+x)-\frac{x}{1+x}+d\beta_p'(p-1)p\right]\frac{dp}{p^2}\\&\geqq\int_1^\infty\left[\log(1+x)-\frac{x}{1+x}\right]\frac{dp}{p^2},\end{aligned}$$

nous sommes conduits au calcul de variations résolu par [BM] pour le semi-groupe de la chaleur. Nous obtenons alors la meilleure solution que nous pouvons espérer:

$$4G(\beta_0)e^{-4(G(\beta_0)/nc)}\leqq\hat{m}(\beta_0)$$

où c est la constante qui intervient dans l'inégalité de Sobolev initiale sous μ_0.

Ces encadrements permettent de donner quelques précisions sur le comportement des trajectoires du processus. Ainsi, par exemple, une conséquence immédiate est la suivante: considérons le cas d'une variété riemannienne compacte connexe, soit A une partie de **E** et notons $\delta=\inf_{x\in A}U(x)$

alors

$$P(X_t \in A) \leqq \frac{K \ln^n t}{t^{\delta/\Gamma}}.$$

Supposons que A est une partie de **E** telle que

$$\inf_{x \in \partial A} U(x) > \Gamma,$$

soit B un voisinage de A vérifiant

$$\inf_{x \in B \setminus A} U(x) > \Gamma \qquad \text{et} \qquad \inf_{x \in B} U(x) > 0$$

enfin soit ϕ une fonction C^∞ telle que $\forall x \in A$, $\phi(x) = 1$ et $\forall x \in B^c$, $\phi(x) = 0$, alors $\phi(X_t)$ est une semi martingale dont la partie à variation finie s'écrit

$$\int_0^t G_s\, ds \qquad \text{avec} \quad |G_t| \leqq \beta(t)\, \chi_{B \setminus A}(X_t).$$

Grâce à la majoration précédente $\phi(X_t)$ est uniformément intégrable, et donc $\phi(X_t) \to 0$ quand $t \to \infty$. Ceci montre que $\tau = \sup\{t/X_t \in A\} < \infty$ ps.

La minoration montre que $\mathbb{E}(\tau) = \infty$. Soit $A_{\delta'} = \{x \in A/U(x) < \delta' < \Gamma\}$ et soit τ' le temps de séjour dans $A_{\delta'}$. Par construction $\tau' < \tau$ et

$$\mathbb{E}(\tau') = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \chi_{A_{\delta'}}(X_s)\, ds\right) \geqq K \int_0^\infty \frac{\ln^{n/2}(1+t)}{(1+t)^{\delta'/\Gamma}}\, ds = +\infty.$$

Il est certainement possible en utilisant ces encadrements d'obtenir des renseignements beaucoup plus précis.

RÉFÉRENCES

[B1] D. Bakry, Weak Sobolev Inequalities, *Stochastic Analysis and Applications*, Birkhäuser, Boston, 1991, p. 63-81, édité par A. B. Cruzeiro et J. C. Zambrini.

[B2] D. Bakry, Inégalités de Sobolev faibles: un critère Γ_2, *Séminaire de Probabilités XXV*, *Lecture Notes in Math.*, vol. **1485**, 1991, Springer-Verlag, p. 234-261.

[BM] D. Bakry et D. Michel, Inégalités de Sobolev et minorations du semi groupe de la chaleur, *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, vol. **XI**, n° 2, 1990, p. 23-66.

[C] O. Catoni, *Rough Large Deviation Estimates for Simulated Annealing*, Preprint, 1990.

[CS] E. Carlen et D. W. Stroock, *Hypercontractivity, Ultracontractivity, Sobolev Inequalities and all that*, Preprint, 1984.

[D] E. B. Davies, *Heat Kernels and Spectral Theory*, Cambridge University Press, Berlin-Heidelberg-New York, 1989.

[DS] J. D. Deuschel et D. W. Stroock, *Large Deviations*, Academic Press, Berlin-Heidelberg-New York, 1989.

[G] L. Gross, Logarithmic Sobolev Inequalities, *Amer. J. Math.*, vol. **97**, 1976, p. 1061-1083.

[HKS] R. A. HOLLEY, S. KUSUOKA, et D. W. STROOCK, Asymptotics of the Spectral Gap with Applications to the Theory of Simulated Annealing, *J. Funct. Anal.*, vol. **83**, 1989, p. 333-347.

[HS] R. A. HOLLEY et D. W. STROOCK, Annealing via Sobolev Inequalities, *Commun. Math. Phys.*, vol. **115**, 1988, p. 553-569.

[M] L. MICLO, *Évolution de l'énergie libre. Application à l'étude de la convergence des algorithmes du recuit simulé*, Thèse Université de Paris-VI, 1991.

[SV] D. W. STROOCK et S. R. S. VARADHAN, *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer-Verlag, 1979.

(*Manuscrit reçu le* 14 *septembre* 1992;
révisé le 11 *février* 1993.)