

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

WENDELIN WERNER

Sur les singularités des temps locaux d'intersection du mouvement brownien plan

Annales de l'I. H. P., section B, tome 29, n° 3 (1993), p. 391-418

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1993__29_3_391_0

© Gauthier-Villars, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur les singularités des temps locaux d'intersection du mouvement brownien plan

par

Wendelin WERNER

C.N.R.S., Laboratoire de Probabilités,
Université Paris-VI,
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05
France

RÉSUMÉ. — En utilisant l'approche de la renormalisation de Dynkin, nous établissons un développement asymptotique des temps locaux d'auto-intersection d'ordre p du mouvement brownien plan en un point $y \in (\mathbb{R}^2)^{p-1}$, lorsque une ou plusieurs coordonnées de y tendent vers 0.

ABSTRACT. — Using Dynkin's approach to renormalization, we obtain an asymptotic expansion for the behaviour of the p -multiple self-intersection local time of a planar Brownian motion at a point $y \in (\mathbb{R}^2)^{p-1}$, when one or several coordinates of y go to 0.

0. INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude des singularités des temps locaux d'intersection de multiplicité quelconque associés à un mouvement brownien plan. Ce sujet a fait l'objet de nombreux travaux récents (voir notamment [D1], [D3], [LG1], [R2], [RY] et [Y]).

Classification A.M.S. : 60J65, 60J55.

Nous considérons un mouvement brownien plan $(B_t, t \geq 0)$ issu de 0. Soit ζ un temps exponentiel indépendant de B , de paramètre $\lambda > 0$. On note G la fonction de Green du mouvement brownien tué en ζ . Pour tout entier $q \geq 1$ et pour tout $z = (z_1, \dots, z_q) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})^q$, le temps local d'intersection en z est défini formellement par

$$\alpha_q(z) = \int_{0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_q < \zeta} \delta_{z_1}(B_{t_1} - B_{t_0}) \dots \delta_{z_q}(B_{t_q} - B_{t_{q-1}}) dt_0 \dots dt_q.$$

On peut donner un sens à une telle écriture en remplaçant les masses de Dirac par des approximations bien choisies (par exemple $\delta_y^\varepsilon(\cdot) = (\pi\varepsilon^2)^{-1} \mathbf{1}_{\mathcal{D}(y, \varepsilon)}(\cdot)$ où $\mathcal{D}(y, \varepsilon)$ désigne le disque de centre y et de rayon ε).

On peut aussi caractériser la famille $(\alpha_q(z), z \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})^q)$ par la formule de densité de temps d'occupation suivante valable pour toute fonction f mesurable bornée définie sur $(\mathbb{R}^2)^q$

$$\begin{aligned} \int_{0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_q < \zeta} f(B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_q} - B_{t_{q-1}}) dt_0 \dots dt_q \\ = \int_{(\mathbb{R}^2)^q} f(z) \alpha_q(z) dz_1 \dots dz_q. \end{aligned}$$

Il est souvent commode d'écrire α_q sous la forme suivante

$$\alpha_q(z) = \int_{\mathbb{R}^2} dy \int_{0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_q < \zeta} dt_0 \dots dt_q \delta_y(B_{t_0}) \delta_{y+x_1}(B_{t_1}) \dots \delta_{y+x_q}(B_{t_q})$$

où (on conservera cette notation dans la suite) $x_i = \sum_{j=1}^i z_j$ pour $i \in \{1, \dots, q\}$. A nouveau, on peut donner un sens à cette écriture en remplaçant $\delta_y(B_{t_i}) dt_i$ par $\delta_y^\varepsilon(B_{t_i}) dt_i$ ou par le temps local $l_y^\varepsilon(dt_i)$ du mouvement brownien B sur le cercle de centre y et de rayon ε (cette approximation correspond au remplacement de la masse de Dirac en y par la mesure uniforme sur le cercle de centre y et de rayon ε). On montre alors que $\alpha_q(z)$ est la limite dans L^2 des expressions

$$\int_{\mathbb{R}^2} dy \int_{0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_q < \zeta} l_y^\varepsilon(dt_0) \dots l_{y+x_q}^\varepsilon(dt_q)$$

(voir par exemple les méthodes de [LG4], chapitre 10).

Lorsque z a au moins une coordonnée nulle, on ne peut pas définir $\alpha_q(z)$ par continuité car $\alpha_q(z')$ tend vers l'infini en probabilités lorsque z' tend vers z dans $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})^q$ (ce résultat connu découle par exemple du théorème 11 de cet article). Le cas $z = (0, \dots, 0)$ a été beaucoup étudié. On peut définir dans ce cas une forme renormalisée notée γ_q de $\alpha_q(0)$.

L'introduction de cette renormalisation est due à Varadhan [V] dans le cas $q=1$ (c'est le cas des points doubles) et à Dynkin ([D1], [D2], [D3]) dans le cas général (voir aussi les travaux de Rosen [R1], [R2]). Pour définir γ_q , on peut utiliser l'approximation suivante

$$\gamma_q^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^2} dy \int_{0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_q < \zeta} l_y^\varepsilon(dt_0) \prod_{j=1}^{j=q} (l_y^\varepsilon(dt_j) - G(\varepsilon) \delta_{t_{j-1}}(dt_j))$$

(voir par exemple le cours de Le Gall [LG4], chapitre 10). Les temps locaux d'intersection renormalisés interviennent dans divers théorèmes limites pour le mouvement brownien ou les marches aléatoires planes : voir notamment [CFR], [D2], [LG2], [LG3].

Le but de cet article est d'abord de construire un temps local d'intersection renormalisé en tout $z \in (\mathbb{R}^2)^q$ dont au moins une coordonnée est nulle. Cette renormalisation nous permettra ensuite d'étudier les singularités du temps local α_q . Décrivons brièvement la construction du temps local renormalisé. On fixe z et on définit $I = \{j \in \{1, \dots, q\}, z_j \neq 0\}$ et $J = \{j \in \{1, \dots, q\}, z_j = 0\}$. On définit alors $\gamma_j(z)$ comme limite dans L^2 lorsque ε tend vers 0 des approximations

$$\gamma_j^\varepsilon(z) = \int_{\mathbb{R}^2} dy \int_{0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_q < \zeta} l_y^\varepsilon(dt_0) \times \prod_{j \in J} (l_{y+x_j}^\varepsilon(dt_j) - h(\varepsilon) \delta_{t_{j-1}}(dt_j)) \prod_{j \in I} l_{y+x_j}^\varepsilon(dt_j)$$

où $h(\varepsilon) = E_\varepsilon(l_0^\varepsilon(\zeta))$ est une fonction équivalente à G au voisinage de 0. Lorsque $z=0$, ce temps local renormalisé coïncide avec γ_q et lorsque toutes les coordonnées de z sont non-nulles on retrouve $\alpha_q(z)$.

Nous nous proposons ensuite d'utiliser les temps locaux d'intersection renormalisés pour étudier le comportement de $\alpha_q(z')$ lorsque z' est proche d'un élément z fixé de $(\mathbb{R}^2)^q$ ayant au moins une coordonnée nulle. Si

$$K = \{k_1, \dots, k_{|K|}\} \subset J$$

on définit $u_K = (u_{k_1}, \dots, u_{k_{|K|}})$ et $G(z_K) = \prod_{i=1}^{|K|} G(z_{k(i)})$ et on note $\gamma^K(z)$ le

temps local renormalisé en $z_1 \cup K$. On a alors le résultat suivant (théorème 11) pour tout vecteur z' de $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})^q$:

$$\frac{\alpha_q(z')}{G(z'_j)} = \sum_{K \subset J} \frac{\gamma^K(z)}{G(z'_K)} + R_z(z')$$

où R_z vérifie $E(R_z(z')^2) \leq C_z |z - z'|$ dès que $|z - z'| < \varepsilon$. Ce résultat généralise à l'ordre quelconque certains résultats de Rosen et Yor [RY]. Une

conséquence de ce développement est la continuité dans L^2 du processus $\left(\left(\prod_{i=1}^q G(z_i)^{-1} \right) \alpha_q(z), z \in (\mathbb{R}^2)^q \right)$ (corollaire 14).

Les résultats que nous obtenons dans L^2 peuvent probablement se généraliser à L^p pour p quelconque mais les démonstrations deviennent alors très lourdes. Par ailleurs, comme dans les travaux de Dynkin, la méthode employée ne nous donne des informations que sur les temps locaux à temps exponentiel, même si les résultats obtenus sont plausibles à temps constant.

Après la première rédaction de cet article, nous avons pris connaissance de l'article de Bass et Khoshnevisan [BK] qui introduit une renormalisation du temps local d'intersection par des méthodes de calcul stochastique. En réponse à une question du rapporteur, nous allons montrer dans une cinquième partie comment la combinaison des résultats de [BK] et des nôtres permet d'identifier la renormalisation introduite par [BK] avec la renormalisation de Dynkin.

Je tiens à remercier Jean-François Le Gall qui m'a proposé ce travail et dont les conseils lors de l'élaboration de cet article ont été précieux.

I. PRÉLIMINAIRES

On identifie souvent \mathbb{R}^2 au plan complexe. Le processus B est un mouvement brownien plan par rapport à une filtration (\mathcal{F}_t) , qui part de x sous la probabilité P_x .

1.1. Temps local sur un cercle

Soient y dans \mathbb{R}^2 et $r > 0$. On note $C(y, r)$ le cercle de centre y et de rayon r . Soit $L_y^r(t)$ le temps local au niveau r et à l'instant t de la semimartingale $|B_s - y|$. On pose $l_y^r(t) = (2\pi r)^{-1} L_y^r(t)$. Le processus $(l_y^r(t), t \geq 0)$ est par définition le temps local du mouvement brownien B sur le cercle $C(y, r)$. La mesure $l_y^r(dt)$ associée est portée par $\{t, B_t \in C(y, r)\}$. Une application du lemme de Kolmogorov permet de montrer l'existence d'une version continue en (r, y, t) de $l_y^r(t)$. A partir de maintenant nous considérerons uniquement cette version.

1.2. Propriétés de la fonction de Green

Soit λ un paramètre strictement positif fixé. On définit la fonction de Green de paramètre λ sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par

$$G_\lambda(y, z) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} p_s(y, z) ds$$

où p_s est la probabilité de transition du mouvement brownien plan (On rappelle que $p_s(y, z) = (2\pi s)^{-1} \exp[-|z-y|^2/(2s)]$). Comme $G_\lambda(y, z)$ ne dépend que de $|y-z|$, on notera parfois $G_\lambda(y-z) = G_\lambda(y, z)$.

On a l'expression explicite $G_\lambda(z) = \pi^{-1} K_0(\sqrt{2\lambda}|z|)$ où K_0 est la fonction de Bessel modifiée usuelle. Il en découle qu'au voisinage de zéro :

$$G_\lambda(z) = \frac{1}{\pi} \log \frac{1}{|z|} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} \log \frac{2}{\lambda} - \kappa \right) + O\left(|z|^2 \log \frac{1}{z}\right)$$

où κ est la constante d'Euler. Dans la suite, on notera $G = G_\lambda$ (le paramètre λ restera fixé). L'expression explicite de G conduit facilement à la majoration suivante : si $|y| \geq |z|$,

$$|G(y) - G(z)| \leq |z - y| g(z)$$

où par définition

$$g(z) = g(|z|) = C_g e^{-\beta|z|} \frac{1}{|z|} \left(1 + \log^+ \frac{1}{|z|} \right)$$

(C_g et β sont des constantes positives fixées et \log^+ désigne la partie positive du logarithme). Les fonctions g_λ^α pour $0 < \alpha < 2$ et toutes les puissances positives de G_λ sont intégrables sur \mathbb{R}^2 .

Soit ζ un temps exponentiel de paramètre λ , indépendant du mouvement brownien B . Alors pour tout X dans \mathbb{R}^2 , on a

$$E_X(I'_y(\zeta)) = \int_0^{2\pi} G(y - X + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Dans toute la suite on notera

$$h(\varepsilon) = E_\varepsilon(I_0^\varepsilon(\zeta)) = \int_0^{2\pi} G(\varepsilon(e^{i\theta} - 1)) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

1.3. Lemmes préliminaires

Nous allons avoir besoin dans la suite d'un certain nombre de résultats techniques concernant la fonction de Green et les temps locaux sur les cercles, que nous établissons dans ce paragraphe.

LEMME 1. — *Il existe des constantes Σ , C_0 et C_1 telles que pour tout couple $(\varepsilon, \varepsilon')$ dans $]0, \Sigma[$ qui vérifie $\varepsilon \leq 2\varepsilon' \leq 4\varepsilon$, pour tout couple (X, Y)*

dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ tel que $X \neq Y$ et pour toute variable aléatoire χ \mathcal{F}_0 -mesurable telle que p.s. $|X - \chi| \leq \varepsilon'$ on ait :

$$(1) \quad \left| E_x \left(\int_0^\zeta l_Y^\varepsilon(ds) \right) - G(Y - X) \right| \leq C_0 \sup(\varepsilon, \varepsilon') g \left(\frac{|Y - X|}{4} \right)$$

$$(2) \quad E_x \left(\int_0^\zeta l_Y^\varepsilon(ds) \right) \leq C_1 G \left(\frac{|Y - X|}{4} \right).$$

Preuve. — On peut se ramener au cas où χ une constante car Σ , C_0 et C_1 sont indépendantes de χ . On va étudier séparément les deux cas $|Y - X| > 4\varepsilon$ et $|Y - X| \leq 4\varepsilon$.

Premier cas. — On suppose que $|Y - X| > 4\varepsilon$; alors $|Y - X| > 2\varepsilon'$. On remarque que G et g sont décroissantes comme fonctions sur \mathbb{R}^+ . Pour (1):

$$\begin{aligned} \left| E_x \left(\int_0^\zeta l_Y^\varepsilon(ds) \right) - G(Y - X) \right| & \leq \int_0^{2\pi} |G(Y - \chi + \varepsilon e^{i\theta}) - G(Y - X)| \frac{d\theta}{2\pi} \\ & \leq 2(\varepsilon + \varepsilon') g \left(\frac{|Y - X|}{4} \right) \end{aligned}$$

d'après l'inégalité rappelée en 1.2, la décroissance de g sur \mathbb{R}^+ et car on a :

$$\forall \theta, \quad \left| \frac{Y - X}{4} \right| \leq |Y - \chi + \varepsilon e^{i\theta}|.$$

Pour (2), c'est le même argument :

$$E_x \left(\int_0^\zeta l_Y^\varepsilon(ds) \right) \leq \int_0^{2\pi} G(Y - \chi + \varepsilon e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \leq G \left(\frac{Y - X}{4} \right).$$

Deuxième cas. — On suppose maintenant que $|Y - X| \leq 4\varepsilon$; alors $|Y - X| \leq 8\varepsilon'$. Grâce aux développements de G et g au voisinage de 0, on peut choisir Σ inférieur à $(8\varepsilon)^{-4}$ tel que: $\forall \eta < 8\Sigma$

$$1 \leq \frac{1}{4} \log \frac{1}{\eta} \leq G(\eta) \leq \frac{1}{2} \log \frac{1}{\eta} \quad \text{et} \quad \frac{C_g}{2\eta} \log \frac{1}{\eta} \leq g(\eta)$$

On va utiliser plusieurs fois l'inégalité

$$E_x \left(\int_0^\zeta l_Y^\varepsilon(ds) \right) \leq E_{Y+\varepsilon} \left(\int_0^\zeta l_Y^\varepsilon(ds) \right)$$

qui est une simple application de la propriété de Markov forte au temps d'atteinte du cercle $C(Y, \varepsilon)$. On a

$$E_x \left(\int_0^\zeta I_Y^\varepsilon(ds) \right) \leq E_{Y+\varepsilon} \left(\int_0^\zeta I_Y^\varepsilon(ds) \right) = \int_0^{2\pi} G(\varepsilon(1-e^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi} \\ \leq \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|\varepsilon(1-e^{i\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi} = \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

On a utilisé ici le fait que

$$\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|1-e^{i\theta}|} \frac{d\theta}{2\pi} = 0.$$

Comme

$$\log \frac{1}{\varepsilon} \leq \frac{2\varepsilon}{C_g} g(\varepsilon) \leq \frac{2\varepsilon}{C_g} g\left(\left|\frac{Y-X}{4}\right|\right)$$

et

$$G(|Y-X|) \leq \log \frac{1}{|Y-X|} \leq \frac{4\varepsilon}{|Y-X|} \log \frac{1}{|Y-X|} \leq \frac{8\varepsilon}{C_g} g(|Y-X|) \\ \leq \frac{8\varepsilon}{C_g} g\left(\frac{|Y-X|}{4}\right)$$

on a (1).

Comme

$$\log \frac{1}{\varepsilon} \leq 4G(\varepsilon) \leq 4G\left(\frac{|Y-X|}{4}\right)$$

on a (2).

Le lemme 1 est ainsi démontré.

LEMME 2. — Pour tout entier $K > 0$, il existe une constante A_K telle que pour tout $(X_j)_{j \in \{0, \dots, K\}} \in (\mathbb{R}^2)^{K+1}$ et pour tout $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_K) \in \mathbb{R}^{K+1}$ qui vérifient :

- $X_j \neq X_{j-1}$ pour tout $j \in \{1, \dots, K\}$;
- $|X_0 - \chi_0| \leq \varepsilon_0$ p.s. où χ_0 est une variable aléatoire \mathcal{F}_0 -mesurable;
- $0 < \varepsilon_j < \Sigma$ et $\varepsilon_j \leq 2\varepsilon_{j'}$ pour tout $(j, j') \in \{0, \dots, K\}^2$;

on ait

$$\left| E_{\chi_0} \left(\int_0^\zeta I_{X_1}^{\varepsilon_1}(dt_1) \dots \int_{t_{K-1}}^\zeta I_{X_K}^{\varepsilon_K}(dt_K) \right) - \prod_{j=1}^K G(X_j - X_{j-1}) \right| \\ \leq A_K (\sup_j \varepsilon_j) F(X_0, \dots, X_K)$$

où F est définie par

$$F(X_0, \dots, X_K) = \sum_{j=1}^K \left(g\left(\left|\frac{X_j - X_{j-1}}{4}\right|\right) \prod_{i \neq j} G\left(\frac{X_i - X_{i-1}}{4}\right) \right).$$

Preuve. — C'est une simple récurrence sur K à partir du lemme 1-(1).

LEMME 3. — *Pour tout couple d'entiers $(N, N') \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times \mathbb{N}$:*

(1) *il existe une constante k_N telle que pour tout*

$$(A, B) = (A_1, \dots, A_N, B_1, \dots, B_N) \in (\mathbb{R}^2)^{2N}$$

on ait:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy dy' G(y) \left(\prod_{i=1}^N G(y' - y + A_i) - \prod_{i=1}^N G(y' - y + B_i) \right) \right| \leq k_N |A - B|;$$

(2) *il existe une constante $k'_{N'}$ telle que pour tout $(A_0, \dots, A_{N'})$ dans $(\mathbb{R}^2)^{N'+1}$ on ait:*

$$\int_{\mathbb{R}^2} dy g(y + A_0) \prod_{i=1}^{N'} G(y + A_i) \leq k'_{N'};$$

(3) *pour tout $D = (D_1, \dots, D_N) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})^N$, il existe ε_D et k''_D positifs tels que, pour tout (E, F) dans $\mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N}$ tels que $|E - D| \leq \varepsilon_D$ et $|F - D| \leq \varepsilon_D$, on ait:*

$$\left| \prod_{i=1}^N G(E_i) - \prod_{i=1}^N G(F_i) \right| \leq k''_D |E - F|.$$

Preuve. — On va tout d'abord démontrer (2) en utilisant l'inégalité de Hölder. On va supposer que $N' \neq 0$ (le cas $N' = 0$ est immédiat). On a:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} dy g(y + A_0) \prod_{i=1}^{N'} G(y + A_i) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} dy (g(y + A_0)^{3/2})^{2/3} \left(\prod_{i=1}^{N'} G(y + A_i)^{3N'} \right)^{1/(3N')} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} dy g(y + A_0)^{3/2} \right)^{2/3} \left(\prod_{i=1}^{N'} \int_{\mathbb{R}^2} dy G(y + A_i)^{3N'} \right)^{1/(3N')} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} dy g(y)^{3/2} \right)^{2/3} \left(\int_{\mathbb{R}^2} dy G(y)^{3N'} \right)^{1/3}. \end{aligned}$$

Chacune de ces intégrales converge, d'où (2).

On va maintenant en déduire (1); on pose $y'' = y' - y$ et alors:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy dy' G(y) \left| \prod_{i=1}^N G(y' - y + A_i) - \prod_{i=1}^N G(y' - y + B_i) \right| \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} G(y) dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} dy'' \left| \prod_{i=1}^N G(y'' + A_i) - \prod_{i=1}^N G(y'' + B_i) \right| \right). \end{aligned}$$

Mais on a :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^2} dy'' \left| \prod_{i=1}^N G(y'' + A_i) - \prod_{i=1}^N G(y'' + B_i) \right| \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} dy'' \left(\prod_{i<j} G(y'' + A_i) \right) \left(\prod_{i>j} G(y'' + B_i) \right) \\ & \quad \times |G(y'' + A_j) - G(y'' + B_j)| \\ & \leq |A - B| \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} dy'' \left(\prod_{i<j} G(y'' + A_i) \right) \left(\prod_{i>j} G(y'' + B_i) \right) \\ & \quad \times |g(y'' + A_j) + g(y'' + B_j)| \\ & \leq |A - B| N 2 k'_N. \end{aligned}$$

(1) est donc démontré.

On va maintenant démontrer (3); on pose

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \inf_i |D_i|;$$

si $|E - D| < \varepsilon$ et $|F - D| < \varepsilon$ alors pour tout i , $|E_i| > \varepsilon$ et $|F_i| > \varepsilon$ et donc :

$$\begin{aligned} & \left| \prod_{i=1}^M G(E_i) - \prod_{i=1}^M G(F_i) \right| \\ & \leq |E - F| \sum_{j=1}^M \left(\left(\prod_{i<j} G(E_i) \right) \left(\prod_{i>j} G(F_i) \right) |g(E_j) + g(F_j)| \right) \\ & \leq 2 M G(\varepsilon)^{M-1} g(\varepsilon) |E - F|. \end{aligned}$$

On a alors (3) pour $k''_D = 2 M G(\varepsilon)^{M-1} g(\varepsilon)$.

COROLLAIRE 4. — Pour tous $M, N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout

$$D = (D_1, \dots, D_M) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})^M$$

il existe des constantes $k'''_{D,N}$ et ε_D positives telles que pour tous $E, F \in (\mathbb{R}^2)^M$ vérifiant $|E - D| < \varepsilon$ et $|F - D| < \varepsilon$, et pour tous $A, B \in (\mathbb{R}^2)^N$ on ait :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy dy' G(y) \right. \\ & \quad \left. \left(\prod_{i=1}^N G(y' - y + A_i) \prod_{i=1}^M G(E_i) - \prod_{i=1}^N G(y' - y + B_i) \prod_{i=1}^M G(F_i) \right) \right| \\ & \leq k'''_{D,N} (|A - B| + |E - F|). \end{aligned}$$

Preuve. — Ce résultat est une simple combinaison des résultats (1) et (3) du lemme 3, en utilisant le fait que

$$\int_{\mathbb{R}^2} dy G(y) \prod_{i=1}^N G(y + A_i)$$

est majorée indépendamment des A_i .

II. CONSTRUCTION DU TEMPS LOCAL RENORMALISÉ $\gamma_J(z)$

2. 1. Notations

Nous reprenons la définition de $\gamma_j^\varepsilon(z)$ donnée dans l'introduction. Afin de montrer la convergence dans L^2 de $\gamma_j^\varepsilon(z)$ lorsque ε tend vers 0 et en vue d'applications futures nous allons calculer

$$E(\gamma_{j^1}^{\varepsilon^1}(z^1)\gamma_{j^2}^{\varepsilon^2}(z^2))$$

où (z^1, z^2) appartient à $\mathbb{R}^{q_1} \times \mathbb{R}^{q_2}$ et où, pour $l=1, 2$

$$J^l = \{j \in \{1, \dots, q_l\}, z_j^l = 0\} \quad \text{et} \quad I^l = \{j \in \{1, \dots, q_l\}, z_j^l \neq 0\}.$$

Nous n'excluons pas le cas où J^1 ou J^2 serait vide.

Le théorème de Fubini conduit à

$$E(\gamma_{j^1}^{\varepsilon^1}(z^1)\gamma_{j^2}^{\varepsilon^2}(z^2)) = E\left[\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \int_{t_0^1 \leq \dots \leq t_{q_1}^1 < \zeta, t_0^2 \leq \dots \leq t_{q_2}^2 < \zeta} \prod_{l=1, 2} \left(I_{y^l}^{\varepsilon^l}(dt^l) \prod_{j \in I^l} (I_{y^l + x_j^l}^{\varepsilon^l}(dt_j^l)) \prod_{j \in J^l} (I_{y^l + x_j^l}^{\varepsilon^l}(dt_j^l) - h(\varepsilon^l) \delta_{t_{j-1}^l}(dt_j^l)) \right)\right]$$

où (cette notation sera conservée dans la suite de l'article) $x_j^l = \sum_{i=1}^j z_i^l$. On

pose $N = q_1 + q_2 + 2$.

Pour pouvoir exploiter les propriétés des temps locaux d'intersection et la définition de h , il faut ordonner $t_0^1, \dots, t_{q_1}^1, t_0^2, \dots, t_{q_2}^2$. Cela permettra d'écrire l'espérance ci-dessus comme une somme de termes que nous étudierons séparément. On décrira chaque ordre par un élément de Φ^{q_1, q_2} , défini comme l'ensemble des applications φ de $\{1, \dots, N\}$ dans $\{1, 2\}$ telles que $\text{card}(\varphi^{-1}\{1\}) = q_1 + 1$ et $\text{card}(\varphi^{-1}\{2\}) = q_2 + 1$. A chaque application φ de Φ^{q_1, q_2} , on associe l'application ψ définie sur $\{1, \dots, N\}$ par $\psi(i) = \text{card}\{i' < i, \varphi(i') = \varphi(i)\}$. L'ordre associé à φ est alors le suivant :

$$t_{\psi(1)}^\varphi \leq \dots \leq t_{\psi(i)}^\varphi \leq t_{\psi(i+1)}^\varphi \leq \dots \leq t_{\psi(N)}^\varphi < \zeta.$$

On notera alors pour $i \in \{1, \dots, N\}$: $s_i = t_{\psi(i)}^\varphi$, $Y_i = y^\varphi(i) + x_{\psi(i)}^\varphi$ et $\varepsilon_i = \varepsilon^\varphi(i)$, et alors $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_N < \zeta$. Il faut interpréter Y_i comme le point au voisinage duquel on se trouve au temps s_i . Par convention, on prendra aussi $Y_0 = 0$.

On note $\mathcal{U} = \{i \in \{1, \dots, N\}, \psi(i) \in J^\varphi(i)\}$ et $\mathcal{W} = \{1, \dots, N\} \setminus \mathcal{U}$. \mathcal{U} est l'ensemble des i pour lesquels il y a une contribution $\delta(ds_i)$ dans l'expression de $E(\gamma_{j^1}^{\varepsilon^1}(z^1)\gamma_{j^2}^{\varepsilon^2}(z^2))$. Pour $i \in \mathcal{U}$, on pose

$$A_i = \sup\{i' < i, \varphi(i') = \varphi(i)\}.$$

Avec ces notations :

$$\begin{aligned}
 E \left[\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \int_{t_{\psi}^{\phi(1)} \leq \dots \leq t_{\psi}^{\phi(N)} < \zeta} \right. \\
 \left. \prod_{l=1,2} \left(I_{y^l}^{\varepsilon^l}(dt_0^l) \prod_{j \in J^1} (I_{y^l+x_j^l}^{\varepsilon^l}(dt_j^l)) \prod_{j \in J^2} (I_{y^l+x_j^l}^{\varepsilon^l}(dt_j^l) - h(\varepsilon^l) \delta_{t_{j-1}^l}(dt_j^l)) \right) \right] \\
 = E \left[\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \int_{s_1 \leq \dots \leq s_N < \zeta} \right. \\
 \left. \left(\prod_{i \in \mathcal{W}} I_{Y_i}^{\varepsilon_i}(ds_i) \prod_{i \in \mathcal{U}} (I_{Y_i}^{\varepsilon_i}(ds_i) - h(\varepsilon_i) \delta_{s_{A_i}}(ds_i)) \right) \right].
 \end{aligned}$$

On note \mathcal{B}_ϕ cette espérance. On établira ultérieurement (c'est le corollaire 7) que

$$E(\gamma_{j_1}^{\varepsilon^1}(z^1) \gamma_{j_2}^{\varepsilon^2}(z^2)) = \sum_{\phi \in \Phi^{q_1, q_2}} \mathcal{B}_\phi.$$

Cette inégalité n'est pas immédiate car les ordres obtenus lorsque ϕ varie dans Φ^{q_1, q_2} ne sont pas disjoints.

2.2. Une simplification

Nous allons maintenant étudier \mathcal{B}_ϕ en utilisant les lemmes établis dans la partie 2. L'argument-clé est que, grâce à la renormalisation, les seuls ordres qui vont donner des contributions \mathcal{B}_ϕ non-négligeables lorsque ε^1 et ε^2 tendent vers 0, sont ceux pour lesquels tous les t_j^1 et t_{j-1}^1 si $j \in J^1$ (respectivement t_j^2 et t_{j-1}^2 si $j \in J^2$) sont séparés au moins par un t_j^2 (resp. t_j^1). Pour ces ordres, on va montrer que la contribution des masses de Dirac $\delta_{s_{A_i}}(ds_i)$ est nulle. Dans toute cette partie ϕ est un ordre fixé. On va tout d'abord établir une propriété qui simplifie l'expression de \mathcal{B}_ϕ .

PROPRIÉTÉ 5. — Si on note $\mathcal{U}' = \{i \geq 2, \phi(i) = \phi(i-1)\}$ et $\psi(i) \in J^{\phi(i)} \subset \mathcal{U}$ et $\mathcal{W}' = \{1, \dots, N\} \setminus \mathcal{U}'$, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_\phi = E \left[\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \int_{s_1 \leq \dots \leq s_N < \zeta} \right. \\
 \left. \left(\prod_{i \in \mathcal{W}'} I_{Y_i}^{\varepsilon_i}(ds_i) \prod_{i \in \mathcal{U}'} (I_{Y_i}^{\varepsilon_i}(ds_i) - h(\varepsilon_i) \delta_{s_{A_i}}(ds_i)) \right) \right].
 \end{aligned}$$

Cela signifie que l'on peut enlever les masses de Dirac $\delta_{s_{A_i}}(ds_i)$ lorsque $A_i \neq i-1$. Pour démontrer cette propriété on va établir le lemme suivant :

LEMME 6. — Si l'on pose pour tout $i_0 \in \{1, \dots, N\}$,

$$\mathcal{W}'_{i_0} = \{i \leq i_0, A_i \neq i-1, i \in \mathcal{U}\}$$

et

$$\mathcal{C}_{i_0} = \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \int_{s_1 \leq \dots \leq s_N < \zeta} \left(\prod_{i \in \mathcal{W} \cup \mathcal{W}_{i_0}} l_{Y_i}^{\varepsilon_i}(ds_i) \right) \prod_{i \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{W}_{i_0}} (l_{Y_i}^{\varepsilon_i}(ds_i) - h(\varepsilon_i) \delta_{s_{A_i}}(ds_i)) \right]$$

alors pour tout $i_0 \in \{2, \dots, N\}$ on a :

$$\mathcal{C}_{i_0} = \mathcal{C}_{i_0-1}.$$

Preuve du lemme 6. — Soit $i_0 > 1$ tel que $i_0 \in \mathcal{U}$. Si $A_{i_0} = i_0 - 1$ alors $\mathcal{C}_{i_0} = \mathcal{C}_{i_0-1}$ par définition. Si $A_{i_0} \neq i_0 - 1$ alors $i_0 \in \mathcal{W}_{i_0}$ et :

$$\mathcal{C}_{i_0} - \mathcal{C}_{i_0-1} = \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \int_{s_1 \leq \dots \leq s_N < \zeta} h(\varepsilon_{i_0}) \delta_{s_{A_{i_0}}}(ds_{i_0}) \times \left(\prod_{i \in \mathcal{W} \cup \mathcal{W}_{i_0-1}} l_{Y_i}^{\varepsilon_i}(ds_i) \right) \prod_{i \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{W}_{i_0}} (l_{Y_i}^{\varepsilon_i}(ds_i) - h(\varepsilon_i) \delta_{s_{A_i}}(ds_i)) \right].$$

L'intégrale en $ds_1 \dots ds_n$ est portée par les (s_i) tels que

$$s_{i_0} = s_{i_0-1} = \dots = s_{A_{i_0}+1} = s_{A_{i_0}}.$$

On pose $i_1 = A_{i_0} + 1$. On a $A_{i_1} \neq i_1 - 1$ si $i_1 \in \mathcal{U}$, puisque $i_1 - 1 = A_{i_0}$. Donc $i_1 \in \mathcal{W} \cup \mathcal{W}_{i_0-1}$. L'intégrale en ds_{i_1} dans $\mathcal{C}_{i_0} - \mathcal{C}_{i_0-1}$ s'écrit alors

$$\int_{s_{i_1-1}}^{\zeta} \mathbf{1}_{(s_{i_1} = s_{i_1-1})} l_{Y_{i_1}}^{\varepsilon_{i_1}}(ds_{i_1}) H(s_{i_1}) = 0$$

où H est une fonction de s_{i_1} . Cette intégrale est nulle car le temps local ne charge pas les points; le lemme est ainsi démontré.

La propriété 5 découle immédiatement du lemme : $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_N$.

On peut maintenant revenir sur le résultat annoncé ci-dessus.

COROLLAIRE 7. — On a $\mathbb{E}(\gamma_j^{\varepsilon_1}(z^1) \gamma_j^{\varepsilon_2}(z^2)) = \sum_{\varphi \in \Phi^{q_1, q_2}} \mathcal{B}_{\varphi}$.

Preuve. — Soient φ et φ' deux ordres distincts. On pose $i_0 = \inf \{i, \varphi'(i) \neq \varphi(i)\}$. On a $s_{i_0} = l_{\Psi}^{\varphi}(i_0)$ et $l_{\Psi}^{\varphi'}(i_0) = s_{i_0+k}$ pour un entier $k \geq 1$, où les s_i sont définis par rapport à φ (on définit s'_i par rapport à φ'). Alors,

$$\{s_1 \leq \dots \leq s_N\} \cap \{s'_1 \leq \dots \leq s'_N\} \subset \{s_1 \leq \dots \leq s_{i_0} = s_{i_0+1} = \dots = s_{i_0+k} \leq \dots \leq s_N\}.$$

Comme $\varphi(i_0+k) = \varphi'(i_0) \neq \varphi(i_0)$, il existe $i_1 \in \{i_0+1, \dots, i_0+k\}$ tel que $\varphi(i_1) \neq \varphi(i_1-1)$. Utilisons maintenant l'expression de la propriété 5 écrite

pour φ . L'intégrale par rapport à s_{i_1} dans

$$\int_{\{s_1 \leq \dots \leq s_N < \zeta\} \cap \{s'_1 \leq \dots \leq s'_N < \zeta\}} \left(\prod_{i \in \mathcal{W}'} l_{Y_i}^{\varepsilon_i}(ds_i) \right) \prod_{i \in \mathcal{W}'} (l_{Y_i}^{\varepsilon_i}(ds_i) - h(\varepsilon_i) \delta_{s_{A_i}}(ds_i))$$

s'écrit alors $\int_{s_{i_1-1}}^{\zeta} \mathbf{1}_{(s_{i_1}=s_{i_1-1})} l_{Y_{i_1}}^{\varepsilon_{i_1}}(ds_{i_1}) H(s_{i_1})$ et est nulle car le temps local ne charge pas les points. Les contributions des intersections d'ordres distincts sont donc nulles et le corollaire est démontré.

2.3. Étude de \mathcal{B}_φ dans le cas $\mathcal{W}' \neq \emptyset$

Σ est la constante définie dans la partie 1.3. Dans la suite, on suppose que $\varepsilon^1 \leq 2\varepsilon^2 \leq 4\varepsilon^1 \leq \Sigma$. On va montrer dans cette partie que $\mathcal{B}_\varphi \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon^1 \rightarrow 0$ dès que $\mathcal{W}' \neq \emptyset$.

LEMME 8. — Lorsque $\mathcal{W}' \neq \emptyset$, il existe une constante $C_\varphi(z^1, z^2)$ indépendante de ε^1 et ε^2 telle que :

$$|\mathcal{B}_\varphi| \leq C_\varphi(z^1, z^2) \varepsilon_1 h\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right)^N$$

Preuve. — On suppose que $\mathcal{W}' \neq \emptyset$. Soit $i_0 = \sup \mathcal{W}'$. On va supposer que $\varphi(i_0) = 1$ (le cas $\varphi(i_0) = 2$ est identique). On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\varphi = E \left[\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \right. \\ \left. \int_{s_1 \leq \dots \leq s_{i_0-1} < \zeta} \left(\left(\prod_{i \in \mathcal{W}', i < i_0} l_{Y_i}^{\varepsilon_i}(ds_i) \right) \prod_{i \in \mathcal{W}', i < i_0} (l_{Y_i}^{\varepsilon_i}(ds_i) - h(\varepsilon_i) \delta_{s_{A_i}}(ds_i)) \right) \right. \\ \left. \times \int_{s_{i_0-1} \leq \dots \leq s_N < \zeta} (l_{Y_{i_0}}^{\varepsilon_{i_0}}(ds_{i_0}) - h(\varepsilon_{i_0}) \delta_{s_{i_0-1}}(ds_{i_0})) \left(\prod_{i=i_0+1}^N l_{Y_i}^{\varepsilon_i}(ds_i) \right) \right] \end{aligned}$$

On va remplacer la dernière intégrale (vue comme processus dépendant de s_{i_0-1}) par sa projection prévisible. Notons que $Y_{i_0} = Y_{i_0-1}$ (parce que $\varphi(i_0) = \varphi(i_0 - 1)$ et $\psi(i_0) \in J^{\varphi(i_0)}$).

D'après le lemme 2, on a sur $\{|B_{s_{i_0}} - Y_{i_0}| \leq \varepsilon_{i_0}\}$:

$$\begin{aligned} \left| E_{B_{s_{i_0}}} \left[\int_{0 \leq s_{i_0+1} \leq \dots \leq s_N < \zeta} \left(\prod_{i=i_0+1}^N l_{Y_i}^{\varepsilon_i}(ds_i) \right) \right] - \prod_{i=i_0+1}^N G(Y_i, Y_{i-1}) \right| \\ \leq (\sup_i \varepsilon_i) A_{N-i_0-1} F(Y_{i_0}, \dots, Y_N) \end{aligned}$$

et de même, sur $\{ |B_{s_{i_0-1}} - Y_{i_0}| \leq \varepsilon_{i_0} \}$:

$$\left| E_{B_{s_{i_0-1}}} \left[\int_{0 \leq s_{i_0+1} \leq \dots \leq s_N < \zeta} \left(\prod_{i=i_0+1}^N l_{Y_i}^{\varepsilon_i}(ds_i) \right) \right] - \prod_{i=i_0+1}^N G(Y_i, Y_{i-1}) \right| \leq (\sup_i \varepsilon_i) A_{N-i_0-1} F(Y_{i_0}, \dots, Y_N)$$

Alors, sur $\{ |B_{s_{i_0-1}} - Y_{i_0}| = \varepsilon_{i_0} \}$, on a :

$$\begin{aligned} & \left| E_{B_{s_{i_0-1}}} \left[\int_{0 \leq s_{i_0} \leq \dots \leq s_N < \zeta} \left(\prod_{i=i_0+1}^N l_{Y_i}^{\varepsilon_i}(ds_i) \right) (l_{Y_{i_0}}^{\varepsilon_{i_0}}(ds_{i_0}) - h(\varepsilon_{i_0}) \delta_0(ds_{i_0})) \right] \right| \\ & \leq \left| E_{B_{s_{i_0-1}}} \left[\int_{0 \leq s_{i_0} < \zeta} \left(\prod_{i=i_0+1}^N G(Y_i, Y_{i-1}) \right) (l_{Y_{i_0}}^{\varepsilon_{i_0}}(ds_{i_0}) - h(\varepsilon_i) \delta_{s_{i_0-1}}(ds_{i_0})) \right] \right| \\ & \quad + 2h(\varepsilon_{i_0}) (\sup_i \varepsilon_i) A_{N-i_0-1} F(Y_{i_0}, \dots, Y_N) \\ & = 2h(\varepsilon_{i_0}) (\sup_i \varepsilon_i) A_{N-i_0-1} F(Y_{i_0}, \dots, Y_N) \end{aligned}$$

puisque, grâce à la définition de h , on a :

$$E_{B_{s_{i_0-1}}} \left[\int_{0 \leq s_{i_0} < \zeta} \left(\prod_{i=i_0+1}^N G(Y_i, Y_{i-1}) \right) (l_{Y_{i_0}}^{\varepsilon_{i_0}}(ds_{i_0}) - h(\varepsilon_{i_0}) \delta_{s_{i_0-1}}(ds_{i_0})) \right] = 0$$

sur $\{ |B_{s_{i_0-1}} - Y_{i_0}| = \varepsilon_{i_0} \}$. Comme on intègre bien sur des s_{i_0-1} tels que $|B_{s_{i_0-1}} - Y_{i_0}| = \varepsilon_{i_0}$ on a donc :

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_\varphi| & \leq E \left[\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \int_{s_1 \leq \dots \leq s_{i_0-1} < \zeta} \left(\left(\prod_{i \in \mathcal{W}', i < i_0} l_{Y_i}^{\varepsilon_i}(ds_i) \right) \right. \right. \\ & \quad \times \left. \left(\prod_{i \in \mathcal{U}', i < i_0} (l_{Y_i}^{\varepsilon_i}(ds_i) + h(\varepsilon_i) \delta_{s_{A_i}}(ds_i)) \right) 2h(\varepsilon_{i_0}) \right. \\ & \quad \left. \left. \times (\sup_i \varepsilon_i) A_{N-i_0-1} F(Y_{i_0}, \dots, Y_N) \right) \right] \end{aligned}$$

On calcule maintenant cette dernière espérance en intégrant successivement par rapport à $s_{i_0-1}, \dots, s_2, s_1$ en distinguant les cas $i \in \mathcal{U}'$ et $i \in \mathcal{W}'$ et en utilisant les résultats du lemme 1. On a alors :

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_\varphi| & \leq A_{N-i_0-1} \left(\prod_{i \in \mathcal{U}'} 2h(\varepsilon_i) \right) (\sup_i \varepsilon_i) \\ & \quad \times \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 F(Y_{i_0}, \dots, Y_N) \prod_{\substack{i \in \mathcal{W}' \\ i < i_0}} G\left(\frac{Y_i - Y_{i-1}}{4}\right) \end{aligned}$$

Il reste maintenant à montrer que l'intégrale par rapport à y^1 et y^2 converge. On va pour cela utiliser le lemme 3. On a $Y_1 - Y_0 = y^\varphi^{(1)}$, $1 \in \mathcal{W}'$

et $i_0 > 1$ par définition. Lorsque $i \neq 1$,

$$Y_i - Y_{i-1} = y^\varphi(i) - y^{\varphi(i-1)} + x_\Psi^\varphi(i) - x_\Psi^\varphi(i-1)$$

On pose alors $u_1 = y^\varphi(1)$ et $u_2 = y^2 - y^1$ et on fait le changement de variables dans l'intégrale :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 F(Y_{i_0}, \dots, Y_N) \prod_{i \in \mathcal{W}', i < i_0} G\left(\frac{Y_i - Y_{i-1}}{4}\right) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} du_1 G\left(\frac{u_1}{4}\right) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} du_2 F(Y_{i_0}, \dots, Y_N) \prod_{i \in \mathcal{W}', 1 < i < i_0} G\left(\frac{Y_i - Y_{i-1}}{4}\right) \right) \end{aligned}$$

car $F(Y_{i_0}, \dots, Y_N) \prod_{i \in \mathcal{W}', 1 < i < i_0} G\left(\frac{Y_i - Y_{i-1}}{4}\right)$ ne dépend que de $y^2 - y^1$.

Lorsque $i_0 \neq N$, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} du_2 F(Y_{i_0}, \dots, Y_N) \prod_{i \in \mathcal{W}', 1 < i < i_0} G\left(\frac{Y_i - Y_{i-1}}{4}\right) \\ &= \sum_{j=i_0+1}^N \left(\int_{\mathbb{R}^2} du_2 \left(\prod_{\substack{i \in \mathcal{W}' \\ 1 < i < i_0}} G\left(\frac{Y_i - Y_{i-1}}{4}\right) \right) \right. \\ & \quad \left. \times \left(\prod_{\substack{i=i_0+1 \\ i \neq j}}^N G\left(\frac{Y_i - Y_{i-1}}{4}\right) \right) g\left(\frac{Y_j - Y_{j-1}}{4}\right) \right) \end{aligned}$$

Il reste à voir que l'on n'intègre pas des fonctions constantes. Soit $i_1 = \inf \{ i, \varphi(i) \neq \varphi(1) \}$; on a $i_1 \notin \mathcal{W}'$ car $\varphi(i_1) \neq \varphi(i_1 - 1)$ et donc

$$i_1 \in \{ i_0 + 1, \dots, N \} \cup (\{ 2, \dots, i_0 - 1 \} \cap \mathcal{W}')$$

et $Y_{i_1} - Y_{i_1-1} = \pm u_2 + C$ pour $C = C(z_1, z_2)$.

On est alors bien dans les conditions d'application du lemme 3-(2) et donc

$$\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} du_2 F(Y_{i_0}, \dots, Y_N) \prod_{i \in \mathcal{W}', 1 < i < i_0} G\left(\frac{Y_i - Y_{i-1}}{4}\right) < \infty$$

Lorsque $i_0 = N$, on a de la même manière :

$$\int_{\mathbb{R}^2} du_2 \prod_{i \in \mathcal{W}'} G\left(\frac{Y_i - Y_{i-1}}{4}\right) < \infty$$

en utilisant le fait que $i_1 = \inf \{ i, \varphi(i) \neq \varphi(1) \} \in \mathcal{W}'$.

La démonstration du lemme est ainsi achevée.

2.4. Étude de \mathcal{B}_φ dans le cas $\mathcal{U}' = \emptyset$

Dans ce cas, on a le résultat suivant :

LEMME 9. — Lorsque $\mathcal{U}' = \emptyset$ il existe une constante $C_\varphi(z^1, z^2)$ indépendante de ε_1 et ε_2 telle que

$$\left| \mathcal{B}_\varphi - \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \prod_{i=1}^N G(Y_i, Y_{i-1}) \right| \leq C_\varphi(z^1, z^2) \varepsilon_1 h\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right)^N$$

où par convention $Y_0 = 0$.

Preuve. — Lorsque $\mathcal{U}' = \emptyset$ on peut écrire

$$\mathcal{B}_\varphi = \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \int_{s_1 \leq \dots \leq s_N < \zeta} \prod_{i=1}^N l_{Y_i}^{\varepsilon_i}(ds_i) \right]$$

et alors d'après le lemme 2 :

$$\left| \mathcal{B}_\varphi - \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \prod_{i=1}^N G(Y_i, Y_{i-1}) \right| \leq A_N(\sup_i \varepsilon_i) \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} F(Y_0, \dots, Y_N) dy_1 dy_2$$

où F est définie comme dans le lemme 2. Comme dans le paragraphe précédent il faut étudier la convergence de

$$\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} F(Y_0, \dots, Y_N) dy_1 dy_2.$$

On pose $u_1 = y^\varphi(1)$ et $u_2 = y^2 - y^1$. Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} F(Y_0, \dots, Y_N) dy_1 dy_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^2} du_1 G\left(\frac{u_1}{4}\right) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} F(Y_1, \dots, Y_N) du_2 \right) + \left(\int_{\mathbb{R}^2} du_1 g\left(\frac{u_1}{4}\right) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} \prod_{i=2}^N G\left(\frac{Y_i - Y_{i-1}}{4}\right) du_2 \right).$$

Pour $i_1 = \inf \{i, \varphi(i) \neq \varphi(1)\}$ on a $|Y_{i_1} - Y_{i_1-1}| = |u_2 + a_{i_1}|$ où a_{i_1} est une constante. Alors (c'est le lemme 3),

$$\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} F(Y_0, \dots, Y_N) dy_1 dy_2 < \infty$$

et lemme 9 est démontré.

2.5. Le temps local renormalisé

On pose

$$\Theta_{j^1, j^2}^{q_1, q_2} = \{ \varphi \in \Phi^{q_1, q_2}, \forall i \in \{2, \dots, q_1 + q_2 + 2\}, \varphi(i) \neq \varphi(i-1) \text{ ou } \psi(i) \notin J^{\varphi(i)} \}.$$

On a en fait ici :

$$\Theta_{j^1, j^2}^{q_1, q_2} = \{ \varphi \in \Phi^{q_1, q_2}, \mathcal{W}' = \emptyset \}.$$

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 10.

(i) Il existe une constante $C(z^1, z^2)$ telle que, pour tous $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ tels que $\varepsilon^1 \leq 2\varepsilon^2 \leq 4\varepsilon^1 \leq \Sigma$ on a

$$\left| E(\gamma_{j^1}^{\varepsilon^1}(z^1) \gamma_{j^2}^{\varepsilon^2}(z^2)) - \sum_{\varphi \in \Theta_{j^1, j^2}^{q_1, q_2}} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \prod_{i=1}^N G(Y_i, Y_{i-1}) \right| \leq C \varepsilon^1 h \left(\frac{\varepsilon^1}{2} \right)^N.$$

(ii) Soit $z \in (\mathbb{R}^2)^q$ et $J = \{j \in \{1, \dots, q\}, z_j = 0\}$. Alors, $\gamma_j^\varepsilon(z)$ converge dans L^2 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

(iii) Sa limite $\gamma_j(z)$ vérifie alors

$$E(\gamma_{j^1}(z^1) \gamma_{j^2}(z^2)) = \sum_{\varphi \in \Theta_{j^1, j^2}^{q_1, q_2}} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \prod_{i=1}^N G(Y_i, Y_{i-1})$$

avec à nouveau la convention $Y_0 = 0$.

Remarque. — La notation Y_i cache le fait important que Y_i dépend de φ : rappelons que

$$Y_i = y^{\varphi(i)} + \sum_{r=1}^{\psi(i)} z_r^{\varphi(i)}.$$

Preuve. — (i) est une simple conséquence des lemmes 9 et 8 et du corollaire 7.

(ii) est une application de (i); on a en effet

$$E[(\gamma_j^\varepsilon(z) - \gamma_j^{\varepsilon/2}(z))^2] \leq 4C(z) \varepsilon h \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^N$$

et comme la série $\sum_n 2^{-n} h(2^{-(n+1)})^N$ converge, $\gamma_j^\varepsilon(z)$ converge dans L^2 .

(iii) s'obtient par passage à la limite dans (i) et le théorème est démontré.

III. ÉTUDE DES SINGULARITÉS DU TEMPS LOCAL

3.1. Notations

Dans cette partie on va étudier le comportement de $\alpha(z')$ lorsque z' s'approche d'un point dont au moins une coordonnée est nulle. On introduit de nouvelles notations :

Lorsque $u = (u_1, \dots, u_m)$ est un élément de $(\mathbb{R}^2)^m$ et $K = \{k_1, \dots, k_{|K|}\}$ un sous-ensemble non-vide de $\{1, \dots, m\}$ tel que $k_1 < \dots < k_{|K|}$, on définit $u_K = (u_{k_1}, \dots, u_{k_{|K|}}) \in (\mathbb{R}^2)^{|K|}$. On a alors $(u_K)_j = u_{k_j}$ pour j dans $\{1, \dots, |K|\}$. On définit une fonction de Green G sur $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})^m$ par

$$G(u) = \prod_{i=1}^m G(u_i). \text{ Par convention, on pose } G(u_\emptyset) = 1.$$

Dans toute cette partie z désignera un élément fixé de $(\mathbb{R}^2)^q$. On pose

$$I = \{j \in \{1, \dots, q\}, z_j \neq 0\} \quad \text{et} \quad J = \{j \in \{1, \dots, q\}, z_j = 0\}.$$

Lorsque K est un sous-ensemble de J , on pose

$$L = L(K) = \{j \in \{1, \dots, |I \cup K|\}, (z_{I \cup K})_j = 0\}.$$

On définit alors $\gamma^K(z) = \gamma_L(z_{I \cup K})$ (c'est le temps local renormalisé en $z_{I \cup K}$). On reprend dans cette partie les notations $\Theta_{j_1^1, j_2^2}^{q_1, q_2}$, Y_i et Φ^{q_1, q_2} introduites dans la deuxième partie, mais comme z^1 et z^2 pourront prendre diverses valeurs, on notera plutôt $Y_i^\varphi(z^1, z^2)$ à la place de Y_i lorsqu'il y aura ambiguïté. On écrira cependant toujours $G(Y_i^\varphi(z^1, z^2), Y_{i-1})$ au lieu de $G(Y_i^\varphi(z^1, z^2), Y_{i-1}^\varphi(z^1, z^2))$ pour alléger les formules.

3.2. Théorème

THÉORÈME 11. — *Il existe ε_z et C_z deux constantes positives telles que pour tout $z' \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})^q$, on ait :*

$$\frac{\alpha(z')}{G(z')} = \sum_{K \subset J} \frac{\gamma^K(z)}{G(z'_K)} + R_z(z')$$

où le reste $R_z(z')$ vérifie $E(R_z(z')^2) \leq C_z |z - z'|$ dès que $|z - z'| < \varepsilon_z$.

3.3. Démonstration

z' est un vecteur de $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})^q$. On veut évaluer

$$E((\alpha(z') - \sum_{K \subset J} G(z'_K) \gamma^K(z))^2).$$

Les valeurs de $E(\alpha(z')^2)$, $E(\alpha(z')\gamma^K(z))$ et $E(\gamma^{K'}(z)\gamma^{K''}(z))$ sont données par le théorème 10-(iii) (car $\alpha(z') = \gamma_\emptyset(z')$). En effet :

$$E(\alpha(z')^2) = \sum_{\varphi \in \Phi^{q,q}} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \prod_{i=1}^{2q+2} G(Y_i^\varphi(z', z'), Y_{i-1}).$$

Pour $K \subset J$, on note $r = \text{card}(I \cup K)$ et alors :

$$E(\alpha(z')\gamma^K(z)) = \sum_{\varphi \in \Theta_{\emptyset, L}^{q,r}} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \prod_{i=1}^{q+r+2} G(Y_i^\varphi(z', z_{I \cup K}), Y_{i-1})$$

et avec des notations similaires :

$$E(\gamma^{K'}(z)\gamma^{K''}(z)) = \sum_{\varphi \in \Theta_{L', L''}^{r', r''}} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \prod_{i=1}^{r'+r''+2} G(Y_i^\varphi(z_{I \cup K'}, z_{I \cup K''}), Y_{i-1}).$$

Lorsque φ est un élément de $\Phi^{q,q}$ on pose

$$\mathcal{J}_1 = \{i, \varphi(i) = \varphi(i-1) = 1 \text{ et } \psi(i) \in J\}$$

et

$$\mathcal{J}_1 = \psi(\mathcal{J}_1) = \{j \in J, \exists i, \varphi(i) = \varphi(i-1) = 1 \text{ et } \psi(i) = j\}$$

et de même

$$\mathcal{J}_2 = \{i, \varphi(i) = \varphi(i-1) = 2 \text{ et } \psi(i) \in J\} \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_2 = \psi(\mathcal{J}_2).$$

a) *Étude de $E(\alpha(z')G(z'_{J \setminus K})\gamma^K(z))$.* — On va montrer, et c'est la clé de la démonstration que cette espérance est proche de

$$\sum_{\substack{\varphi \in \Phi^{q,q} \\ \mathcal{J}_2 = J \setminus K}} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \prod_{i=1}^{2(q+1)} G(Y_i^\varphi(z', z'), Y_{i-1})$$

lorsque z' est proche de z . Plus précisément, on va établir le lemme suivant :

LEMME 12. — *Il existe deux réels $\varepsilon^1(z)$ et $C_1^K(z)$ tels que, pour tout $z' \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})^q$ tel que $|z - z'| < \varepsilon^1(z)$, on ait*

$$\left| E(\alpha(z')G(z'_{J \setminus K})\gamma^K(z)) - \sum_{\substack{\varphi \in \Phi^{q,q} \\ \mathcal{J}_2 = J \setminus K}} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \prod_{i=1}^{2(q+1)} G(Y_i^\varphi(z', z'), Y_{i-1}) \right| \leq C_1^K(z)G(z'_J)G(z'_{J \setminus K})|z - z'|.$$

Preuve. — Lorsque φ est un élément de $\Phi^{q,q}$ tel que $\mathcal{J}_2 = J \setminus K$ on a

$$\prod_{i=1}^{2(q+1)} G(Y_i^\varphi(z', z'), Y_{i-1}) = \left(\prod_{j \in J \setminus K} G(z'_j) \right) \prod_{i \notin \mathcal{J}_2} G(Y_i^\varphi(z', z'), Y_{i-1})$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\varphi \in \Phi^{q,q} \\ \mathcal{J}_2 = J \setminus K}} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \prod_{i=1}^{2(q+1)} G(Y_i^\varphi(z', z'), Y_{i-1}) \\ = G(z'_{J \setminus K}) \sum_{\substack{\varphi \in \Phi^{q,q} \\ \mathcal{J}_2 = J \setminus K}} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \prod_{i \notin \mathcal{J}_2} G(Y_i^\varphi(z', z'), Y_{i-1}). \end{aligned}$$

Nous allons établir une correspondance bijective entre

$$\{ \varphi \in \Phi^{q,q}, \mathcal{J}_2 = J \setminus K \} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{\emptyset, L}^{q,r}$$

et voir ensuite que

$$\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \prod_{i \notin \mathcal{J}_2} G(Y_i^\varphi(z', z'), Y_{i-1})$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \prod_{i=1}^{q+r+2} G(Y_i^{\varphi'}(z', z_{I \cup K}), Y_{i-1})$$

sont proches lorsque z' est proche de z , si les ordres $\varphi \in \Phi^{q,q}$ (tel que $\mathcal{J}_2 = J \setminus K$) et $\varphi' \in \mathcal{O}_{\emptyset, L}^{q,r}$ sont en correspondance.

Première étape. — Identification des ordres.

Soit $\varphi \in \Phi^{q,q}$ tel que $\mathcal{J}_2 = J \setminus K$ et $k \rightarrow i_k$ la bijection croissante de $\{1, \dots, q+r+2\}$ dans $\{1, \dots, 2q+2\} \setminus \mathcal{J}_2$ (on a bien $|\mathcal{J}_2| = |\mathcal{J}_2| = |J \setminus K| = q-r$). On définit alors φ' sur $\{1, \dots, q+r+2\}$ par $\varphi'(k) = \varphi(i_k)$. On a alors $|\varphi'^{-1}\{1\}| = q+1$ et donc $\varphi' \in \Phi^{q,r}$.

Comme

$$\mathcal{J}_2 = \{j \in J, \exists i, \varphi(i) = \varphi(i-1) = 2, \psi(i) = j\} = J \setminus K$$

on a, pour tout $k \in \{1, \dots, q+r+2\}$,

$$(\varphi(i_k) = 2 \text{ et } \psi(i_k) \in K) \Rightarrow \varphi(i_k - 1) = 1.$$

Mais si $\varphi(i_k - 1) = 1$ alors $i_k - 1 \notin \mathcal{J}_2$ et $i_{k-1} = i_k - 1$. Donc, pour tout $k \in \{1, \dots, q+r+2\}$,

$$(\varphi(i_k) = 2 \text{ et } \psi(i_k) \in K) \Rightarrow \varphi(i_{k-1}) = 1$$

c'est-à-dire

$$\{k, \varphi'(k-1) = \varphi'(k) = 2 \text{ et } \psi(i_k) \in K\} = \emptyset,$$

ou encore

$$\{k, \varphi'(k-1) = \varphi'(k) = 2 \text{ et } \psi'(k) \in L\} = \emptyset,$$

et donc $\varphi' \in \Theta_{\emptyset, L}^{q, r}$.

Pour voir que la correspondance est bijective il faut maintenant reconstruire φ à partir de φ' . Pour cela on va choisir une nouvelle caractérisation de φ et φ' . Si φ est un élément de $\Phi^{q, q}$ tel que $\varphi(1) = 1$ on définit $m_0 = 1, n_0 = \inf\{i, \varphi(i) = 2\}$ puis pour $p \geq 0$,

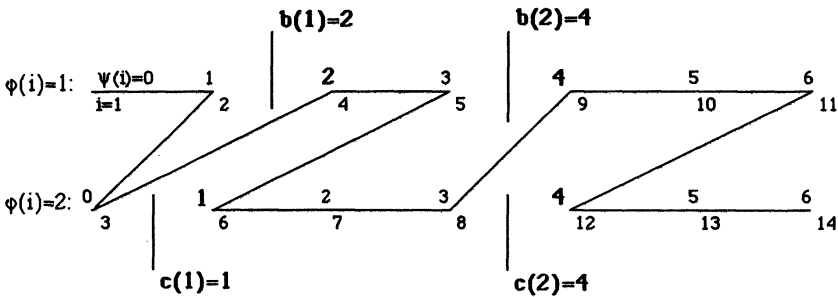
$$m_{p+1} = \inf\{i > n_p, \varphi(i) = 1\} \quad \text{et} \quad n_{p+1} = \inf\{i > m_{p+1}, \varphi(i) = 2\}$$

On obtient ainsi $m_0, \dots, m_{l_1}, n_0, \dots, n_{l_2}$ avec $l_1 = l_2$ ou $l_1 = l_2 - 1$. De même lorsque $\varphi(1) = 2$ on définit $n_0 = 1, m_0 = \inf\{i, \varphi(i) = 1\}$ etc.

L'application φ est alors caractérisée par la donnée de $\varphi(1), \psi(m_1), \dots, \psi(m_{l_1})$ et de $\psi(n_1), \dots, \psi(n_{l_2})$. On notera $b_p^{\varphi} = \psi(m_p)$ et $c_p^{\varphi} = \psi(n_p)$.

Nous allons illustrer ces notations par un exemple :

$$q = 6, \varphi^{-1}(\{1\}) = \{1, 2, 4, 5, 9, 10, 11\} \text{ et } \varphi^{-1}(\{2\}) = \{3, 6, 7, 8, 12, 13, 14\}.$$



Pour cet exemple, on a

$$\varphi(1) = 1, l_1 = l_2 = 2 \quad \text{et} \quad b_1 = 2, b_2 = 4, c_1 = 1, c_2 = 4$$

et on peut bien reconstruire φ à partir de ces données.

De même, tout élément $\varphi' \in \Phi^{q, r}$ est caractérisé par la donnée de $\varphi'(1)$, de $b_1^{\varphi'}, \dots, b_{l_1}^{\varphi'}$ et de $c_1^{\varphi'}, \dots, c_{l_2}^{\varphi'}$. Pour la correspondance $\varphi \rightarrow \varphi'$ définie plus haut, on a $\varphi(1) = \varphi'(1), l_1 = l_1', l_2 = l_2', b_p^{\varphi} = b_p^{\varphi'}$ et $c_p^{\varphi} = h(c_p^{\varphi'})$, où h désigne la bijection croissante de $I \cup K$ dans $\{1, \dots, r\}$. Inversement, si on part de $\varphi' \in \Phi^{q, r}$, les égalités précédentes permettent de lui associer un unique élément de $\Phi^{q, q}$. Il reste à voir que la condition $\varphi' \in \Theta_{\emptyset, L}^{q, r}$ entraîne $\mathcal{J}_2 = J \setminus K$. Pour cela observons d'abord que la condition $\mathcal{J}_2 = J \setminus K$ équivaut à $\{c_p^{\varphi}, p \leq l_2\} \cap J = K$.

Ensuite, la condition $\varphi' \in \Theta_{\emptyset, L}^{q, r}$ équivaut à $L \subset \{c_p^{\varphi'}, p \leq l_2\}$ ou encore $h^{-1}(L) \subset h^{-1}(\{c_p^{\varphi'}, p \leq l_2\})$ c'est-à-dire $K \subset \{c_p^{\varphi}, p \leq l_2\}$ (par définition

$L = h(K)$). Mais, d'autre part,

$$\{c_p^\varphi, p \leq l_2\} \cap J = h^{-1}(\{c_p^{\varphi'}, p \leq l_2\}) \cap J \subset K$$

puisque, par construction $h^{-1}(\{1, \dots, r\}) = I \cup K$. On a donc nécessairement $\mathcal{J}_2 = J \setminus K$.

Seconde étape. — Nous allons maintenant comparer

$$\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \prod_{i \notin \mathcal{J}_2} G((Y_i^\varphi(z', z'), Y_{i-1}))$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \prod_{i=1}^{q+r+2} G(Y_i^{\varphi'}(z', z_{I \cup K}), Y_{i-1})$$

lorsque φ et φ' sont associés par la correspondance décrite ci-dessus.

Soit $\varphi' \in \Theta_{\mathcal{J}_2, L}^{\varphi, q}$, associé à $\varphi \in \Phi^{q, q}$. On définit $k \rightarrow i_k$ comme précédemment. On va tout d'abord étudier la différence entre $Y_{i_k}^\varphi(z', z')$ et $Y_k^{\varphi'}(z', z_{I \cup K})$. Si $k \in \{1, \dots, q+r+2\}$ vérifie $\varphi'(k) = 1$ alors

$$Y_k^{\varphi'}(z', z_{I \cup K}) = y^1 + x'_{\psi'(k)} = y^1 + x'_{\psi(i_k)} = Y_{i_k}^\varphi(z', z').$$

Si $\varphi'(k) = 2$ alors

$$Y_k^{\varphi'}(z', z_{I \cup K}) = y^2 + (z_{I \cup K})_1 + \dots + (z_{I \cup K})_{\psi'(k)} = y^2 + x_{\psi(i_k)}$$

car $z_{J \setminus K} = 0$. D'autre part,

$$Y_{i_k}^\varphi(z', z') = y^2 + x'_{\psi(i_k)},$$

donc, indépendamment de la valeur de $\varphi'(k)$, on a

$$|Y_{i_k}^\varphi(z', z') - Y_k^{\varphi'}(z', z_{I \cup K})| \leq |x - x'| \leq q |z - z'|.$$

On va maintenant étudier la différence entre $Y_{i_{k-1}}^\varphi(z', z')$ et $Y_{k-1}^{\varphi'}(z', z_{I \cup K})$. Lorsque $i_{k-1} = i_k - 1$ on est dans le cas étudié précédemment. Lorsque $i_{k-1} \neq i_k - 1$ alors on a $\{i_{k-1} + 1, \dots, i_k - 1\} \subset \mathcal{J}_2$ (à cause de la définition même de i_k) et donc $\{\psi(i_{k-1} + 1), \dots, \psi(i_k - 1)\} \subset J \setminus K$. Alors

$$|x'_{i_{k-1}} - x'_{i_k-1}| = \left| \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k-1} z'_i \right| = \left| \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k-1} (z'_i - z'_i) \right| \leq q |z - z'|$$

et donc

$$\begin{aligned} & |Y_{k-1}^{\varphi'}(z', z_{I \cup K}) - Y_{i_{k-1}}^\varphi(z', z')| \\ & \leq |Y_{k-1}^{\varphi'}(z', z_{I \cup K}) - Y_{i_{k-1}}^\varphi(z', z')| + |Y_{i_{k-1}}^\varphi(z', z') - Y_{i_{k-1}}^\varphi(z', z')| \\ & \leq 2q |z - z'|. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout k on a

$$|[Y_k^{\varphi'}(z', z_{I \cup K}) - Y_{k-1}^{\varphi'}(z', z_{I \cup K})] - [Y_{i_k}^\varphi(z', z') - Y_{i_{k-1}}^\varphi(z', z')]| \leq 3q |z - z'|.$$

On va maintenant appliquer le corollaire 4 pour majorer

$$\mathcal{U}_\varphi = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \left(\prod_{i \notin \mathcal{J}_2} G(Y_i^\varphi(z', z'), Y_{i-1}) - \prod_{k=1}^{q+r+2} G(Y_k^{\varphi'}(z', z_{1 \cup K}), Y_{k-1}) \right).$$

On définit :

$$\mathcal{M}^1 = \{ k \in \{ 2, \dots, q+r+2 \}, \varphi'(k) = \varphi'(k-1) \text{ et } \psi(i_k) \in J \},$$

$$\mathcal{M}^2 = \{ k \in \{ 2, \dots, q+r+2 \}, \varphi'(k) = \varphi'(k-1) \text{ et } \psi(i_k) \notin J \},$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{ 2, \dots, q+r+2 \} \setminus (\mathcal{M}^1 \cup \mathcal{M}^2) \\ &= \{ k \in \{ 2, \dots, q+r+2 \}, \varphi'(k) \neq \varphi'(k-1) \}. \end{aligned}$$

Lorsque $k \in \mathcal{M}^1$ on a $\varphi'(k) = 1$ car $\varphi' \in \Theta_{\emptyset, L}^{\varphi, r}$. On a alors

$$Y_{i_k}^\varphi(z', z') - Y_{i_k-1}^\varphi(z', z') = Y_k^{\varphi'}(z', z_{1 \cup K}) - Y_{k-1}^{\varphi'}(z', z_{1 \cup K}) = z_{\psi'(k)}$$

avec $\psi'(k) = \psi(i_k) \in J$.

Lorsque $k \in \mathcal{M}^2$, on pose $E_k = Y_{i_k}^\varphi(z', z') - Y_{i_k-1}^\varphi(z', z')$ et

$$F_k = Y_k^{\varphi'}(z', z_{1 \cup K}) - Y_{k-1}^{\varphi'}(z', z_{1 \cup K}).$$

On a $E_k = z_{\psi'(i_k)}$, $F_k = z_{\psi'(i_k)}$ lorsque $\varphi'(k) = 1$, et $F_k = z_{\psi(i_k)}$ lorsque $\varphi'(k) = 2$.

De plus, $\psi(i_k) \in I$.

On a finalement

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\varphi &= \prod_{k \in \mathcal{M}^1} G(z_{\psi'(i_k)}^\varphi) \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 G(y^\varphi(1)) \\ &\quad \left(\prod_{k \in \mathcal{M}^2} G(E_k) \prod_{k \in \mathcal{N}} G(Y_{i_k}^\varphi(z', z'), Y_{i_k-1}^\varphi) \right. \\ &\quad \left. - \prod_{k \in \mathcal{M}^2} G(F_k) \prod_{k \in \mathcal{N}} G(Y_k^{\varphi'}(z', z_{1 \cup K}), Y_{k-1}^{\varphi'}) \right) \end{aligned}$$

On est exactement dans les conditions d'application du corollaire 4. Il existe donc deux réels $\varepsilon_z^{1, \varphi}$ et $C_z^{1, \varphi}$ tels que

$$|\mathcal{U}_\varphi| \leq C_z^{1, \varphi} |z - z'| \prod_{k \in \mathcal{M}^1} G(z_{\psi'(i_k)}^\varphi)$$

dès que $|z - z'| < \varepsilon_z^{1, \varphi}$. Pour $|z'_j| < \Sigma$, on a

$$\prod_{k \in \mathcal{M}^1} G(z_{\psi'(i_k)}^\varphi) \leq \prod_{j \in J} G(z'_j) = G(z'_j).$$

Lorsque $\varepsilon_z^{1, \varphi} \leq \Sigma$ on a donc

$$|\mathcal{U}_\varphi| \leq C_z^{1, \varphi} |z - z'| G(z'_j)$$

dès que $|z - z'| < \varepsilon_z^1, \varphi$. On en déduit le lemme 12 en sommant sur φ .

b) *Étude de $E(G(z'_{J \setminus K'}) \gamma^{K'}(z) G(z'_{J \setminus K''}) \gamma^{K''}(z))$.* — La démarche est analogue à celle que nous avons suivie dans le paragraphe précédent: il faut montrer que $E(G(z'_{J \setminus K'}) \gamma^{K'}(z) G(z'_{J \setminus K''}) \gamma^{K''}(z))$ est proche de

$$\sum_{\substack{\varphi \in \Phi^{q, q} \\ \mathcal{J}_1 = J \setminus K' \\ \mathcal{J}_2 = J \setminus K''}} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \prod_{i=1}^{2(q+1)} G(Y_i^\varphi(z', z'), Y_{i-1})$$

Plus précisément, on a le lemme suivant :

LEMME 13. — *Il existe deux réels $\varepsilon^2(z)$ et $C_2^{K', K''}(z)$, tels que pour tout $z' \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})^q$ tel que $|z - z'| < \varepsilon^2(z)$, on ait :*

$$\left| E(G(z'_{J \setminus K''}) \gamma^{K''}(z) G(z'_{J \setminus K'}) \gamma^{K'}(z)) - \sum_{\substack{\varphi \in \Phi^{q, q} \\ \mathcal{J}_2 = J \setminus K'' \\ \mathcal{J}_1 = J \setminus K'}} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \prod_{i=1}^{2(q+1)} G(Y_i^\varphi(z', z'), Y_{i-1}) \right| \leq G(z'_{J \setminus K''}) G(z'_{J \setminus K'}) |z - z'| C_2^{K', K''}(z)$$

Idée de la preuve. — Comme cette démonstration est analogue à celle du lemme 12, nous ne donnons que ses idées directrices. Si φ est un élément de $\Phi^{q, q}$ tel que $\mathcal{J}_1 = J \setminus K'$ et $\mathcal{J}_2 = J \setminus K''$ on a :

$$\prod_{i=1}^{2(q+1)} G(Y_i^\varphi(z', z'), Y_{i-1}) = \left(\prod_{j \in J \setminus K'} G(z'_j) \right) \left(\prod_{j \in J \setminus K''} G(z'_j) \right) \prod_{i \notin \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2} G(Y_i^\varphi(z', z'), Y_{i-1}).$$

Comme dans l'étude précédente il faut établir une bijection entre $\Theta_{L', L''}^{r', r''}$ et $\{\varphi \in \Phi^{q, q}, \mathcal{J}_2 = J \setminus K'', \mathcal{J}_1 = J \setminus K'\}$ et voir ensuite que

$$\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \prod_{i \notin \mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}_1} G((Y_i^\varphi(z', z'), Y_{i-1}))$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \prod_{i=1}^{r'+r''+2} G(Y_i^{\varphi'}(z_{1 \cup K'}, z_{1 \cup K''}), Y_{i-1}).$$

sont proches lorsque z' est proche de z si les ordres $\varphi \in \Phi^{q, q}$ tel que $\mathcal{J}_2 = J \setminus K''$ et $\mathcal{J}_1 = J \setminus K'$, et $\varphi' \in \Theta_{\emptyset, L}^{q, r}$ sont en correspondance.

La correspondance entre φ et φ' est analogue au cas précédent. Elle est donnée par $b_p^{\varphi'} = h'(b_p^\varphi)$ et $c_p^{\varphi'} = h''(c_p^\varphi)$ où h' et h'' sont les bijections croissantes de $I \cup K'$ dans $\{1, \dots, r'\}$ et de $I \cup K''$ dans $\{1, \dots, r''\}$. Comme dans le cas précédent on établit le lemme en appliquant le corollaire 4.

c) *Fin de la preuve du théorème 11.* — On a finalement grâce aux lemmes 12 et 13 :

$$\begin{aligned} & E\left(\left(\alpha(z') - \sum_{K \subset J} G(z'_{J \setminus K}) \gamma^K(z)\right)^2\right) \\ &= E\left(\alpha(z')^2 + \sum_{K' \subset J} \sum_{K'' \subset J} G(z'_{J \setminus K'}) \gamma^{K'}(z) G(z'_{J \setminus K''}) \gamma^{K''}(z) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. - 2 \sum_{K \subset J} \alpha(z') G(z'_{J \setminus K}) \gamma^K(z)\right) \\ &\leq E\left(\left(\sum_{\varphi \in \Phi^{q,q}} + \sum_{\substack{K' \subset J \\ K'' \subset J}} \sum_{\substack{\varphi \in \Phi^{q,q} \\ \mathcal{J}_1 = J \setminus K' \\ \mathcal{J}_2 = J \setminus K''}} - 2 \sum_{K \subset J} \sum_{\varphi \in \Phi^{q,q}}\right) \right. \\ & \qquad \qquad \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dy^1 dy^2 \prod_{i=1}^{2(q+1)} G(Y_i(z', z'), Y_{i-1}) \Big) \\ & \qquad \qquad \qquad + 2 \sum_{K \subset J} C_1^K(z) G(z'_{J \setminus K}) G(z'_j) |z - z'| \\ & \qquad \qquad \qquad + \sum_{K' \subset J} \sum_{K'' \subset J} C_2^{K', K''}(z) G(z'_{J \setminus K'}) G(z'_{J \setminus K''}) |z - z'| \\ &\leq 0 + C(z) G(z'_j)^2 |z - z'| \end{aligned}$$

pour

$$C(z) = 2 \sum_{K \subset J} C_1^K(z) + \sum_{K' \subset J} \sum_{K'' \subset J} C_2^{K', K''}(z)$$

et pour $|z - z'| < \varepsilon(z) = \inf(\varepsilon^1(z), \varepsilon^2(z))$, ce qui achève la démonstration du théorème 11.

3.4. Corollaire

COROLLAIRE 14. — *Le processus $\eta(z') = G(z')^{-1} \alpha(z')$ défini pour $z' \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})^q$ peut être prolongé par continuité sur $(\mathbb{R}^2)^q$ et le prolongement ainsi obtenu vérifie, pour tout $z \in (\mathbb{R}^2)^q$*

$$\eta(z) = \frac{\alpha(z_1)}{G(z_1)}$$

où $I = \{j \in \{1, \dots, q\}, z_j \neq 0\}$.

Preuve. — Soit z un élément de $(\mathbb{R}^2)^q$ fixé. Pour tout $z' \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})^q$ tel que $|z - z'| < \varepsilon_z$, on a avec les notations du théorème 11,

$$\eta(z') = \sum_{K \subset J} \frac{\gamma^K(z)}{G(z'_1 \cup K)} + \frac{R_z(z')}{G(z'_1)}.$$

Comme, pour tout sous-ensemble non-vidé K de J

$$G(z'_1 \cup K) \xrightarrow[z' \rightarrow z]{z' \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})^q} \infty$$

on a

$$\frac{\gamma^K(z')}{G(z'_1 \cup K)} \xrightarrow[z' \rightarrow z]{z' \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})^q} 0,$$

p.s. et dans L^2 . De plus

$$R_z(z') \xrightarrow[z' \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})^q]{L^2, z' \rightarrow z} 0$$

donc

$$\eta(z') \xrightarrow[z' \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})^q]{L^2, z' \rightarrow z} \frac{\gamma^\emptyset(z)}{G(z_1)} = \frac{\alpha(z_1)}{G(z_1)}.$$

De même, pour tout sous-ensemble M de $\{1, \dots, q\}$, on a

$$\frac{\alpha(z'_M)}{G(z'_M)} \xrightarrow[z' \rightarrow z, J'=M]{L^2} \frac{\gamma^\emptyset(z)}{G(z_1)} = \frac{\alpha(z_1)}{G(z_1)}$$

où l'on note $I' = \{i, z'_i \neq 0\}$. En effet, c'est le même résultat que précédemment, appliqué aux temps locaux d'intersection d'ordre $|M|$ au lieu de q .

Pour conclure, on pose $\eta(z') = G(z'_1)^{-1} \alpha(z'_1)$ pour tout $z' \in (\mathbb{R}^2)^q$ (si $z' = 0$, $\eta(z') = \zeta$). Il découle de ce qui précède que le processus $(\eta(z'), z' \in (\mathbb{R}^2)^q)$ est continu en norme L^2 .

IV. LIENS ENTRE LES DIFFÉRENTES RENORMALISATIONS

Après la première rédaction de ce travail, nous avons pris connaissance de l'article de Bass et Koshnevisan [BK] qui montre la continuité en temps et en espace d'une renormalisation du temps local d'intersection obtenue par des méthodes de calcul stochastique. Nous allons rapidement montrer ici comment on peut faire le lien entre cette renormalisation et la renormalisation de Dynkin en combinant le théorème 11 avec les résultats de [BK].

La renormalisation γ' introduite par [BK] est caractérisée par (ce sont les égalités (9.1) et (9.2))

$$\gamma'(z) = \sum_{A \subset \mathcal{X}} \tilde{G}(z_{A^c}) \alpha(z_A)$$

pour tout $z \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})^k$ où $\mathcal{X} = \{1, \dots, k\}$, où A^c désigne le complémentaire dans \mathcal{X} de A , et où \tilde{G} est définie par

$$\tilde{G}(z) = \prod_{i=1}^k (-G(z_i)).$$

Rappelons que $z_A = (z_{a_1}, \dots, z_{a_{|A|}})$ où $A = \{a_1, \dots, a_{|A|}\}$ avec $a_1 < a_2 < \dots < a_{|A|}$. Dans la suite, on notera simplement $\gamma(z) = \gamma_J(z)$ (avec $J = \{i \in \mathcal{X}, z_i = 0\}$), la renormalisation au point z que nous avons introduite dans la partie 2. Nous allons toujours nous intéresser aux renormalisations à un temps exponentiel ζ . Si $z \in (\mathbb{R}^2)^k$, on définit toujours $I = \{i \in \mathcal{X}, z_i \neq 0\}$ et $J = \{i \in \mathcal{X}, z_i = 0\}$. On peut alors noter que pour $z' \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})^k$ on a

$$\begin{aligned} \gamma'(z') &= \sum_{A \subset I} \sum_{B \subset J} \tilde{G}(z'_{I \setminus A}) \tilde{G}(z'_{J \setminus B}) \alpha(z'_{A \cup B}) \\ &= \sum_{A \subset I} \sum_{B \subset J} \sum_{K \subset B} \tilde{G}(z'_{I \setminus A}) \tilde{G}(z'_{J \setminus B}) G(z'_{B \setminus K}) \gamma(z_{A \cup K}) \\ &\quad + \sum_{A \subset I} \sum_{B \subset J} \tilde{G}(z'_{I \setminus A}) \tilde{G}(z'_{J \setminus B}) G(z'_B) R_{z_{A \cup B}}(z'_{A \cup B}) \end{aligned}$$

avec $E(\mathbb{R}_{z_{A \cup B}}(z'_{A \cup B})^2) \leq C_z |z - z'|$ dès que $|z - z'| < \varepsilon_z$ (c'est le théorème 11). La première somme se simplifie car

$$\begin{aligned} &\sum_{B \subset J} \sum_{K \subset B} \tilde{G}(z'_{J \setminus B}) G(z'_{B \setminus K}) \gamma(z_{A \cup K}) \\ &= \sum_{K \subset J} \left(\sum_{C \subset K} \tilde{G}(z'_C) G(z'_{K \setminus C}) \gamma(z_{A \cup (J \setminus K)}) \right) \\ &= \gamma(z_{A \cup J}). \end{aligned}$$

alors lorsque z' tend vers z de telle sorte que $G(z') \leq |z - z'|^{-1/2}$, $\gamma'(z')$ tend (dans L^2) vers

$$\sum_{A \subset I} \tilde{G}(z_{I \setminus A}) \gamma(z_{A \cup J}).$$

D'après [BK], γ' est p.s. continu. On peut alors identifier les limites :

$$\gamma'(z) = \sum_{A \subset I} \tilde{G}(z_{I \setminus A}) \gamma(z_{A \cup J}). \quad (*)$$

Remarquons que dans le cas $z = (0, \dots, 0)$, on trouve

$$\gamma'(0, \dots, 0) = \gamma(0, \dots, 0) \quad \text{où } \gamma(0, \dots, 0)$$

est le temps local d'autointersection à l'ordre k considéré dans [D3] et [LG3]. La formule précédente et notre construction de γ montrent de plus

que $\gamma'(z)$ s'obtient par passage à la limite lorsque ε tend vers 0 dans l'expression

$$\int_{\mathbb{R}^2} dy \int_{0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_k < \zeta} l_y^\varepsilon(dt_0) \prod_{j \in \mathcal{X}} (l_{y+x_j}^\varepsilon(dt_j) - G_\varepsilon(z_j) \delta_{t_{j-1}}(dt_j))$$

où $G_\varepsilon(z) = E_\varepsilon(l_z^\varepsilon(\zeta))$; ceci est bien l'extension naturelle du temps local renormalisé de Dynkin.

On peut inverser la formule (*), ce qui donne

$$\gamma(z) = \sum_{A \subset I} G(z_{I \setminus A}) \gamma'(z_{A \cup J}).$$

Remarquons enfin que l'égalité (9.1) de [BK] s'inverse également :

$$\alpha(z) = \sum_{A \subset \mathcal{X}} G(z_{A^c}) \gamma'(z_A)$$

ce qui donne une autre description des singularités de α .

RÉFÉRENCES

- [BK] R. F. BASS et D. KHOSHNEVISAN, Intersection local times and Tanaka formulas, *Ann. I.H.P.* (à paraître).
- [CFR] I. CHAVEL, E. A. FELDMANN et J. ROSEN, Fluctuations of the Wiener sausage in Riemannian manifolds, *Ann. Probab.*, vol. **19**, 1991, p. 83-141.
- [D1] E. B. DYNKIN, Functionals associated with self-intersections of the planar Brownian motion. Springer, L.N. 1204, *Séminaire de Probabilités XX*, 1985, p. 553-571.
- [D2] E. B. DYNKIN, Self-intersection Gauge for random walks and for Brownian motion, *Ann. Probab.*, vol. **16**, 1988, p. 1-57.
- [D3] E. B. DYNKIN, Regularized self-intersection local times of the planar Brownian motion, *Ann. Probab.*, vol. **16**, 1988, p. 58-74.
- [LG1] J. F. LE GALL, Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan, Springer, L.N. 1123, *Séminaire de Probabilités XIX*, 1984, p. 314-331.
- [LG2] J. F. LE GALL, Propriétés d'intersection des marches aléatoires, *Comm. Math. Physics*, vol. **104**, 1986, p. 471-507, p. 509-528.
- [LG3] J. F. LE GALL, Wiener sausage and self-intersection local times, *J. Funct. Anal.*, vol. **88**, 1990, p. 299-341.
- [LG4] J. F. LE GALL, Some properties of planar Brownian motion (chap. 8 et 10), Springer, Cours de St-Flour, 1990 (à paraître).
- [R1] J. ROSEN, Tanaka's formula and renormalization for the intersections of planar Brownian motion, *Ann. Probab.*, vol. **14**, 1986, p. 1245-1251.
- [R2] J. ROSEN, A renormalized local time for multiple intersections of planar Brownian motion. Springer, L.N. 1204, *Séminaire de Probabilités XX*, 1984, p. 515-531.
- [RY] J. ROSEN et M. YOR, Tanaka formulae and renormalization for triple intersections of Brownian motion in the plane, *Ann. Probab.*, vol. **19**, 1991, p. 142-159.
- [V] S. R. S. VARADHAN, Appendix to: Euclidean quantum field theory, by K. Symanzik, in: *Local quantum theory*, New York, Academic Press, 1969.
- [Y] M. YOR, Précisions sur l'existence et la continuité des temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans \mathbb{R}^2 . Springer, L.N. 1204, *Séminaire de Probabilités XX*, 1985, p. 532-542.

(Manuscrit reçu le 20 janvier 1992.)