ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JACQUES AKONOM

Comportement asymptotique du temps d'occupation du processus des sommes partielles

Annales de l'I. H. P., section B, tome 29, n° 1 (1993), p. 57-81

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1993__29_1_57_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 29, n° 1, 1993, p. 57-81. *Probabilités et Statistiques*

Comportement asymptotique du temps d'occupation du processus des sommes partielles

par

Jacques AKONOM

U.R.A., 1321, F.L.S., 13, rue de Toul, 59046 Lille Cedex

RÉSUMÉ. – On considère la suite (X_t) des sommes partielles d'un processus $(u_t,\ t \in N)$. Lorsque les variables u_t sont indépendantes, nous donnons une nouvelle démonstration de la convergence presque sûre du temps d'occupation d'un intervalle $[a, b]$ par $X_t : N_n(a, b) = \sum_{t=1}^{n} 1_{[a, b]}(X_t)$ vers celui d'un mouvement brownien $\int_0^n 1_{[a, b]}(W(s))\, ds$.

Nous l'étendons à des processus $(u_t,\ t \in N)$ stationnaires.

Mots clés : Marche aléatoire, temps d'occupation, convergence forte, mouvement brownien, séries chronologiques, théorèmes fonctionnels.

ABSTRACT. – Let $X_t = \sum_{k=1}^{t} u_k$ be the partial sums of the process $(u_t,\ t \in N)$. When $(u_t,\ t \in N)$ are i.i.d., a new proof of the strong approximation of the occupation time of (X_t) by the occupation time of a Wiener process is given.

We extend it to stationary processes (u_t).

Classification A.M.S. : 60 F 17, 60 J 15, 60 J 55, 62 M 10.

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques - 0246-0203
Vol. 29/93/01/57/25/$ 4,50/© Gauthier-Villars

INTRODUCTION

Soit $(W(t),\ t \geqq 0)$ un processus de Wiener défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Le temps d'occupation H est défini (P. Lévy [13]) pour tout borélien A de $\mathbb{R}$ par :

$$H(A, t) = \lambda^+ \{ s : s \leqq t,\ W(s) \in A \} = \int_0^t 1_A(W(s))\, ds,$$

où λ^+ désigne la mesure de Lebesgue sur $[\mathbb{R}^+, B(\mathbb{R}^+)]$. P. Lévy [13] a montré que ce temps d'occupation est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue et H. F. Trotter [21] a établi l'existence d'un sous-ensemble Ω_0, $\Omega_0 \subset \Omega$, $P(\Omega_0) = 1$ et d'une fonction $L(x, t) = L(x, t, \omega)$ $(x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+,\ \omega \in \Omega_0)$ continue par rapport au couple (x, t) telle que :

$$L(x, t, \omega) = \frac{d}{dx} \int_0^t 1_{]-\infty, x]}(W(s))\, ds = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{]x-\varepsilon, x]}(W(s))\, ds.$$

$L(x, t)$ est appelé *le temps local* en x du processus de Wiener. Il admet une fonction de répartition donnée par :

$$\forall u \geqq 0, \quad P(L(x, t) \leqq u) = 2\Phi\left(\frac{|x| + u}{\sqrt{t}} \right) - 1,$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Si l'on considère une suite de variables aléatoires $(\varepsilon_j,\ j \in \mathbb{N})$ de même loi et $(X_t,\ t \in \mathbb{N})$ le processus des sommes partielles défini par $X_t = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_t$, on appellera temps d'occupation de l'intervalle $[a, b]$ la quantité

$$N_n(a, b) = \sum_{j=1}^{n} 1_{[a, b]}(X_j).$$

Les premiers résultats sur les comparaisons des temps locaux de marches aléatoires et de mouvements browniens ont été obtenus, lorsque le bruit ne charge que les valeurs ± 1 : $P(\varepsilon_1 = 1) = P(\varepsilon_1 = -1) = 1/2$. (*Voir* W. Feller [8] et P. Révész [19].)

Plusieurs définitions sont possibles pour le temps local d'une marche aléatoire $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$. Dans le cas des variables aléatoires continues, la définition la plus classique est :

$$\zeta_1(x, n) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \lambda^+ \{ s : 0 \leqq s \leqq n,\ X(s) \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \}$$

où l'on a posé, pour $k \leqq s < k+1$, $X(s) = X_k + (s-k)\, \varepsilon_{k+1}$.

E. Perkins [16] introduit :

$$\zeta_2(x, n) = 2 \sum_{k \in A} |X_k - x|$$

où $A = \{ k : 0 < k < n,\ (X_k - x)(X_{k+1} - x) < 0 \}$.

Si le temps local ζ_1 semble être le plus naturel, M. Csörgö et P. Révész [4] ont montré que le comportement de ζ_2 était plus satisfaisant que celui de ζ_1. Les résultats sur la convergence des temps locaux sont divers. Nous en donnerons deux, le premier est un théorème de convergence en loi, le second un principe d'invariance forte.

E. Perkins définit un temps local normalisé

$$\zeta_2^{(n)}(x, t) = n^{-1/2}[\zeta_2(x, j) + (nt - j)(\zeta_2(x, j+1) - \zeta_2(x, j))]$$

pour $j \leq nt < j+1$ et obtient une convergence en loi du couple

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} X(nt), \zeta_2^{(n)}(x, t)\right).$$

THÉORÈME (E. Perkins [16], Th. 1.2). — *Soit* (ε_i) *une suite de variables i.i.d. de moyenne nulle et de variance* 1, *de fonction caractéristique* $\varphi(t)$. *On suppose*: $E|\varepsilon_1^4| < \infty$ *et* $\limsup_{t \to \infty} |\varphi(t)| < 1$. *Alors* $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} X(nt), \zeta_2^{(n)}(x, t)\right)$ *converge en loi vers* $(W(t), L(x, t))$ *dans* $\mathscr{C}(\mathbb{R} \times D[0, 1])$ (*où* $\mathscr{C}(\mathbb{R} \times D[0, 1])$ *désigne l'espace métrique complet des fonctions continues de* $[0, \infty[$ *dans* $\mathbb{R} \times D[0, 1]$).

A. N. Borodin considère des suites de variables (ε_i) i.i.d. centrées, de variance 1 et montre que sous l'hypothèse $E(|\varepsilon_1|^3) < \infty$, on peut construire un processus du mouvement brownien et, pour tout n, une marche aléatoire $(X_k^{(n)})$ de même loi que (X_k) telle que les lois de dimension finie de

$$Q_n(x, t) = n^{1/4}\left(n^{-1/2} \sum_{k=1}^{[nt]} 1_{[x\sqrt{n}-\alpha,\, x\sqrt{n}+\beta]}(X_k^{(n)}) - h L(x, t)\right)$$

convergent.

Il établit également:

THÉORÈME (Borodin [2], Th. 1.4). — *S'il existe* $\eta > 0$ *tel que* $E(|\varepsilon_1|^{9+\eta}) < \infty$ *et si la fonction caractéristique de* ε_1 *est de carré intégrable, on peut construire un processus de Wiener et une marche aléatoire* (X'_n) *de même loi que* (X_n) *telle que*:

$$\limsup_{t \to \infty} t^{-1/4} (\log t)^{-1} \sup_{X} |\zeta_2(x, t) - L(x, t)| < \infty \quad \text{p.s.}$$

L'ensemble de ces travaux utilise de manière essentielle la construction de Skorohod (*voir* par exemple, [3], p. 276) c'est-à-dire la possibilité de construire sur un espace probabilisé assez riche, un mouvement brownien $(W(t), t \geq 0)$ défini sur cet espace et une suite croissante de temps d'arrêt $(\tau_k, k \in \mathbb{N})$ tels que les variables $W(\tau_k) - W(\tau_{k-1})$ soient indépendantes, de même loi et que le processus $(W(\tau_k), k \in \mathbb{N})$ ait même loi que la marche aléatoire (X_k).

Nous nous proposons d'obtenir un théorème d'approximation forte du temps d'occupation en affaiblissant les hypothèses sur les moments. On obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *Si les variables* (e_j) *sont indépendantes, de même loi, ont une fonction de répartition absolument continue, admettent un moment d'ordre* p, $p \in]2, \infty[$, *vérifient* $\mathrm{E}\, e_1 = 0$, $\mathrm{E}\, e_1^2 = 1$ *et* $\lim_{t \to \infty} t^\beta \mathrm{E}(\exp(\mathrm{it} e_1)) = 0$ *pour un* $\beta > 0$; *alors on peut construire sur un espace probabilisé assez riche un processus du mouvement brownien* $(\mathrm{W}_t,\ t > 0)$ *et un processus* (X'_t) *de même loi que* $(e_1 + \ldots + e_t,\ t \in \mathbb{N})$ *tels que* :

pour tout $a \in \mathbb{R}$, *pour toute suite* (δ_n) *telle que* $\delta_n \geqq n^{-1/6 - 2/3\, p}$, *on a* :

$$\forall \varepsilon > 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} \delta_n^{-1} n^{-1/3 - 1/3\, p - \varepsilon} \left(\mathrm{N}_n(a, a + \delta_n) - \int_0^n 1_{[a, a + \delta_n]} \mathrm{W}(s)\, ds \right) = 0 \quad \text{p. s.}$$

où $\mathrm{N}_n(a, n + \delta_n) = \sum_{i=1}^{n} 1_{[a, a + \delta_n]}(\mathrm{X}'_i)$.

On étudiera également le problème suivant. On considère un processus linéaire stationnaire $(\zeta_t,\ t \in \mathbb{N})$ défini par :

$$\zeta_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \pi_j e_{t-j},$$

où $(e_j,\ j \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc indépendant et le processus de ses sommes partielles $\mathrm{X}_1 = \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_t$. Peut-on obtenir un théorème d'approximation forte du temps d'occupation de la marche aléatoire $(\mathrm{X}_t,\ t \in \mathbb{N})$?

La corrélation des accroissements $\mathrm{X}_t - \mathrm{X}_{t-1}$ ne permet pas d'utiliser sans modification importante la construction de Shorohod, aussi nous proposons une méthode directe. Dans la section II, nous supposons que les variables $(e_j,\ j \in \mathbb{N})$ sont i. i. d. et nous comparons les temps d'occupation de deux intervalles par la marche aléatoire associée. A l'aide du théorème hongrois sur l'approximation des sommes partielles, on en déduit un théorème d'approximation forte du temps d'occupation. Une méthode assez proche a été utilisée par M. Csörgö et P. Révész [5]. Elle sera adaptée dans la section III au cas des sommes partielles d'un processus linéaire.

La démonstration utilise, outre le théorème hongrois, un théorème local d'approximation de la densité d'une somme de variables aléatoires et de ses dérivées. Les résultats sur la densité sont dus à B. V. Gnedenko [9], il ne semble pas que ceux relatifs aux dérivées de la densité figurent dans la littérature classique, aussi nous les établissons dans la première section.

I. UNE EXTENSION D'UN THÉORÈME DE B. V. GNEDENKO

Soit $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, centrées, réduites, ayant une fonction de répartition F absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

On note f la densité de la variable e_1 et g_n celle de $\dfrac{e_1+e_2+\ldots+e_n}{\sqrt{n}}$.

B. V. Gnedenko a établi en 1954, ([9], *cf.* [17], [18]) en supposant la densité f bornée que

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|g_n(x)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right|=0.$$

On va établir par des méthodes proches de celles de B. Gnedenko des résultats du même type concernant les dérivées.

THÉORÈME 1. — *Soit* $(e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots)$ *une suite de variables aléatoires i. i. d. vérifiant les hypothèses précédentes. On suppose en outre que la fonction caractéristique* φ *vérifie* :

$$\textit{il existe } \beta>0 \textit{ tel que } \lim_{t\to\infty} t^\beta\varphi(t)=0.$$

Alors pour tout entier k, *il existe un entier* $m(k, \mathrm{F})$ *tel que pour tout* $n\geqq m(k, \mathrm{F})$ *la densité* g_n *soit de classe* C^k *et vérifie* :

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{d^k}{dx^k}g_n(x)-\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right)\right|=0.$$

Preuve. — La fonction caractéristique de g_n sera notée φ_n; $\varphi_n(t)=\left[\varphi\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$. La condition $\varphi(t)=o(t^{-\beta})$ implique l'intégrabilité de $t^k\varphi_n(t)$ pour n suffisamment grand ($n\geqq m(k, \mathrm{F})$).

La densité $g_n(x)$ vérifie :

$$g_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n e^{-ixt}\,dt.$$

Pour $n\geqq m(k, \mathrm{F})$, $|t^k\varphi_n(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t^k\varphi_n(t)e^{-ixt}\,dt$ converge uniformément par rapport à x et g_n est une fonction de classe C^k, la dérivée k-ième étant :

$$\frac{d^k}{dx^k}g_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n(-it)^k e^{-ixt}\,dt.$$

Approximation de la dérivée k-ième

Étudions :

$$\left|\frac{d^k}{dx^k}g_n(x)-\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right)\right|$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty}(-it)^k\left(\left[\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n-e^{-t^2/2}\right)e^{-ixt}\,dt\right|$$
$$\leqq\frac{1}{2\pi}(\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3),$$

où :

$$\mathrm{I}_1=\int_{|t|<\mathrm{T}}|t|^k\,|e^{-t^2/2}-\varphi_n(t)|\,dt,$$
$$\mathrm{I}_2=\int_{|t|\geqq\mathrm{T}}|t|^k e^{-t^2/2}\,dt\leqq \mathrm{C}_k\mathrm{T}^{k-1}\exp(-\mathrm{T}^2/2),$$
$$\mathrm{I}_3=\int_{|t|>\mathrm{T}}|t|^k\,|\varphi_n(t)|\,dt.$$

Pour majorer I_3, on remarque que $\varphi(t)=1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$; il existe donc des constantes $\eta>0$ et $q_\eta\in[0, 1[$ telles que :

$$\forall t\in[-\eta,\eta],\quad |\varphi(t)|\leqq 1-\frac{t^2}{4}\leqq e^{-t^2/4}$$

et

$$\forall t\in\mathbb{R}-[-\eta,\eta],\quad |\varphi(t)|\leqq\inf(q_\eta, \mathrm{K}\,|t|^{-\beta})$$

On en déduit, en posant $m_0=m(k, \mathrm{F})$:

$$\int_{\mathrm{T}}^{\infty}t^k\,|\varphi_n(t)|\,dt\leqq\int_{\mathrm{T}}^{\eta\sqrt{n}}t^k e^{-t^2/4}\,dt+\int_{\eta\sqrt{n}}^{\infty}t^k\,|\varphi_n(t)|\,dt$$
$$\leqq\int_{\mathrm{T}}^{\infty}t^k e^{-t^2/4}\,dt+q_\eta^{n-m_0}\int_{\eta\sqrt{n}}^{\infty}t^k\left|\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|^{m_0}dt$$
$$\leqq \mathrm{C}_1\mathrm{T}^{k-1}e^{-\mathrm{T}^2/4}+\mathrm{C}_2 n^{(k+1)/2}.q_\eta^{n-m_0},$$

dès que n est suffisamment grand.

On peut alors choisir T pour rendre arbitrairement petit I_2, puis utiliser la convergence uniforme de $\varphi_n(t)$ vers $e^{-t^2/2}$ sur le compact $[-\mathrm{T}, \mathrm{T}]$ pour établir la convergence de I_1 vers 0, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. — *On note f_j la densité de la variable $e_1+e_2+\ldots+e_j$. Sous les hypothèses du théorème* 1, *pour tout k entier, il existe un rang*

$m(k, \mathrm{F})$ *tel que*:

$$(1.1) \qquad \forall j \geqq m(k, \mathrm{F}), \quad \| f_j^{(k)} \| = O(j^{-(k+1)/2}).$$

Le résultat est immédiat en remarquant que $f_j(t) = j^{-1/2}\, g_j(t/\sqrt{j})$ et que les dérivées successives de $e^{-x^2/2}$ sont bornées.

Remarque 1. — La condition $\lim_{t \to \infty} t^\beta \varphi(t) = 0$ est nécessaire pour assurer la dérivabilité de g_j à partir d'un certain rang.

En effet si g_j est dérivable et $|g'_j|$ intégrable, alors

$$it\, \varphi_j(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} g'_j(t)\, dt;$$

le théorème de Lebesgue implique

$$\lim_{t \to \infty} t\, [\varphi(t/\sqrt{j})]^j = 0.$$

Remarque 2. — Si on suppose l'existence d'un moment d'ordre 3, en utilisant le lemme suivant (Petrov [17], V, lemme 1):

pour tout $|t| \leqq \dfrac{\sqrt{n}}{4\mathrm{L}}$, $|\varphi_n(t) - e^{-t^2/2}| \leqq \dfrac{16\,\mathrm{L}}{\sqrt{n}} |t|^3 e^{-t^2/3}$ où $\mathrm{L} = \mathrm{E}\,|e_1|^3$,

on peut obtenir, en choisissant $\mathrm{T} = \sqrt{n}/4\,\mathrm{L}$ dans la démonstration précédente

$$\forall n \geqq m(k, \mathrm{F}),$$
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{d^k}{dx^k} g_n(x) - \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \right) \right| \leqq \mathrm{C}(k, \mathrm{F})\, n^{-1/2}.$$

II. TEMPS D'OCCUPATION D'UNE MARCHE ALÉATOIRE

Soit $(e_j, j \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, de fonction de répartition F, telles que:

(2.1) F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue,

(2.2) il existe un réel $p > 2$ tel que $\mathrm{E}(|e_1|^p) < \infty$, $\mathrm{E}\, e_1 = 0$, $\mathrm{E}\, e_1^2 = 1$.

(2.3) La fonction caractéristique $\varphi(t) = \mathrm{E}(\exp(ite_1))$ vérifie:

$$\exists \beta > 0, \quad \lim_{t \to \infty} t^\beta \varphi(t) = 0.$$

On note $(\mathrm{X}_t, t \in \mathbb{N})$ la marche aléatoire associée à (e_j) définie par $\mathrm{X}_t = e_1 + e_2 + \ldots + e_t$. On appelle temps d'occupation de l'intervalle

$[a, a+\delta]$ jusqu'au temps n, la quantité

$$N_n(a, a+\delta) = \sum_{t=1}^{n} 1_{[a, a+\delta[}(X_t).$$

1. Comparaison du temps d'occupation de deux intervalles

Nous commençons par comparer le temps d'occupation de deux intervalles de même largeur, soit:

$$N_n(a, a+\delta) - N_n(a+k\delta, a+(k+1)\delta).$$

LEMME 1. — *Sous les hypothèses* (2.1), (2.2), (2.3), *il existe pour tout* $r \in \mathbb{N}$, *une constante* $C_{r, F}$ *ne dépendant que de la fonction de répartition des* (e_i) *telle que pour tous* $a \in \mathbb{R}$, $\delta \in [0, \infty[$, $k \in \mathbb{N}^*$, $n \geqq 2$, *sous la condition* $\delta\sqrt{n} \geqq 1$:

$$E[N_n(a, a+\delta) - N_n(a+k\delta, a+(k+1)\delta)]^{2r} \leqq C_{r, F}(\delta\sqrt{n})^r [1 + k\delta^2 \log n]^r.$$

Désignons par I_0 à la fois l'intervalle $[a, a+\delta]$ et son indicatrice et par I_k son translaté par $k\delta$.

On note: $U(x) = I_0(x) - I_k(x)$,

$$Z_n = N_n(a, a+\delta) - N_n(a+k\delta, a+(k+1)\delta) = \sum_{j=1}^{n} U(X_j).$$

Appelons "système" (S), une suite d'entiers positifs $r_1, \ldots, r_q$ de somme $2r$ et notons:

$$\tau = (t_1, \ldots, t_q)$$

$$T(S; \tau) = T(S; t_1, \ldots, t_q) = E\prod_{i=1}^{q} (U(X_{t_i}))^{r_i} \tag{2.4}$$

et

$$T(S) = \sum_{1 \leqq t_1 < \ldots < t_q \leqq n} T(S; t_1, \ldots, t_q)$$

Comme le nombre de systèmes (S) à r fixé est 2^{2r-1}, le majorant de $E((Z_n)^{2r})$ cherché est $0(\max_S T(S))$.

a) Expression de $T(S; \tau)$

Il est immédiat que

$$U^r(x) = I_0(x) + I_k(x) \quad \text{si } r \text{ pair.}$$
$$U^r(x) = U(x) \quad \text{si } r \text{ impair.}$$

On a donc $T(S; \tau) = E\left(\prod_{i=1}^{q} (U(X_{t_i}))^{r_i}\right)$, $r_i = 1$ ou 2, $\sum r_i \leqq 2r$.

On note $\Delta_1 = t_1$, $\Delta_j = t_j - t_{j-1}$ pour $j \geqq 2$ et f_j la densité de $e_1 + e_2 + \ldots + e_j$.

Par suite de l'indépendance des accroissements, la densité de $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_q})$ est donnée par

$$g_\tau(x_1, \ldots, x_q) = \prod_{j=1}^{q} f_{\Delta_j}(x_j - x_{j-1})$$

où l'on a posé par convention $x_0 = 0$.

$$\text{(2.4')} \qquad T(S; \tau) = \iint g_\tau(x_1, \ldots, x_q) \prod_{i=1}^{q} (U(x_i))^{r_i} \, dx_1 \ldots dx_q$$

b) Étude du cas particulier $r=1$

L'étude du cas $r=1$ permet d'exposer la méthode.

$b.1)$ Le terme correspondant à $S=(2)$ est:

$$T(S) = \sum_{i=1}^{n} \int f_i(x) U^2(x) \, dx = \sum_{i=1}^{n} \int f_i(x) (I_0(x) + I_k(x)) \, dx.$$

D'après le corollaire du théorème 1, il existe un entier m_0 et une constante C tels que:

$$\text{(1.1)} \qquad \text{pour } m \geqq m_0, \quad \| f_m \| \leqq C m^{-1/2}.$$

Si $i \leqq m_0$, on utilise $|U(x)| \leqq 1$ et f_i est une densité.

On en déduit:

$$T(S) \leqq m_0 + \sum_{i=m_0}^{n} \frac{2 C \delta}{\sqrt{i}} \leqq m_0 + C_1 \delta \sqrt{n}.$$

$b.2)$ Si $S=(1, 1)$, on a:

$$T(S) = \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \iint f_i(x) f_{j-i}(y-x) (I_0(x) - I_k(x)) (I_0(y) - I_k(y)) \, dx \, dy$$

Le changement de variables $x \mapsto x + k\delta$, $y \mapsto y + k\delta$ donne en utilisant $I_0(x) = I_k(x + k\delta)$

$$\begin{aligned} T(S) = & \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \iint f_i(x) [f_{j-1}(y-x) - f_{j-i}(y-x+k\delta)] I_0(x) I_0(y) \, dx \, dy \\ & + \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \iint f_i(x + k\delta) \\ & \times [f_{j-i}(y-x) - f_{j-i}(y-x-k\delta)] I_0(x) I_0(y) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Il existe m_0 tel que pour $j \geqq m_0$, f_j est dérivable, $\| f_j \| \leqq C j^{-1/2}$ et $\| f'_j \| \leqq \frac{C}{j}$; on a donc si $j \geqq m_0$, utilisant le théorème des accroissements finis :

$$\int |f_j(y-x)-f_j(y-x-k\delta)|\, I_0(y)\, dy \leqq \inf(Ck\delta^2/j,\ C\delta/\sqrt{j})$$

On en déduit

$$T(S) \leqq 2\left[m_0 + \sum_{i=m_0}^{n} \frac{C\delta}{\sqrt{i}}\right]\left[m_0 + \sum_{j=m_0}^{n} \inf(Ck\delta^2/j,\ C\delta/\sqrt{j})\right]$$

et sous la condition $\delta\sqrt{n} \geqq 1$,

$$T(S) \leqq C_2\, \delta\sqrt{n}\,(1+k\delta^2 \log n)$$

Remarque. — Dans le cas de variables aléatoires normales, si $a=0$ et $1 \leqq k\delta \leqq \sqrt{n}$, on obtient aisément $E Z_n^2 \geqq C\delta\sqrt{n}(1+k\delta^2)$.

On utilise pour cela

$$\forall y \in [0,\ \delta],$$

$$\begin{aligned} f_j(y)-f_j(y+k\delta) &= \int_y^{y+k\delta} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} j^{-3/2} e^{-x^2/2j}\, dx \\ &\geqq \alpha j^{-1/2} \quad \text{si} \quad j \leqq k^2\delta^2 \\ &\geqq \beta k^2 \delta^2 j^{-3/2} \quad \text{si} \quad j \geqq k^2\delta^2 \end{aligned}$$

c) *Transformation de* T(S; τ)

L'expression (2.4′) contient l_1 facteurs $U(x_i)$ avec un exposant 1 et l_2 facteurs avec un exposant 2 où $l_1+2l_2 \leqq 2r$. La méthode précédente conduit à regrouper les facteurs $U(x_i)\, U(x_{i+1})$ lorsqu'il y a deux indices consécutifs.

Il y aura alors l'_1 couples

$$U(x_i)\, U(x_{i+1}) = U(x_i)\, I_0(x_{i+1}) - U(x_i)\, I_k(x_{i+1})$$

l''_1 facteurs $U(x_i)$ isolés et l_2 facteurs $U^2(x_j) = I_0(x_j)+I_k(x_j)$ où $2l'_1+l''_1+2l_2 \leqq 2r$. Puis on apparie chaque facteur $U(x_i)$ isolé au facteur $I_0(x_{i+1})$ ou $I_k(x_{i+1})$.

$T(S;\ \tau)$ est donc la somme d'au plus 2^r termes de la forme

$$T'(S;\ \tau) = E\left(\left(\prod J(X_{t_i})\right)\left(\prod U(X_{t_h})\, J(X_{t_{h+1}})\right)\right)$$

ou de la forme

$$E\left(\left(\prod J(X_{t_i})\right)\left(\prod U(X_{t_h})\, J(X_{t_{h+1}})\right) U(X_{t_q})\right)$$

où $J = I_0$ ou $-I_k$.

On a donc $E(Z_n^{2r}) \leqq 2^{3r-1} \max_S T'(S)$.

$$T'(S;\tau)=\int\ldots\int H(x_1,\ldots,x_q)\,dx_1\ldots dx_q \tag{2.5}$$

où H est le produit de:

l facteurs

$$J(x_i) f_{\Delta_i}(x_i - x_{i-1}) \tag{2.5.1}$$

l' facteurs

$$U(x_{j-1}) J(x_j) f_{\Delta_{j-1}}(x_{j-1} - x_{j-2}) f_{\Delta_j}(x_j - x_{j-1}) \tag{2.5.2}$$

et éventuellement d'un facteur final

$$U(x_q) f_{\Delta_q}(x_q - x_{q-1}) \tag{2.5.3}$$

où $l+l' \leqq r$ s'il n'y a pas de facteur final et $2(l+l')+1 \leqq 2r$ s'il y a un facteur final.

d) Majoration du terme correspondant à $J(x_i)$

Reprenant le calcul fait en *b*.1, sous l'hypothèse $\delta\sqrt{n} \geqq 1$, il vient:

$$\sum_{\Delta_i=1}^{n} \int |J(x_i)|\, f_{\Delta_i}(x_i - x_{i-1})\, dx_i \leqq C\delta\sqrt{n}. \tag{2.6}$$

e) Majoration du terme correspondant à $U(x_q)$

S'il y a un terme final correspondant à $U(x_q)$,

$$T'(S;\tau)=\int\ldots\int H_1(\ldots)\, U(x_q) f_{\Delta_q}(x_q - x_{q-1})\, dx_1\ldots dx_q$$

x_q ne figurant pas dans les autres facteurs de H_1, le changement $x_q \mapsto x_q + k\delta$, conduit à:

$$T'(S;\tau)=\int\ldots\int H_1(\ldots)\, I_0(x_q)\,(f_{\Delta_q}(x_q - x_{q-1}) - f_{\Delta_q}(x_q - x_{q-1} + k\delta))\, dx_1\ldots dx_q$$

Reprenant le calcul fait en *b*.2), il vient pour $\Delta_q \geqq m_0$:

$$|f_{\Delta_q}(x_q - x_{q-1}) - f_{\Delta_q}(x_q - x_{q-1} + k\delta)| \leqq k\delta \| f'_{\Delta_q} \| \leqq C k\delta (\Delta_q)^{-1}$$

et

$$\sum_{\Delta_q=1}^{n} \int |f_{\Delta_q}(x_q - x_{q-1}) - f_{\Delta_q}(x_q - x_{q-1} + k\delta)| \times I_0(x_q)\, dx_q < C_3(1 + k\delta^2 \log n) \tag{2.7}$$

f) Majoration du terme correspondant à $U(x_{j-1})\,J(x_j)$

La variable x_{j-1} de

$$U(x_{j-1})\,J(x_j) f_{\Delta_{j-1}}(x_{j-1}-x_{j-2}) f_{\Delta_j}(x_j-x_{j-1})$$

ne figure dans aucun autre facteur de H. On peut donc écrire :

$$T'(S_0;\tau)=\int\ldots\int H_1(\ldots)\,J(x_j)\,(I_0(x_{j-1})-I_k(x_{j-1}))$$
$$f_{\Delta_{j-1}}(x_{j-1}-x_{j-2}) f_{\Delta_j}(x_j-x_{j-1})\,dx_1\ldots dx_q$$

Le changement de variable $x_{j-1}\mapsto x_{j-1}-k\delta$ conduit, en reprenant la méthode précédente à :

$$(2.8)\quad T'(S;\tau)=\int\ldots\int H_1(\ldots)\,J(x_j)$$
$$\times I_0(x_{j-1})\,G_j(x_j,x_{j-1},x_{j-2})\,dx_1\ldots dx_q$$

où

$$\begin{aligned}G_j(x_j,x_{j-1},x_{j-2})&=f_{\Delta_{j-1}}(x_{j-1}-x_{j-2}) f_{\Delta_j}(x_j-x_{j-1})\\&\quad-f_{\Delta_{j-1}}(x_{j-1}-x_{j-2}+k\delta) f_{\Delta_j}(x_j-x_{j-1}-k\delta)\\&=f_{\Delta_{j-1}}(x_{j-1}-x_{j-2})\\&\quad\times(f_{\Delta_j}(x_j-x_{j-1})-f_{\Delta_j}(x_j-x_{j-1}-k\delta))\\&\quad-(f_{\Delta_{j-1}}(x_{j-1}-x_{j-2}+k\delta)-f_{\Delta_{j-1}}(x_{j-1}-x_{j-2}))\\&\quad\times f_{\Delta_j}(x_j-x_{j-1}-k\delta)\end{aligned}$$

Le calcul se poursuit comme en $b.2$), on en déduit :

$$(2.9)\quad \sum_{\Delta_{j-1}=1}^{n}\ \sum_{\Delta_j=1}^{n}\int |G_j(\ldots)\,I_0(x_{j-1})\,J(x_j)|\,dx_{j-1}\,dx_j$$
$$\leqq C_2\,\delta\sqrt{n}\,(1+k\,\delta^2\log n)$$

g) Majoration de $T(S)$

Ayant fait les regroupements et les changements de variables indiqués, on obtient une majoration de $T(S)$ en sommant par rapport à $t_1,\ldots,t_q$ c'est-à-dire pour $\Delta_1,\ldots,\Delta_q$, sous la condition $\Delta_1+\ldots+\Delta_q$ variant de 1 à n. Sous la condition $\delta\sqrt{n}\geqq 1$, la contribution à $T(S)$ de chacun des l facteurs (2.5.1) est donc majorée par $C_1\,\delta\sqrt{n}$, celle des l' facteurs (2.5.2) est majorée par $C_2\,\delta\sqrt{n}\,(1+k\,\delta^2\log n)$. Ce qui conduit à

$$T'(S)\leqq(C_1\,\delta\sqrt{n})^l\,(C_2\,\delta\sqrt{n}\,(1+k\,\delta^2\log n))^{l'}$$

avec $l+l'\leqq r$, si il n'y a pas de facteur final et dans le cas contraire

$$T'(S)\leqq C_3\,(C_1\,\delta\sqrt{n})^l\,(C_2\,\delta\sqrt{n}\,(1+k\,\delta^2\log n))^{l'}\,(1+k\,\delta^2\log n)$$

avec $l+l' \leqq r-1$. Il vient donc:

$$T(S) \leqq C(\delta\sqrt{n})^r (1+k\delta^2 \log n)^r,$$

ce qui établit le lemme.

PROPOSITION 1. — *Soit* $a \in \mathbb{R}$, $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs telle que* $\delta_n \sqrt{n} \geqq 1$, (k_n) *une suite d'entiers,* $k_n \leqq n$. *Sous les hypothèses* (2.1) *à* (2.3), $N_n(a, a+\delta_n)$, *nombre de visites dans l'intervalle* $[a, a+\delta_n]$, *vérifie*:

$$\forall \varepsilon > 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} \delta_n^{-1/2} (1+k_n \delta_n^2)^{-1/2} n^{-(1/4)-\varepsilon} \times \left[N_n(a, a+\delta_n) - \frac{1}{k_n} N_n(a+\delta_n, a+(k_n+1)\delta_n) \right] = 0 \text{ p.s.}$$

Soit $\beta > 0$, notons $A_{n,k}(\beta)$ et $A_n(\beta)$ les événements:

$$A_{n,k}(\beta) = \{ | N_n(a, a+\delta_n) - N_n(a+k\delta_n, a+(k+1)\delta_n) | > \beta \delta_n^{1/2} (1+k\delta_n^2)^{1/2} n^{(1/4)+\varepsilon} \}$$

$$A_n(\beta) = \left\{ \left| N_n(a, a+\delta_n) - \frac{1}{k_n} N_n(a+\delta_n, a+(k_n+1)\delta_n) \right| > \beta \delta_n^{1/2} (1+k_n \delta_n^2)^{1/2} n^{(1/4)+\varepsilon} \right\}$$

$$A_n(\beta) \subset \bigcup_{k \leqq k_n} A_{n,k}(\beta).$$

En utilisant l'inégalité de Markov à l'ordre $2r$ et le lemme précédent, il vient:

$$P(A_n(\beta)) \leqq k_n \frac{C_{r,F} (\log n)^r}{\beta^{2r} n^{2r\varepsilon}}$$

La proposition résulte alors du lemme de Borel-Cantelli en choisissant un entier r et une suite (β_n) qui converge vers 0 et telle que

$$\sum \beta_n^{-2r} n^{1-2r\varepsilon} (\log n)^r < \infty.$$

Remarque. — Sous les mêmes hypothèses, on a également: pour toute suite d'entiers (k_n) telle que $k_n \log n \leqq \sqrt{n}$:

$$\forall \varepsilon > 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} k_n^{-1/2} n^{-(1/4)-\varepsilon} [N_n(a, a+1) - N_n(k_n, k_n+1] = 0 \quad \text{p.s.}$$

Ce résultat peut être comparé à celui obtenu par M. Csörgö et P. Révész [6] dans le cas de variables aléatoires discrètes (ε_i) de loi symétrique $P(\varepsilon_i=1)=P(\varepsilon_i=-1)=1/2$. Ils ont établi:

$$\text{pour tout } k\in\mathbb{Z},$$
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{N_n(k)-N_n(0)}{(N_n(0)\log\log n)^{1/2}}=2\sqrt{2k-1}\quad \text{p. s.}$$

où $N_n(k)=\sum_{t=1}^{n} 1_{\{k\}}(X_t)$.

2. Approximation forte du temps d'occupation

La marche aléatoire $(X_t,\ t\in\mathbb{N})$ converge faiblement, après changement de temps, vers un processus de Wiener; il est donc naturel de comparer les temps d'occupation d'un intervalle $[a, a+\delta]$ par (X_t) et par un processus de Wiener.

THÉORÈME 2. — *On suppose que les variables* $(e_j,\ j\in\mathbb{N})$ *indépendantes, de même loi, vérifient les hypothèses:* (2.1), (2.2), (2.3) *et on note* (X_t) *la marche aléatoire associée. On peut construire sur un espace probabilisé assez riche, un processus du mouvement brownien* $(W(t),\ t\geqq 0)$ *et un processus* $(X'_t,\ t\in\mathbb{N})$ *de même loi que* (X_t) *tels que: pour* $a\in\mathbb{R}$, *si* (δ_n) *est une suite de réels positifs vérifiant*: $n^{-1/2}\leqq\delta_n\leqq n^{-1/6-2/3p}$, *alors*

$$\forall\varepsilon>0,$$
$$N_n(a, a+\delta_n)-\int_0^n 1_{[a,\,a+\delta_n]}(W(s))\,ds=o(n^{1/4+\varepsilon}\delta_n^{1/2})\quad \text{p. s.}$$

et si $\delta_n\geqq n^{-1/6-2/3p}$, alors

$$\forall\varepsilon>0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\delta_n^{-1}n^{-(1/3)-(1/3p)-\varepsilon}\left(N_n(a, a+\delta_n)-\int_0^n 1_{[a,\,a+\delta_n]}(W(s))\,ds\right)=0\quad \text{p. s.}$$

où $N_n(a, b)=\sum_{t=1}^{n} 1_{[a,\,b]}(X'_t)$.

Si on suppose que la variable e_1 a un moment d'ordre p, $p>2$, on peut construire un processus du mouvement brownien $(W_t,\ t\geqq 0)$ et un processus (X'_t) des sommes partielles tels que

$$\sup_{0\leqq k\leqq n}|X'_k-W(k)|=o(n^{1/p})\quad \text{p. s.}\tag{2.10}$$

Le résultat est dû à J. Komlós, P. Major, G. Tusnády [12] sous l'hypothèse $p>3$, et il a été étendu par P. Major [14] lorsque $2<p\leqq 3$.

Majoration de $\left| N_n(a, a+\delta_n) - \int_0^n 1_{[a, a+\delta_n]}(W(s))\, ds \right|$

$$\left| N_n(a, a+\delta_n) - \int_0^n 1_{[a, a+\delta_n]}(W(s))\, ds \right| \leqq A_1(n) + \frac{1}{2k_n} A_2(n) + A_3(n),$$

où :

$$A_1(n) = \left| N_n(a, a+\delta_n) - \frac{1}{2k_n} N_n(a - k_n\delta_n, a + k_n\delta_n) \right|,$$

$$A_2(n) = \left| N_n(a - k_n\delta_n, a + k_n\delta_n) - \int_0^n 1_{[a - k_n\delta_n, a + k_n\delta_n]}(W(s))\, ds \right|,$$

$$A_3(n) = \left| \frac{1}{2k_n} \int_0^n 1_{[a - k_n\delta_n, a + k_n\delta_n]}(W(s))\, ds - \int_0^n 1_{[a, a+\delta_n]}(W(s))\, ds \right|.$$

Faisons l'hypothèse $1 \leqq k_n \delta_n \leqq \sqrt{n}/\log n$.

(i) *Majoration de* A_1.

Elle résulte de la proposition 1 :

$$A_1(n) = o(\delta_n^{1/2}(1 + k_n\delta_n^2)^{1/2} n^{(1/4)+\varepsilon}) \quad \text{p. s.}$$

(ii) *Majoration de* A_2.

Notons J_n, J'_n, J''_n les intervalles :

$$J_n = [a - k_n\delta_n, a + k_n\delta_n],$$
$$J'_n = [a - k_n\delta_n + n^{1/p}, a + k_n\delta_n - n^{1/p}]$$
$$J''_n = [a - k_n\delta_n - n^{1/p}, a + k_n\delta_n + n^{1/p}].$$

En utilisant la relation (2.10) :

$$P\left(\liminf_{n \to \infty} \left\{ \int_0^n 1_{J'_n}(W(s))\, ds \leqq N_n(J_n) \leqq \int_0^n 1_{J''_n}(W(s))\, ds \right\} \right) = 1$$

d'où :

$$P\left(\limsup_{n \to \infty} \left\{ A_2(n) \geqq \int_0^n 1_{J''_n - J'_n}(W(s))\, ds \right\} \right) = 0.$$

En notant $L(x, n)$ le temps local du mouvement brownien, la dernière relation s'écrit :

$$P\left(\limsup_{n \to \infty} \left\{ A_2(n) \geqq \int_{J''_n - J'_n} L(x, n)\, dx \right\} \right) = 0.$$

Or Kesten [10] a établi une loi du logarithme itéré pour le temps local du mouvement brownien :

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{L(0, n)}{\sqrt{2n \log\log n}} = \limsup_{n \to \infty} \frac{\sup_{x \in \mathbb{R}} L(x, n)}{\sqrt{2n \log\log n}} = 1.$$

On en déduit:

$$A_2(n) \leqq n^{(1/2)+(1/p)} \log\log n \quad \text{p.s.}$$

(iii) *Majoration de* A_3.

Pour majorer A_3, on peut reprendre la démonstration du lemme 1 et de la proposition 1 en remplaçant X_n par W_t. Toutes les évaluations approximatives de densités de marches aléatoires deviennent exactes pour W_t si à n (discret) on substitue t (continu).

Les sommations en n se remplacent par des intégrales en t et donnent les mêmes résultats.

Tout majorant de A_1 convient pour A_3.

(iv) *Choix de la suite* (k_n).

On déduit des majorations précédentes :

$$\zeta_n = \left| N_n(a, a+\delta_n) - \int_0^n 1_{[a, a+\delta_n]}(W(s))\, ds \right|$$
$$= o(n^{(1/4)+\varepsilon} \delta_n^{1/2} (1 + k_n \delta_n^2)^{1/2} + k_n^{-1} n^{(1/2)+(1/p)+\varepsilon}) \quad \text{p.s.}$$

Si $n^{-1/2} \leqq \delta_n \leqq n^{-1/6-2/3p}$, on choisit $k_n = n^{(1/4)+(1/p)} \delta_n^{-1/2}$ d'où

$$k_n \delta_n^2 = n^{(1/4)+(1/p)} \delta_n^{3/2} \leqq 1$$

et

$$\zeta_n = o(n^{(1/4)+\varepsilon} \delta_n^{1/2}) \quad \text{p.s.}$$

Si $\delta_n \geqq n^{(-1/6)-(2/3p)}$, en choisissant $k_n \delta_n = n^{(2/3p)+(1/6)}$, on a:

$$k_n \delta_n^2 \geqq 1,$$

d'où il vient:

$\zeta_n = o(\delta_n . n^{(1/3)+(1/3p)+\varepsilon})$ p.s.

Cette relation peut s'écrire:

$$\forall \varepsilon > 0,$$
$$\left| N_n(a, a+\delta_n) - \int_a^{a+\delta_n} L(x, n)\, dx \right| = o(\delta_n n^{(1/3)+(1/3p)+\varepsilon}) \quad \text{p.s.}$$

ou encore, utilisant les résultats sur la continuité du temps local par exemple: M. Csörgö et P. Révész [4] (relation 2.14):

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall K > 0, \quad \exists C,$$
$$P\Big(\sup_{x : |x-a| \leqq 1} |L(x, n) - L(a, n)| \geqq n^{(1/4)+\varepsilon}\Big) \leqq C n^{-K},$$

on en déduit: si la relation $n^{(1/6)+(2/3p)} \delta_n \geqq 1$ est remplie:

$$|N_n(a, a+\delta_n) - \delta_n L(a, n)| = o(\delta_n n^{(1/3)+(1/3p)+\varepsilon}) \quad \text{p.s.}$$

COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses du théorème 2, soit* $a \in \mathbb{R}$, $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de réels éléments de* $[0, 1]$ *telle que* $\delta_n n^{1/6+2/3p} \geqq 1$, *alors pour* *tout* $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_n(a, a+\delta_n)}{n^{(1/2)+\varepsilon}\delta_n} = 0 \quad \text{p. s.},$$

et

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_n(a, a+\delta_n)}{n^{(1/2)-\varepsilon}\delta_n} = \infty \quad \text{p. s.}$$

Immédiat, en utilisant le théorème de P. Lévy établissant que

$$\{\sup_{0 \leqq s \leqq t} W(s);\ t \geqq 0\} \qquad \text{et} \qquad \{L(0, t);\ t \geqq 0\}$$

ont même loi (*cf.* par exemple, F. Knight [11], Th. 5.3.7).

III. SOMMES PARTIELLES D'UN PROCESSUS LINÉAIRE STATIONNAIRE

1. Approximation forte du processus des sommes partielles

On se donne sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un processus linéaire stationnaire $(\xi_t, t \in \mathbb{N})$ défini par:

$$\xi_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j e_{t-j}, \tag{3.1}$$

où: $(e_j, j \in \mathbb{Z})$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, de moyenne nulle, de variance $E e_j^2 = 1$,

$(\pi_j, j \in \mathbb{N})$ est une suite de réels telle que:

$$\pi_0 = 1, \qquad \|\pi\| = \sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty, \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \neq 0.$$

On note $(X_t, t \in \mathbb{N})$ la suite des sommes partielles

$$X_0 = 0,$$

$$X_t = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_t = \sum_{k=1}^{t} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j e_{k-j} \right). \tag{3.2}$$

On souhaite construire sur un espace probabilisé, un processus ayant même loi que (X_t) et un processus du mouvement brownien, suffisamment proches.

Dans le cas de variables aléatoires indépendantes de même loi, les théorèmes de J. Komlós, P. Major, G. Tusnády [12] donnent une majoration de l'écart entre une marche aléatoire et un processus du mouvement brownien. Ces théorèmes d'approximation forte peuvent être étendus aux sommes partielles d'un processus linéaire.

THÉORÈME 3. — *Soit* $(X_t, t \in \mathbb{N})$ *un processus défini par*

$$X_t = \sum_{k=1}^{t} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j e_{k-j} \right) \quad \text{où} \quad (e_j, j \in \mathbb{Z}) \tag{3.2}$$

est un bruit blanc indépendant.

On suppose que les variables e_j *ont un moment d'ordre* p, $p>2$. *Si* $(\pi_j, j \in \mathbb{N})$ *est une suite de réels vérifiant:*

$$\pi_0 = 1, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \psi \neq 0, \qquad et \qquad \sum_{j=0}^{\infty} j |\pi_j| < \infty, \tag{3.3}$$

on peut construire sur un espace probabilisé, un processus $(X'_n, n \in \mathbb{N})$ *de même loi que* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *et un processus du mouvement brownien* $(W(t), t \in \mathbb{R})$ *tels que:*

$$n^{-1/p} \max_{0 \leq k \leq n} |X'_k - \psi W(k)|$$

tend vers 0 *en probabilité et pour tout* h_n, $n^{1/p} \leq h_n \leq C_1 (n \log n)^{1/2}$,

$$P(\max_{0 \leq k \leq n} |X'_k - \psi W(k)| \geq h_n) \leq C_2 \frac{n}{h_n^p},$$

où les constantes C_1 *et* C_2 *ne dépendent que de la loi du bruit blanc et de la suite* (π_j).

Preuve. — La démonstration utilise une décomposition moyenne mobile du processus (X_t), on montre ensuite l'existence d'une marche aléatoire $(S_t, t \in \mathbb{N})$ somme de variables indépendantes, proche de X_t, et on achève en appliquant le théorème de Komlós-Major-Tusnády à (S_t).

(i) *Écriture moyenne mobile du processus* $(X_t, t \in \mathbb{N})$.

En sommant les relations (3.1), on obtient:

$$X_t = \sum_{k=1}^{t} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \pi_k e_{k-j} \right) = \pi_0 e_t + (\pi_0 + \pi_1) e_{t-1} + \dots$$
$$+ (\pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_{t-1}) e_1 + \sum_{k=0}^{\infty} (\pi_{k+1} + \dots + \pi_{k+t}) e_{-k}.$$

Dans la suite, on notera:

$$\psi_k = \sum_{j=0}^{k} \pi_j, \qquad \psi = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j, \tag{3.4}$$

X_t peut s'écrire:

$$X_t = \sum_{k=0}^{t-1} \psi_k e_{t-k} + \sum_{k=0}^{\infty} (\psi_{k+t} - \psi_k) e_{-k} \tag{3.5}$$

(ii) *Majoration de* $\sup_{0 \leqq t \leqq n} \left| X_t - \psi \sum_{k=1}^{t} e_k \right|$.

Écrivons X_t sous la forme:

$$X_t = \psi S_t + R'_t + R''_t, \tag{3.6}$$

où:

$$S_t = \sum_{k=1}^{t} e_k,$$

$$R'_t = \sum_{k=1}^{t} (\psi_{t-k} - \psi) e_k,$$

$$R''_t = \sum_{k=0}^{\infty} (\psi_{t+k} - \psi_k) e_{-k}.$$

Le terme $\psi S_t + R'_t$ est lié à l'évolution du bruit blanc (e_j) depuis l'instant $t=0$, alors que R''_t dépend uniquement des variables $(e_j, j \leqq 0)$, c'est-à-dire des conditions initiales.

LEMME 2. — *Sous les hypothèses du théorème* 3, *il existe une constante* C *telle que: pour toute suite* $(h_n, n \in \mathbb{N})$

$$\forall n, \quad P(\max_{1 \leqq j \leqq n} |R'_j| \geqq h_n) \leqq C \frac{n}{h_n^p},$$

$$\forall n, \quad P(\max_{1 \leqq j \leqq n} |R''_j| \geqq h_n) \leqq C \frac{n}{h_n^p}.$$

Les variables (e_j) étant centrées, de moment p, $p > 2$, d'après l'inégalité de Marcinkiewicz-Zygmund, il existe une constante C_p telle que: pour toute suite (q_j) de l^2:

$$E(|\sum_j q_j e_j|^p) \leqq C_p E((\sum_j q_j^2 e_j^2)^{p/2}) \leqq C_p (\sum_j q_j^2)^{p/2} |E(e_1)^p|$$

Comme $R'_t = \sum_{k=0}^{t-1} (\psi_k - \psi) e_{t-k}$, on en déduit:

$$E(|R'_t|^p) \leqq C_p \left(\sum_{k=0}^{t-1} (\psi_k - \psi)^2 \right)^{p/2} E(|e_1|^p)$$

Or

$$\psi - \psi_k = \pi_{k+1} + \pi_{k+2} + \dots$$
$$(\psi - \psi_k)^2 \leqq \|\pi\| \sum_{j=1}^{\infty} |\pi_{k+j}|$$

où

$$\|\pi\| = \sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j|.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{t-1} (\psi - \psi_k)^2 \leqq \|\pi\| \sum_j j |\pi_j|.$$
$$\mathrm{E}(|\mathrm{R}'_t|^p) \leqq \mathrm{C}_p \left(\|\pi\| \sum_{j=1}^{\infty} j |\pi_j| \right)^{p/2} \mathrm{E}(|e_1|^p)$$

De $\mathrm{P}(|\mathrm{R}'_t| > h_n) \leqq \dfrac{\mathrm{E}(|\mathrm{R}'_t|^p)}{h_n^p}$, se déduit la première partie du lemme.

On a de même:

$$\mathrm{E}(|\mathrm{R}''_t|^p) \leqq \mathrm{C}_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\psi_{t+k} - \psi_k)^2 \right)^{p/2} \mathrm{E}(|e_1|^p)$$

La même majoration est valable et les $\mathrm{E}(|\mathrm{R}''_t|^p)$ sont majorés indépendamment de t.

L'inégalité du lemme 2 peut être améliorée. L'hypothèse sur les moments implique l'existence d'une fonction ψ paire, positive telle que $x^{-p}\psi(x)$ soit croissante sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\lim_{x \to \infty} x^{-p}\psi(x) = +\infty, \qquad \psi(2x) \leqq \mathrm{C}\,\psi(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E}(\psi(e_1)) < \infty.$$

Utilisant l'inégalité de Marcinkiewicz-Zygmund, si la suite (q_j) est dans l^2, $\Sigma q_j^2 = \mathrm{D}$, il existe une constante M (ne dépendant que de ψ, D et de la loi de e_1) telle que $\mathrm{E}(\psi(\sum q_j e_j)) \leqq \mathrm{M}$. Il vient

$$\mathrm{P}(|\mathrm{R}'_t| \geqq h_n) \leqq \frac{\mathrm{M}}{\psi(h_n)}$$

d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathrm{P}(\max_{1 \leqq t \leqq n} |\mathrm{R}'_t| > \varepsilon n^{1/p}) \leqq \frac{\mathrm{M}n}{\psi(\varepsilon n^{1/p})}$$

et

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}(n^{-1/p} \max_{1 \leqq t \leqq n} |\mathrm{R}'_t| > \varepsilon) = 0.$$

(iii) *Fin de la démonstration du théorème.*

A l'aide d'une extension du théorème de Komlós-Major-Tusnády (U. Einmahl [7]) il est possible de construire un processus du mouvement brownien $(W(t), t \in \mathbb{R}_+)$, une suite de variables aléatoires indépendantes $(\varepsilon_j, j \in \mathbb{N}^*)$ telles que $(\varepsilon_j, j \in \mathbb{N}^*)$ ait même loi que $(e_j, j \in \mathbb{N}^*)$ et que le processus des sommes partielles vérifie :

$$P\left(\max_{0 \leq k \leq n} |\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_k - W(k)| \geq h_n\right) \leq C_2 n h_n^{-p}$$

et

$$\max_{0 \leq k \leq n} |\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_k - W(k)| = o(n^{1/p}) \quad \text{p. s.}$$

et une seconde suite $(\varepsilon_{-j}, j \in \mathbb{N})$ indépendante de la première, ayant même loi que $(e_{-j}, j \in \mathbb{N})$.

Le processus $(X'_t, t \in \mathbb{N})$ défini à partir de la suite (ε_j) par

$$X'_t = \sum_{k=1}^{t} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \varepsilon_{k-j}\right)$$

a même loi que $(X_t, t \in N)$ et vérifie les inégalités annoncées.

2. Temps d'occupation

On souhaite étudier la convergence en probabilité du temps d'occupation du processus $(X_t, t \in \mathbb{N})$, convenablement normalisé, vers le temps local du mouvement brownien.

Le processus $(X_t, t \in \mathbb{N})$ est défini par la relation de récurrence $X_0 = 0$, $\forall t \in \mathbb{N}, X_t - X_{t-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j e_{t-j}$ où (π_j) vérifie (3.3). (X_t) à l'écriture moyenne mobile (3.5).

On note alors $\tilde{X}_t = \sum_{k=0}^{t-1} \psi_k e_{t-k} = \sum_{k=1}^{t} \psi_{t-k} e_k$ et on désigne par $\tilde{g}_n$ la densité de $\left(\sum_{k=1}^{n} \psi_k^2\right)^{-1/2} \tilde{X}_n$, par g_n celle de $(n\psi^2)^{-1/2} X_n$.

On établit que la fonction caractéristique de $(n\psi^2)^{-1/2} X_n$ est :

$$\varphi_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi(\psi_k (n\psi^2)^{-1/2} t) \prod_{k=0}^{\infty} \varphi((\psi_{k+n} - \psi_k)(n\psi^2)^{-1/2} t).$$

Elle converge uniformément vers $e^{-t^2/2}$ sur tout compact. Et reprenant la méthode du chapitre I, on établit le lemme suivant :

LEMME 3. — *Si les variables (e_j) vérifient les conditions du théorème* 1, *pour tout entier k, dès que n est assez grand, $\tilde{g}_n$ et g_n sont de classe C^k et* *vérifient*:

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{d^k}{dx^k} \tilde{g}_n(x) - \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \right) \right| = 0$$

et

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{d^k}{dx^k} g_n(x) - \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \right) \right| = 0.$$

On en déduit que f_n (resp. $\tilde{f}_n$) densité de X_n (resp. de $\tilde{X}_n$) vérifie: pour tout entier k, il existe des constantes C et m_0 telles que

$$(3.7) \qquad \begin{cases} \forall n \geqq m_0, \\ \|\tilde{f}_n^{(k)}\| \leqq C n^{-(k+1)/2} \quad \text{et} \quad \|f_n^{(k)}\| \leqq C n^{-(k+1)/2} \end{cases}$$

2.1. *Comparaison des temps d'occupation*

Le temps d'occupation de l'intervalle $[a, b]$ par (X_t) est encore noté $N_n(a, b)$. Les accroissements $X_t - X_{t-1}$ n'étant plus indépendants, la méthode du chapitre précédent ne peut être reprise sans d'importantes modifications. Aussi nous ne donnerons qu'une majoration de

$$E\left[N_n(a, a+\delta) - \frac{1}{K} N_n(a+\delta, a+(K+1)\delta) \right]^2$$

LEMME 4. — *Si les variables* (e_j) *vérifient les hypothèses* (2.1) *à* (2.3), *le temps d'occupation du processus* (X_t) *défini par* (3.2) *vérifie :*

Il existe une constante $C(F, \pi)$ *ne dépendant que de la fonction de répartition* F *des* (e_j) *et de la suite* (π_j) *telle que : pour tout* $a \in \mathbb{R}$, $\delta \in [0, \infty[$, $K \in \mathbb{N}^*$, $n \geqq 2$, *sous la condition* $\delta\sqrt{n} \geqq 1$,

$$E\left[N_n(a, a+\delta) - \frac{1}{K} N_n(a+\delta, a+(K+1)\delta) \right]^2 \leqq C(F, \pi)\,\delta\sqrt{n}\,(1 + K\delta^2 \log n)$$

La démonstration est proche de celle du lemme 1, mais on compare $N_n(a, a+\delta)$ à la moyenne des temps d'occupation des intervalles voisins. Comme précédemment, on note $I_0 = 1_{[a, a+\delta]}$ et I_k son translaté par $k\delta$ et on pose ici :

$$J_K = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} I_k, \quad U = I_0 - J_K, \quad Z_n = \sum_{j=1}^{n} U(X_j).$$

En développant

$$E(Z_n^2) = E\left(\sum_{j=1}^{n} U(X_j) \right)^2 = A_1 + 2A_2 + 2A_2'$$

où :

$$A_1 = E\left(\sum_{j=1}^{n} U^2(X_j)\right) = E\sum_{j=1}^{n}\left(I_0(X_j) + \frac{1}{K} J_K(X_j)\right)$$

$$A_2 = E\sum_{i=1}^{n} I_0(X_i) \sum_{j=i+1}^{n} U(X_j)$$

$$A_2' = -E\sum_{i=1}^{n} J_K(X_i) \sum_{j=i+1}^{n} U(X_j)$$

On note alors $\mathscr{F}^i$ la tribu engendrée par $\{e_k \mid k \leqq i\}$ et $\mathscr{F}_i^j$ la tribu engendrée par $\{e_k \mid i < k \leqq j\}$ et on décompose la variable X_j sous la forme :

$$X_j = X_{i,j}' + \tilde{X}_{i,j} \tag{3.8}$$

où

$$X_{i,j}' = \sum_{k=1}^{i} \psi_{j-k} e_k + \sum_{k=0}^{\infty} (\psi_{j+k} - \psi_k) e_{-k}$$

$$\tilde{X}_{i,j} = \sum_{k=i+1}^{j} \psi_{j-k} e_k$$

Les variables X_{ij}' et $\tilde{X}_{ij}$ sont indépendantes. La densité de la variable $\tilde{X}_{i,j}$ est $\tilde{f}_{j-i}$, elle vérifie la propriété (3.7) (lemme 3).

(i) *Majoration de* A_1.

En utilisant la propriété (3.7) et en remarquant que $|U(x)| \leqq 1$, on obtient :

$$A_1 \leqq m_0 + \sum_{j=m_0+1}^{n} 2\delta \| f_j \| \leqq m_0 + 2C\delta\sqrt{n}$$

(ii) *Majoration de* A_2 :

$$A_2 = \sum_{i=1}^{n} E\left[I_0(X_i) E^{\mathscr{F}^i} \sum_{j=i+1}^{n} U(X_j)\right]$$

or

$$E^{\mathscr{F}^i}(U(X_j)) = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} E^{\mathscr{F}^i}(I_0(X_{i,j}' + \tilde{X}_{i,j}) - I_0(X_{i,j}' + \tilde{X}_{i,j} - k\delta))$$

Les tribus $\mathscr{F}^i$ et $\mathscr{F}_i^j$ sont indépendantes, en utilisant la densité $\tilde{f}_{j-i}$ de $\tilde{X}_{i,j}$, on obtient

$$E^{\mathscr{F}^i}(U(X_j)) = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \int_{a - X_{i,j}'}^{a - X_{i,j}' + \delta} (\tilde{f}_{j-i}(x) - \tilde{f}_{j-i}(x - k\delta))\, dx$$

Si $1 \leqq j-i < m_0$, on obtient donc, en utilisant $|U(x)| \leqq 1$

$$|E^{\mathscr{F}^i}(U(X_j))| \leqq 1$$

et pour $j-i \geqq m_0$, on a:

$$|E^{\mathscr{F}^i}(U(X_j))| \leqq K\,\delta^2 \|\tilde{f}'_{j-i}\| \leqq CK\,\delta^2 (j-i)^{-1}$$

d'où

$$\left|\sum_{j=i+1}^{n} E^{\mathscr{F}^i}(U(X_j))\right| \leqq m_0 + CK\,\delta^2 \log n$$

La majoration de A_2 s'en déduit:

$$A_2 \leqq \sum_{i=1}^{n} EI_0(X_i)[m_0 + CK\,\delta^2 \log n]$$

d'où

$$A_2 \leqq (m_0 + C\delta\sqrt{n})(m_0 + CK\,\delta^2 \log n)$$

La majoration est valable pour A'_2. La condition $\delta\sqrt{n} \geqq 1$, permet d'établir le lemme 4.

2.2. *Convergence en probabilité du temps d'occupation*

Nous allons comparer le temps d'occupation d'un processus X_t défini par (3.2) et celui du mouvement brownien.

THÉORÈME 4. — *Soit* (π_j) *une suite de réels, satisfaisant les hypothèses*:

$$\pi_0 = 1, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \psi \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=0}^{\infty} j\,|\pi_j| < \infty$$

On peut construire, sur un même espace probabilisé un processus du mouvement brownien $(W(t),\ t \in \mathbb{R})$ *et une suite de variables aléatoires* (ε_j) *indépendantes, de fonction de répartition* F *donnée satisfaisant* (2.1) *à* (2.3) *tels que le temps d'occupation du processus* $(X_t,\ t \in \mathbb{N})$ *défini par*:

$$X_0 = 0, \qquad X_t - X_{t-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j\,\varepsilon_{t-j}$$

satisfasse à la relation: *si* (δ_n) *est une suite de réels vérifiant* $\delta_n \geqq n^{-1/6-2/3\,p}$, *on a* $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|N_n(a, a+\delta_n) - \int_0^n 1_{[a,\,a+\delta_n]}(\psi\,W(s))\,ds\right| > n^{(1/3)+(1/3\,p)+\varepsilon}\right) = 0$$

où

$$N_n(a, b) = \sum_{t=1}^{n} 1_{[a,\,b]}(X_t).$$

La démonstration analogue à celle du théorème 2 n'est pas reprise.

RÉFÉRENCES

[1] J. AKONOM, Processus transformés d'un ARIMA ou d'un processus de Wiener. Problèmes d'estimation, Thèse, Univ. de Lille-I, 1988.
[2] A. N. BORODIN, On the Character of Convergence to Brownian Local Time, *Probability Theory Rel. Fields*, vol. **72**, (I), 1986, p. 231-250 et (II), 1986, p. 251-277.
[3] L. BREIMAN, *Probability*, Reading Mass, Addison Wesley, 1968.
[4] M. CSÖRGÖ et P. RÉVÉSZ, Three Strong Approximations of the Local Time of a Wiener Process and Their Applications to Invariance in *Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai*, 36, Limit Theorems in Probab. and Statistics Veszprém (Hungary), 1984, p. 223-254.
[5] M. CSÖRGÖ et P. RÉVÉSZ, On Strong Invariance for Local Times of Partial Sums, *Stochastic Processes and their Appl.*, vol. **20**, 1985, p. 59-84.
[6] M. CSÖRGO et P. RÉVÉSZ, On the Stability of the Local Time of a Symetric Random Walk, *Acta Sci. Math.*, vol. **48**, 1985, p. 85-96.
[7] U. EINMAHL, Extensions of Results of Komlós, Major and Tusnády, *Multivariate Analysis*, vol. **28**, 1989, p. 20-68.
[8] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Wiley, New York, 2e éd., 1957.
[9] B. V. GNEDENKO, Un théorème limite local pour les densités, *Dokl. Akad. Nank. S.S.S.R.*, vol. **95**, 1954.
[10] H. KESTEN, An Iterated Logarithm Law for Local Time, *Duke Math. J.*, vol. **32**, 1965, p. 447-456.
[11] F. KNIGHT, Essentials of Brownian Motion and Diffusion, *Math. Surveys*, vol. **18**, A.M.S., 1981.
[12] KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY, An Approximation of Partial Sums of Independent R.V.'s and Sample D.F., *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, vol. **32**, 1975, p. 111-131 et **34**, 1976, 33-58.
[13] P. LÉVY, *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Gauthier-Villars, Paris, 1948.
[14] P. MAJOR, The Approximation of Partial Sums of Independent R.V.'s, *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, vol. **35**, 1976, p. 213-220.
[15] H. P. MCKEAN, Hölder Condition for Brownian Motion Paths, *J. Math. Kyoto Univ.*, vol. **1**, 1962, p. 195-210.
[16] E. PERKINS, Weak Invariance Principles for Local Times, *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, vol. **60**, 1982, p. 437-451.
[17] V. V. PETROV, *Sums of Independent Random Variables*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1975.
[18] A. RENYI, *Calcul des probabilités*, Dunod, Paris, 1966.
[19] P. RÉVÉSZ, Local Time and Invariance, *Lecture Notes in Math.*, n° **861**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.
[20] P. RÉVÉSZ, A Strong Invariance Principle of the Local Time of R.V.'s with Continuous Distributions, *Stud. Sci. Math. Hung.*, vol. **16**, 1981, p. 219-228.
[21] H. F. TROTTER, A Property of Brownian Motion Paths, *Ill. J. Math.*, vol. **2**, 1958, p. 425-433.

(*Manuscrit reçu le* 25 *février* 1991;
révisé le 2 *juin* 1992.)