

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

AGNÈS COQUIO

Forme de Dirichlet sur l'espace canonique de Poisson et applications aux équations différentielles stochastiques

Annales de l'I. H. P., section B, tome 29, n° 1 (1993), p. 1-36

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1993__29_1_1_0

© Gauthier-Villars, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Forme de Dirichlet sur l'espace canonique de Poisson et applications aux équations différentielles stochastiques

par

Agnès COQUIO

Laboratoire de Probabilités, Université Paris-VI

RÉSUMÉ. — L'article concerne la construction d'une forme de Dirichlet sur l'espace canonique de Poisson qui admet un opérateur carré du champ. On établit la propriété de densité de l'énergie image. On applique ces résultats à l'existence de solutions d'équations différentielles stochastiques.

Mots clés : Calcul de Malliavin, formes de Dirichlet, mesures aléatoires de Poisson, espace de Poisson.

ABSTRACT. — This article concerns the construction of a Dirichlet form on the canonical Poisson space which has a "carré du champ" operator. We established "the density property of the image of the energetic volume" like Bouleau and Hirsh have done in [4]. We applied these results to Lipschitzians S.D.E.

INTRODUCTION

Le but de ce travail est de trouver des conditions pour que la solution d'une équation différentielle stochastique du type

$$X_t = x_0 + \int_0^t \int_E c(X_{s-}, z) \tilde{\mu}(ds, dz)$$

où

- μ est une mesure aléatoire de Poisson d'intensité $dt \otimes dz$ sur $\mathbb{R}^+ \times E$,
 $\tilde{\mu} = \mu(ds, dz) - ds \otimes dz$;
- E est un ouvert de \mathbb{R}^b ;
- c est une application lipschitzienne en x de $\mathbb{R}^d \times E$ dans \mathbb{R}^d ,

admette une loi qui a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d .

Dans le cas où c est différentiable par rapport à x , Bichteler-Gravereaux-Jacod dans [1] ramènent le problème à l'inversion d'une forme quadratique sur \mathbb{R}^d , ceci par deux méthodes, la première généralisant la méthode de Bismut dans [2] et la seconde généralisant la méthode de « Malliavin-Stroock », voir par exemple [11], sur l'espace de Poisson. Pour cette dernière méthode, ils construisent un opérateur de « Malliavin ».

D'autre part, Bouleau et Hirsch dans [3] montrent que les propriétés centrales de la théorie des espaces de Dirichlet et notamment celles nécessaires aux calculs fonctionnels liés à l'opérateur carré du champ, peuvent être établies dans un cadre purement mesurable sans hypothèses topologiques sur l'espace de base. Ceci leur permet d'étendre à ce cas général la propriété de densité de l'énergie-image.

Si \mathbb{D} est un espace de Dirichlet sur l'espace mesuré (Ω, \mathcal{F}, m) pourvu d'un opérateur carré du champ Γ et vérifiant une hypothèse de localité, alors pour tout f appartenant à \mathbb{D} l'image par f de la mesure $\Gamma(f, f) \cdot m$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et de plus si F et G sont des fonctions lipschitziennes de \mathbb{R} dans \mathbb{R} avec $\tilde{F} = F - F(0)$, $\tilde{G} = G - G(0)$ et f, g appartenant à \mathbb{D} , alors

$$\Gamma[\tilde{F}(f), \tilde{G}(g)] = F'(f) G'(g) \Gamma(f, g)$$

où F' et G' sont des versions des dérivées de F et G . Ils appliquent ces résultats au semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener et étudient l'action des intégrales stochastiques sur l'opérateur carré du champ et montrent ensuite l'absolue continuité de la loi de variables aléatoires réelles solutions d'équations différentielles stochastiques à coefficients lipschitziens.

Dans [3], ils font la conjecture suivante, si $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ appartient à \mathbb{D}^n , l'image par f de la mesure $\det[\Gamma(f_i, f_j)] \cdot m$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n . Dans [4], ils montrent cette conjecture dans le cas particulier de la forme de Dirichlet associée au semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener. La méthode est d'écrire l'opérateur carré du champ comme somme de carrés de dérivées partielles pour se ramener en dimension finie et d'utiliser le résultat suivant dû à Federer, [7]:

Si $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est Lebesgue mesurable et si on suppose que $\forall 1 \leq j \leq m$, $\forall 1 \leq i \leq n$, les dérivées partielles approximatives au grad f_i existent λ^m -p. p.

Alors pour toute partie B λ^n -négligeable de \mathbb{R}^n ,

$$\int_{f^{-1}(B)} \det[\langle \text{ap grad } f_i, \text{ap grad } f_j \rangle]_{i, j \leq n} d\lambda^n = 0.$$

Ce résultat leur permet d'appliquer ceci au cas des équations différentielles stochastiques de type markovien avec des coefficients de diffusion et de dérive lipschitziens en la variable d'espace et mesurables en la variable de temps.

La démarche ici va être la même.

Dans une première partie, après un rappel sur les formes de Dirichlet et des résultats de [3], nous construisons une forme de Dirichlet sur l'espace canonique de Poisson, qui admet un opérateur carré du champ, qui coïncide sur l'ensemble des fonctions simples \mathbb{R} de [1] avec celui lié à l'opérateur de Malliavin de [1]. Le résultat fondamental de densité de l'énergie-image de [3] s'appliquera donc dans ce contexte. On montre ensuite quelques propriétés importantes de ce nouvel espace de Dirichlet \mathbb{D} : l'existence d'un sous-espace \mathbb{R} inclus dans tous les L_p , dense dans \mathbb{D} et des propriétés de mesurabilité.

Ensuite, nous étudions l'action de l'opérateur carré du champ sur les intégrales stochastiques $X_t = \int_0^t \int_E H(s, z) \tilde{\mu}(ds, dz)$ pour une classe de fonctions H la plus large possible, *i. e.* telle que X_t appartienne à \mathbb{D} . Pour ceci nous aurons besoin d'approcher H par des fonctions du type $h 1_{]t, t']} F(z)$ où h appartient à \mathbb{R} et est F_t -mesurable et F est à support compact et différentiable. Ce sera le théorème 3.2. Enfin, grâce à ce théorème d'approximation, nous pourrons dans le théorème 3.12, calculer $\Gamma(X_t, X_t)$.

Dans une deuxième partie, nous démontrons la conjecture de Bouleau et Hirsh dans le cas de la forme de Dirichlet sur l'espace de Poisson Ω construite dans la partie précédente. La méthode consistera comme dans [4] à se ramener au cas de la dimension finie afin d'utiliser les résultats de Federer [7]. Dans ce cas, nous ne pourrons, comme sur l'espace de Wiener, écrire l'opérateur carré du champ comme somme de carrés de dérivées partielles mais seulement comme limite de telles sommes. L'idée étant à l'aide d'une suite d'ouverts E_n de mesure de Lebesgue finie tendant en croissant vers E de construire des bijections $\beta_n(\lambda)$ de Ω dans Ω qui ne modifient pas les temps de saut mais seulement la taille des sauts qui ont lieu dans E_n et d'écrire $\Gamma(f, f)$ en fonction des dérivées en 0 de $f \circ \beta_n(\lambda)$. Les problèmes principaux par rapport à [4] sont causés par la mesurabilité et dus au fait que Ω n'est pas un espace de Fréchet.

La troisième partie est l'application des résultats précédents aux équations différentielles stochastiques

$$X_t = x_0 + \int_0^t \int_E c(s, X_{s-}, z) \tilde{\mu}(ds, dz)$$

avec c lipschitzienne en x . Dans le cas où $d=1$ et dans le cas où $c(t, x, z)$ est différentiable sur un ensemble mesurable inclus dans \mathbb{R}^d dont le complémentaire est de mesure de Hausdorff uni-dimensionnelle nulle, alors des conditions d'existence de densité seront les conditions «elliptiques» trouvées dans [1], c'est-à-dire :

$$(i) \exists D > 0, \forall s, x, z, |(I + D_x c(s, x, z))^{-1}| \leq D;$$

$$(ii) \left\{ \begin{array}{l} \forall s, x, \forall v \in \mathbb{R}^d - \{0\} \\ \{z/v^T (I + D_x c(s, x, z))^{-1} D_z c(s, x, z) D_z c(s, x, z)^T \\ (I + D_x c(s, x, z))^{-1, T} v \neq 0\}. \end{array} \right.$$

est de mesure de Lebesgue infinie.

Autrement, le résultat est le même que (i) et (ii) mais avec $D_x c(t, x, z)$ remplacé par un processus inconnu $U(t, z)$. Le problème est qu'on ne peut pas supprimer $U(t, z)$ bien qu'il soit majoré par une fonction ne dépendant que de z et appartient à $L^2(E, dz)$ et donc $(I + U(t, z))^{-1}$ est aussi proche qu'on veut de I en dehors d'un ensemble de mesure de Lebesgue fini.

I. — FORME DE DIRICHLET SUR L'ESPACE DE POISSON

1) Rappels sur les formes de Dirichlet

Soit (Ω, \mathcal{F}, m) un espace mesuré avec m σ -finie. On pose $X = L^2(m)$ et on note (\cdot, \cdot) et $\|\cdot\|$ le produit scalaire et la norme associée.

On considère sur X une forme de Dirichlet $((\cdot, \cdot))$ de domaine \mathbb{D} , qui vérifie les deux hypothèses suivantes :

HYPOTHÈSE DE REPRÉSENTABILITÉ ET D'ABSOLUE CONTINUITÉ :

$$(R) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall f \in \mathbb{D} \cap L^\infty, \exists \tilde{f} \in L^1, \forall h \in \mathbb{D} \cap L^\infty, \\ ((fh, f)) - \frac{1}{2}((h, f^2)) = \frac{1}{2}(h, \tilde{f}). \end{array} \right.$$

HYPOTHÈSE DE LOCALITÉ. — Soit $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} à support compact.

Si $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on note \tilde{F} la fonction $F - F(0)$.

$$(L) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall f \in \mathbb{D}, \forall F, G \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \\ \text{tels que} \\ F = 1 \text{ sur un ouvert contenant le support de } G \\ \Rightarrow ((\tilde{F}(f), \tilde{G}(f))) = 0 \end{array} \right.$$

Si $f \in \mathbb{D}$, on note $\|f\|_1^2 = \|f\|^2 + ((f, f))$.

On note $\mathbb{D}_1 = (\mathbb{D}, \|\cdot\|_1)$, l'espace de Hilbert munie de la norme $\|\cdot\|_1$.

On sait que $\mathbb{D} \cap L^\infty$ est une algèbre.

On a alors les résultats suivants dus à Fukushima [8] et Bouleau et Hirsh [3].

PROPOSITION 1.1 ([3]; Proposition 2.2). — Sous (R), il existe une forme bilinéaire symétrique positive continue Γ de $\mathbb{D}_1 \times \mathbb{D}_1$ dans L^1 telle que

$$\forall f \in \mathbb{D} \cap L^\infty, \quad \Gamma(f, f) = \tilde{f}$$

et telle que

$$\forall f \in \mathbb{D}, \quad \forall g \text{ contraction normale de } f, \\ \Gamma(g, g) \leq \Gamma(f, f).$$

L'opérateur $f \in \mathbb{D} \rightarrow \Gamma(f, f) \in L^1$ s'appelle l'opérateur carré du champ.

On utilisera aussi [3]; Théorème 2.3, Proposition 3.5, Corollaire 4.3, Corollaire 4.4 et Proposition 1.2.

2) Semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Poisson

Soit E un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{B}}$ de mesure de Lebesgue infinie, soit $T > 0$ et $E_\delta = E \cup \{\text{point à l'infini}\}$ Ω est l'espace canonique des mesures aléatoires à valeurs entières sur E , qui est défini ainsi: Ω est l'ensemble des suites $(t_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0, T] \cup \{+\infty\} \times E_\delta$, telles que :

$$\begin{cases} t_n < +\infty \Leftrightarrow y_n \in E \\ t_n < +\infty \Rightarrow \forall m \neq n, \quad t_n \neq t_m \end{cases}$$

On note \mathcal{E} l'ensemble des boréliens de E et $G(dz) = dz$ la mesure de Lebesgue sur E .

Soit μ la mesure aléatoire canonique: si $\omega \in \Omega$, $\mu(\omega, \cdot) = \omega(\cdot)$. \mathcal{F}_t est la filtration définie par $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{G}_s$ où $\mathcal{G}_s = \sigma(\mu(\cdot, A), A \in \mathcal{B}([0, t] \times E))$ et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$.

On sait qu'on peut munir (Ω, \mathcal{F}) d'une probabilité et d'une seule notée P pour laquelle μ est une mesure aléatoire de Poisson de mesure intensité $\nu(dt, dz) = dt \otimes dz$. On note $\tilde{\mu} = \mu - \nu$.

Soit ρ une fonction de E dans \mathbb{R}_+ , continûment dérivable, bornée ainsi que sa dérivée.

Soit R l'ensemble des fonctions Φ de la forme $\Phi = F(\mu(f_1), \dots, \mu(f_k))$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, $F \in \mathcal{C}_p^2(\mathbb{R}^k)$ (ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^2 à dérivées secondes à croissance polynomiale), $f_i \in \mathcal{C}_{0,E}^2([0, T] \times E)$ (ensemble des fonctions de $[0, T] \times E$ à valeurs réelles qui sont \mathcal{C}^2 par rapport à la seconde variable et à support compact). On sait que $R \subset \bigcap L^p$.

$$\text{On note } D_z f = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_p} \right) \text{ et } \Delta_z f = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial z_\alpha^2}.$$

Dans [1], on définit un opérateur de Malliavin A sur R par: si $\Phi = F(\mu(f_1), \dots, \mu(f_k))$, $\Phi \in R$ alors

$$A \Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mu(f_1), \dots, \mu(f_k)) \mu(\rho \Delta_z f_i + D_z \rho (D_z f_i)^T) \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F(\mu(f_1), \dots, \mu(f_k)) \mu(\rho D_z f_i (D_z f_j)^T).$$

Donc si $\Phi \in R$, $A \Phi \in \bigcap_{p \geq 1} L^p$.

On définit H_2 comme l'ensemble des fonctions Φ appartenant à $L^2(P)$ telles qu'il existe une suite $\{\Phi_n\} \subset R$ tendant vers Φ dans $L^2(P)$ et telle que $\{A \Phi_n\}$ soit de Cauchy dans $L^2(P)$. On étend alors A à H_2 et si $\|\Phi\|_{H_2} = \|\Phi\|_{L^2} + \|A \Phi\|_{L^2}$, $(H_2, \|\cdot\|_{H_2})$ est un espace de Banach, fermeture de R pour la norme $\|\cdot\|_{H_2}$. \mathcal{F} est la tribu engendrée par les fonctions de R et $R \subset L^2(P)$, donc R est dense dans $L^2(P)$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^2}$. On vérifie aisément que les conditions (1) et (2) de la proposition (3.5) de [3] (voir [1] pour la condition 1) sont satisfaites pour A , $D(A) = H_2$ et $H = R$. Donc ceci nous définit une forme de Dirichlet $((\cdot, \cdot))$ de domaine \mathbb{D} vérifiant les hypothèses (R) et (L), ce qui va nous permettre d'appliquer les résultats de [3] à l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ muni de A .

On notera $\|\cdot\|_1$ la norme sur \mathbb{D} définie par $\|f\|_1^2 = \|f\|_{L^2(P)}^2 + ((f, f))$, et $((\cdot, \cdot))_1$ le produit scalaire associé.

Dans [1], l'opérateur Γ était défini sur R par: si

$$\Phi = F(\mu(f_1), \dots, \mu(f_k)) \in R$$

alors

$$(2.1) \quad \Gamma(\Phi, \Phi) = \sum_{i=1}^k \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\partial}{\partial x_i} F(\mu(f_1), \dots, \mu(f_k)) \\ \times \frac{\partial}{\partial x_j} F(\mu(f_1), \dots, \mu(f_k)) \mu(\rho D_z f_i (D_z f_j)^T).$$

Grâce au théorème (2.3) et à la proposition (3.5) de [3], cet opérateur coïncide sur R avec l'opérateur carré du champ de la proposition (1.1) et de plus si $\varphi, \psi \in \mathbb{D}$, $E[\Gamma(\varphi, \psi)] = 2((\varphi, \psi))$.

On vérifie facilement que R est dense dans $(\mathbb{D}, \|\cdot\|_1)$ et que $(\mathbb{D}, \|\cdot\|_1)$ est un Hilbert séparable.

PROPOSITION 2.2. — Soit $\mathcal{F}^t = \sigma(\mu(A), A \in \mathcal{B}([t, T] \times E))$.

a) Si $\varphi \in \mathbb{D}$ et est \mathcal{F}_t -mesurable (respectivement \mathcal{F}^t -mesurable), alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction \mathcal{F}_t -mesurable (respectivement \mathcal{F}^t -mesurable) ψ de R telle que $\|\varphi - \psi\|_1 < \varepsilon$.

b) Si φ et ψ appartiennent à \mathbb{D} et sont \mathcal{F}_t -mesurables alors $\Gamma(\varphi, \psi)$ est \mathcal{F}_t -mesurable.

c) Si $\varphi \in \mathbb{D}$ et est \mathcal{F}_t -mesurable, si $\psi \in \mathbb{D}$ et est \mathcal{F}^t -mesurable alors $\Gamma(\varphi, \psi) = 0$.

Démonstration. — a) On utilise les théorèmes de [1] sur les produits directs d'opérateurs de Malliavin. En effet (A, R) est le produit direct de (A_t, R_t) et de (A^t, R^t) où R_t (resp. R^t) est l'ensemble des φ appartenant à R qui sont \mathcal{F}_t -mesurables (resp. \mathcal{F}^t -mesurable), et A_t (resp. A^t) la restriction de A à R_t (resp. R^t). On démontre que la fermeture de R_t par $\|\cdot\|_1$ est égale au sous espace fermé de \mathbb{D} formé des classes de variables aléatoires \mathcal{F}_t -mesurables (resp. \mathcal{F}^t -mesurables).

b) C'est une simple conséquence de a) : en effet φ, ψ appartenant à \mathbb{D} et étant \mathcal{F}_t -mesurables, alors par le a), il existe φ_n et ψ_n appartenant à R et \mathcal{F}_t -mesurables convergeant respectivement dans $(\mathbb{D}, \|\cdot\|_1)$ vers φ et ψ . Or $\Gamma(\varphi_n, \psi_n)$ est \mathcal{F}_t -mesurable et converge dans $L^1(P)$ vers $\Gamma(\varphi, \psi)$.

c) se démontre de la même façon en utilisant le rappel de a). ■

3) Intégrales de Poisson et opérateur carré du champ

On note \mathcal{P} la tribu prévisible de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$.

On dira qu'une application H de $[0, T] \times \Omega \times E$ dans \mathbb{R} est à support compact par rapport à z , s'il existe $K \subset E$ compact tel que le support de H soit inclus dans $[0, T] \times \Omega \times K$.

On notera $M = L^2([0, T] \times E, ds dz; (\mathbb{D}, \|\cdot\|_1))$ et si $H \in M$,

$$\|H\|_*^2 = \int_0^T \int_E \|H(s, z)\|_1^2 ds dz.$$

On note \mathcal{K} l'ensemble des $H : [0, T] \times \Omega \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{P} \otimes \mathcal{E}$ mesurables, différentiables par rapport à z et telles que $H \in M$ et que la quantité

$$\|H\|_{\mathcal{K}}^2 = \|H\|_*^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \int_E E[\rho(z) D_z H(s, z) D_z H(s, z)^T] ds dz$$

soit finie.

Soit enfin \mathcal{K}' l'ensemble des $H : [0, T] \times \Omega \times E \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme

$$H(s, \omega, z) = \sum_{j=0}^k \sum_{j'=1}^{k'} h_{j, j'}(\omega) 1_{]t_j, t_{j+1}]}(s) F_{j'}(z) \text{ avec}$$

- . $F_{j'} : E \rightarrow \mathbb{R}$ à support compact, de classe C^∞ ;
- . $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} \leq T$;
- . $h_{j, j'}$ est \mathcal{F}_{t_j} -mesurable et appartient à \mathbb{R} .

On a donc $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$.

(3.1) Condition sur ρ : on va supposer que la fonction $\frac{\rho}{d^2}$ est bornée sur E où $d(z) = d(z, E^c) \wedge 1$.

THÉORÈME 3.2. — Sous (3.1), si $H \in \mathcal{X}$, il existe une suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{X}'$ telle que $\|H - H_n\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Démonstration. — On va juste donner ici une idée de la démonstration, pour les détails de calcul, se reporter à [5].

Cette démonstration se fait en trois étapes.

1^{re} étape. — Soit $H: [0, T] \times \Omega \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{P} \otimes \mathcal{E}$ mesurable, appartenant à \mathbb{M} et telle que $\text{supp}(H) \subset [0, T] \times \Omega \times K$ où K est un compact de E .

Soit K' un compact donc l'intérieur contient K . On va construire une suite H_n vérifiant :

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_n(t, \omega, z) = \sum_{j=0}^{l_n} \sum_{j'=0}^{k_n} h_{n,j,j'}(\omega) 1_{[jT/2^n, (j+1)T/2^n)}(t) \varphi_{j',n}(z) \\ \cdot \forall j', \forall n, \varphi_{j',n} \text{ est } \mathcal{C}^\infty, \text{ positive à support inclus dans } K'; \\ \cdot \forall n \in \mathbb{N}, \forall j', \forall j, h_{n,j,j'} \text{ est } \mathcal{F}_{jT/2^n}\text{-mesurable et appartient à } \mathbb{R}; \\ \cdot \|H_n - H\|_* \text{ tend vers } 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \end{array} \right.$$

Pour construire cette suite, on considère H_δ définie par $H_\delta(s, \omega, z) = H(s - \delta, \omega, z)$ où H est prolongé par 0 sur $\mathbb{R}_+^* \times \Omega \times E$ avec δ tel que $\|H_\delta - H\|_* \leq \varepsilon$. On considère H_δ comme une variable aléatoire sur $([0, T] \times K, \mathcal{B}([0, T] \times K), \gamma)$ [où $\gamma(ds, dz) = \frac{ds dz}{T \times G(K)}$] à valeurs dans \mathbb{D}_1 . A chaque $n \in \mathbb{N}$, on associe des boréliens $V_{j',n}$ d'intérieur deux à deux disjoints avec $1 \leq j' \leq k_n$ et $K \subset \bigcup_{1 \leq j' \leq k_n} V_{j',n}$ et tels que

$\sup_{j'} (\text{diamètre}(V_{j',n}))$ tende vers 0 avec n .

Soit les tribus

$$\mathcal{P}_n = \sigma \left(\left[\frac{jT}{2^n}, \frac{(j+1)T}{2^n} \right] \times V_{j',n} / 0 \leq j \leq 2^n - 1 \quad \text{et} \quad 1 \leq j' \leq k_n \right)$$

\mathcal{P}_n est une suite croissante et $\sigma(\bigcup_n \mathcal{P}_n) = \mathcal{B}([0, T] \times K)$. Posons

$$\begin{aligned} L_n(t, z) &= E_\gamma [H_\delta | \mathcal{P}_n] \\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \sum_{j'=1}^{k_n} \frac{2^n}{T} \frac{1}{G(V_{j',n})} \varphi_{j,j',n} 1_{[jT/2^n, (j+1)T/2^n)} \times V_{j',n}(t, z) \end{aligned}$$

$$\text{où } \varphi_{j,j',n} = \int_{jT/2^n}^{(j+1)T/2^n} \int_{V_{j',n}} H_\delta(s, z) ds dz.$$

Si n est tel que $\frac{T}{2^n} < \delta$ alors $\varphi_{j,j',n}$ est $\mathcal{F}\left(\frac{jT}{2^n}\right)$ -mesurable, de plus on montre que $\varphi_{j,j',n}$ appartient à \mathbb{D} et par le théorème de martingales à valeurs dans un Hilbert séparable, L_n converge vers H_δ dans

$L^2([0, T] \times K, \gamma)$; $(\mathbb{D}, \| \cdot \|_1)$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\|L_n - H_\delta\|_* \leq \varepsilon$.

Donc pour approcher H_δ par des fonctions H_n vérifiant (3.3), il suffit d'approcher $\varphi_{j, j', n}$ par une fonction de $\mathbb{R} \mathcal{F} \left(\frac{jT}{2^n} \right)$ -mesurable en utilisant la proposition (2.2) et $1_{V_{j', n}}$ par des fonctions \mathcal{C}^∞ , positives à valeurs dans K' .

2^e étape. — On considère maintenant H appartenant à \mathcal{K} à support compact par rapport à z . On construit alors H'_n de classe \mathcal{C}^∞ à support compact par rapport à z [en convolant H par une suite $\phi_n(z)$ de fonctions \mathcal{C}^∞] telle que $\|H'_n - H\|_{\mathcal{X}}$ tend vers 0. On montre que $G_n(s, z) = \frac{\partial^\beta}{\partial z_1 \dots \partial z_\beta} H'_n(s, z)$ est du type de la fonction de la première étape et qu'on peut donc l'approcher par une suite de fonctions vérifiant (3.3). En «intégrant» cette suite, on construit une suite de fonctions de \mathcal{K}' approchant H'_n .

3^e étape. — Soit $H \in \mathcal{K}$.

On construit une suite de fonctions ψ_n de E dans $[0, 1]$ à support compact par rapport à z tendant vers 1 telle que $H_n(s, z) = H(s, z) \psi_n(z)$ soit à support compact par rapport à z et converge grâce à la condition (3.1) vers H pour la norme $\| \cdot \|_{\mathcal{X}}$, il ne reste donc plus qu'à appliquer la deuxième étape. ■

DÉFINITION 3.4. — On appelle \mathbb{H} , l'ensemble des $X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tels que chaque $X(t, \cdot)$ soit \mathcal{F}_t -mesurable et que $t \rightarrow X(t, \cdot)$ appartienne à $L^2([0, T], dt)$; $(\mathbb{D}, \| \cdot \|_1)$.

On note $\|X\|_{\mathbb{H}}^2 = \int_0^T \|X_s\|_1^2 ds$.

\mathbb{H} est donc le sous-espace vectoriel fermé de $L^2([0, t], dt)$, $(\mathbb{D}, \| \cdot \|_1)$ formé des classes de processus adaptés.

THÉORÈME 3.5. — Soit $H \in \mathcal{K}$, alors l'intégrale stochastique

$X_t = \int_0^t \int_E H(s, z) \tilde{\mu}(ds, dz)$ est bien définie, et

1. $\forall t, X_t \in \mathbb{D}$ et $\|X_t\|_1 \leq \|H\|_{\mathcal{X}}$ et $X \in \mathbb{H}$.

2. $\Gamma(X_{s-}, H(s, z))$ admet une version $\mathcal{P} \otimes \mathcal{E}$ mesurable, intégrable par rapport à $\tilde{\mu}$, et une version de $\Gamma(X_t, X_t)$ est donnée par :

$$\Gamma(X_t, X_t) = 2 \int_0^t \int_E \Gamma(X_{s-}, H(s, z)) \tilde{\mu}(ds, dz) + \int_0^t \int_E \{ \Gamma(H(s, z), H(s, z)) + \rho(z) D_z H(s, z) D_z H(s, z)^T \} \mu(ds, dz).$$

Démonstration :

(A) Considérons d'abord $H \in \mathcal{H}'$ de la forme :

$$H(t, z) = \sum_{j=0}^k \sum_{j'=1}^{k'} h_{j, j'} 1_{]t_j, t_{j+1}[}(t) f_{j'}(z).$$

On a alors

$$X_t = \sum_{j=0}^k \sum_{j'=1}^{k'} h_{j, j'} F_{j, j'}(t)$$

où

$$F_{j, j'}(t) = \int_0^t \int_E 1_{]t_j, t_{j+1}[}(s) f_{j'}(z) \tilde{\mu}(ds, dz).$$

$F_{j, j'}(t)$ appartient donc à \mathbf{R} .

On a alors par les propositions 1.5 et 2.2 que :

$$\begin{aligned} \Gamma(X_t, X_t) &= 2 \int_0^t \int_E \Gamma(X_{s-}, H(s, z)) \tilde{\mu}(ds, dz) \\ &\quad + \int_0^t \int_E \{ \Gamma(H(s, z), H(s, z)) + \rho(z) D_z H(s, z) D_z H(s, z)^T \} \mu(ds, dz) \end{aligned}$$

(Pour les calculs détaillés, voir [5].)

Comme $h_{j, j'}$ et $F_{j, j'}(t)$ appartiennent à \mathbf{R} , on a aussi que

$$\int_0^t \int_E E[\Gamma(X_{s-}, H(s, z))^2] ds dz < +\infty$$

et $\Gamma(X_{s-}, H(s, z))$ est $\mathcal{P} \times \mathcal{E}$ mesurable donc

$$\int_0^t \int_E E[\Gamma(X_{s-}, H(s, z))] \tilde{\mu}(ds, dz)$$

est une martingale de carré intégrable.

Donc si $H \in \mathcal{H}'$,

$$\begin{aligned} (X_t, X_t) &= \frac{1}{2} E[\Gamma(X_t, X_t)] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \int_E E[\Gamma(H(s, z), H(s, z)) + \rho(z) D_z H(s, z) D_z H(s, z)^T] ds dz \\ &= \int_0^t \int_E [((H(s, z), H(s, z))) \\ &\quad + \frac{1}{2} E[\rho(z) D_z H(s, z) D_z H(s, z)^T]] ds dz. \end{aligned}$$

$$\text{De plus, } E[X_t^2] = \int_0^t \int_E E[H(s, z)^2] ds dz.$$

Les deux égalités précédentes impliquent donc que

$$(3.6) \quad \|X_t\|_1^2 = \|H 1_{[0, t]}\|_{\mathcal{X}}^2.$$

(B) Soit $H \in \mathcal{X}$.

Par le théorème (3.2), il existe une suite H_n appartenant à \mathcal{X}' telle que $\|H_n - H\|_{\mathcal{X}}$ converge vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

$$\text{Soit } X_n(t) = \int_0^t \int_E H_n(s, z) \tilde{\mu}(ds, dz).$$

H est $\mathcal{P} \times \mathcal{E}$ mesurable et

$$\int_0^t \int_E E[H^2(s, z)] ds dz < +\infty,$$

donc

$$X_t = \int_0^t \int_E H(s, z) \tilde{\mu}(ds, dz)$$

est bien définie et est de carré intégrable.

On a par (3.6), $\|X_n(t) - X_m(t)\|_1 = \|(H_n - H_m) 1_{[0, t]}\|_{\mathcal{X}}$. Donc $X_n(t)$ est de Cauchy dans $(\mathbb{D}, \|\cdot\|_1)$, donc converge dans $(\mathbb{D}, \|\cdot\|_1)$. Comme $X_n(t)$ converge dans $L^2(\mathbb{P})$ vers X_t , on en déduit alors que $X_n(t) \rightarrow X(t)$ dans $(\mathbb{D}, \|\cdot\|_1)$ et donc $\forall t, \|X_t\|_1 = \lim_n \|X_n(t)\|_1 = \|H 1_{[0, t]}\|_{\mathcal{X}} \leq \|H\|_{\mathcal{X}}$.

On en déduit que $X \in \mathbb{H}$ et $\|X\|_{\mathbb{H}}^2 \leq T \|H\|_{\mathcal{X}}^2$.

Soit

$$U_n(s, z) = \Gamma(H_n(s, z), H_n(s, z)) + \rho(z) D_z H_n(s, z) D_z H_n(s, z)^T$$

et

$$U(s, z) = \Gamma(H(s, z), H(s, z)) + \rho(z) D_z H(s, z) D_z H(s, z)^T.$$

Posons

$$a_n(t) = \int_0^t \int_E U_n(s, z) \mu(ds, dz)$$

et

$$b_n(t) = \int_0^t \int_E \Gamma(X_n(s-), H_n(s, z)) \tilde{\mu}(ds, dz)$$

D'après le (A), $\Gamma(X_n(t), X_n(t)) = a_n(t) + 2b_n(t)$. Comme $X_n(t)$ converge dans $(\mathbb{D}, \|\cdot\|_1)$ vers $X(t)$, $\Gamma(X_n(t), X_n(t))$ converge dans $L^1(\mathbb{P})$ vers $\Gamma(X_t, X_t)$.

LEMME 3.7. - $U_n \rightarrow U$ dans $L^1(\Omega \times [0, T] \times E, d\mathbb{P} \otimes dt \otimes dz)$.

Démonstration. — On montre facilement que :

$$\int_0^t \int_E \mathbb{E} [|U_n(s, z) - U(s, z)|] ds dz \leq 2 \|H_n - H\|_{\mathcal{X}} (\|H_n\|_{\mathcal{X}} + \|H\|_{\mathcal{X}}),$$

d'où le résultat. ■

On déduit du lemme 3.7, par extraction d'une sous-suite qui converge p. p. pour $dP \times ds \times dz$ que $(\omega, s, z) \rightarrow U(s, \omega, z)$ admet une version $\mathcal{P} \times \mathcal{E}$ mesurable, et $a(t) = \int_0^t \int_E U(s, z) \mu(ds, dz)$ est bien définie et appartient à $L^1(P)$, et de plus le lemme précédent implique que $a_n(t)$ tend vers $a(t)$ dans L^1 .

Si (h_n) est une base orthonormale de $(\mathbb{D}, \|\cdot\|_1)$, on a p. s.

$$\Gamma(X_s, H(s, z)) = \sum_{i,j} ((X_s, h_i))_1 ((H(s, z), h_j))_1 \Gamma(h_i, h_j),$$

donc il existe une version $(\omega, s, z) \rightarrow \Gamma(X_s, H(s, z))(\omega)$ qui est mesurable.

LEMME 3.8. — Soit $K_p = E \cap B(0, p)$. Alors $\Gamma(X_n(\cdot), H_n(\cdot, \cdot))$ converge vers $\Gamma(X(\cdot), H(\cdot, \cdot))$ dans $L^1(\Omega \times [0, T] \times K_p, dt \times dP \times 1_{K_p}(z) dz)$.

Démonstration. — Un calcul facile montre que :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \int_E 1_{K_p}(z) |\Gamma(X_n(s), H_n(s, z)) - \Gamma(X(s), H(s, z))| ds dz \right] \leq 2 \sqrt{TG(K_p)} [\|H_n\|_{\mathcal{X}} + \|H\|_{\mathcal{X}}] \|H_n - H\|_{\mathcal{X}}. \quad \blacksquare$$

Il existe donc une suite pour laquelle on a convergence p.p. pour $dP \times ds \times 1_{K_p}(z)$ pour tout p ; il existe donc une version $\mathcal{P} \times \mathcal{E}$ mesurable de $(\omega, s, z) \rightarrow \Gamma(X_s, H(s, z))(\omega)$.

On a vu que $2b_n(t) = \Gamma(X_n(t), X_n(t)) - a_n(t)$ est une martingale de carré intégrable qui converge dans $L^1(P)$ vers $M_t = \Gamma(X_t, X_t) - a(t)$. Donc M est une martingale et d'après le théorème de représentation prévisible, il existe $j(s, z)$ $\mathcal{P} \otimes \mathcal{E}$ -mesurable avec

$$\int_0^T \int_E j^2(s, z) \wedge j(s, z) ds dz < +\infty$$

et

$$M_t = \int_0^t \int_E j(s, z) \tilde{\mu}(ds, dz).$$

Soit une fonction B , $\mathcal{P} \times \mathcal{E}$ mesurable, à support compact par rapport à z et bornée, soit T_m une suite de temps d'arrêt tendant vers $+\infty$ telle que

$$N_t^{T_m} = \int_0^{T_m \wedge t} \int_E B(s, z) \tilde{\mu}(ds, dz) \in L^\infty(P).$$

On a :

$$\begin{aligned} E \left[N_t^{T_m} \int_0^t \int_E \Gamma(X_n(s-), H_n(s, z)) \tilde{\mu}(ds, dz) \right] \\ = E \left[\int_0^t \int_E B(s, z) \Gamma(X_n(s-), H_n(s, z)) ds dz \right] \end{aligned}$$

En faisant tendre n et m vers l'infini, on obtient grâce au lemme 3.8 et au fait que le support de B par rapport à z est inclus dans un K_p , l'égalité suivante :

$$E \left[\int_0^t \int_E B(s, z) \Gamma(X(s-), H(s, z)) ds dz \right] = E \left[\int_0^t \int_E B(s, z) j(s, z) ds dz \right].$$

On a donc, $\forall p, j = \Gamma(X_-, H) dP \times ds \times 1_{K_p}(z) dz$ p.p. et donc $j = \Gamma(X_-, H) dP \times ds \times dz$ p.p.

Le théorème 3.12 est ainsi établi.

II. - ABSOLUE CONTINUITÉ SUR L'ESPACE DE POISSON

1) Formule fondamentale

Nous prendrons dans la suite les notations suivantes :

si $v \in \mathbb{R}^p, |v| = \sup_{1 \leq \alpha \leq p} |v_\alpha|;$

si $\Lambda \in (\mathbb{R}^p)^{\mathbb{N}^*}, \Lambda = (\lambda_i)_{i \geq 1}, |\Lambda| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\lambda_i|.$

A la condition (I.3.1), $\frac{\rho}{d^2}$ bornée, ajoutons une autre hypothèse :

(1.1) ρ est une fonction strictement positive sur E et $\frac{D_z \rho}{\sqrt{\rho}}$ est bornée.

Il existe alors une suite de fonctions $\xi_n : E \rightarrow [0, 1]$ et des constantes c_n, c'_n telles que :

(1.2) $\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{ les } \xi_n \text{ sont continûment dérivables;} \\ \cdot \text{ les } \xi_n \text{ sont à support compact;} \\ \cdot \text{ les } \xi_n \text{ tendent en croissant vers 1;} \\ \cdot \text{ si } E_n = \{z \in E \mid \xi_n(z) > 0\} \text{ alors pour tout } z \in E_n, \text{ on a} \\ \cdot \sqrt{\rho(z)} \xi_n(z) \leq c_n d(z, E_n^c); \\ \cdot \forall z \in E_n, \left| \sqrt{\rho(z)} D_z \xi_n(z) \right| \leq c'_n. \end{array} \right.$

Posons $g_n = \sqrt{\rho} \xi_n.$

Soit T_i^n le i -ième saut de μ dans E_n et $\alpha_i^n(\omega)$ l'unique point de E_n tel que $\mu(\omega; \{T_i^n\} \times dz) = \varepsilon_{\alpha_i^n(\omega)}(dz)$.

Soit k_n le nombre de sauts de μ dans E_n , c'est-à-dire $k_n = \mu(E_n \times [0, T])$.

Soit $\Lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}^B)^{\mathbb{N}^*}$ et $\gamma_n(\Lambda) : \Omega \times [0, T] \times E \rightarrow E$ définie par

$$\gamma_n(\Lambda)(\omega, t, z) = z + \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i 1_{\llbracket T_{i-1}^n, T_i^n \rrbracket}(\omega, t) g_n(z).$$

Grâce aux hypothèses (1.1) et (1.2), il existe $r_n > 0$ tel que $\forall \Lambda \in (\mathbb{R}^B)^{\mathbb{N}^*}$ vérifiant $|\Lambda| < r_n, \forall t \in [0, T], \forall \omega \in \Omega, \gamma_n(\Lambda)(\omega, t, \cdot)$ est une bijection de E_n dans E_n et de E dans E . Soit $Y_n(\Lambda)(\omega, t, z)$ son jacobien. Par un calcul facile de déterminant, on a

$$Y_n(\Lambda)(\omega, t, z) = 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} 1_{\llbracket T_{i-1}^n, T_i^n \rrbracket}(\omega, t) \lambda_i^T \cdot D_z g_n(z).$$

On en déduit donc que $Y_n(\Lambda)$ est $\mathcal{P} \times \mathcal{E}$ mesurable et que, en choisissant r_n assez petit, on a

$$|(Y_n(\Lambda)(\omega, t, z))^{-1} - 1| < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad [(Y_n(\Lambda)(\omega, t, z))^{-1} - 1]$$

appartient à $L^2(G(dz))$. Donc

$$M_n(\Lambda)(t) = \int_0^t \int_E ((Y_n(\Lambda)(s, z))^{-1} - 1) \tilde{\mu}(ds, dz)$$

est une martingale réelle de carré intégrable dont les sauts sont bornés par $\frac{1}{2}$, et donc l'exponentielle de Doléans-Dade [9] $G_n(\Lambda)(t) = \mathcal{E}(M_n(\Lambda))_t$,

[c'est-à-dire la solution de l'équation différentielle linéaire

$$G_n(\Lambda)(t) = 1 + \int_0^t \int_E G_n(\Lambda)(s-) ((Y_n(\Lambda)(s, z))^{-1} - 1) \tilde{\mu}(ds, dz)]$$

est strictement positive.

On définit $\beta_n(\Lambda) : \Omega \rightarrow \Omega$ par

$$\beta_n(\Lambda)(\omega) = \omega - \sum_{i=1}^{k_n(\omega)} \varepsilon_{(T_i^n(\omega), \alpha_i^n(\omega))} + \sum_{i=1}^{k_n(\omega)} \varepsilon_{(T_i^n(\omega), \alpha_i^n(\omega) + \lambda_i g_n(\alpha_i^n(\omega)))}.$$

$\beta_n(\Lambda)$ est donc une bijection et on voit que $\beta_n(\Lambda)$ ne modifie pas les temps de saut mais seulement la taille des sauts qui ont lieu dans E_n .

Si $P_n^\Lambda = G_n(\Lambda)(T) \cdot P$, alors en appliquant le théorème de Girsanov [9], μ a $Z_n(\Lambda) \cdot \nu$ comme compensateur. Or l'image de $Z_n(\Lambda) \cdot \nu$ par $(\gamma_n(\Lambda))^{-1}$ est ν . Donc si μ_n^Λ est définie par $\mu_n^\Lambda(\omega, A) = \mu(\omega, (\gamma_n(\Lambda)(\omega))^{-1}(A))$, on a alors sous P_n^Λ , μ_n^Λ est une mesure de Poisson d'intensité ν . Comme μ_n^Λ a

sous P_n^Λ la même loi que μ sous P et que $\mu_n^\Lambda = \mu \circ \beta_n^\Lambda$, on en déduit que P_n^Λ est l'image de P par β_n^Λ .

Dans la suite, on notera, si $\lambda \in \mathbb{R}^\beta$, $\Lambda(i, \lambda)$ l'élément de $(\mathbb{R}^\beta)^{\mathbb{N}^*}$ défini par $\Lambda(i, \lambda) = (\lambda_j)_{j \geq 1}$ avec $\lambda_j = 0$ si $j \neq i$ et $\lambda_i = \lambda$.

On notera $(e_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq \beta}$, la base canonique de \mathbb{R}^β et P_α la projection de \mathbb{R}^β sur le complémentaire orthogonal de e_α .

Posons $\sigma_{\alpha, i, n} = \int_{-r_n}^{r_n} P_n^\Lambda(i, te_\alpha) dt$. Cette mesure est équivalente à P . Et soit

$k_{\alpha, i, n} = \frac{dP}{d\sigma_{\alpha, i, n}}$. On a donc si $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ est mesurable

$$(1.3) \quad E[\Phi] = \int_{\Omega} \int_{-r_n}^{r_n} \Phi \circ \beta_n(\Lambda(i, te_\alpha))(\omega) k_{\alpha, i, n} \circ \beta_n(\Lambda(i, te_\alpha))(\omega) dt dP(\omega).$$

Grâce au choix de r_n , on a :

$$(1.4) \quad 0 < \frac{1}{3r_n} e^{-(1/2)TG(E_n)} \leq k_{\alpha, i, n} \leq \frac{1}{r_n} e^{(1/2)TG(E_n)}.$$

On montrerait de même que pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout q_1, \dots, q_p deux à deux distincts appartenant à \mathbb{N} , il existe une fonction k'_p strictement positive telle que :

si $A_n =]-r_n, r_n[^\beta$, on a pour toute fonction Φ de Ω dans \mathbb{R}^+ mesurable :

$$(1.5) \quad E[\Phi] = \int_{\Omega} \int_{(A_n)^p} \Phi \circ \beta_n \left(\sum_{p'=1}^p \Lambda(q_{p'}, \lambda_{p'}) \right) (\omega) k'_p \circ \beta_n \left(\sum_{p'=1}^p \Lambda(q_{p'}, \lambda_{p'}) \right) (\omega) d\lambda_1 \dots d\lambda_p dP(\omega).$$

2) Dérivées approximatives de $\Phi \circ \beta_n(\Lambda)$

DÉFINITION. — Si f est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} Lebesgue-mesurable, f est dite approximativement dérivable en a de dérivée approximative égale à b si :

$$\forall \varepsilon > 0,$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} G \{ x \in [a - \eta, a + \eta]; |f(x) - f(a) - (x - a)b| > \varepsilon |x - a| \} = 0.$$

(où G désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}).

On note $b = \text{ap}(f'(a))$. On définit de même pour les fonctions de plusieurs variables $\text{ap} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)$ et $\text{ap}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \left(\text{ap} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \text{ap} \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$.

Soit $\overline{\mathcal{F}}$ la complétée de \mathcal{F} pour P .

DÉFINITION 2.1. — Soit $i \geq 1$, on note \mathcal{D}_n^i l'ensemble des fonctions Φ de Ω dans \mathbb{R} mesurables telles qu'il existe une variable aléatoire $\tilde{\Phi}$ \mathcal{F} -mesurable avec $\tilde{\Phi} = \Phi$ P-p. p. telle que pour tout $\omega \in \Omega$, pour tout $\alpha \in \langle 1, \beta \rangle$, l'application de $] -r_n, r_n[$ dans \mathbb{R} qui à t associe $\tilde{\Phi} \circ \beta_n(\Lambda(i, te_\alpha)(\omega))$ soit absolument continue sur $] -r_n, r_n[$.

Remarque. — Dans cette partie où l'on travaillera avec i et n fixés, on notera $\beta_n(\Lambda(i, \lambda)) = \beta(\lambda)$ pour $\lambda \in A_n$ et $A_n = A$.

LEMME 2.2. — Si $\Phi \in \mathcal{D}_n^i, \forall \alpha, \frac{1}{t} [\Phi \circ \beta(te_\alpha) - \Phi]$ converge en probabilité quand $t \rightarrow 0$. On note $\nabla_{\alpha, i, n} \Phi$ cette limite et $\nabla_{i, n} \Phi = (\nabla_{1, i, n} \Phi, \dots, \nabla_{\beta, i, n} \Phi)$.

Démonstration. — Soit $\tilde{\Phi}$ associé à Φ par la définition 2.1.

Notons $\psi_{\alpha, \omega} :] -r_n, r_n[\rightarrow \mathbb{R}$

$$t \rightarrow \tilde{\Phi} \circ \beta(te_\alpha)(\omega).$$

Donc $\forall \omega \in \Omega$, il existe $B(\omega) \subset] -r_n, r_n[$ de complémentaire de mesure de Lebesgue nulle tel que pour tout $t \in B(\omega)$, pour tout $\alpha \in \langle 1, \beta \rangle$,

$$\psi'_{\alpha, \omega}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\psi_{\alpha, \omega}(t+h) - \psi_{\alpha, \omega}(t)}{h} \right] \text{ existe}$$

Soit $\Delta_\alpha = \{ \beta(te_\alpha)(\omega) \mid \omega \in \Omega \text{ et } t \in B(\omega) \}$.

Calculons d'abord $(\beta(h) \circ \beta(\lambda))(\omega)$ avec h et $\lambda \in A : \beta(h)$ et $\beta(\lambda)$ ne modifient que le saut en $T_i^n(\omega)$, ainsi :

$$\begin{aligned} \alpha_i^n(\omega) &\xrightarrow{\beta(\lambda)} \alpha_i^n(\omega) + \lambda g_n(\alpha_i^n(\omega)) \\ &\xrightarrow{\beta(h)} \alpha_i^n(\omega) + \lambda g_n(\alpha_i^n(\omega)) + h g_n(\alpha_i^n(\omega) + \lambda g_n(\alpha_i^n(\omega))) \end{aligned}$$

donc

$$(2.3) \quad (\beta(h) \circ \beta(\lambda))(\omega) = \beta(\varphi_{i, n}(\lambda, \omega)h + \lambda)(\omega),$$

où

$$(2.4) \quad \varphi_{i, n}(\lambda, \omega) = \frac{g_n(\alpha_i^n(\omega) + \lambda g_n(\alpha_i^n(\omega)))}{g_n(\alpha_i^n(\omega))}.$$

Grâce au choix de r_n , on vérifie facilement que $\forall i, \forall \omega \in \Omega, \forall \lambda \in A$, $\varphi_{i, n}(\lambda, \omega)$ est minoré par un nombre strictement positif.

Soit $t \in B(\omega)$ et $\omega' = \beta(te_\alpha)(\omega)$, donc $\omega' \in \Delta_\alpha$; on a donc :

$$\frac{\tilde{\Phi}(\beta(he_\alpha)(\omega')) - \tilde{\Phi}(\omega')}{h} = \frac{\psi_{\alpha, \omega}(\varphi_{i, n}(te_\alpha, \omega)h + t) - \psi_{\alpha, \omega}(t)}{h}$$

Comme $t \in B(\omega)$, par composition d'applications dérivables, $\frac{\tilde{\Phi} \circ \beta(he_\alpha)(\omega') - \tilde{\Phi}(\omega')}{h}$ converge quand $h \rightarrow 0$ vers $\varphi_{i, n}(te_\alpha, \omega) \psi'_{\alpha, \omega}(t)$.

Donc pour tout $\omega \in \Delta_\alpha$, $\frac{\tilde{\Phi}(\beta(h e_\alpha)(\omega)) - \tilde{\Phi}(\omega)}{h}$ admet une limite quand $h \rightarrow 0$.

Soit $R \subset \Delta_\alpha^c$, R mesurable; utilisons la formule (1.3):

$$P(R) = \int_{\Omega} \int_{-r_n}^{r_n} 1_R \circ \beta(t e_\alpha)(\omega) k_{\alpha, i, n} \circ \beta(t e_\alpha)(\omega) dt dP(\omega).$$

Or $t \in B(\omega)$ implique que $\beta(t e_\alpha)(\omega) \notin R$, et comme $B(\omega)$ est de complémentaire Lebesgue négligeable, on a $P(R) = 0$.

Donc Δ_α est de mesure extérieure égale à 1.

Or $\left\{ \omega / \frac{1}{t} [\tilde{\Phi} \circ \beta(t e_\alpha)(\omega) - \tilde{\Phi}(\omega)] \text{ converge} \right\}$ contient Δ_α , donc est aussi de mesure extérieure égale à 1, par suite par [6] $\frac{1}{t} [\Phi \circ \beta(t e_\alpha) - \Phi]$ converge en probabilité quant $t \rightarrow 0$. Notons $\nabla_{\alpha, i, n} \Phi$ sa limite. On a montré de plus que:

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} dP \text{ p. p., } dt \text{ p. p.} \\ \varphi_{i, n}(t e_\alpha, \omega) \psi'_{\alpha, \omega}(t) = (\nabla_{\alpha, i, n} \Phi \circ \beta_n(t e_\alpha))(\omega). \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

LEMME 2.6. — Si $\Phi \in \mathcal{D}_n^i$, alors il existe $\Omega_1 \mathcal{F}$ -mesurable avec $P(\Omega_1) = 1$ tel que pour tout $\omega \in \Omega_1$, $\Phi \circ \beta_n(\Lambda(i, \lambda))(\omega)$ admet $d\lambda$ -p. p. sur A des dérivées partielles approximatives égales à $(\varphi_{i, n}(\lambda, \omega))^{-1} (\nabla_{\alpha, i, n} \Phi \circ \beta_n(\Lambda(i, \lambda)))(\omega)$.

Démonstration. — Reprenons les notations de la démonstration du lemme 2.2 et posons

$$\psi_\omega: \begin{array}{l} A \rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda \rightarrow (\tilde{\Phi} \circ \beta(\lambda))(\omega). \end{array}$$

Or par (2.3) $\psi_\omega(\lambda) = \psi_{\alpha, \omega'}((\varphi_{i, n}(P_\alpha \lambda, \omega))^{-1} \lambda^\alpha)$ où $\omega' = \beta(P_\alpha \lambda)(\omega)$ et $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^p)$; on en déduit donc que ψ_ω est $d\lambda^\alpha$ -p. p. dérivable par rapport à λ^α , de dérivée égale $d\lambda^\alpha$ -p. p. à

$$\varphi_{i, n}^{-1}(P_\alpha \lambda, \omega) \psi'_{\alpha, \omega'}(\varphi_{i, n}^{-1}(P_\alpha \lambda, \omega) \lambda^\alpha).$$

On en déduit donc que pour tout $\omega \in \Omega$, ψ_ω admet $d\lambda$ -p. p. sur A des dérivées partielles.

Donc par la même démonstration que le lemme (2.2) en remplaçant $] -r_n, r_n[$ par $] -r_n, r_n]^\beta$ et 1.3 par 1.5, on en déduit que

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} dP \text{-p. p., } d\lambda \text{-p. p.,} \\ \varphi_{i, n}(\lambda, \omega) \frac{\partial}{\partial \lambda^\alpha} \psi_\omega(\lambda) = (\nabla_{\alpha, i, n} \Phi \circ \beta(\lambda))(\omega). \end{array} \right.$$

Soit

$$\Omega_1 = \left\{ \omega / \Phi \circ \beta(\lambda)(\omega) = \tilde{\Phi} \circ \beta(\lambda)(\omega) \, d\lambda\text{-p. p.} \right. \\ \left. \text{et } \frac{\partial}{\partial \lambda^\alpha} \psi_\omega(\lambda) = (\varphi_{i,n}(\lambda, \omega))^{-1} \times (\nabla_{\alpha, i, n} \Phi \circ \beta(\lambda))(\omega) \, d\lambda\text{-p. p., } \forall \alpha \right\}.$$

Ω_1 est donc mesurable et vérifie $P(\Omega_1) = 1$.

Donc si $\omega \in \Omega_1$, $\psi_\omega(\lambda)$ admet $d\lambda\text{-p. p.}$ des dérivées partielles égales à $(\varphi_{i,n}(\lambda, \omega))^{-1} (\nabla_{\alpha, i, n} \Phi) \circ \beta(\lambda)(\omega)$.

Or pour tout $\omega \in \Omega_1$, $\psi_\omega(\lambda) = \Phi \circ \beta(\lambda)(\omega) \, d\lambda\text{-p. p.}$, donc $\Phi \circ \beta(\lambda)$ admet des dérivées partielles approximatives $d\lambda\text{-p. p.}$ et

$$\text{ap} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda^\alpha} [\Phi \circ \beta(\lambda)(\omega)] \right) = (\varphi_{i,n}(\lambda, \omega))^{-1} (\nabla_{\alpha, i, n} \Phi) \circ \beta(\lambda)(\omega) \, d\lambda\text{-p. p.} \quad \blacksquare$$

LEMME 2.8. — Soit $\Phi_p \in \mathcal{D}_n^i$ telle que Φ_p converge en probabilité vers Φ quand $p \rightarrow +\infty$, et pour tout $\alpha = 1, \dots, \beta$, soit $U_\alpha \in L^1(P)$ telle que $E[|\nabla_{\alpha, i, n} \Phi_p - U_\alpha|] \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow +\infty$, alors $\Phi \in \mathcal{D}_n^i$ et $\nabla_{\alpha, i, n} \Phi = U_\alpha \, P\text{-p. p.}$

Démonstration. — Gardons toujours la notation du lemme 2.2.

Soit $\tilde{\Phi}_p$ associée à Φ_p par la définition 2.1 et $\psi_{\alpha, \omega, p}(h) = \tilde{\Phi}_p \circ \beta(h e_\alpha)(\omega)$.

On a : $\forall \omega \in \Omega, \forall t \in]-r_n, r_n[$

$$(*) \quad (\tilde{\Phi}_p \circ \beta(t e_\alpha))(\omega) - \tilde{\Phi}_p(\omega) = \int_0^t \psi'_{\alpha, \omega, p}(h) \, dh$$

et par (1.3) :

$$E[|\nabla_{\alpha, i, n} \Phi_p - U_\alpha|] = \int_{\Omega} \int_{-r_n}^{r_n} |\nabla_{\alpha, i, n} \Phi_p \circ \beta_n(t e_\alpha)(\omega) \\ - U_\alpha \circ \beta_n(t e_\alpha)(\omega) | k_{\alpha, i, n} \circ \beta_n(t e_\alpha)(\omega) \, dt \, dP(\omega) \\ = \int_{\Omega} \int_{-r_n}^{r_n} |\varphi_{i, n}^{-1}(t e_\alpha, \omega) \nabla_{\alpha, i, n} \Phi_p \circ \beta_n(t e_\alpha)(\omega) \\ - \varphi_{i, n}^{-1}(t e_\alpha, \omega) U_\alpha \circ \beta_n(t e_\alpha)(\omega) | \\ \varphi_{i, n}(t e_\alpha, \omega) k_{\alpha, i, n} \circ \beta_n(t e_\alpha)(\omega) \, dt \, dP(\omega).$$

Or par (2.5), on a :

$$E[|\nabla_{\alpha, i, n} \Phi_p - U_\alpha|] \\ = \int_{\Omega} \int_{-r_n}^{r_n} |\psi'_{\alpha, \omega, p}(t) - \varphi_{i, n}^{-1}(t e_\alpha, \omega) U_\alpha \circ \beta_n(t e_\alpha)(\omega) | \\ \varphi_{i, n}(t e_\alpha, \omega) (k_{\alpha, i, n} \circ \beta_n(t e_\alpha))(\omega) \, dt \, dP(\omega).$$

Donc il existe une sous-suite p' et un ensemble plein Ω_0 tels que

$$\forall \omega \in \Omega_0, \quad \tilde{\Phi}_{p'}(\omega) \rightarrow \Phi(\omega)$$

et

$$\int_{-r_n}^{r_n} |\psi'_{\alpha, \omega, p'}(t) - \varphi_{i, n}^{-1}(te_\alpha, \omega)(U_\alpha \circ \beta_n(te_\alpha))(\omega)| dt \rightarrow 0.$$

Soit $\Omega_1 = \{ \beta_n(te_\alpha)(\omega) / \omega \in \Omega_0 \text{ et } t \in]-r_n, r_n[\}$, $\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \Omega$ et $P(\Omega_0^c) = 0$, donc $\Omega_1 \in \mathcal{F}$. D'après (\star) , on peut définir $\tilde{\Phi}$ par :

$$\text{si } \omega \in \Omega_1, \tilde{\Phi}(\omega) = \lim_{p' \rightarrow +\infty} \tilde{\Phi}_{p'}(\omega);$$

$$\text{si } \omega \notin \Omega_1, \tilde{\Phi}(\omega) = 0.$$

$\tilde{\Phi}$ est donc \mathcal{F} -mesurable et égale à Φ P-p. p. et de plus pour tout $\omega \in \Omega_0$ pour tout $t \in]-r_n, r_n[$,

$$\tilde{\Phi}(\beta(te_\alpha))(\omega) - \Phi(\psi) = \int_0^t \varphi_{i, n}^{-1}(he_\alpha, \omega)(U_\alpha \circ \beta)(he_\alpha)(\omega) dh.$$

On montre de plus par un changement de variable et grâce au fait que

$$\beta(te_\alpha) \circ \beta(he_\alpha)(\omega) = \beta(\varphi_{i, n}(he_\alpha, \omega)te_\alpha + he_\alpha)(\omega),$$

que pour tout $\omega \in \Omega_1$, pour tout $t \in]-r_n, r_n[$

$$\tilde{\Phi}(\beta(te_\alpha))(\omega) - \tilde{\Phi}(\omega) = \int_0^t \varphi_{i, n}^{-1}(he_\alpha, \omega)U_\alpha \circ \beta(he_\alpha)(\omega) dh$$

et si $\omega \notin \Omega_1$, pour tout $t \in]-r_n, r_n[$:

$$\tilde{\Phi}(\beta(te_\alpha))(\omega) = 0$$

Φ appartient donc à \mathcal{D}_n^i et par (2.5) :

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha, i, n} \Phi \circ \beta_n(te_\alpha)(\omega) &= (\varphi_{i, n}(te_\alpha, \omega))^{-1} \psi_{\alpha, \omega}(t), \quad dP\text{-p. p.}, \quad dt\text{-p. p.} \\ &= U_\alpha \circ \beta_n(te_\alpha)(\omega) \end{aligned}$$

donc

$$E[|\nabla_{\alpha, i, n} \Phi_p - U_\alpha|] = \int_{\Omega} \int_{-r_n}^{r_n} |\nabla_{\alpha, i, n} \Phi - U_\alpha| \circ \beta_n(te_\alpha)(\omega) k_{\alpha, i, n} \circ \beta_n(te_\alpha) dt dP(\omega)$$

donc $\nabla_{\alpha, i, n} \Phi = U_\alpha, dP\text{-p. p.}$ ■

3) Lien avec la forme de Dirichlet du processus d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Poisson

DÉFINITION 3.1. — Posons

$$\mathcal{D}_n = \left\{ \Phi \in \left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} \mathcal{D}_n^i \right) \cap L^2(\mathbf{P}) \left| \sum_{i=1}^{+\infty} \nabla_{i, n} \Phi (\nabla_{i, n} \Phi)^T \in L^1(\mathbf{P}) \right. \right\}$$

et si $\Phi \in \mathcal{D}_n$,

$$\tilde{\Gamma}_n(\Phi, \Phi) = \sum_{i=1}^{+\infty} \nabla_{i,n} \Phi (\nabla_{i,n} \Phi)^T \quad \text{et} \quad ((\Phi, \Phi))_n^{\sim} = \frac{1}{2} E [\tilde{\Gamma}_n(\Phi, \Phi)].$$

LEMME 3.2. — Soit $\Phi \in \mathcal{D}_n \cap \mathcal{D}_{n+1}$, on a alors :

$$\tilde{\Gamma}_n(\Phi, \Phi) \leq \tilde{\Gamma}_{n+1}(\Phi, \Phi), \quad \text{P-p. p.} \quad \text{et} \quad ((\Phi, \Phi))_n^{\sim} \leq ((\Phi, \Phi))_{n+1}^{\sim}.$$

Démonstration. — $E_n \subset E_{n+1}$ donc $\{T_i^n, 1 \leq i \leq k_n\} \subset \{T_j^{n+1}, j \leq k_{n+1}\}$.

Soit $\omega \in \Omega$ et supposons que $T_i^n(\omega) = T_j^{n+1}(\omega)$, donc $\alpha_i^n(\omega) = \alpha_j^{n+1}(\omega)$.

Soit $\lambda \in A_n \cap A_{n+1}$.

On vérifie facilement que

$$\beta_{n+1}(\Lambda(j, \lambda))(\omega) = \beta_n \left(\Lambda \left(i, \frac{g_{n+1}(\alpha_i^n(\omega))}{g_n(\alpha_i^n(\omega))} \lambda \right) \right) (\omega).$$

Et donc par composition d'applications et en utilisant les lemmes 2.6 et 2.7, on a :

$$\begin{aligned} & dP \times d\lambda \text{ p. p.} \quad \text{sur} \quad \{ \omega / T_i^n(\omega) = T_j^{n+1}(\omega) \} \\ & (\varphi_{j,n+1}(\lambda, \omega))^{-1} \nabla_{\alpha, j, n+1} \Phi \circ \beta_{n+1}(\Lambda(j, \lambda))(\omega) \\ & = \frac{g_{n+1}(\alpha_i^n(\omega))}{g_n(\alpha_i^n(\omega))} \left[\varphi_{i,n} \left(\frac{g_{n+1}(\alpha_i^n(\omega))}{g_n(\alpha_i^n(\omega))} \lambda, \omega \right) \right]^{-1} (\nabla_{\alpha, i, n} \Phi) \circ \beta_{n+1}(\Lambda(j, \lambda))(\omega) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & (\nabla_{\alpha, j, n+1} \Phi) \circ \beta_{n+1}(\Lambda(j, \lambda))(\omega) \\ & = \sum_i 1_{(T_i^n = T_j^{n+1})}(\omega) \frac{g_{n+1}(\alpha_i^n(\omega) + \lambda g_{n+1}(\alpha_i^n(\omega)))}{g_n(\alpha_i^n(\omega) + \lambda g_{n+1}(\alpha_i^n(\omega)))} \\ & (\nabla_{\alpha, i, n} \Phi) \circ \beta_{n+1}(\Lambda(j, \lambda))(\omega), \quad dP \times d\lambda \text{ p. p.} \end{aligned}$$

Comme $g_{n+1} \geq g_n$, on a [cf. (1.2)] :

$$\begin{aligned} & ((\nabla_{\alpha, j, n+1} \Phi) \circ \beta_{n+1}(\Lambda(j, \lambda))(\omega))^2 \\ & \geq \left(\sum_i 1_{(T_i^n = T_j^{n+1})} (\nabla_{\alpha, i, n} \Phi) \circ \beta_{n+1}(\Lambda(j, \lambda))(\omega) \right)^2 \\ & dP \times d\lambda \text{-p. p.} \end{aligned}$$

donc

$$(\nabla_{\alpha, j, n+1} \Phi)^2 \geq \sum_i 1_{(T_i^n = T_j^{n+1})} (\nabla_{\alpha, i, n} \Phi)^2 \quad dP \text{-p. p.}$$

d'où

$$\tilde{\Gamma}_{n+1}(\Phi, \Phi)(\omega) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{\alpha=1}^{\beta} (\nabla_{\alpha, j, n+1} \Phi)^2(\omega) \geq \tilde{\Gamma}_n(\Phi, \Phi), \quad dP \text{-p. p.}$$

car $\Omega = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j=1}^{+\infty} \{ \omega / T_i^n(\omega) = T_j^{n+1}(\omega) \}$ d'où en prenant l'espérance :
 $((\Phi, \Phi))_n \sim \leq ((\Phi, \Phi))_{n+1}$. ■

CONSÉQUENCE 3.3. — Si $\Phi \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathcal{D}_n$, $\tilde{\Gamma}_n(\Phi, \Phi)$ est p. s. croissante et donc converge P-p. s.

DÉFINITION 3.4 :

$$\mathcal{D} = \left\{ \Phi \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathcal{D}_n \mid \tilde{\Gamma}_n(\Phi, \Phi) \text{ converge dans } L^1(\mathbf{P}) \right\}$$

Si $\Phi \in \mathcal{D}$, on pose

$$\tilde{\Gamma}(\Phi, \Phi) = \lim \uparrow \tilde{\Gamma}_n(\Phi, \Phi) \quad \text{et} \quad ((\Phi, \Phi)) \sim = \frac{1}{2} E[\tilde{\Gamma}(\Phi, \Phi)].$$

THÉORÈME 3.5. — \mathcal{D} est un espace de Dirichlet qui admet $\tilde{\Gamma}$ comme opérateur carré du champ (voir les définitions de I, § 1).

Démonstration. — a) $((,)) \sim$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur \mathcal{D} . La démonstration est immédiate.

b) \mathcal{D} dense dans $L^2(\mathbf{P})$:

Pour ceci, il suffit de montrer que \mathbf{R} (voir I, § 2) est inclus dans \mathcal{D} , \mathbf{R} étant dense dans $L^2(\mathbf{P})$.

Soit $\Phi = F(\mu(f_1), \dots, \mu(f_k)) \in \mathbf{R}$; soit $t \in]-r_n, r_n[$. On a

$$\Phi \circ \beta_n(\Lambda(i, te_a))(\omega) = F(\omega(f_1) - f_1(T_1^n(\omega), \alpha_i^n(\omega)) + f_1(T_1^n(\omega), \alpha_i^n(\omega) + te_a g_n(\alpha_i^n(\omega))), \dots)$$

Donc $t \rightarrow \Phi \circ \beta_n(\Lambda(i, te_a))(\omega)$ est dérivable, de dérivée en 0 égale à :

$$(\nabla_{\alpha, i, n} \Phi)(\omega) = \sum_{l=1}^k \frac{\partial F}{\partial x_l}(\omega(f_1), \dots, \omega(f_k)) \frac{\partial f_l}{\partial z_\alpha}(T_1^n(\omega), \alpha_i^n(\omega)) g_n(\alpha_i^n(\omega)).$$

d'où

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_n(\Phi, \Phi) &= \sum_{l, l'=1}^k \frac{\partial F}{\partial x_l}(\mu(f_1), \dots, \mu(f_k)) \\ &\quad \times \frac{\partial F}{\partial x_{l'}}(\mu(f_1), \dots, \mu(f_k)) \mu(\rho D_z f_l (D_z f_{l'})^T \xi_n^2). \end{aligned}$$

Or par I (2.1) :

$$\begin{aligned} \Gamma(\Phi, \Phi) &= \sum_{l, l'=1}^k \frac{\partial F}{\partial x_l}(\mu(f_1), \dots, \mu(f_k)) \\ &\quad \times \frac{\partial F}{\partial x_{l'}}(\mu(f_1), \dots, \mu(f_k)) \mu(\rho D_z f_l (D_z f_{l'})^T). \end{aligned}$$

$\xi_n \in [0, 1]$ et converge en croissant vers 1, donc par convergence monotone $\tilde{\Gamma}_n(\Phi, \Phi)$ converge dans L^1 vers $\Gamma(\Phi, \Phi)$. Donc $\Phi \in \mathcal{D}$ et $\tilde{\Gamma}(\Phi, \Phi) = \Gamma(\Phi, \Phi)$, d'où

$$(3.6) \quad ((\Phi, \Phi)) = ((\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi})) \sim.$$

c) Les contractions normales opèrent sur \mathcal{D} .

Il suffit de montrer que si $\Phi \in \mathcal{D}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une contraction normale de l'unité, alors $g(\Phi) \in \mathcal{D}$ et $((g(\Phi), g(\Phi))) \sim \leq ((\Phi, \Phi)) \sim$.

Soit $\Phi \in \mathcal{D}_n^i$ et soit $\tilde{\Phi}$ associée par la définition 2.1.

On a alors $g \circ \tilde{\Phi} = g \circ \Phi$, P-p. p. et $g \circ \tilde{\Phi}$ est \mathcal{F} -mesurable. Par composition d'applications, $\forall \omega \in \Omega$, $t \rightarrow g \circ \tilde{\Phi} \circ \beta_n(\Lambda(i, te_\alpha))(\omega)$ est absolument continue sur $] -r_n, r_n[$ et sa dérivée en t est égale à $g' \circ \tilde{\Phi} \circ \beta_n(\Lambda(i, te_\alpha))(\omega)$ multiplié par la dérivée en t de $\tilde{\Phi} \circ \beta_n(\Lambda(i, te_\alpha))(\omega)$, cette égalité ayant lieu dt-p. p., où g' est un représentant de la dérivée de g .

Grâce à 2.5, on peut remplacer ci-dessus les dérivées de $g \circ \tilde{\Phi}$ et de $\tilde{\Phi}$ par $\nabla_{\alpha, i, n}(g \circ \Phi)$ et $\nabla_{\alpha, i, n} \Phi$, d'où :

$$\begin{aligned} (\nabla_{\alpha, i, n}(g \circ \Phi)) \circ \beta_n(\Lambda(i, e_\alpha))(\omega) \\ = g' \circ \Phi \circ \beta_n(\Lambda(i, te_\alpha))(\omega) (\nabla_{\alpha, i, n} \Phi) \circ \beta_n(\Lambda(i, te_\alpha))(\omega), \\ dP \times d\lambda\text{-p. p.} \end{aligned}$$

et donc $\nabla_{\alpha, i, n}(g \circ \Phi) = (g' \circ \Phi) (\nabla_{\alpha, i, n} \Phi)$, dP -p. p.

Or $|g'| \leq 1$, donc $(\nabla_{\alpha, i, n}(g \circ \Phi))^2 \leq (\nabla_{\alpha, i, n} \Phi)^2$.

Ces calculs montrent que $g \circ \Phi \in \mathcal{D}$ et $((g \circ \Phi, g \circ \Phi)) \sim \leq ((\Phi, \Phi)) \sim$.

d) La forme est fermée.

Soit Φ_p de Cauchy pour $(\|\Phi\|_1 \sim)^2 = \|\Phi\|_{L^2(P)}^2 + ((\Phi, \Phi)) \sim$.

En particulier Φ_p est de Cauchy dans $L^2(P)$, donc converge vers élément Φ de $L^2(P)$.

On a, de plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall i \geq 1$, $\forall \alpha \in \langle 1, \beta \rangle$

$$\begin{aligned} E[|\nabla_{\alpha, i, n} \Phi_p - \nabla_{\alpha, i, n} \Phi_q|^2] &\leq E\left[\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{\beta} (\nabla_{\alpha, i, n}(\Phi_p - \Phi_q))^2\right] \\ &\leq 2((\Phi_p - \Phi_q, \Phi_p - \Phi_q)) \sim \\ &\leq 2(\|\Phi_p - \Phi_q\|_1 \sim)^2. \end{aligned}$$

Donc $\nabla_{\alpha, i, n} \Phi_p$ est de Cauchy dans $L^2(P)$ uniformément en α, i, n et par conséquent converge dans $L^2(P)$ uniformément en α, i, n vers une variable $\psi_{\alpha, i, n}$. D'après le lemme 2.8, il vient $\Phi \in \mathcal{D}_n^i$ et $\nabla_{\alpha, i, n} \Phi = \psi_{\alpha, i, n}$, P-p. p.

On a donc, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists p_0 \in \mathbb{N} / \forall p \geq p_0$, $\forall \alpha$, $\forall i$, $\forall n$,

$$E[|(\nabla_{\alpha, i, n} \Phi_p)^2 - (\psi_{\alpha, i, n})^2|] \leq \varepsilon$$

d'où

$$E\left[\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{\alpha=1}^{\beta} |(\nabla_{\alpha, i, n} \Phi_p)^2 - (\psi_{\alpha, i, n})^2|\right] \leq \varepsilon E\left[\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{\alpha=1}^{\beta} 1_{(i \leq k_n)}\right] \leq \varepsilon \beta \text{ TG}(E_n).$$

Par suite, $\tilde{\Gamma}_n(\Phi_p, \Phi_p)$ converge dans $L^1(P)$ vers $\tilde{\Gamma}_n(\Phi, \Phi)$. Donc $\Phi \in \bigcap_{n=0} \mathcal{D}_n$.

Or $\tilde{\Gamma}_n(\Phi_p, \Phi_p)$ est uniformément (en n) de Cauchy dans $L^1(P)$; en effet : $E[|\tilde{\Gamma}_n(\Phi_p, \Phi_p) - \tilde{\Gamma}_n(\Phi_q, \Phi_q)|] \leq 2 \|\Phi_p - \Phi_q\|_1 [(\|\Phi_p\|_1^2 + (\|\Phi_q\|_1^2)^{1/2})]$.

Donc $\tilde{\Gamma}_n(\Phi_p, \Phi_p)$ converge dans $L^1(P)$, quand $p \rightarrow +\infty$, uniformément en n vers $\tilde{\Gamma}_n(\Phi, \Phi)$. On en déduit alors facilement que $\tilde{\Gamma}_n(\Phi, \Phi)$ converge dans $L^1(P)$, et donc que $\Phi \in \mathcal{D}$ et que Φ_p converge dans $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_1)$ vers Φ .

e) Calcul de l'opérateur carré du champ.
Soit $f, h \in \mathcal{D} \cap L^\infty(P)$. On vérifie facilement que :

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha, i, n}(fh) &= (\nabla_{\alpha, i, n} f)h + f(\nabla_{\alpha, i, n} h), \quad dP\text{-p. p.} \\ \nabla_{\alpha, i, n}(f^2) &= 2(\nabla_{\alpha, i, n} f)f, \quad dP\text{-p. p.} \end{aligned}$$

d'où

$$((hf, f))_n^\sim - \frac{1}{2}((h, f^2))_n^\sim = \frac{1}{2} E \left[\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{\alpha=1}^{\beta} (\nabla_{\alpha, i, n} f)^2 h \right] = \frac{1}{2} E [\tilde{\Gamma}_n(f, f) h].$$

Par passage à la limite et par I, prop. 1.1, on voit que $\tilde{\Gamma}$ est l'opérateur carré du champ associé à $((\cdot, \cdot))^\sim$. ■

THÉORÈME 3.7. — On a $\mathbb{D} \subset \mathcal{D}$ et $\Gamma(f, f) = \tilde{\Gamma}(f, f)$ et $((f, f)) = ((f, f))^\sim$ pour tout $f \in \mathbb{D}$.

Démonstration. — \mathbb{R} est dense dans $(\mathbb{D}, \|\cdot\|_1)$, de plus par (3.6), $\|\Phi\|_1^\sim = \|\Phi\|_1$ sur \mathbb{R} , donc la fermeture de \mathbb{R} pour la norme $\|\cdot\|_1$ coïncide avec la fermeture de \mathbb{R} pour la norme $\|\cdot\|_1^\sim$ et donc $\mathbb{D} \subset \mathcal{D}$ et $\forall \Phi \in \mathbb{D}$, $\tilde{\Gamma}(\Phi, \Phi) = \Gamma(\Phi, \Phi)$ et donc $((\Phi, \Phi))^\sim = ((\Phi, \Phi))$. ■

Si $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne, on sait par le théorème de Rademacher qu'il existe un ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$ de complémentaire de mesure de Lebesgue nulle telle que f est différentiable en tout point de A .

On note \mathcal{H}^1 la mesure de Hausdorff uni-dimensionnelle.

PROPOSITION 3.8. — Soit $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne. Soit $(\Phi_1, \dots, \Phi_d) \in \mathbb{D}^d$ alors $f(\Phi_1, \dots, \Phi_d)$ appartient à \mathbb{D} .

Si de plus, A est l'ensemble associé à f par la remarque précédente et si $\mathcal{H}^1(A^c) = 0$, on a alors pour tout ψ appartient à \mathbb{D} :

$$\begin{aligned} \Gamma(\psi, f(\Phi_1, \dots, \Phi_d)) &= \sum_{i=1}^d \Gamma(\psi, \Phi_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\Phi_1, \dots, \Phi_d), \\ \Gamma(f(\Phi_1, \dots, \Phi_d), f(\Phi_1, \dots, \Phi_d)) &= \sum_{i, j=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(\Phi_1, \dots, \Phi_d) \Gamma(\Phi_i, \Phi_j) \frac{\partial f}{\partial x_j}(\Phi_1, \dots, \Phi_d), \end{aligned}$$

où $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont des versions des dérivées partielles de f .

Démonstration. — Posons $\theta = f(\Phi_1, \dots, \Phi_d)$; f étant lipschitzienne, on peut appliquer [3]; Proposition 1.2, qui implique que $\theta \in \mathbb{D}$.

Soit $\tilde{\Phi}_k$ associé à Φ_k par la définition 2.1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$ et $\omega \in \Omega$.

Notons $\psi_{\alpha, \omega}^k :]-r_n, r_n[\rightarrow \mathbb{R}$

$$t \rightarrow \tilde{\Phi}_k \circ \beta_n(\Lambda(i, te_\alpha))(\omega)$$

et posons $\psi_{\alpha, \omega} = (\psi_{\alpha, \omega}^1, \dots, \psi_{\alpha, \omega}^d)$.

On a $\theta = f(\tilde{\Phi}_1, \dots, \tilde{\Phi}_d)$ P-p. p. et l'application

$$t \rightarrow f(\tilde{\Phi}_1, \dots, \tilde{\Phi}_d) \circ \beta_n(\Lambda(i, te_\alpha))(\omega)$$

est absolument continue et donc dt -p. p. dérivable. Le problème est que dans le cas où $d > 1$, il est en général faux que cette dérivée soit p. p. égale à

$$\sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k}(\psi_{\alpha, \omega}^1(t), \dots, \psi_{\alpha, \omega}^d(t)) (\psi_{\alpha, \omega}^k)'(t).$$

On va utiliser le résultat suivant de Federer ([7], p. 245): si $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ est absolument continue alors

$$\int_B (h \circ g) |g'| d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} h(y) N(g/B, y) d\mathcal{H}^1(y)$$

où $N(g/B, y)$ est le nombre de x appartenant à B tel que $g(x) = y$, et $|g'(u)| = \left(\sum_{k=1}^d |g'_k(u)|^2 \right)^{1/2}$. L'égalité précédente a lieu pour toute fonction $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ et tout ensemble mesurable borné B . Appliquons le résultat précédent à $g = \psi_{\alpha, \omega}$ et à $B = g^{-1}(A^c)$ où A est donné dans l'énoncé de la proposition; on a donc si $y \in A$, $N(g/g^{-1}(A^c), y) = 0$; or par hypothèse $\mathcal{H}^1(A^c) = 0$ et donc $|g'| = 0$ presque partout sur $g^{-1}(A^c)$.

Par suite, la dérivée de $t \rightarrow f(\tilde{\Phi}_1, \dots, \tilde{\Phi}_d) \circ \beta_n(\Lambda(i, te_\alpha))(\omega)$ est dt -p. p. égale à

$$\sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k}(\psi_{\alpha, \omega}^1(t), \dots, \psi_{\alpha, \omega}^d(t)) (\psi_{\alpha, \omega}^k)'(t).$$

D'où par (2.5): $dP \times dt$ -p. p.

$$\begin{aligned} & (\nabla_{\alpha, i, n} \theta) \circ \beta_n(\Lambda(i, te_\alpha))(\omega) \\ &= \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k}(\tilde{\Phi}_1, \dots, \tilde{\Phi}_d) \circ \beta_n(\Lambda(i, te_\alpha))(\omega) (\nabla_{\alpha, i, n} \tilde{\Phi}_k) \circ \beta_n(\Lambda(i, te_\alpha))(\omega) \end{aligned}$$

donc

$$\nabla_{\alpha, i, n} \theta = \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k}(\tilde{\Phi}_1, \dots, \tilde{\Phi}_d) \nabla_{\alpha, i, n} \tilde{\Phi}_k, \quad dP\text{-p. p.}$$

Soit $\psi \in \mathbb{D}$; on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_n(f(\Phi_1, \dots, \Phi_n), \psi) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{\alpha=1}^{\beta} \nabla_{\alpha, i, n} \theta \nabla_{\alpha, i, n} \psi \\ &= \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k}(\Phi_1, \dots, \Phi_d) \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{\alpha=1}^{\beta} \nabla_{\alpha, i, n} \Phi_k \nabla_{\alpha, i, n} \Phi \\ &= \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k}(\Phi_1, \dots, \Phi_d) \tilde{\Gamma}_n(\Phi_k, \psi) \end{aligned}$$

et par passage à la limite,

$$\Gamma(f(\Phi_1, \dots, \Phi_n), \psi) = \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k}(\Phi_1, \dots, \Phi_d) \Gamma(\Phi_k, \psi)$$

et de même,

$$\begin{aligned} \Gamma(f(\Phi_1, \dots, \Phi_d), f(\Phi_1, \dots, \Phi_d)) \\ = \sum_{k, k'=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k}(\Phi_1, \dots, \Phi_d) \Gamma(\Phi_k, \Phi_{k'}) \frac{\partial f}{\partial x_{k'}}(\Phi_1, \dots, \Phi_d). \end{aligned}$$

4) Démonstration de la conjecture de Bouleau et Hirsh pour l'espace de Poisson

LEMME 4.1. — Soit $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mesurable et $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que pour tout $i, \varphi_i > 0$. Si f est telle que toutes les dérivées partielles approximatives $\text{ap} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$ sont définies $d\lambda$ -p. p., alors pour tout $d\lambda$ -négligeable B de \mathbb{R}^n ,

$$\int_{f^{-1}(B)} \det \left[\sum_{r=1}^m \varphi_r(x) \text{ap} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_r}(x) \right) \text{ap} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_r}(x) \right) \right]_{(i, j)} dx = 0$$

Pour la démonstration, on utilisera le lemme suivant (voir Federer [7], p. 248).

LEMME 4.2. — Sous les hypothèses du lemme 4.1 avec $m \geq n$ et si on pose

$$A_p(J_n f) = \left(\sum_{\sigma \in \Lambda(n, m)} \left[\det \left(\text{ap} \frac{\partial f_i}{\partial x_{\sigma(j)}} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right]^2 \right)^{1/2}$$

où $\Lambda(n, m)$ est l'ensemble des applications strictement croissantes de $\langle 1, n \rangle$ dans $\langle 1, m \rangle$, on a alors $\int_{f^{-1}(B)} A_p(J_n f)(x) dx = 0$ pour tout $d\lambda$ -négligeable B de \mathbb{R}^n .

Démonstration du lemme 4.1. — Pour simplifier posons $a_{i,j} = \text{ap} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$.

$$\text{Soit } H(x) = \det \left(\sum_{r=1}^m \varphi_r(x) a_{i,r}(x) a_{j,r}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Soit S_n l'ensemble des permutations de $\langle 1, n \rangle$ et $\varepsilon(\delta)$ la signature d'une permutation δ .

On a par la définition du déterminant :

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\delta \in S_n} \varepsilon(\delta) \left(\sum_{r=1}^m \varphi_r a_{\delta(1),r} a_{1,r} \right) \times \dots \times \left(\sum_{r=1}^m \varphi_r a_{\delta(n),r} a_{n,r} \right) \\ &= \sum_{1 \leq r_1, \dots, r_n \leq m} \varphi_{r_1} \dots \varphi_{r_n} a_{1,r_1} \dots a_{n,r_n} A_{r_1, \dots, r_n} \end{aligned}$$

où

$$A_{r_1, \dots, r_n} = \sum_{\delta \in S_n} \varepsilon(\delta) a_{\delta(1),r_1} \dots a_{\delta(n),r_n} = \det [(a_{i,r_j})_{1 \leq i, j \leq n}].$$

Si $r_i = r_j$ avec $i \neq j$, alors $A_{r_1, \dots, r_n} = 0$, donc si $n > m$ on a $H = 0$.

Si $n \leq m$,

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\substack{1 \leq r_1, \dots, r_n \leq m \\ r_i \text{ 2 a 2 distincts}}} \varphi_{r_1} \dots \varphi_{r_n} a_{1,r_1} \dots a_{n,r_n} A_{r_1, \dots, r_n} \\ &= \sum_{\sigma \in \Lambda(n, m)} \sum_{\delta \in S_n} \varphi_{\sigma(\delta(1))} \dots \varphi_{\sigma(\delta(n))} a_{1, \sigma(\delta(1))} \dots a_{n, \sigma(\delta(n))} A_{\sigma(\delta(1)), \dots, \sigma(\delta(n))} \\ &= \sum_{\sigma \in \Lambda(n, m)} \varphi_{\sigma(1)} \dots \varphi_{\sigma(n)} (A_{\sigma(1), \dots, \sigma(n)})^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} H(x) = 0 &\Leftrightarrow \forall \sigma \in \Lambda(n, m), \quad A_{\sigma(1), \dots, \sigma(n)}(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow A_p(J_n f)(x) = 0. \end{aligned}$$

D'après le lemme 4.2, $\int_{f^{-1}(B)} A_p(J_n f)(x) dx = 0$ donc $\int_{f^{-1}(B)} H(x) dx = 0$ si $B \subset \mathbb{R}^n$ est de mesure de Lebesgue négligeable. ■

THÉORÈME 4.3. — Si $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_l) \in \mathbb{D}^l$, l'image par Φ de la mesure $\det(\Gamma(\Phi_i, \Phi_j)_{(i,j)}) \cdot P$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^l .

Démonstration. — Montrons d'abord le lemme suivant

LEMME 4.4. — Soit $\Phi \in \mathcal{D}$ et $n \in \mathbb{N}$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists \Omega_k$ mesurable tel que $P(\Omega_k) = 1$ et tel que $\forall \omega \in \Omega_k$, il existe $B_k(\omega) \subset (A_n)^k$ de complémentaire de

mesure de Lebesgue négligeable tel que pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbf{B}_k(\omega)$, si

$$\Lambda = \sum_{i=1}^k \Lambda(i, \lambda_i), \quad \text{ap} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_i^\alpha} \Phi \circ \beta_n(\Lambda)(\omega) \right)$$

existe et vaut

$$(\varphi_{i,n}(\lambda_i, \omega))^{-1} \times (\nabla_{\alpha, i, n} \Phi) \circ \beta_n(\Lambda)(\omega).$$

Démonstration du lemme. — On va le démontrer par récurrence sur k :

- Si $k=1$, le résultat est donné par le lemme 2.6.
- Supposons (4.4) vrai jusqu'au rang k avec Ω_k et $\mathbf{B}_k(\omega)$.

Par le lemme 2.6, il existe un ensemble plein Ω' tel que pour tout $\omega \in \Omega'$, il existe $E'(\omega) \subset A_n$ de complémentaire de mesure de Lebesgue négligeable tel que pour tout $\lambda \in E'(\omega)$, $\text{ap} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda^\alpha} \Phi \circ \beta_n(\Lambda(k+1, \lambda))(\omega) \right)$ existe et vaut $(\varphi_{k+1,n}(\lambda, \omega))^{-1} (\nabla_{\alpha, k+1, n} \Phi) \circ \beta_n(\Lambda(k+1, \lambda))(\omega)$.

On a donc en appliquant (1.5) avec $p=1$ et $q_1=k+1$

$$\begin{aligned} P(\Omega_k^c) = 0 = \int_{\Omega} \int_{A_n} 1_{\Omega_k^c} \circ \beta_n(\Lambda(k+1, \lambda))(\omega) k'_{k+1, n} \\ \circ \beta_n(\Lambda(k+1, \lambda))(\omega) d\lambda dP(\omega) \end{aligned}$$

par conséquent, il existe Ω'_k plein tel que $\forall \omega \in \Omega'_k$, il existe $E'_k(\omega) \subset A_n$ de complémentaire de mesure de Lebesgue négligeable tel que

$$\forall \lambda \in E'_k(\omega), \quad \beta_n(\Lambda(k+1, \lambda))(\omega) \in \Omega_k.$$

De même en appliquant (1.5) avec $p=k$ et $q_i=i$ pour $i \in \langle 1, k \rangle$, il existe Ω''_k plein tel que $\forall \omega \in \Omega''_k$, il existe $\mathbf{B}'_k(\omega) \subset A_n^k$ de complémentaire de mesure de Lebesgue négligeable tel que

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbf{B}'_k(\omega), \quad \beta_n \left(\sum_{i=1}^k \Lambda(i, \lambda_i) \right) (\omega) \in \Omega'.$$

Posons alors $\Omega_{k+1} = \Omega'_k \cap \Omega''_k$ et $\forall \omega \in \Omega_{k+1}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{k+1}(\omega) = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) \in A_n^{k+1} / \right. \\ \left. (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbf{B}'_k(\omega) \cap \mathbf{B}_k(\beta_n(\Lambda(k+1, \lambda_{k+1}))(\omega)) \right. \\ \left. \text{et } \lambda_{k+1} \in E'_k(\omega) \cap E' \left[\beta_n \left(\sum_{i=1}^k \Lambda(i, \lambda_i) \right) (\omega) \right] \right\}. \end{aligned}$$

$\mathbf{B}_{k+1}(\omega)$ est de complémentaire de mesure de Lebesgue négligeable.

$$\text{On a } \beta_n \left(\sum_{i=1}^{k+1} \Lambda(i, \lambda_i) \right) = \prod_{i=1}^{k+1} \beta_n(\Lambda(i, \lambda_i)).$$

Donc si $\omega \in \Omega_{k+1}$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) \in \mathbf{B}_{k+1}(\omega)$,

$$\Phi \circ \beta_n \left(\sum_{i=1}^{k+1} \Lambda(i, \lambda_i) \right) (\omega) = (\Phi \circ \beta_n(\Lambda(k+1, \lambda_{k+1}))) \left(\beta_n \left(\sum_{i=1}^k \Lambda(i, \lambda_i) \right) (\omega) \right).$$

Or $(\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) \in \mathbf{B}_{k+1}(\omega)$ donc

$$\beta_n \left(\sum_{i=1}^k \Lambda(i, \lambda_i) \right) (\omega) \in \Omega' \quad \text{et} \quad \lambda_{k+1} \in E' \left(\beta_n \left(\sum_{i=1}^k \Lambda(i, \lambda_i) \right) (\omega) \right)$$

donc si $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}, 0, \dots, 0, \dots)$

$$\begin{aligned} \text{ap} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_{k+1}^\alpha} \Phi \circ \beta_n(\Lambda)(\omega) \right) \\ = \left[\varphi_{k+1, n} \left(\lambda_{k+1}, \beta_n \left(\sum_{i=1}^k \Lambda(i, \lambda_i) \right) (\omega) \right) \right]^{-1} (\nabla_{\alpha, k+1, n} \Phi) \circ \beta_n(\Lambda)(\omega). \end{aligned}$$

Or $\alpha_{k+1}^n \left(\beta_n \left(\sum_{i=1}^k \Lambda(i, \lambda_i) \right) (\omega) \right) = \alpha_{k+1}^n(\omega)$, donc

$$\varphi_{k+1, n} \left(\lambda_{k+1}, \beta_n \left(\sum_{i=1}^k \Lambda(i, \lambda_i) \right) (\omega) \right) = \varphi_{k+1, n}(\lambda_{k+1}, \omega).$$

On montre de même, grâce à l'hypothèse de récurrence, que

$$\text{ap} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_l^\alpha} \Phi \circ \beta_n(\Lambda)(\omega) \right) = (\varphi_{l, n}(\lambda_l, \omega))^{-1} (\nabla_{\alpha, l, n} \Phi) \circ \beta_n(\Lambda)(\omega). \quad \blacksquare$$

Démonstration du théorème. — Soit $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}^l$ de mesure de Lebesgue négligeable.

Posons $\mathbf{H}_n(\Phi) = \det((\tilde{\Gamma}_n(\Phi_p, \Phi_q))_{1 \leq p, q \leq l})$, $\mathbf{U}_{k, n} = \{\omega \in \Omega / k_n(\omega) = k\}$.

Avec les notations de (4.4), si $\omega \in \mathbf{U}_{k, n} \cap \Omega_k$, on a pour tout

$$\begin{aligned} & (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbf{B}_k(\omega) \quad \text{si} \quad \Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0, \dots) \\ \tilde{\Gamma}_n(\Phi_p, \Phi_q) & (\beta_n(\Lambda)(\omega)) \\ & = \sum_k \sum_\beta (\nabla_{\alpha, i, n} \Phi_p) \circ \beta_n(\Lambda)(\omega) (\nabla_{\alpha, i, n} \Phi_q) \circ \beta_n(\Lambda)(\omega) \\ & = \sum_{i=1}^k \sum_{\alpha=1}^\beta (\varphi_{i, n}(\lambda_i, \omega))^2 \text{ap} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_i^\alpha} \Phi_p \circ (\beta_n(\Lambda)(\omega)) \right) \text{ap} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_i^\alpha} \Phi_q \circ (\beta_n(\Lambda)(\omega)) \right) \end{aligned}$$

Donc par le lemme 4.1, comme $\mathbf{B}_k(\omega)$ est de complémentaire de mesure de Lebesgue négligeable, $\forall \omega \in \mathbf{U}_{k, n} \cap \Omega_k$,

$$\int 1_{\mathbf{B}} [\Phi \circ \beta_n(\Lambda)(\omega)] \mathbf{H}_n(\Phi) \circ \beta_n(\Lambda)(\omega) d\lambda_1 \dots d\lambda_k = 0.$$

Comme $P(\Omega_k) = 1$, on a

$$E \left[1_{U_{k,n}} \int_{A_n^k} 1_B [\Phi \circ \beta_n(\Lambda)] H_n(\Phi) \circ \beta_n(\Lambda) d\lambda_1 \dots d\lambda_k \right] = 0.$$

Or en appliquant 1.5 avec $p = k$ et $q_i = i$ si $i = 1, \dots, k$

$$E [1_{U_{k,n}} 1_B \circ \Phi H_n(\Phi)] = \int_{\Omega} \int_{A_n^k} 1_{U_{k,n}} \circ \beta_n(\Lambda)(\omega) 1_B \circ \Phi \circ \beta_n(\Lambda)(\omega) \times H_n(\Phi) \circ \beta_n(\Lambda)(\omega) k'_k \circ \beta_n(\Lambda)(\omega) d\lambda_1 \dots d\lambda_k dP(\omega)$$

Or $k_n(\beta_n(\Lambda)(\omega)) = k_n(\omega)$ donc $1_{U_{k,n}} \circ \beta_n(\Lambda) = 1_{U_{k,n}}$ et comme $k'_k > 0$, $E [1_{U_{k,n}} 1_B \circ \Phi H_n(\Phi)] = 0, \forall k \in \mathbb{N}$, comme $\bigcup_{k \geq 0} U_{k,n} = \Omega, E [1_B \circ \Phi H_n(\Phi)] = 0.$

Or $\tilde{\Gamma}_n(\Phi_p, \Phi_q)$ converge dans $L^1(P)$ et p.s. vers $\tilde{\Gamma}(\Phi_p, \Phi_q)$ and $n \rightarrow +\infty$, donc $H_n(\Phi)$ tend vers $\det(\tilde{\Gamma}(\Phi_p, \Phi_q))_{1 \leq p, q \leq l}$. Par le lemme de Fatou, il vient donc

$$E [1_B \circ \Phi \lim_{n \rightarrow +\infty} H_n(\Phi)] \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} E [1_B \circ \Phi H_n(\Phi)] = 0.$$

D'où le théorème.

III. – ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES

On considère l'équation différentielle stochastique suivante :

$$(1.1) \quad X_t = x + \int_0^t \int_E c(s, X_{s-}, z) \tilde{\mu}(ds, dz)$$

où

$c: [0, T] \times \mathbb{R}^d \times E \rightarrow \mathbb{R}^d$ mesurable et telle qu'il existe $\eta: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ appartenant à $L^2(E, dz)$ telle que

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \langle 1, d \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall z \in E \\ |c_i(t, x, z) - c_i(t, y, z)| \leq \eta(z) |x - y| \end{array} \right. \\ \text{(ii)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \langle 1, d \rangle, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \\ c_i(t, x, \cdot) \text{ est différentiable sur } E \end{array} \right. \\ \text{(iii)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [0, T], \quad \forall z \in E, \quad \forall i \in \langle 1, d \rangle \\ |c_i(t, 0, z)| \leq \eta(z) \end{array} \right. \\ \text{(iv)} \quad \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ t \leq T}} |D_z c(t, x, z)| \leq \eta(z) \end{array} \right.$$

Rappelons que (1.2) implique l'existence et l'unicité de la solution de (1.1) dans $L^2(P)$.

NOTATIONS. — Si $X \in \mathbb{R}^d$, $|X|^2 = \sum_{i=1}^d |X_i|^2$.

Si $\Phi \in \mathbb{D}^d$, on note $\Gamma(\Phi, \Phi)$ la matrice $d \times d$ dont le terme général est $\Gamma(\Phi_i, \Phi_j)$ et $\|\Phi\|_1 = \sum_{i=1}^d \|\Phi_i\|_1$ et $((\Phi, \Phi))^{1/2} = \sum_{i=1}^d ((\Phi_i, \Phi_i))^{1/2}$.

De même que dans I, § 3.4, on définit $\mathbb{H}(\mathbb{R}^d)$ comme étant l'espace des classes pour l'égalité $\lambda \otimes P$ -p. s. des processus X mesurable $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ adaptés à valeurs dans \mathbb{R}^d tels que $X_i(t) \in \mathbb{D}$ et que $\|X\|_{\mathbb{H}(\mathbb{R}^d)}^2 = \int_0^T \sum_{i=1}^d \|X_i(t)\|_1^2 dt$ soit finie.

On note \mathcal{H}^d l'ensemble des $H: [0, T] \times \Omega \times E \rightarrow \mathbb{R}^d$ tel que $\forall i, H_i \in \mathcal{H}$ (voir I.3) et $\|H\|_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^d \|H_i\|_{\mathcal{H}}$.

On considère l'ensemble des processus de la forme $\sum_{j=0}^k q_j 1_{]t_j, t_{j+1}]}(t)$ où $t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1}$, et q_j appartient à \mathbb{D} et est \mathcal{F}_{t_j} -mesurable. Cet ensemble est inclus dans \mathbb{H} et par la proposition I, § 2.2, et par une démonstration analogue à la première étape de la preuve du théorème I, § 3.2, on montre qu'il est dense dans le sous-ensemble de \mathbb{H} formé des processus prévisibles.

LEMME 1.3. — Soit $Y \in \mathbb{H}$ prévisible, alors il existe un processus prévisible v appartenant à $L^1(\Omega \times [0, T], dP \otimes d\lambda)$ tel que pour λ -presque tout $t \in [0, T]$,

$$v(t) = \Gamma(Y_t, Y_t), \quad P\text{-p. s.}$$

Preuve. — $Y \in \mathbb{H}$, donc il existe une suite R_n de la forme

$$R_{n,t} = \sum_{j=0}^{k_n} q_{n,j} 1_{]t_j, t_{j+1, n}]}(t)$$

qui converge vers Y dans \mathbb{H}

$$\Gamma(R_{n,t}, R_{n,t}) = \sum_{j=0}^{k_n} \Gamma(q_{n,j}, q_{n,j}) 1_{]t_j, t_{j+1, n}]}(t)$$

est prévisible et

$$\|\Gamma(R_{n,t}, R_{n,t}) - \Gamma(R_{p,t}, R_{p,t})\|_{L^1([0, T] \times \Omega, d\lambda \times P)} \leq \|R_n - R_p\|_{\mathbb{H}} (\|R_n\|_{\mathbb{H}} + \|R_p\|_{\mathbb{H}})$$

donc cette suite est de Cauchy dans $L_1([0, T] \times \Omega, d\lambda \times P)$ et donc converge vers un processus v \mathcal{P} -mesurable. Par extraction de sous-suite, on montre que pour λ -presque tout $t \in [0, T]$, $v(t) = \Gamma(Y_t, Y_t)$ P-p. s. ■

LEMME 1.4. — Soit c vérifiant (1.2) et $Y \in \mathbb{H}(\mathbb{R}^d)$, alors $H(s, z) = c(s, Y_{s-}, z)$ appartient à \mathcal{H}^d .

Démonstration. — Grâce à (1.2) et [3]; Proposition 1.2, il est facile de montrer que $ds \times dz$ -p.s. $H_i(s, z) \in \mathbb{D}$ et que H est $\mathcal{P} \times \mathcal{E}$ -mesurable et différentiable par rapport à z , et que $\|H\|_{\mathcal{X}} < C \int_E \eta(z) dz (1 + \|Y_{s-}\|_{\mathbb{H}}^2)$ où C ne dépend que de d, β et ρ .

LEMME 1.5. — Soit $Y \in \mathbb{H}(\mathbb{R}^d)$ prévisible et c vérifiant (1.2) (i). Alors il existe $U : [0, T] \times \Omega \times E \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$, $\mathcal{P} \times \mathcal{E}$ -mesurable tel que $\forall t, \forall z, \forall \omega, \forall i, j, |U_{i,j}(t, \omega, z)| \leq \eta(z)$ et tel que $dt \times dz$ -p.p.

$$\begin{aligned} \Gamma(c(t, Y_t, z), Y_t) &= U(t, z) \Gamma(Y_t, Y_t) \\ \Gamma(c(t, Y_t, z), c(t, Y_t, z)) &= U(t, z) \Gamma(Y_t, Y_t) U(t, z)^T. \end{aligned}$$

Démonstration. — (i) Soit $t \in [0, T]$ tel que $\sum_{i=1}^d \|Y_i(t)\|_1^2 < +\infty$ et soit $z \in E$. Il existe une suite $c_p : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times E \rightarrow \mathbb{R}^d$ vérifiant (1.2) (i) avec la même fonction η que c , de classe \mathcal{C}^1 en x telle que c_p converge vers c simplement.

On a alors grâce à [3]; Proposition 4.3, $\forall p, \forall q, \forall z$,

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{aligned} \Gamma(c_p(t, Y_t, z), Y_t) &= D_x c_p(t, Y_t, z) \Gamma(Y_t, Y_t) \\ \Gamma(c_p(t, Y_t, z), c_q(t, Y_t, z)) &= D_x c_p(t, Y_t, z) \Gamma(Y_t, Y_t) D_x c_q(t, Y_t, z)^T \end{aligned} \right.$$

où $D_x c_p(t, \cdot, z)$ est la matrice jacobienne de $c_p(t, \cdot, z)$.

Or grâce à (1.2) (i) et à [3]; Proposition 3.8, $c_p(t, Y_t, z)$ appartient à \mathbb{D}^d et est borné dans $(\mathbb{D}^d, \|\cdot\|_1)$.

De plus, $\left| \frac{\partial c_p^i}{\partial x_j}(t, Y_t, z) \right| \leq \eta(z)$.

On peut donc extraire une sous-suite p_k telle que $c_{p_k}(t, Y_t, z)$ converge faiblement vers $c(t, Y_t, z)$ dans $(\mathbb{D}^d, \|\cdot\|_1)$ et $\frac{\partial c_{p_k}^i}{\partial x_j}(t, Y_t, z)$ converge faiblement dans L^∞ vers une limite $\Phi_{i,j}(t, z)$.

D'où en passant à la limite dans $\sigma(L^1, L^\infty)$, on a :

$$(*) \quad dP\text{-p.p.}, \quad \left\{ \begin{aligned} \Gamma(c(t, Y_t, z), Y_t) &= \Phi(t, z) \Gamma(Y_t, Y_t) \\ \Gamma(c(t, Y_t, z), c_q(t, Y_t, z)) &= \Phi(t, z) \Gamma(Y_t, c_q(t, Y_t, z)). \end{aligned} \right.$$

En remplaçant q par p_k et en passant à la limite dans $\sigma(L^1, L^\infty)$ on a :

$$(**) \quad \left\{ \begin{aligned} &dP\text{-p.p.}, \\ \Gamma(c(t, Y_t, z), c(t, Y_t, z)) &= \Phi(t, z) \Gamma(Y_t, Y_t) \Phi(t, z)^T. \end{aligned} \right.$$

On a donc construit $\Phi(t, z) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ mesurable tel que $\forall i, j$, $\|\Phi_{i,j}(t, z)\|_\infty \leq \eta(z)$ et vérifie (*) et (**).

(ii) On sait par les lemmes 1.3 et 1.4 que

$$\Gamma(c(t, Y_t, z), Y_t), \Gamma(Y_t, Y_t) \quad \text{et} \quad \Gamma(c(t, Y_t, z), c(t, Y_t, z))$$

admettent des versions $\mathcal{P} \times \mathcal{E}$ -mesurables, on choisit dans la suite ces versions.

Posons

$$U(t, \omega, z) = \lim_{k \uparrow +\infty} \left[\Gamma(c(t, Y_t, z), Y_t^T)(\omega) \left[\Gamma(Y_t, Y_t^T)(\omega) + \frac{1}{k} I \right]^{-1} \right]$$

si cette limite inférieure est telle que $|U_{i,j}(t, \omega, z)| \leq d\eta(z)$ et 0 sinon donc $U = \Phi d\mathcal{P} \times dt \times dz$ -p. s. et est $\mathcal{P} \times \mathcal{E}$ -mesurable et $d\mathcal{P} \times dt \times dz$ -p. p.

$$\begin{cases} \Gamma(c(t, Y_t, z), Y_t) = U(t, z) \Gamma(Y_t, Y_t) \\ \Gamma(c(t, Y_t, z), c(t, Y_t, z)) = U(t, z) \Gamma(Y_t, Y_t) U(t, z)^T \end{cases}$$

LEMME 1.7. — La solution X de (1.1) vérifie $X \in \mathbb{H}(\mathbb{R}^d)$.

Preuve. — Posons $X_t^0 = x$, $X_t^{n+1} = x + \int_0^t \int_E c(s, X_s^n, z) \tilde{\mu}(ds, dz)$.

On sait que X_t^n converge dans $L^2(\mathcal{P})$ vers X_t et

$$E[|X_t^n|^2] \leq 2|x|^2 + 2 \int_0^t \int_E E[|c(s, X_s^{n-1}, z)|^2] ds dz,$$

d'où par (1.2) et une récurrence aisée :

$$(1.8) \quad E[|X_t^n|^2] \leq \left(2|x|^2 + 4 \int_E \eta(z)^2 dz \right) \exp\left(4t \int_E \eta(z)^2 dz \right)$$

Montrons par récurrence que $X^n \in \mathbb{H}(\mathbb{R}^d)$.

Pour $n=0$, c'est évidemment vrai.

Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n : $X^n \in \mathbb{H}(\mathbb{R}^d)$ donc par le lemme précédent $H_n(s, z) = c(s, X_s^n, z) \in \mathcal{H}^d$.

Donc en appliquant le théorème I, § 3.5 :

$$X^{n+1} \in \mathbb{H} \quad \text{et} \quad \|X_t^{n+1}\|_1 \leq \|H_n\|_{\mathcal{H}}$$

De plus,

$$\begin{aligned} ((X_t^{n+1}, X_t^{n+1})) &\leq \int_0^t \int_E ((H_{n,i}(s, z), H_{n,i}(s, z))) ds dz \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_E \rho(z) E[D_z H_{n,i}(s, z) D_z H_{n,i}(s, z)^T] ds dz \\ &\leq \int_E \eta(z)^2 dz \int_0^t ((X_i^n(s), X_i^n(s))) ds + \frac{1}{2} \left(\int_E \rho(z) \eta(z)^2 dz \right) T \end{aligned}$$

D'où par une récurrence aisée :

$$((X_t^n, X_t^n)) \leq \frac{d^2}{2} T \left(\int_E \rho(z) \eta(z)^2 dz \right) \exp \left[t \int_E \eta(z)^2 dz \right]$$

et donc avec (1.8), il existe $K(T)$ indépendant de n tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, T], \quad \|X_t^n\|_1 \leq K(T).$$

X_t^n est borné dans $(\mathbb{D}^d, \| \cdot \|_1)$, il existe donc une sous-suite qui converge faiblement dans $(\mathbb{D}^d, \| \cdot \|_1)$ vers X_t , donc $X_t \in \mathbb{D}^d$ et $\|X_t\|_1 \leq K(T)$.

De plus pour tout $h \in \mathbb{D}$, pour tout i , $((h, X_t(t))) = \lim_{n \rightarrow +\infty} ((h, X_t^n(t)))$ donc $t \rightarrow ((h, X_1(t)))$ est mesurable et donc $X \in \mathbb{H}(\mathbb{R}^d)$. ■

PROPOSITION 1.9. — *Considérons l'équation (1.1) avec les conditions (1.2) et U associé à X_{t-} par le lemme 1.5 et supposons :*

- (i) $\left\{ \begin{array}{l} \exists D > 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \forall z \in E \\ |\det(I + U(t, z)(\omega))| \geq D \end{array} \right.$
- (ii) $\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [0, T], \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \forall v \in \mathbb{R}^d - \{0\} \\ \left\{ z \in E / v^T (I + U(t, z)(\omega))^{-1} D_z c(t, X_t(\omega), z) D_z c(t, X_t(\omega), z)^T \right. \\ \left. \times (I + U(t, z)(\omega))^{-1 \cdot T} v \neq 0 \right\} \end{array} \right.$

est de mesure de Lebesgue infinie.

Alors la loi de X_t a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d .

Démonstration. — Par les lemmes 1.4 et 1.7, $X \in \mathbb{H}(\mathbb{R}^d)$ donc $\forall i$, $c_i(s, X_{s-}, z)$ appartient à \mathcal{H} . On peut dès lors appliquer le théorème I, 3.5 et donc :

$$\begin{aligned} \Gamma(X_t, X_t) &= \int_0^t \int_E \left\{ \Gamma(X_{s-}, c(s, X_{s-}, z)) + \Gamma(c(s, X_{s-}, z), X_{s-}) \right\} \tilde{\mu}(ds, dz) \\ &\quad + \int_0^t \int_E \left\{ \Gamma(c(s, X_{s-}, z), c(s, X_{s-}, z)) \right. \\ &\quad \left. + \rho(z) D_z c(s, X_{s-}, z) D_z c(s, X_{s-}, z)^T \right\} \mu(ds, dz) \end{aligned}$$

et en appliquant le lemme 1.5, il existe $U : [0, T] \times \Omega \times E \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ $\mathcal{P} \times \mathcal{E}$ -mesurable tel que

$$\begin{aligned} \Gamma(X_t, X_t) &= \int_0^t \int_E \left\{ \Gamma(X_{s-}, X_{s-}) U(s, z)^T + U(s, z) \Gamma(X_{s-}, X_{s-}) \right\} \tilde{\mu}(ds, dz) \\ &\quad + \int_0^t \int_E \left\{ U(s, z) \Gamma(X_{s-}, X_{s-}) U(s, z)^T \right. \\ &\quad \left. + \rho(z) D_z c(X_{s-}, z) D_z c(s, X_{s-}, z)^T \right\} \mu(ds, dz) \end{aligned}$$

Soit Z la solution de l'équation linéaire (dans l'ensemble des matrices $d \times d$)

$$Z_t = I + \int_0^t \int_E U(s, z) Z_{s-} \tilde{\mu}(ds, dz).$$

Grâce à la condition 1.9(i), Z_t est inversible sur $[0, T]$ et si

$$W_t = \int_0^t \int_E \left\{ \rho(z) Z_{s-}^{-1} (I + U(s, z))^{-1} D_z c(s, X_{s-}, z) \right. \\ \left. \times D_z c(s, X_{s-}, z)^T (I + U(s, z))^{-1, T} Z_{s-}^{-1, T} \right\} \mu(ds, dz)$$

alors $\Gamma(X_t, X_t) = Z_t W_t Z_t^T$.

$\Gamma(X_t, X_t)$ est inversible si et seulement si W_t l'est. Or W_t est une matrice symétrique semi-définie positive et si $t < s$, $\text{Ker } W_t \supset \text{Ker } W_s$.

On montre grâce à (1.9) (ii), par une méthode analogue à [1], 7.9, que W_t est P-p. p. inversible, donc $\Gamma(X_t, X_t)$ aussi et en appliquant le théorème II, 4.3, la loi de X_t sur \mathbb{R}^d admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d . ■

Remarque. — Les conditions de la proposition 1.9 ne sont pas réellement vérifiables, car on ne connaît pas en général U (sauf dans le cas où c est \mathcal{C}^1 en x). On va énoncer deux résultats dans des cas particuliers.

THÉORÈME 1.10. — *On considère l'équation (1.1) et les conditions (1.2) dans le cas où $d=1$. Soit $D_x c(t, x, z)$ une version de la dérivée en x de $c(t, \cdot, z)$.*

Si

$$(i) \quad \begin{cases} \exists D > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in E, \quad \forall t \in [0, T], \\ \quad \quad \quad 1 + D_x c(t, x, z) \geq D \end{cases}$$

$$(ii) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \{z \in E / D_z c(t, x, z)\} \neq \emptyset$$

est de mesure de Lebesgue infinie.

Alors la loi de X_t a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

Preuve. — Il suffit de prouver qu'on peut remplacer $U(t, x)$ par $D_x c(t, X_{t-}, z)$.

Or par le lemme 1.7 et [3]; Corollaire 4.4, on a pour tout $t \in [0, T]$, $X_{t-} \in \mathbb{D}$ donc $\forall z \in E$

$$\Gamma(c(t, X_{t-}, z), c(t, X_{t-}, z)) = (D_x c(t, X_{t-}, z))^2 \Gamma(X_{t-}, X_{t-}) \\ \Gamma(c(t, X_{t-}, z) X_{t-}) = D_x c(t, X_{t-}, z) \Gamma(X_{t-}, X_{t-})$$

et $D_x c(t, X_{t-}, z)$ est $\mathcal{P} \times \mathcal{E}$ -mesurable, d'où le résultat.

THÉORÈME 1.11. — *On considère l'équation (1.1) et les conditions (1.2). On suppose de plus que $\forall i \in \langle 1, d \rangle$, $c_i(t, x, z)$ est différentiable en x sur un ensemble mesurable inclus dans \mathbb{R}^d , dont le complémentaire est de mesure*

de Hausdorff unidimensionnelle nulle. Alors si $D_x c(t, x, z)$ est une version de la différentielle en x de c , si de plus :

- (i) $\left\{ \begin{array}{l} \exists D > 0, \forall t \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall z \in E, \forall t \in [0, T], \\ |\det(I + D_x c(t, x, z))| \geq D \end{array} \right.$
- (ii) $\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [0, T], \forall v \in \mathbb{R}^d - \{0\}, \forall x \in \mathbb{R}^d \\ \{z \in E/v^T (I + D_x c(t, x, z))^{-1} D_z c(t, x, z) D_z c(t, x, z)^T \\ \times (I + D_x c(t, x, z))^{-1, T} v \neq 0\} \end{array} \right.$

est de mesure de Lebesgue infinie.

Alors la loi de X_t a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d .

Preuve. — Il suffit de prouver qu'on peut remplacer $U(t, x)$ par $D_x c(t, X_{t-}, z)$ et ceci est donné par II, proposition 3.8.

Remarque. — # Le théorème 1.11 s'applique dans le cas où c est différentiable par rapport à x .

Dans le cas d'une équation homogène du type

$$X_t = x + \int_0^t \int_E c(X_{s-}, z) \tilde{\mu}(ds, dz) \quad \text{avec } c \text{ vérifiant (1.2);}$$

tous les résultats précédents sont vrais en supprimant la condition 1.9 (i) et en remplaçant 1.9 (ii) par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [0, T], \forall \omega \in \Omega, \forall v \in \mathbb{R}^d - \{0\} \\ \{z \in E/v^T D(t, z)(\omega) v \neq 0\} \end{array} \right.$$

est de mesure de Lebesgue infinie.

Où

$$D(t, z)(\omega) = \begin{cases} (I + U(t, z)(\omega))^{-1} D_z c(X_t(\omega), z) \\ \times D_z c(X_t(\omega), z)^T (I + U(t, z)(\omega))^{-1, T} \\ \text{si} \\ \det(I + U(t, z)(\omega)) \neq 0 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, dans ce cas X_t est un processus de Markov fort et on montre ce résultat comme dans [1].

Le cas où $c(x, z) = \sum_{i=1}^r \varphi_i(z) X_i(x)$ avec $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^r$ et $X_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, a

été traité par R. Léandre dans [10] et généralisé dans [5]. Dans ce cas on trouve des conditions du type Hörmander sur les champs de vecteurs X_i qui entraînent la condition (ii) du théorème 1.11.

RÉFÉRENCES

- [1] K. BICHTLER, J.-J. GRAVEREAUX et J. JACOD, Malliavin Calculus for Processes with Jumps, *Stochastics Monographs*, vol. 2, Gordon and Breach, Londres, 1987.
- [2] J.-M. BISMUT, Calcul des variations stochastiques et processus de sauts, *Zeit. für Wahr.*, vol. 63, 1983, p. 147-235.
- [3] N. BOULEAU et F. HIRSH, Formes de Dirichlet générales et densité des variables aléatoires réelles sur l'espace de Wiener, *J. funct. Anal.*, vol. 69, n° 2, 1986, p. 229-259.
- [4] N. BOULEAU et F. HIRSH, Propriétés d'absolue continuité dans les espaces de Dirichlet et application aux équations différentielles stochastiques, *Séminaire de Probabilités*, n° XX, 1984/1985.
- [5] A. COQUIO, *Thèse*, Université Paris-VI, 1990.
- [6] C. DELLACHERIE et P. A. MEYER, *Probabilités et Potentiel*, chap. I à IV, Hermann.
- [7] R. FEDERER, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1961.
- [8] M. FUKUSHIMA, *Dirichlet Forms and Markov Processes*, North-Holland, Kodansha, 1980.
- [9] J. JACOD, Calcul stochastique et problèmes de martingales, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 714, Springer-Verlag, 1979.
- [10] R. LEANDRE, Régularité de processus de sauts dégénérés, *Ann. Inst. H. Poincaré; Proba.-Statist.*, vol. 21, 1985, p. 125-146 et vol. 24, 1988, p. 209-236.
- [11] D. STROOCK, The Malliavin Calculus and its Applications. In *Stochastic Integrals*, D. WILLIAMS éd., *Lecture Note in Maths.*, n° 851, 1981, p. 394-432, Springer-Verlag.

(Manuscrit reçu le 22 octobre 1990;
révisé le 18 juin 1992.)