

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. COQUIO

J. B. GRAVEREAUX

Calcul de Malliavin et régularité de la densité d'une probabilité invariante d'une chaîne de Markov

Annales de l'I. H. P., section B, tome 28, n° 4 (1992), p. 431-478

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1992__28_4_431_0

© Gauthier-Villars, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Calcul de Malliavin et régularité de la densité d'une probabilité invariante d'une chaîne de Markov

par

A. COQUIO

Université de Grenoble-I, Institut Fourier

et

J. B. GRAVEREAUX

I.R.M.A.R., Rennes

RÉSUMÉ. — On considère, comme dans [4], une chaîne de Markov d -dimensionnelle admettant une probabilité invariante η et on donne, par le calcul de Malliavin, des conditions impliquant que η a une densité de classe C^p par rapport à la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^d .

Mots clés : Calcul de Malliavin, Chaîne de Markov, processus markoviens de sauts, équations aux différences aléatoires.

ABSTRACT. — We consider a Markov Chain with state space \mathbb{R}^d and with an invariant probability η and we give, by the Malliavin calculus, sufficient conditions of class C^p for the density of η .

I. INTRODUCTION

1. Notations et résultats généraux

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité. On considère sur cet espace, une suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans E ,

ouvert borné de \mathbb{R}^p , de même loi uniforme sur E. On note λ la mesure de Lebesgue sur E et on suppose que $\lambda(E) = 1$.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \times E \rightarrow \mathbb{R}^d$ mesurable. On considère la chaîne de Markov $(X_n^x)_{n \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d définie par :

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_0^x = x \\ \text{et, pour } n \geq 1 \\ X_n^x = \varphi(X_{n-1}^x, Z_n) \end{array} \right.$$

On suppose que cette chaîne de Markov admet une probabilité invariante η .

On va donner, au moyen du calcul de Malliavin et par des passages à la limite en loi, des conditions impliquant que η a une densité de classe C^p par rapport à la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^d .

On considère les hypothèses suivantes :

$$(H_1(r)) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi \text{ est de classe } C^r \text{ sur } \mathbb{R}^d \times E, \forall p = 1, 2, \dots, r, \text{ on a :} \\ \sup_{x, z} \|D_{x^p}^p \varphi(x, z)\| < +\infty \quad (\|\cdot\| \text{ norme opérateur.}) \\ \exists \theta_r \geq 0 \text{ et } \exists K_r > 0 \text{ tels que : } \forall p \geq 0, \forall q \geq 1, \text{ tels que } p + q \leq r, \\ \text{on ait} \\ \forall x \in \mathbb{R}^d, \sup_{z \in E} \|D_{x^p z^q}^{p+q} \varphi(x, z)\| \leq K_r (1 + \|x\|^{\theta_r}) \end{array} \right.$$

(r entier ≥ 1).

$(H_1(\infty))$: on a $(H_1(r))$ pour tout entier $r \geq 1$.

$$(H'_1(r)) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tous } p, q \text{ tels que } p \geq 0, q = 0, 1, 2 \text{ et } p + q \leq r, D_{x^p z^q}^{p+q} \varphi \\ \text{existe et est continue sur } \mathbb{R}^d \times E, \forall p = 1, 2, \dots, r, \text{ on a :} \\ \sup_{x, z} \|D_{x^p}^p \varphi(x, z)\| < +\infty, \exists \theta_r \geq 0 \text{ et } \exists K_r > 0 \text{ tels que : } \forall p \geq 0, \\ \forall q = 1, 2 \text{ avec } p + q \leq r, \text{ on a :} \\ \forall x \in \mathbb{R}^d, \sup_{z \in E} \|D_{x^p z^q}^{p+q} \varphi(x, z)\| \leq K_r (1 + \|x\|^{\theta_r}). \end{array} \right.$$

$(H'_1(\infty))$: On a $(H'_1(r))$ pour tout $r \geq 1$.

(H_2) La chaîne de Markov admet (au moins) une probabilité invariante η et de plus, pour la valeur $\theta = \theta_2$ [de $(H_1(2))$ ou $(H'_1(2))$] on a, si $\theta > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^{2l(d)\theta} \cdot \eta(dx) < +\infty \quad \text{avec } l(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } d = 1 \\ 4d - 4 & \text{si } d \geq 2 \end{cases}$$

$$(H_3(q)) \quad \text{On a : } \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_E \|D_x \varphi(x, z)\|^{2q} \cdot \lambda(dz) < 1.$$

(q entier ≥ 1).

On pose : $\delta = \sup_{\text{def } x, z} \|D_x \varphi(x, z)\|$.

(H'_3) On a : $\delta < 1$.

Remarquons que (H'_3) entraîne $(H_3(q))$ (pour tout $q \geq 1$), que (H'_3) et $(H_1(1))$ entraînent (H_2) et que de plus η est unique et à support compact. [Voir l'appendice pour ce dernier résultat et aussi pour le fait que $(H_1(1))$ et $(H_3(q))$ pour q suffisamment grand suffisent à entraîner (H_2)].

(C) $D_x \varphi$ est inversible sur $\mathbb{R}^d \times E$.

(C_F) $D_x \varphi$ est inversible sur $\mathbb{R}^d \times E$ et on a $\sup \| (D_x \varphi(x, z))^{-1} \| < +\infty$

on posera $b = \sup_{x, z} \| (D_x \varphi(x, z))^{-1} \|$ et $\gamma = \frac{\int_x^z}{b}$.

Si $(H_1(1))$ est vérifiée ainsi que (C), on pose :

$$(1.2) \quad C_1(x, z) = (D_x \varphi(x, z))^{-1} \cdot D_z \varphi(x, z) \times (D_z \varphi(x, z))^T \cdot (D_x \varphi(x, z))^{-1, T}$$

(A^T : transposée de A).

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe un ouvert } D \text{ de } \mathbb{R}^d \text{ avec } \eta(D) > 0 \text{ tel que} \\ \alpha = \sup_{\text{def } x \in D, y \in \mathbb{R}^d - \{0\}} \lambda(\{z \in E : C_1(x, z)(y) = 0\}) < 1. \end{array} \right.$$

$$(B') \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe un ouvert } D \text{ de } \mathbb{R}^d \text{ avec } \eta(D) > 0 \text{ tel que} \\ \alpha' = \inf_{\text{def } \varepsilon > 0} \left\{ \sup_{x \in D, y \in \mathbb{R}^d - \{0\}} \lambda(\{z : y^T \cdot C_1(x, z) \cdot y \leq \varepsilon \|y\|^2\}) \right\} < 1. \end{array} \right.$$

Remarques. - 1. Il suffit, pour que (B) soit vérifiée qu'il existe un ouvert D' de \mathbb{R}^d tel que $\eta(D') > 0$ et tel que, pour tout $x \in D'$ et tout $y \in \mathbb{R}^d - \{0\}$, il existe un $z \in E$ pour lequel $C_1(x, z)(y) \neq 0$ [car (B) est équivalente à la condition (B) de [4] : voir [4], V(a), p. 178 et car $\{z : C_1(x, z)(y) \neq 0\}$ est un ouvert].

2. La condition (B') sera vraie par exemple s'il existe un compact K inclus dans \mathbb{R}^d tel que $\eta(K) > 0$ et tel que

$$\alpha = \sup_{x \in K, y \in \mathbb{R}^d - \{0\}} \lambda(\{z : C_1(x, z)(y) = 0\}) < 1.$$

On prendra alors $D = \overset{\circ}{K}$.

3. La condition (B') sera vraie également si

$$\alpha = \sup_{x \in D, y \in \mathbb{R}^d - \{0\}} \lambda(\{z : C_1(x, z)(y) = 0\}) < 1$$

et si $\lambda(\{z : y^T \cdot C_1(x, z) \cdot y \leq \varepsilon \|y\|^2\})$ converge uniformément en (x, y) vers α quand ε tend vers 0.

On note S le support de η .

$$(B_F) \quad \alpha_F = \sup_{\text{def } x \in S, y \in \mathbb{R}^d - \{0\}} \lambda(\{z \in E : C_1(x, z)(y) = 0\}) < 1.$$

(B_F) entraîne (B) de manière évidente et, sous $(H_1(1))$ et (H'_3) , il suffit pour qu'on ait (B_F) que, pour tout $x \in S$ et tout $y \in S_{d-1}$ (sphère unité de \mathbb{R}^d centrée en 0), on ait $\lambda(\{z \in E : C_1(x, z)(y) = 0\}) < 1$. [Car on a montré

dans [4] que $(x, y) \rightarrow \lambda(\{z \in E : C_1(x, y)(y) \neq 0\})$ est semi-continue inférieurement et car S est compact.] (B_F) entraîne aussi (B') .

$$(GD) \left\{ \begin{array}{l} \text{Sous } (H_2) \text{ et } (B), \text{ on fait l'hypothèse suivante :} \\ \quad \forall a \in [0, \eta(D)], \exists D_a > 0 \\ \text{tel que} \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^d} P \left[\frac{1}{n} \sum_{r=1}^n 1_D(X_r^x) \leq a \right] \right) \leq -D_a. \end{array} \right.$$

Sous (B) et (GD) on pose :

$$A = \exp \left(- \sup_{a \in]0, \eta(D)[} [-a \text{Log}(\alpha) \wedge D_a] \right).$$

[α est défini dans (B) .]

Remarque. — Si on a (B_F) , alors $A = \alpha_F$.

Exemples. — 1. Comme dans [13] et [14], on dit qu'une chaîne de Markov X vérifie les grandes déviations uniformes pour la propriété de la borne supérieure s'il existe une fonction I de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ (mesures de probabilités sur \mathbb{R}^d) convexe et semi-continue inférieurement pour la convergence vague à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ telle que :

$\forall F$ fermé de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^d} Q_{n,x}(F) \right) \leq - \inf_{\mu \in F} I(\mu)$$

où $Q_{n,x}$ est la loi de $\frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \delta_{X_r^x}$ sous P .

Donc si X vérifie cette propriété, on aura (GD) avec

$$F_a = \{ \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d) : \mu(D) \geq a \} \text{ qui est bien un fermé de } \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d) \text{ et } D_a = \inf_{\mu \in F_a} I(\mu).$$

Soit Π la probabilité de transition associée à X , on a :

$$\Pi f(x) = \int_E f(\varphi(x, y)) dy.$$

D'après [13], si Π vérifie la propriété :

$$\exists M > 0, \forall (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^d)^2, \quad \Pi(x_1, \cdot) \leq M \Pi(x_2, \cdot)$$

alors X vérifie la propriété des grandes déviations uniformes avec

$$I(\mu) = - \inf_{u \in \mathcal{U}} \int \text{Log} \left(\frac{\Pi u}{u} \right) d\mu \quad \text{où } \mathcal{U} = \{ u \in C_b(\mathbb{R}^d) : \exists \varepsilon > 0, u > \varepsilon \}.$$

De plus $I(\mu) = 0$ si et seulement si $\mu \Pi = \mu$.

On a de plus que, si X est une chaîne de Markov qui vérifie la propriété des grandes déviations uniformes, alors la fonction I est la même que précédemment.

2. Supposons maintenant que η soit à support compact S [ce qui est le cas par exemple si on a (H₃)]. On a alors : il existe A ∈ B(ℝ^d) avec η(A) = 1 tel que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \left(\sup_{x \in A} P \left[\frac{1}{n} \sum_{r=1}^n 1_D(X_r^x) \leq a \right] \right) \leq -D_a$$

où

$$D_a = \inf_{\mu \in C_a} I(\mu) \quad \text{avec } C_a = \{ \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d) : \text{supp } \mu \subset S \text{ et } \mu(D) \leq a \}$$

$$I(\mu) = - \inf_{u \in \mathcal{U}} \int \text{Log} \left(\frac{\Pi u}{u} \right) d\mu.$$

En effet, on montre dans [13] que : $\forall C$ compact $\subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\text{Log} (\sup_{x \in \mathbb{R}^d} Q_{n,x}(C))) \leq - \inf_{\mu \in C} I(\mu)$$

$$\text{avec } I(\mu) = - \inf_{u \in \mathcal{U}} \int \text{Log} \left(\frac{\Pi u}{u} \right) d\mu.$$

Or dans notre exemple, si G est un ouvert inclus dans S^c, on a $\tilde{E} \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \delta_{\tilde{x}_r} \right) (G) \right] = \eta(G) = 0$, donc $\exists A \in B(\mathbb{R}^d)$ avec $\eta(A) = 1$ tel que pour tout x dans A, $P \left[\frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \delta_{x_r^x} \text{ est à support dans } K \right] = 1$. De plus C_a est compact car S est compact [c'est un fermé et de plus $\lim_{A \rightarrow +\infty} \sup_{\mu \in C_a} \mu(\|x\| > A) = 0$].

3. Supposons que X vérifie la condition suivante :

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} X \text{ est récurrente-Doebelin apériodique c'est-à-dire :} \\ \exists c > 0, \exists \delta \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|\Pi^n(x, \cdot) - \eta(\cdot)\| \leq c \delta^n \\ \text{où } \Pi \text{ est le noyau de transition de la chaîne :} \\ \Pi(x, f) = \int_E f(\varphi(x, z)) dz \end{array} \right.$$

On remarque que (D) implique (H₂).

Donnons l'énoncé d'un théorème dû à N. Maigret dans [6] sur les chaînes de Markov Doeblin-récurrentes apériodiques :

– Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov vérifiant (D), on a alors la propriété suivante :

On note $\eta \otimes \Pi$ la mesure sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ définie par

$$(\eta \otimes \Pi)(A) = \int 1_A(x, y) d\eta(x) \Pi(x, dy).$$

– Si g est une fonction bornée sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, on note $m = (\eta \otimes \Pi)(g)$, $\bar{g} = \eta \otimes \Pi$ -ess sup g , $\underline{g} = (\eta \otimes \Pi)$ -ess inf g et on note h la transformée de Cramer de g (pour $\bar{1}_a$ mesure $(\eta \otimes \Pi)$ définie sur $[\underline{g}, \bar{g}]$).

(1.3) THÉORÈME. – $\forall a > m$, on a :

$$\overline{\lim}_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \text{Log} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^d} P_x \left[\sum_{p=0}^{n-1} (g(X_p, X_{p+1}) - a) \geq 0 \right] \right) < 0.$$

Si $a \in]m, \bar{g}[$ le terme ci-dessus est majoré par le nombre négatif :

$$\inf_{k \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{k} \text{Log} (f_a \delta^k + e^{-h(a)}) \right] \quad \text{où } f_a = \| e^{u_0 (g-a)} \| . c \quad \text{avec } u_0 = h'(a)$$

où δ et c sont définis dans (D).

(1.4) LEMME. – Supposons que X vérifie $(H_1(1))$, (D) et (B), on a alors :

$$\forall a \in]0, \eta(D)[, \overline{\lim}_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \text{Log} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^d} P_x \left[\sum_{p=0}^{n-1} 1_D(X_p) \leq na \right] \right) \leq -D(a)$$

où

$$D(a) = - \inf_{k \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{k} \text{Log} (e^{ah'(a)} . c \delta^k + e^{-h(a)}) \right)$$

et

$$h(a) = a \text{Log} \left(\frac{a(1 - \eta(D))}{\eta(D)(1 - a)} \right) - \text{Log} \left(\frac{1 - \eta(D)}{1 - a} \right).$$

Démonstration. – Appliquons le résultat précédent à $g(x, y) = -1_D(x)$.

On alors $\bar{g} = 0$ et $\underline{g} = -1$, $m = - \int 1_D(x) d(\eta \otimes \Pi)(x, y) = -\eta(D)$ et $h(a) = \sup_t (ta - \text{Log} \phi(t))$

où

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int e^{tg(x)} d(\eta \otimes \Pi)(x, y) \\ &= \int e^{-t1_D(x)} d\eta(x) \Pi(x, dy) \\ &= e^{-t} \eta(D) + (1 - \eta(D)). \end{aligned}$$

On a donc $h(a) = -a \operatorname{Log} \left(\frac{-a(1 - \eta(D))}{\eta(D)(1 + a)} \right) - \operatorname{Log} \left(\frac{1 - \eta(D)}{1 + a} \right)$.

h est croissante et strictement positive sur $] -\eta(D), 0[$

$$f_a = \| e^{u_0(g-a)} \| . c = e^{-ah'(a)} . c$$

$$D(a) = \Lambda \left(\frac{1}{k} \operatorname{Log} (e^{-ah'(a)} c \delta^k + e^{-h(a)}) \right), \quad D(a) > 0 \text{ sur }] -\eta(D), 0[.$$

On a donc le lemme en changeant a en $-a$. ■

On a montré dans [4] que, sous $(H_1(2)), H_3(1(d)), (B)$ et (C) , η a une densité, par rapport à la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^d (et est la seule probabilité invariante).

La méthode pour obtenir ce résultat consiste à associer à la suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ un « opérateur de Malliavin » au sens de [3] (voir aussi [1]). Pour l'étude de la régularité de η on sera amené à utiliser éventuellement plusieurs opérateurs de Malliavin.

Plus précisément on note, pour $i \geq 1$ et $n \geq 1$, $R_i(n)$ la classe des variables aléatoires réelles $\Phi = F(Z_1, \dots, Z_n)$ avec $F: E^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C_b^i . On définit également R_i par $R_i = \bigcup_{n \geq 1} R_i(n)$.

$R_i(n)$ (Resp. R_i) est stable par C_p^i (ensemble des fonctions de classe C^i à croissance polynômiale ainsi que leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre i).

Sous $(H_1(2)) (= (H'_1(2)))$, X_n^{xj} , j -ième composante de X_n^x , est un élément de $R_2(n)$ (et de R_2) (pour tout $j = 1, \dots, d$).

Soit m un entier ≥ 1 . On pose $I_1(1) = \mathbb{N}^*$ et, pour $m \geq 2$ et $j = 1, 2, \dots, m$, on désigne par $I_m(j)$ l'ensemble des éléments de \mathbb{N}^* qui sont congrus à j modulo m .

On fixe une fois pour toutes une fonction ρ telle que :

$$(1.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho: E \rightarrow]0, +\infty[\text{ de classe } C_b^\infty \\ \text{avec } \rho(z) \rightarrow 0 \text{ quand } z \text{ tend vers la frontière de } E. \end{array} \right.$$

On définit alors sur $R_2(n)$ si $a > 1$ (resp. sur R_2 tout entier si $a = 1$) les opérateurs $L_{m,j}(a, n)$ par la formule :

$$(1.6) \quad L_{m,j}(a, n)(\Phi) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{l=1 \\ l \in I_m(j)}}^n a^{2(n-l)} \\ \times [\rho(Z_l) \Delta_{z_l} F(Z_1, \dots, Z_n) + D_{z_l} \rho(Z_l) (D_{z_l} F(Z_1, \dots, Z_n))^T]$$

où $\Phi = F(Z_1, \dots, Z_n)$

$\Delta_{z_l} F$ désigne le laplacien de l'application $z_l \rightarrow F(z_1, \dots, z_l)$ et A^T la transposée de A .

On définit de même sur $R_1(n) \times R_1(n)$ si $a > 1$ (resp. sur $R_1 \times R_1$ si $a = 1$) les opérateurs bilinéaires associés par la formule :

$$(1.7) \quad \Gamma_{m,j}(a, n)(\Phi, \Psi) = \sum_{\substack{l=1 \\ l \in I_m(j)}}^n a^{2(n-l)} \\ \times [\rho(Z_l) D_{z_l} F(Z_1, \dots, Z_n) (D_{z_l} G(Z_1, \dots, Z_n))^T]$$

où $\Phi = F(Z_1, \dots, Z_n)$ et $\Psi = G(Z_1, \dots, Z_n)$.

$\Gamma_{m,j}(a, n)$ est l'« opérateur carré du champ » associé à $L_{m,j}(a, n)$.

On a alors, si L est l'un quelconque des opérateurs linéaires introduits dans (1.6) [sur $R_2(n)$] et si Γ est son opérateur carré du champ, la formule d'intégration par parties suivante :

$$(1.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \Phi = (\Phi^i)_{i \leq d} \in (R_2(n))^d, \Psi \in R_1(n) \text{ et } f \in C_p^1(\mathbb{R}^d), \text{ on a,} \\ \text{pour } j = 1, \dots, d: \\ E \left[\left(\sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^i}(\Phi) \cdot \Gamma(\Phi^i, \Phi^j) \right) \cdot \Psi \right] \\ = -E[f(\Phi) \cdot \{ 2\Psi \cdot L\Phi^j + \Gamma(\Psi, \Phi^j) \}] \end{array} \right.$$

(Extension immédiate de [4], proposition 2.12) qui concernait le cas où $a = 1$ et $m = 1$.)

Notant, pour $\Phi = (\Phi^i)_{i \leq d} \in R_2(n)$, $U(\Phi) = (\Gamma(\Phi^i, \Phi^j))_{i, j \leq d} = \Gamma(\Phi, \Phi)$, on obtient alors le résultat suivant :

(1.9) PROPOSITION. — Si $\Phi = (\Phi^i)_{i \leq d} \in (R_2(n))^d$, $\Theta \in R_1(n)$ et $f \in C_p^1(\mathbb{R}^d)$, on a,

pour $i = 1, \dots, d$ et l entier ≥ 0 :

$$(1.10) \quad E \left[\frac{\partial f}{\partial x^i}(\Phi) \cdot (\det(U(\Phi)))^{l+2} \cdot \Theta \right] \\ = E[f(\Phi) \cdot (\det(U(\Phi)))^l H^i(U(\Phi), L(\Phi), \Gamma(U(\Phi), \Phi), \Gamma(\Theta, \Phi))].$$

avec $H^i : M(d) \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{F}_3(d) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C_p^∞ .

[det(M) désigne le déterminant de la matrice carré M et $\mathcal{T}_3(d)$ l'ensemble des tableaux à trois indices $T=(t_{i,j,k})_{i,j,k \leq d}$. $M(d)$ désigne l'ensemble des matrices $d \times d$ à coefficients réels.]

Preuve de (1.9). — Soient $g : M(d) \rightarrow \mathbb{R}$ l'application qui à une matrice $d \times d$ associe son déterminant et $h : M(d) \rightarrow M(d)$ l'application qui à une matrice $d \times d$ associe la transposée de sa matrice des cofacteurs.

On pose $\Psi^{k,j} = g(U(\Phi))^{l+1} \cdot h^{j,k}(U(\Phi)) \cdot \Theta$. D'après l'hypothèse faite sur Φ on a : $\Psi^{k,j} \in R_1(n)$ pour tous k, j car $R_1(n)$ est stable par C_p^1 et car g et $h^{j,k}$ sont des fonctions polynômiales. Or :

$$\Gamma(\Psi^{k,j}, \Phi^j) = \Theta \cdot g(U(\Phi))^l \{ (l+1) \cdot \Gamma(g(U(\Phi)), \Phi^j) \cdot h^{k,j}(U(\Phi)) + g(U(\Phi)) \cdot \Gamma(h^{k,j}(U(\Phi)), \Phi^j) \} + g(U(\Phi))^{l+1} \cdot h^{k,j}(U(\Phi)) \cdot \Gamma(\Theta, \Phi^j).$$

On applique alors (1.8) avec $\Psi = \Psi^{k,j}$ et on somme sur j entre 1 et d . On obtient alors :

$$(1.11) \left\{ \begin{array}{l} E \left[\frac{\partial f}{\partial x^k}(\Phi) \cdot g(U(\Phi))^{l+2} \cdot \Theta \right] = E[f(\Phi) g(U(\Phi))^l \cdot \Delta_k] \\ \text{avec} \\ \Delta_k = H^k(U(\Phi), L(\Phi), \Gamma(U(\Phi), \Phi), \Gamma(\Theta, \Phi)) \\ \text{où} \\ H^k(\text{---}) = - \sum_{j=1}^d [\Theta \cdot \{ 2g(U(\Phi)) h^{j,k}(U(\Phi)) L \Phi^j + (l+1) \cdot \Gamma(g(U(\Phi)), \Phi^j) \cdot h^{j,k}(U(\Phi)) + g(U(\Phi)) \Gamma(h^{j,k}(U(\Phi)), \Phi^j) \} + g(U(\Phi)) \cdot h^{j,k}(U(\Phi)) \cdot \Gamma(\Theta, \Phi^j)]. \end{array} \right.$$

[H^k est bien une fonction de $U(\Phi), L(\Phi), \Gamma(U(\Phi), \Phi)$ et $\Gamma(\Theta, \Phi)$ car Γ est un opérateur bilinéaire vérifiant, si $F \in C_p^1(\mathbb{R}^n)$ et si

$$\chi \in R_1(n), \quad \Psi \in R_1(n), \quad \Gamma(F(\chi), \Psi) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\chi) \Gamma(\chi^i, \Psi).]$$

D'où la proposition (1.9). ■

On pose, pour $m \geq 1, a$ réel ≥ 1 et $j = 1, 2, \dots, m$:

$$(1.12) \left\{ \begin{array}{l} U_0^x(a, m, j) = 0 \\ \text{et, pour } n \geq 1, \\ U_n^x(a, m, j) = \Gamma_{m,j}(a, n, m)(X_{nm}^x, X_{nm}^x). \end{array} \right.$$

Lorsque $m = 1$ on note, pour simplifier $U_n^x(a)$ au lieu de $U_n^x(a, 1, 1)$.

Les processus $(U_n^x(a, m, j))_{n \geq 0}$ vérifient des équations aux différences aléatoires du même type que celle qui a été étudiée dans [4] (cas où $a=1$ et $m=1$).

Ils sont à valeurs dans l'espace $M(d)_s$ des matrices $d \times d$ réelles symétriques de type positif et on a plus précisément :

$$(1.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_0^x(a) = 0 \\ \text{et, pour } n \geq 1, \\ U_n^x(a) = a^2 \cdot D_x \varphi(X_{n-1}^x, Z_n) U_{n-1}^x(a) (D_x \varphi(X_{n-1}^x, Z_n))^T \\ \quad + \rho(Z_n) D_z \varphi(X_{n-1}^x, Z_n) (D_z \varphi(X_{n-1}^x, Z_n))^T. \end{array} \right.$$

(extension immédiate du cas où $a=1$ étudié dans la proposition (2.22) de [4]) et, avec les notations :

$$(1.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(x, z) = \varphi(x, z) \\ \text{et, pour } k \geq 2, \\ \varphi_k(x, z_1, \dots, z_k) = \varphi(\varphi_{k-1}(x, z_1, \dots, z_{k-1}), z_k) \end{array} \right.$$

on obtient, pour $a \geq 1, m \geq 2$ et $j = 1, 2, \dots, m$

$$(1.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_n^x(a, m, j) = 0 \\ \text{et, pour } n \geq 1, \\ U_n^x(a, m, j) = a^{2m} \cdot D_x \varphi_m(X_{n-1}^x(m), Z_n(m)) U_{n-1}^x(a, m, j) \\ \quad \times (D_x \varphi_m(X_{n-1}^x(m), Z_n(m)))^T + a^{2(m-j)} \\ \quad \times \rho(Z_{(n-1) \dots m+j}) D_{z_j} \varphi_m(X_{n-1}^x(m), Z_n(m)) \\ \quad \quad \times (D_{z_j} \varphi_m(X_{n-1}^x(m), Z_n(m)))^T \\ \text{où } X_k^x(m) \underset{\text{def}}{=} X_{k \dots m}^x \text{ et } Z_n(m) \underset{\text{def}}{=} (Z_{(n-1) \dots m+1}, \dots, Z_{nm}). \end{array} \right.$$

[par la méthode de la proposition (2.22) de [4] : voir l'appendice.]

$$(1.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}) \text{ l'espace probabilisé défini par} \\ \quad \tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}^d, \quad \tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad \tilde{P} = P \otimes \eta \\ \text{On note} \\ \quad \tilde{X}_n(\omega, x) = X_n^x(\omega) \text{ et } \tilde{U}_n(a, m, j)(\omega, x) = U_n^x(a, m, j)(\omega). \end{array} \right.$$

Les résultats de [14], IV, entraînent aisément sous $(H_1(1))$ et (H'_3) que, pour m, j fixés et $a \geq 1$ fixé tel que $a < \frac{1}{\delta}$ (Rappel : $\delta = \sup_{\text{def } x, z} \|D_x \varphi(x, z)\|$), $(\tilde{X}_n, \tilde{U}_n(a, m, j))$ converge en loi lorsque n tend vers $+\infty$. Notant $(\tilde{X}_\infty, \tilde{U}_\infty(a, m, j))$ la loi limite, on peut passer à la limite dans la formule d'intégration par parties (1.10) avec $\Phi_n = X_{n \dots m}^x$ (et avec Θ convenable et qui sera explicité au II).

Pour obtenir des conditions de régularité pour la densité de η il faut d'une part itérer la formule d'intégration par parties (1.10) après être passé sur l'espace $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ (partie II) et appliquer un lemme classique de régularité [le lemme (4.1) de [1], chapitre II, que l'on réénoncera au II]; il faut d'autre part donner des conditions entraînant que $\det(\tilde{U}_\infty(a, m, j))^{-1} \in L^q(\tilde{\mathbb{P}})$. (Voir la partie III.)

En réunissant tous ces résultats on obtient les théorèmes suivants :
 [rappelons que δ, α (resp. α') et $\gamma = \frac{1}{b}$ ont été introduits respectivement dans les conditions $(H'_3), (B)$ [resp. (B')] et (C_F) et que, A [resp. A'] ont été introduits juste après la condition (GD)].

(1.17) THÉORÈME. — (a) Sous les conditions $(H_1(r))$ avec $r = p + d + 2$ (resp. avec $r = p + 2$), $(H'_3), (B), (C_F)$ et si

$$A < \left(\frac{\gamma^2}{\delta}\right)^{dq} \quad \text{pour } q = \begin{cases} 2(p+d+1) & \text{si } d \geq 2 \\ p+2 & \text{si } d = 1 \end{cases},$$

$$\left[\text{resp. pour } q = \begin{cases} 2d(p+1) & \text{si } d \geq 2 \\ p+1 & \text{si } d = 1 \end{cases} \right]$$

la probabilité invariante η a une densité de classe C^p .

(b) Sous les conditions $(H'_1(r))$ avec $r = p + d + 2$ (resp. avec $r = p + 2$), $(H'_3), (B), (C_F)$ et si $A < \left(\frac{\gamma^2}{\delta}\right)^{dq}$ pour $q = (p + d + 1)^2 \cdot (p + d + 2)$ (resp. pour $q = d(p + 1)^2(p + 2)$), la probabilité invariante η a une densité de classe C^p .

(c) Lorsque l'on a (B) avec $A = 0$ ainsi que $(H_1(\infty))$ [ou $(H'_1(\infty))$], (H'_3) et (C_F) , η a une densité de classe C^∞ .

(1.18) THÉORÈME. — Sous les conditions $(H_1(r))$ avec $r = p + d + 2$ et avec $\theta_r = 0, (B'), (GD), (C_F)$ et $(H_3(q))$ avec

$$q = [2d - 1] \cdot (p + d + 1)^2 \cdot [4(p + d + 1)!] \quad \text{et si } 4(p + d) < \frac{-\text{Log}(A')}{2d \cdot \text{Log}(b \cdot \delta)},$$

alors η a une densité de classe C^p .

Remarques. — 1. Le théorème (1.17) peut s'appliquer en supposant (B_F) au lieu de (B) et en remplaçant A par α_F . [Voir les applications données dans les corollaires (1.24) et (1.25).]

2. L'utilisation de $\tilde{U}_n(a)$ (resp. des $\tilde{U}_n(a, m, j)$) pour $a > 1$ (on verra plus loin qu'il faudra que $a < \frac{1}{\sqrt{\delta}}$) à la place de $\tilde{U}_n(1)$ [resp. des $\tilde{U}_n(1, m, j)$] permet d'améliorer la condition imposée sur α, γ et δ dans

(1.17). (Avec $a=1$ on obtient seulement $\alpha_F < \gamma^{2da}$ avec les mêmes valeurs de q dans chaque cas.)

3. Toujours concernant le théorème (1.17), dans le cas particulier où φ est de la forme : $\varphi(x, z) = \delta \cdot x + B(z)$ (et sous B_F), on a $\delta = \gamma$ et on est ramené à la condition $\alpha_F < \delta^{2da}$ (on obtiendrait $\alpha_F < \delta^{2da}$ si on prenait $a=1$). Il semble qu'on ne peut pas améliorer plus ce type de condition. (Voir l'exemple considéré dans l'appendice en dimension 1.)

2. Applications

1. Application à certains processus markoviens de sauts

Comme dans [4], on peut appliquer directement les résultats précédents à la probabilité invariante η d'un processus markovien de sauts $(Y_t^x)_{t \geq 0}$, à valeurs dans \mathbb{R}^d , solution d'une équation stochastique de la forme :

$$(1.19) \quad \begin{cases} Y_0^x = x \\ \text{et, pour } t > 0, \\ Y_t^x = x + (c(Y_-^x) * \mu)_t \end{cases}$$

avec $c : \mathbb{R}^d \times E \rightarrow \mathbb{R}^d$, où E est un ouvert borné de \mathbb{R}^b , et avec μ mesure de Poisson sur $\mathbb{R}^+ \times E$ de compensateur $\nu(dt \times dz) = dt \times \lambda(dz)$ [et avec $\lambda(E) = 1$].

En posant

$$(1.20) \quad \varphi(x, z) = x + c(x, z)$$

on associe par (1.1) à $(Y_t^x)_{t \geq 0}$ une chaîne de Markov de répartition invariante η et on a une transcription immédiate du théorème (1.17) pour l'étude de la densité de η .

2. Équations aux différences aléatoires (cas indépendant)

On considère le cas particulier de (1.1) où φ est de la forme :

$$(1.21) \quad \begin{cases} \varphi(x, z) = A(z) \cdot x + B(z) \\ \text{avec } A : E \rightarrow M(d), B : E \rightarrow \mathbb{R}^d, \text{ mesurables.} \end{cases}$$

(1.1) s'écrit :

$$(1.22) \quad \begin{cases} X_0^x = x \\ \text{et, pour } n \geq 1, \\ X_n^x = A(Z_n) \cdot X_{n-1}^x + B(Z_n). \end{cases}$$

C'est une équation aux différences aléatoires [cas indépendant : la suite $(A(Z_n), B(Z_n))_{n \geq 1}$ est formée de variables aléatoires indépendantes de même loi]. (Voir [5] ou [10].)

Introduisons alors l'hypothèse $(H_1''(r))$ suivante (avec r entier ≥ 2).

$(H_1''(r))$ A et B sont de classe C^r avec dérivées partielles jusqu'à l'ordre r bornées.

E étant borné, $(H_1''(r))$ (avec $r \geq 2$) entraîne que A et B sont bornées.

D'autre part la condition (H_3') s'écrit dans le cas considéré :

$$(H_3') \quad \delta = \sup_{\text{def } z \in E} \|A(z)\| < 1 \text{ (norme opérateur).}$$

Remarque. — (H_3'') entraîne, de manière classique l'existence et l'unicité de la probabilité invariante et aussi que η est à support borné (Voir [5] ou p. 166 de [4]).

Les conditions (C) et (C_F) deviennent ici :

(C') A(z) est inversible quelque soit $z \in E$.

(C_F') A(z) est inversible pour tout $z \in E$ et $\sup_{z \text{ def}} \|A^{-1}(z)\| = b < +\infty$.

On pose aussi $\gamma = \frac{1}{b}$.

C_1 s'écrit ici :

$$(1.23) \quad C_1(x, z) = A(z)^{-1} \cdot (DA(z)x + DB(z))(DA(z)x + DB(z))^T \cdot A(z)^{-1, T}.$$

On a alors le corollaire suivant du théorème (1.17).

(1.24) COROLLAIRE. — Si ϕ vérifie (1.21) on a :

(a) Sous les conditions $(H_1''(r))$ avec $r = p + d + 2$ (resp. avec $r = p + 2$),

(H_3'') , (B_F) et (C_F') et si de plus $\alpha_F < \left(\frac{\gamma^2}{\delta}\right)^{dq}$ pour que

$$q = \begin{cases} 2(p+d+1) \text{ si } d \geq 2 \\ p+2 \text{ si } d=1 \end{cases} \quad \left[\text{resp. pour } q = \begin{cases} 2d(p+1) \text{ si } d \geq 2 \\ p+1 \text{ si } d=1 \end{cases} \right],$$

la probabilité invariante η a une densité de classe C^p .

(b) Sous les conditions $(H_1''(2))$, (H_3'') , (B_F) et (C_F') et si de plus

$$\alpha_F < \left(\frac{\gamma^2}{\delta}\right)^{dq} \quad \text{pour } q = (p+d+1)^2 \cdot (p+d+2)$$

[resp. pour $q = d(p+1)^2(p+2)$], la probabilité invariante η a une densité de classe C^p .

(c) Lorsque l'on a (B_F) avec $\alpha_F = 0$ ainsi que les conditions $(H_1''(2))$, (H_3'') et (C_F') , η a une densité de classe C^∞ .

Remarques. — 1. On a $2(p+d+1) < 2d(p+1)$ lorsque $d \geq 2$. Si on impose au (a) du corollaire précédent plus de régularité sur ϕ on demande moins sur q dans la condition $\alpha < \left(\frac{\gamma^2}{\delta}\right)^{dq}$ et inversement.

2. Au (b) du corollaire (1.24) les valeurs de q à comparer, pour la même condition de régularité sur φ , sont $(p+d+1)^2 \cdot (p+d+2)$ et $d(p+1)^2(p+2)$. Pour $d \geq 2$ on a $(p+d+1)^2 \cdot (p+d+2) < d(p+1)^2(p+2)$ pour p suffisamment grand. On utilisera donc l'une ou l'autre des conditions de [(1.24), (b)] en fonction des valeurs de d et p considérées (ainsi que celles de α , γ et δ).

Dans le cas particulier où A ne dépend pas de z , (B_F) s'écrit sous la forme suivante :

$$(B'_F) \alpha_F = \sup_{\text{def } y \in \mathcal{S}_{d-1}} \lambda(\{z : DB(z)(DB(z))^T(y) = 0\}) < 1$$

et on a le corollaire suivant de (1.17).

(1.25) COROLLAIRE. — Si φ vérifie (1.16) avec A matrice constante inversible (non nulle) telle que $\delta = \underset{\text{def}}{\|A\|} < 1$ et si on pose $\gamma = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$,

(a) si de plus B est de classe C_b^r avec $r = p + d + 2$ (resp. avec $r = p + 2$) et si on a (B'_F) et $\alpha_F < \left(\frac{\gamma^2}{\delta}\right)^{dq}$ pour

$$q = \begin{cases} 2(p+d+1) & \text{si } d \geq 2 \\ p+2 & \text{si } d = 1 \end{cases} \quad \left[\text{resp. pour } q = \begin{cases} 2d(p+1) & \text{si } d \geq 2 \\ p+1 & \text{si } d = 1 \end{cases} \right]$$

alors η a une densité de classe C^p .

(b) Si de plus B est de classe C_b^2 , si on a (B'_F) et $\alpha_F < \left(\frac{\gamma^2}{\delta}\right)$ pour $q = (p+d+1)^2 \cdot (p+d+2)$ (resp. pour $q = d(p+1)^2 \cdot (p+2)$), alors η a une densité de classe C^p .

(c) Si de plus B est de classe C_b^2 et si on a (B'_F) avec $\alpha_F = 0$, alors η a une densité de classe C^∞ .

Remarques. — 3. L'hypothèse $\|A\| < 1$ signifie que les valeurs propres λ de A (réelles ou complexes) sont telles que $|\lambda| < 1$.

4. Lorsque $A = \lambda \cdot I$ avec λ réel non nul et tel que $|\lambda| < 1$ et avec I matrice identité d'ordre d , on a $\delta = \gamma = \lambda$ et la condition $\alpha < \left(\frac{\gamma^2}{\delta}\right)^{dq}$ se réduit à $\alpha < \lambda^{dq}$.

5. Lorsque A a toutes ses valeurs propres λ_i réelles et est inversible, on a $\delta = \sup_i (|\lambda_i|)$ et $\gamma = \inf_i (|\lambda_i|)$.

II. LES ITÉRATIONS ET LES CONDITIONS GÉNÉRALES DE RÉGULARITÉ CORRESPONDANTES

1. Le schéma d'itération et la famille de processus associés

Rappelons tout d'abord les deux résultats classiques qui sont à la base de l'étude de la régularité de la densité des lois étudiées par le calcul de Malliavin [Voir [1]; (a), (ii) s'obtient au moyen de la transformation de Fourier, (b) et (a), (i) par la théorie des distributions].

(2.1) PROPOSITION. — Soit $\Phi = (\Phi^i)_{i \leq d}$ une variable aléatoire d -dimensionnelle. On a d'une part :

(a) si $n \geq 1$ et s'il existe $C_n > 0$ tel que, pour toute $f \in C_b^n(\mathbb{R}^d)$, tout multi-indice α tel que $|\alpha| \leq n$, on ait :

$$(2.2) \quad |E[D_{x^\alpha} f(\Phi)]| \leq C_n \cdot \|f\|_\infty,$$

alors :

(i) si $n = 1$, la loi de Φ a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^d ,

(ii) si $n \geq d + 1$, la loi de Φ a une densité de classe C^{n-d-1} .

D'autre part on a :

(b) si $n \geq 1$ et si, pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| \leq n$, il existe une variable aléatoire réelle $\Psi_\alpha \in L^{d+\varepsilon}(P)$ pour un $\varepsilon > 0$, telle que, pour toute $f \in C_b^n(\mathbb{R}^d)$, on ait :

$$(2.3) \quad E[D_{x^\alpha} f(\Phi)] = E[f(\Phi) \cdot \Psi_\alpha],$$

alors la loi de Φ a une densité de classe C^{n-1} .

On utilisera la proposition (2.1) au II.3 sur l'espace de probabilité $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ introduit en (1.16).

On va présenter les itérations de la même manière qu'en [1], II.4-b et utiliser les mêmes notations que [2].

Soient m entier ≥ 1 et n entier $\geq m$ fixés. On se donne m opérateurs de Malliavin L_1, \dots, L_m sur $R_2(n)$ de la forme (1.6) [$L_j = L_{m,j}(a, n)$ pour un $\alpha \geq 1$ et pour $j = 1, 2, \dots, m$] et les opérateurs carré du champ correspondants $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ sur $R_1(n) \times R_1(n)$.

Soit $\Phi = (\Phi^i)_{i \leq d} \in (R_2(n))^d$.

On pose, lorsque $m = 1$, $\Gamma_1 = \Gamma$ et $L_1 = L$ et :

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_0(\Phi) = \{ \Gamma(\Phi^i, \Phi^j) : i, j = 1, \dots, d \} \\ C_1(\Phi) = C_0(\Phi) \cup \{ L(\Phi^i), \Gamma(\Phi^j, \Psi) : i, j = 1, \dots, d, \Psi \in C_0(\Phi) \} \\ \text{et, pour } r \geq 2, \text{ si } C_r(\Phi) \subseteq R_1(n) : \\ C_{r+1}(\Phi) = C_r(\Phi) \cup \{ \Gamma(\Phi^j, \Psi) : j = 1, \dots, d, \Psi \in C_r(\Phi) \} \end{array} \right.$$

Si on a $m \geq 2$, on définit tout d'abord :

(2.5) Pour $n \geq m$ et $j = 1, 2, \dots, m$, $R_1^j(n) = \{ F(Z_1, \dots, Z_n) : \text{avec } F \text{ de } E^n \text{ dans } \mathbb{R} \text{ telle que, pour tout } l \in I_m(j), \text{ l'application partielle } z_l \rightarrow F(z_1, \dots, z_n) \text{ soit de classe } C_b^1 \text{ pour tous } z_1, \dots, z_{l-1}, z_{l+1}, \dots, z_n \text{ fixés} \}$.

On pose alors, pour $m \geq 2$

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_0(\Phi) = \{ \Gamma_1(\Phi^i, \Phi^j) : i, j = 1, \dots, d \} \\ \text{et pour } 0 \leq r \leq m-1 \\ \text{et si } C_r(\Phi) \subseteq R_1^{r+1}(n) \text{ (ce qui est toujours vrai si } r=0) \\ C_{r+1}(\Phi) = C_r(\Phi) \cup \{ L_{r+1}(\Phi^i), \Gamma_{r+1}(\Phi^i, \Psi), \\ \Gamma_{r+2}(\Phi^k, \Phi^l) : i, j, k, l = 1, 2, \dots, d, \Psi \in C_r(\Phi) \} \text{ si } r \leq m-2 \\ C_r(\Phi) \cup \{ L_{r+1}(\Phi^i), \Gamma_{r+1}(\Phi^j, \Psi) : i, j = 1, \dots, d, \Psi \in C_r(\Phi) \} \\ \text{si } r = m-1. \end{array} \right.$$

Si $C_r(\Phi)$ est bien définie, on note W_r la variable multidimensionnelle dont les composantes sont toutes les variables aléatoires réelles qui constituent $C_r(\Phi)$. Soit $E_r = \mathbb{R}^{n_r}$ l'espace dans lequel W_r prend ses valeurs.

On a alors, en appliquant (1.10) avec $\Theta = F(W_r)$ et avec $l=0$ et en posant :

$$(2.7) \quad U_r(\Phi) = \begin{cases} \Gamma(\Phi, \Phi) = U(\Phi) \text{ pour tout } r \geq 1 \text{ lorsque } m=1, \\ \Gamma_r(\Phi, \Phi) \text{ lorsque } m \geq 2, \end{cases}$$

Le résultat suivant :

(2.8) PROPOSITION. — Si $\Phi = (\Phi^i)_{i \leq d} \in (R_2(n))^d$ et si pour r entier ≥ 0 , on a $C_r(\Phi) \subseteq R_1(n)$ lorsque $m=1$ (resp. si $C_r(\Phi) \subseteq R_1^{r+1}(\Phi)$ avec $r \leq m-1$ lorsque $m \geq 2$), il existe, pour toute $F \in C_p^\infty(E_r)$ et tout $i = 1, 2, \dots, d$, une application $\Delta_F^i \in C_p^\infty(E_{r+1})$ telle que, pour toute $f \in C_p^1(\mathbb{R}^d)$, on ait :

$$(2.9) \quad E \left[\frac{\partial f}{\partial x^i}(\Phi) (\det(U_{r+1}(\Phi)))^2 \cdot F(W_r) \right] = E [f(\Phi) \cdot \Delta_F^i(W_{r+1})].$$

[lorsque $r=0$ on a $C_0(\Phi) \subseteq R_1(n)$ puisque $\Phi \in (R_2(n))^d$]

(2.10) PROPOSITION [Itérations de (1.10) lorsque $m=1$]. — Si $\Phi = (\Phi^i)_{i \leq d} \in (R_2(n))^d$ et si, pour k entier ≥ 1 et r entier ≥ 0 , on a $C_{r+k-1}(\Phi) \subseteq R_1(n)$, alors il existe, pour toute $F \in C_p^\infty(E_r)$ et pour tout entier $l \geq 0$, une application $\Delta_{F,k,l}$ dont les composantes sont dans $C_p^\infty(E_{r+k})$ telle que, pour toute $f \in C_p^1(\mathbb{R}^d)$ on ait :

$$(2.11) \quad E [D_{x^k}^k f(\Phi) \cdot (\det(U(\Phi)))^{l+2k} F(W_r)] \\ = E [f(\Phi) (\det(U(\Phi)))^l \Delta_{F,k,l}(W_{r+k})].$$

Preuve. — On a (2.11) pour $k=1$ en appliquant la proposition (1.9) avec $\Theta = F(W_r)$. Lorsque l'on a $k \geq 2$ on commence par appliquer (1.10)

à $D_x^{k-1} f, \Theta = F(W_r)$ et $l' = 2(k-1) + l$. Cela donne :

$$E[D_x^{k,l} f(\Phi) \cdot \det(U(\Phi))^{l+2k} \cdot F(W_r)] = E[D_x^{k-1,l} f(\Phi) (\det(U(\Phi)))^{l+2(k-1)} \Delta_{F, 1, l+2(k-1)}].$$

En posant $F_0 = F, F_1 = \Delta_{F_0, 1, l+2(k-1)}, \dots, F_k = \Delta_{F_{k-1}, 1, l}$, on obtient, par récurrence que :

$$E[D_x^{k,l} f(\Phi) \cdot \det(U(\Phi))^{l+2k} \cdot F(W_r)] = E[f(\Phi) (\det(U(\Phi)))^l F_k(W_{r+k})].$$

D'où la proposition (2.10). ■

Pour pouvoir appliquer (2.9) ou (2.11) avec $\Phi = X_{n,m}^x$ et faire tendre n vers $+\infty$, on pose tout d'abord :

(2.12) $C_r(n) = C_r(X_n^x)$ lorsque cette classe est bien définie et on note : $W_n^x(a, r, m)$ la v. a. multidimensionnelle W_r associée à $\Phi = X_n^x$.

Remarquons tout de suite que :

(2.13) si $r \geq 1$, la condition $(H_1(r+1))$ lorsque $m = 1$ [resp. $(H'_1(r+1))$ lorsque $m \geq 2$] entraîne que, pour tout $n \geq m$, la classe $C_r(n)$ est bien définie (resp. : bien définie si de plus $r \leq m$).

[C'est immédiat à partir des définitions (2.4) et (2.6) des $C_r(n)$ et de (2.5).]

On va maintenant étudier les suites de v. a. $(W_n^x(a, r, m))_{n \geq 0}$.

1^{er} cas : $m = 1$.

Soit $a \geq 1$ fixé. On notera $(W_n^x(a, r))$ au lieu de $(W_n^x(a, r, m))$. Supposant que $(H_1(r+1))$ est vérifiée, notant $L(a, n)$ l'opérateur de Malliavin $L_{1,1}(a, n)$ et $\Gamma(a, n)$ son opérateur carré du champ $\Gamma_{1,1}(a, n)$, on pose, comme dans [2] (qui traite le cas où $a = 1$) :

$$(2.14) \left\{ \begin{array}{l} Y(0)_n^x = U_n^x(a) \\ Y(1)_n^x = L(a, n)(X_n^x) = V_n^x(a) \\ \text{et, pour } p = 1, \dots, r : \\ Y(2p)_n^x = \Gamma(a, n)(X_n^x, Y(2p-2)_n^x) \\ \text{pour } p = 1, \dots, r-1 : \\ Y(2p+1)_n^x = \Gamma(a, n)(X_n^x, Y(2p-1)_n^x). \end{array} \right.$$

$C_0(n)$ est formé des composantes de $Y(0)_n^x$ [et $W_n^x(a, 0) = U_n^x(a)$],

$C_1(n)$ de celles de $Y(1)_n^x$ et $Y(2)_n^x$ [et $W_n^x(a, 1) = \Gamma(Y(1)_n^x, Y(2)_n^x)$],

$C_r(n)$ est formé de celles de $Y(0)_n^x, Y(1)_n^x, \dots, Y(2r-1)_n^x$ et $Y(2r)_n^x$,

[avec $W_n^x(a, r) = (Y(0)_n^x, Y(1)_n^x, \dots, Y(2r-1)_n^x, Y(2r)_n^x)$].

On a alors le résultat suivant :

(2.15) PROPOSITION. — Si $(H_1(r+1))$ est vérifiée, les processus $Y(q)_n^x$, pour $q = 1, \dots, 2r$, sont solutions d'équations aux différences aléatoires du

type suivant :

$$(2.16) \left\{ \begin{array}{l} Y(q)_0^x = 0 \\ \text{et, pour } n \geq 1, \\ Y(q)_n^x = A_q(X_{n-1}^x, Z_n) \cdot Y(q)_{n-1}^x \\ \quad + B_q(X_{n-1}^x, Y(0)_{n-1}^x, \dots, Y(q-1)_{n-1}^x, Z_n). \end{array} \right.$$

[$B_q(X_{n-1}^x, Z_n)$ lorsque $q=0$; voir aussi dans (2.17) le sens de $A_q \cdot Y$.] avec

$$(2.17) \left\{ \begin{array}{l} A_0(x, z) = a^2 A(x, z) \text{ où } A \text{ est définie par} \\ A^{(i, j), (k, l)}(x, z) = (D_x \varphi)^{(i, k)}(x, z) \cdot (D_x \varphi)^{(j, l)}(x, z) \\ A_1(x, z) = a^2 \cdot D_x \varphi(x, z) \\ A_q(x, z) \cdot y = a^2 D_x \varphi(x, z) y A_{q-2}(x, z) \quad (\text{pour } q \geq 2) \end{array} \right.$$

et avec

$$(2.18) \quad \|B_q(x, y(0), \dots, y(q-1), z)\| \leq K \left(1 + \|x\|^{k_q} + \sum_{i=0}^{q-1} \|y(i)\|^{k_q} \right)$$

(où $K > 0, k_q \geq 0$) et avec de plus, si $\theta_{r+1} = 0$, pour $q = 2p$ ou $2p + 1$ entre 1 et $2r$:

$$(2.19) \quad \begin{aligned} & \|B_{2p}(x, y(0), \dots, y(2p-1), z)\| \\ & \leq K_{2p} \left(\sum_{\alpha_0 + \dots + \alpha_{2p-1} \leq p+1} \|y(0)\|^{\alpha_0} \dots \|y(2p-1)\|^{\alpha_{2p-1}} \right) \\ & \|B_{2p+1}(x, y(0), \dots, y(2p), z)\| \\ & \leq K_{2p+1} \left(\sum_{\alpha_0 + \dots + \alpha_{2p-1} \leq p+1} \|y(0)\|^{\alpha_0} \dots \|y(2p-1)\|^{\alpha_{2p-1}} \|y(2p)\| \right). \end{aligned}$$

Preuve de (2.15). — Le résultat a été montré dans [4] pour $q=0, 1, 2$ lorsque $a=1$.

On a :

$$(2.20) \left\{ \begin{array}{l} B_0(x, z) = \rho(z) (D_z \varphi) (D_z \varphi)^T(x, z) \\ \text{et} \\ B_1(x, y(0), z) = \frac{1}{2} (\rho(z) \Delta_z \varphi(x, z) \\ \quad + D_z \rho(z) D_z \varphi(x, z)^T) + \frac{1}{2} a^2 \cdot D_x^2 \varphi(x, z) \cdot y(0). \end{array} \right.$$

Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $q + 1$.

On pose $X_n^x = F_n^x(Z_1, \dots, Z_n)$ et $Y(q)_n^x = H_{n,q}^x(Z_1, \dots, Z_n)$.

Par l'hypothèse de récurrence on a :

$$\begin{aligned}
 Y(q)_n^x &= H_{n,q}^x(Z_1, \dots, Z_n) \\
 &= A_q(F_{n-1}^x(Z_1, \dots, Z_{n-1}), Z_n) H_{n-1,q}^x(Z_1, \dots, Z_{n-1}) \\
 &\quad + B_q(F_{n-1}^x(Z_1, \dots, Z_{n-1}), H_{n-1,0}^x(Z_1, \dots, Z_{n-1}), \dots, \\
 &\qquad\qquad\qquad H_{n-1,q-1}^x(Z_1, \dots, Z_{n-1}), Z_n).
 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
 Y(q+2)_n^x &= \Gamma(X_n^x, Y(q)_n^x) \\
 &= \sum_{l=1}^n a^{2(n-l)} \cdot \rho(Z_l) D_{z_l} F_n^x(Z_1, \dots, Z_n) D_{z_l} H_{n,q}^x(Z_1, \dots, Z_n)^T.
 \end{aligned}$$

Si $l \leq n-1$, on a alors :

$$\begin{aligned}
 D_{z_l} H_{n,q}^x(Z_1, \dots, Z_n) &= D_x A_q(X_{n-1}^x, Z_n) Y(q)_{n-1}^x D_{z_l} F_{n-1}^x(Z_1, \dots, Z_{n-1}) \\
 &\quad + A_q(X_{n-1}^x, Z_n) D_{z_l} H_{n-1,q}^x(Z_1, \dots, Z_{n-1}) \\
 &\quad + D_x B_q(X_{n-1}^x, Y(0)_{n-1}^x, \dots, Y(q-1)_{n-1}^x, Z_n) D_{z_l} F_{n-1}^x(Z_1, \dots, Z_{n-1}) \\
 &\quad + \sum_{q'=0}^{q-1} D_{y(q')} B_q(X_{n-1}^x, Y(0)_{n-1}^x, \dots, \\
 &\qquad\qquad\qquad Y(q-1)_{n-1}^x, Z_n) D_{z_l} H_{n-1,q'}^x(Z_1, \dots, Z_{n-1}).
 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 D_{z_n} H_{n,q}^x(Z_1, \dots, Z_n) &= D_z A_q(X_{n-1}^x, Z_n) Y(q)_{n-1}^x \\
 &\quad + D_z B_q(X_{n-1}^x, Y(0)_{n-1}^x, \dots, Y(q-1)_{n-1}^x, Z_n).
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 Y(q+2)_n^x &= A_{q+2}(X_{n-1}^x, Z_n) Y(q+2)_{n-1}^x \\
 &\quad + B_{q+2}(X_{n-1}^x, Y(0)_{n-1}^x, \dots, Y(q+1)_{n-1}^x, Z_n)
 \end{aligned}$$

avec :

$$(2.21) \left\{ \begin{aligned}
 &A_{q+2}(x, z) = a^2 D_x \varphi(x, z) \cdot A_q(x, z) \\
 &B_{q+2}(x, y(0), \dots, y(q+1), z) \\
 &= a^2 \cdot D_x \varphi(x, z) \left\{ y(0) ((D_x A_q(x, z) y(q))^T \right. \\
 &\quad + D_x B_q(x, y(0), \dots, y(q-1), z))^T \\
 &\quad + \sum_{q'=0}^{q-1} y(q'+2) D_{y(q')} B_q(x, y(0), \dots, y(q-1), z))^T \left. \right\} \\
 &+ \rho(z) D_z \varphi(x, z) \{ (D_z A_q(x, z) y(q))^T \\
 &\quad + D_z B_q(x, y(0), \dots, y(q-1), z))^T \}.
 \end{aligned} \right.$$

Montrons par récurrence que, si $\theta_{r+1} = 0$, on a, pour $q = 2p$ ou $2p + 1$ entre 1 et $2r$:

$$\|B_{2p}(x, y(0), \dots, y(2p-1), z)\| \leq K_{2p} \left(\sum_{\alpha_0 + \dots + \alpha_{2p-1} \leq p+1} \|y(0)\|^{\alpha_0} \dots \|y(2p-1)\|^{\alpha_{2p-1}} \right)$$

et

$$\|B_{2p+1}(x, y(0), \dots, y(2p), z)\| \leq K_{2p+1} \left(\sum_{\alpha_0 + \dots + \alpha_{2p-1} \leq p+1} \|y(0)\|^{\alpha_0} \dots \|y(2p-1)\|^{\alpha_{2p-1}} \|y(2p)\| \right).$$

La propriété est vraie pour $p = 0$.

Supposons la vraie jusqu'au rang $p - 1$ où $0 \leq p \leq m$.

Par (2.20) et (2.21), lorsque x et z sont fixés, les B_q sont des polynômes en les composantes des $y(q')$, donc en dérivant B_q par rapport à $y(q')$, on diminue de 1 la puissance des termes en $y(q')$.

Or par (2.21):

$$\|B_{q+2}(x, y(0), \dots, y(q+1), z)\| \leq L a^2 \left\{ \|y(0)\| \|y(q)\| + \|y(0)\| \|D_x B_q\| + \sum_{q'=0} \|y(q'+2)\| \|D_{y(q')} B_q\| + \|y(q)\| + \|D_z B_q\| \right\}.$$

On voit donc que pour $q = 2(p-1)$, le terme $\|y(0)\| \|D_x B_q\|$ va augmenter de 1 la puissance du polynôme de B_{2p-2} , et si $q = 2(p-1) + 1$, le terme $\|y(2p)\| \|D_{y(2(p-1))} B_{2(p-1)+1}(x, y(0), \dots, y(2p-1), z)\|$ va être majoré à une constante près par $\|y(2p)\|$, car par l'hypothèse de récurrence $y(2(p-1))$ apparaît à l'ordre 1 dans $B_{2(p-1)+1}$.

Lorsque $\theta_{r+1} > 0$ on obtient (2.18) à partir de (2.21) de manière immédiate. ■

2^e cas: $m \geq 2$.

On suppose que $(H'_1(m+1))$ est vérifiée. On pose pour $a \geq 1$ fixé et pour $j = 1, 2, \dots, m$:

$$(2.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y(0, j)_n^x = U_n^x(a, m, j) \\ Y(1, j)_n^x = L_{m, j}(a, n)(X_n^x) = V_n^x(a, m, j) \\ Y(2, j)_n^x = \Gamma_{m, j}(a, n)(X_n^x, Y(0, j)_n^x) \\ \text{et pour } p = 1, \dots, m-j \text{ et } j < m, \\ Y(2p+1, j)_n^x = \Gamma_{m, j+p}(a, n)(X_n^x, Y(2p-1, j)_n^x) \\ Y(2p+2, j)_n^x = \Gamma_{m, j+p}(a, n)(X_n^x, Y(2p-2, j)_n^x). \end{array} \right.$$

$C_m(n)$ est formée de toutes les composantes des processus définis en (2.22) [et $W_n^x(a, m, m)$ est égal à $(Y(q, j))_{q, j}$ de (2.22)].

On a alors le résultat suivant :

(2.23) PROPOSITION. — Si $(H'_1(m+1))$ est vérifiée les processus $(Y(q, j)_n^x)_{n \geq 0}$, où $q \geq 1$, définis en (2.22) sont solutions d'équations aux différences aléatoires du type suivant

$$(2.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y(q, j)_0^x = 0 \\ \text{et, pour } n \geq 1, \\ Y(q, j)_n^x = A_q(X_{n-1}^x(m), Z_n(m)) \cdot Y(q, j)_{n-1}^x \\ \quad + B_{q,j}(X_{n-1}^x(m), Y(0, j)_{n-1}^x, \dots, Y(q-1, j)_{n-1}^x, Z_n(m)) \end{array} \right.$$

$[B_{q,j}(X_{n-1}^x(m), Z_n(m)) \text{ lorsque } q=0]$
avec

$$(2.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0^{(k,l), (k',l')}(x, z(m)) \\ \quad = a^{2m} \cdot (D_x \varphi_m)^{(k,k')}(x, z(m)) (D_x \varphi_m)^{(l,l')}(x, z(m)) \\ A_1(x, z(m)) = a^{2m} \cdot D_x \varphi_m(x, z(m)) \\ A_q(x, z(m)) y = a^{2m} \cdot D_x \varphi_m(x, z(m)) y A_{q-2}(x, z(m)) \end{array} \right.$$

et avec

$$(2.26) \quad \|B_{q,j}(x, y(0), \dots, y(q-1), z)\| \leq K \left(1 + \|x\|^{k_q} + \sum_{i=0}^{q-1} \|y(i)\|^{k_q} \right).$$

[L'extension à $q=0$ et 1 du résultat pour $m=1$ s'obtient très facilement en considérant φ_m au lieu de φ . Le passage aux autres valeurs de q se fait par récurrence sur q sans difficulté par la méthode de la preuve de (2.13) avec φ_m au lieu de φ .]

On notera dans ce qui suit :

$$(2.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{Y}(q)_n(\omega, x) = Y(q)_n^x(\omega), \tilde{Y}(q, j)_n(\omega, x) = Y(q, j)_n^x(\omega) \\ \tilde{W}_n(a, r)(\omega, x) = W_n^x(a, r)(\omega) \\ \text{et} \\ \tilde{W}_n(a, r, m)(\omega, x) = W_n^x(a, r, m)(\omega) \end{array} \right.$$

(2.28) PROPOSITION. — Supposons que les hypothèses $(H_1(r+1))$ avec $\theta_r=0$ et $(H_3(r+1)!)l)$ avec $l>0$ soient vérifiées, alors, pour tout q tel que $2q$ (resp. $2q+1$) soit inférieur ou égal à $2r$, on a, si $a=1$:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{E} [\| \tilde{Y}(2q)_n \|^{(r+1)!/(q+1)!}] < +\infty$$

[resp. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{E} [\| \tilde{Y}(2q+1)_n \|^{(r+1)!/(q+1)!}] < +\infty.$]

et en particulier, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{E} [\| \tilde{Y}(2r)_n \|^l] < +\infty.$

Preuve. — Posons $a_k = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_E \|D_x \varphi(x, z)\|^k dz$.

Montrons d'abord que l'hypothèse $(H_3(p))$ implique que :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{E}[\|\tilde{Y}(0)_n\|^p] < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{E}[\|\tilde{Y}(1)_n\|^p] < +\infty.$$

On a :

$$\begin{aligned} \tilde{E}[\|\tilde{Y}(0)_n\|^p]^{1/p} &\leq \tilde{E}[\|A_0(\tilde{X}_{n-1}, Z_n)\|^p] \\ &\quad \times \|\tilde{Y}(0)_{n-1}\|^p]^{1/p} + \tilde{E}[\|B_0(\tilde{X}_{n-1}, Z_n)\|^p]^{1/p} \\ &\leq K + \tilde{E}[\|D_x \varphi(\tilde{X}_{n-1}, Z_n)\|^{2p}]^{1/p} \|\tilde{Y}(0)_n\|^p]^{1/p}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \tilde{E}[\|D_x \varphi(\tilde{X}_{n-1}, Z_n)\|^{2p} \cdot \|\tilde{Y}(0)_{n-1}\|^p] \\ = \tilde{E}[\|\tilde{Y}(0)_{n-1}\|^p \int_E \|D_x \varphi(\tilde{X}_{n-1}, z)\|^{2p} dz] \\ \leq a_{2p} \tilde{E}[\|\tilde{Y}(0)_{n-1}\|^p]. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \tilde{E}[\|\tilde{Y}(0)_n\|^p]^{1/p} &\leq K + (a_{2p})^{1/p} \tilde{E}[\|\tilde{Y}(0)_{n-1}\|^p]^{1/p} \\ &\leq K \sum_{k=0}^{\infty} (a_{2p})^{k/p} \leq K_r \quad \text{car } a_{2p} < 1. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \tilde{E}[\|\tilde{Y}(1)_n\|^p]^{1/p} &\leq \tilde{E}[\|D_x \varphi(\tilde{X}_{n-1}, Z_n)\|^p \|\tilde{Y}(1)_{n-1}\|^p]^{1/p} \\ &\quad + \tilde{E}[\|B_1(\tilde{X}_{n-1}, \tilde{Y}(0)_{n-1}, Z_n)\|^p]^{1/p}. \end{aligned}$$

Or $\|B_1(x, y(0), z)\| \leq K_1 + K_2 \|y(0)\|$, d'où

$$\tilde{E}[\|\tilde{Y}(1)_n\|^p]^{1/p} \leq K_1 + K_2 \sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{E}[\|\tilde{Y}(0)_n\|^p]^{1/p} + (a_p)^{1/p} \tilde{E}[\|\tilde{Y}(1)_{n-1}\|^p]^{1/p}.$$

Donc $\sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{E}[\|\tilde{Y}(q)_n\|^p] < +\infty$ pour $q=0$ ou 1 .

Supposons maintenant $(H_3((r+1)!l))$ vérifiée.

Le calcul précédent montre que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{E}[\|\tilde{Y}(q)_n\|^{(r+1)!l}] < +\infty$ pour $q=1$

ou 0 .

Supposons le résultat de la proposition (2.28) vrai jusqu'au rang $q-1$, avec $0 \leq q-1 \leq r-1$

On a :

$$\begin{aligned} \tilde{E}[\|\tilde{Y}(2q)_n\|^{l'}]^{1/l'} \\ \leq \tilde{E}[\|B_{2q}(\tilde{X}_{n-1}, \tilde{Y}(0)_{n-1}, \dots, \tilde{Y}(2q-1)_{n-1}, Z_n)\|^{l'}]^{1/l'} \\ + \tilde{E}[\|A_{2q}(\tilde{X}_{n-1}, Z_n)\|^{l'} \|\tilde{Y}(2q)_{n-1}\|^{l'}]^{1/l'} \\ \leq (a_{(q+2)l'})^{1/l'} \tilde{E}[\|\tilde{Y}(2q)_{n-1}\|^{l'}]^{1/l'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ K. \left(\sum_{\alpha_0 + \dots + \alpha_{2q-1} \leq q+1} \tilde{E} [\|\tilde{Y}(0)_{n-1}\|^{\alpha_0 l'} \dots \|\tilde{Y}(2q-1)_{n-1}\|^{\alpha_{2q-1} l'}]^{1/l'} \right) \\
 &\leq (a_{(q+2)l'})^{1/l'} \tilde{E} [\|\tilde{Y}(2q)_{n-1}\|^{l'}]^{1/l'} \\
 &+ K \tilde{E} [\|\tilde{Y}(0)_{n-1}\|^{(q+1)l'} \dots]^{1/l'} \dots \tilde{E} [\|\tilde{Y}(2q-1)_{n-1}\|^{(q+1)l'}]^{1/l'}.
 \end{aligned}$$

On a utilisé dans le calcul précédent les inégalités de Hölder et la proposition (2.15).

Posons $l' = \frac{l(r+1)}{(q+1)}$, on a donc $(q+1)l' = \frac{l(r+1)}{q}$, donc par l'hypothèse de récurrence, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{E} [\|\tilde{Y}(q')_n\|^{(q+1)l'}] < +\infty, \forall q' \leq 2q-1$.

De plus $(q+2)l' = \frac{(q+2)l(r+1)}{(q+1)!} \leq 2(r+1)l$.

Donc $a_{(q+2)l'} < 1$, on en déduit que :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{E} [\|\tilde{Y}(2q)_n\|^{(r+1)l/(q+1)}] < +\infty.$$

On montre le résultat de la même façon pour $\tilde{Y}(2q+1)_n$, le terme en $\tilde{Y}(2q)_n$ n'intervenant qu'à l'ordre 1 dans B_{2q+1} .

En faisant $q=r$, on a donc

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{E} [\|\tilde{Y}(2r)_n\|^l] < +\infty. \quad \blacksquare$$

(2.29) PROPOSITION. — Si $(H_1(r+1))$ (resp. $H'_1(r+1)$) et $r=m$ est vérifiée ainsi que (H'_3) et si $a \in \left[1, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$ (avec $\delta = \sup_{x,z} \|D_x \varphi(x,z)\|$), alors on a :

$$\sup_{n \geq 1} \|\tilde{W}_n(a,r,m)\| \in L^\infty(\tilde{P}).$$

Preuve de (2.29). — Il suffit de montrer que $\sup_{n \geq 1} \|\tilde{Y}(q)_n\|$ (resp. : $\sup_{n \geq 1} \|\tilde{Y}(q,j)_n\|$) appartient $L^\infty(\tilde{P})$ pour $q=0, 1, \dots, 2r$ [resp. : pour $j=1, 2, \dots, m$ et $q \leq 2(m-j+1)$ et $j < m$ lorsque $q \geq 3$]. Or, d'après (H'_3) et comme $a < \frac{1}{\sqrt{\delta}}$, on obtient, par récurrence sur q , que

$\sup_{x,z} \|A_q(x,z(m))\| < 1$ pour tout q . Comme d'autre part η est à support borné [conséquence de (H'_3) et $H_1(1)$] : voir l'appendice, on obtient facilement, par récurrence sur q , que $\sup_{n \geq 1} \|\tilde{Y}(q)_n\| \in L^\infty(\tilde{P})$ [resp. :

$\sup_{n \geq 1} \|\tilde{Y}(q,j)_n\| \in L^\infty(\tilde{P})$] : on utilise (2.18) [resp. (2.26)] et le fait que

$$\sup_{x,z} \|A_q(x,z(m))\| < 1. \quad \blacksquare$$

2. Comportement quand $n \rightarrow +\infty$ des $\tilde{W}_n(a, r, m)$

On étudie directement le cas général $m \geq 1$. On a le résultat suivant :

(2.30) PROPOSITION. — Si $(H_1(r+1))$ (resp. : $(H'_1(r+1))$) et $r=m$ est vérifiée ainsi que (H'_3) et si $a \in \left[1, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right[$ alors :

$(\tilde{X}_n(m), \tilde{W}_n(a, r, m))$ converge en loi lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Preuve de (2.30). — Comme dans la partie IV de [4], on associe à la chaîne de Markov stationnaire $(\tilde{X}_n, Z_{n+1})_{n \geq 0}$ sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ une chaîne indexée par \mathbb{Z} , à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times E$, définie sur un espace auxiliaire $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P^*)$, stationnaire de même probabilité de transition que $(\tilde{X}_n, Z_{n+1})_{n \geq 0}$ (avec $\eta \times \lambda$ comme probabilité invariante).

Notant $(X_n^*, Z_{n+1}^*)_{n \in \mathbb{Z}}$ cette nouvelle chaîne de Markov on aura pour p entier ≥ 0 , $n \in \mathbb{Z}$ et m entier ≥ 1 , avec la notation $Z_l^*(m) = (Z_{(l-1)m+1}^*, \dots, Z_{lm}^*)$ le résultat suivant :

$$(2.31) \quad \mathcal{L}((\tilde{X}_{l \cdot m}, Z_{(l+1)m}^*(m))_{0 \leq l \leq p}) = \mathcal{L}((X_{l \cdot m}^*, Z_{(l-n)m}^*(m))_{0 \leq l \leq p}) = \mathcal{L}((X_{l-n}^*, Z_{(l-n+1)m}^*(m))_{0 \leq l \leq p})$$

[$\mathcal{L}(U)$ désigne la loi de U .]

On a la première égalité car les deux chaînes de Markov ont la même probabilité de transition et la seconde par stationnarité de la chaîne $(X_n^*, Z_{n+1}^*)_{n \geq 0}$.

Soit $m=1$ et q entier 0 et $2r$. On considère sur $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P^*)$ le processus $Y(q)_n^*$ défini par :

$$(2.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y(q)_0^* = 0 \\ \text{et, pour } n \geq 1, \\ Y(q)_n^* = A_q(X_{n-1}^*, Z_0^*) Y(q)_{n-1}^* \\ \quad + \sum_{j=1}^q A_q(X_{n-1}^*, Z_0^*) \dots A_q(X_{n-j}^*, Z_{-j+1}^*) \\ \quad \times B_q(X_{n-(j+1)}^*, Y(0)_{-(j+1)}^* \dots Y(q-1)_{-(j+1)}^*, Z_{-j}^*) \end{array} \right.$$

$Y(q)_n^*$ est une série de v. a. et $Y(q)_n^*$ a, pour tout n , même loi que $\tilde{Y}(q)_n$ [par (2.31) et en itérant (2.16)]. Comme $(Y(q)_n^*)_{n \geq 0}$ converge dans $L^\infty(P^*)$ [c'est immédiat à partir de la preuve de (2.39)], on aura aussi convergence dans $L^\infty(P^*)$ de $W_n^*(a, r)$ défini par : $W_n^*(a, r) = (Y(q)_n^*)_{q=0, 1, \dots, 2r}$. Notant $W_\infty^*(a, r)$ la limite de cette suite, $(X_0^*, W_n^*(a, r))_{n \geq 0}$ converge dans $L^\infty(P^*)$ vers $(X_0^*, W_\infty^*(a, r))$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Comme on a : $\mathcal{L}(X_0^*, W_n^*(a, r)) = \mathcal{L}(\tilde{X}_n, \tilde{W}_n(a, r))$ [par (2.31)] on en déduit la proposition (2.30) dans le cas où $m=1$. Le cas général se fait exactement de la même manière à partir de (2.31) en considérant $X_n^*(m) = X_{n \cdot m}^*$ au lieu de X_n^* et en utilisant (2.24). ■

3. Résultats généraux sur la régularité de η

Soit $a \in \left[1, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$. La proposition (2.30) nous permet d'intégrer par rapport à η la formule (2.9) considérée avec $\Phi = X_n^x$. On obtient en posant $\tilde{Q}_n(a, m, l) = \det(\tilde{U}_n(a, m, l))$:

$$(2.33) \left\{ \begin{aligned} & \tilde{E} \left[\frac{\partial f}{\partial x^i}(\tilde{X}_n(m)) \cdot \tilde{Q}_n^2(a, m, l+1) F(\tilde{W}_n(a, l, m)) \right] \\ & = \tilde{E} [f(\tilde{X}_n(m)) \Delta_F^i(\tilde{W}_n(a, l+1, m))] \\ & \text{pour } i=1, 2, \dots, d \text{ et } 0 \leq l \leq r, \text{ sous } (H_1(r+1)) \text{ [resp. : } 0 \leq l \leq m \\ & \text{si } m \geq 2 \text{ sous } (H'_1(m+1)) \text{ avec } f \text{ et } F \text{] vérifiant les hypothèses de} \\ & \text{la proposition (2.8).} \end{aligned} \right.$$

Les propositions (2.29) et (2.30) nous permettent de faire tendre n vers $+\infty$ dans (2.33). On prendra $f \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$ et $F \in C_{\mathbb{P}(\tilde{E})}^\infty$; on obtient si $\tilde{Q}_\infty(a, m, l) = \det(\tilde{U}_\infty(a, m, l))$:

$$(2.34) \left\{ \begin{aligned} & \tilde{E} \left[\frac{\partial f}{\partial x^i}(\tilde{X}_\infty) \cdot \tilde{Q}_\infty^2(a, m, l+1) \cdot F(\tilde{W}_\infty(a, l, m)) \right] \\ & = \tilde{E} [f(\tilde{X}_\infty) \Delta_F^i(\tilde{W}_\infty(a, l+1, m))] \\ & \text{avec de plus } \tilde{W}_\infty(a, l, m) \in L^\infty(\tilde{\mathbb{P}}) \text{ pour tout } l. \end{aligned} \right.$$

En utilisant (2.34), le fait que \tilde{X}_∞ ait pour loi η et la proposition (2.1) on va prouver que l'on a les résultats suivants:

(2.35) THÉORÈME. - (a) Si on a $(H_1(r))$ avec $r = p + d + 2$ (resp. avec $r = p + 2$), (H'_3) et s'il existe $a \in \left[1, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$ tel que $\tilde{Q}_\infty(a)^{-q} \in L^1(\tilde{\mathbb{P}})$ pour $q = 2(p + d + 1)$ (resp. un $q > 2d(p + 1)$), alors η a une densité de classe C^p .

(b) Si on a $(H'_1(r))$ avec $r = p + d + 2$ (resp. $r = p + 2$), (H'_3) et s'il existe $a \in \left[1, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$ tel que, pour tout $j = 1, \dots, m$, on ait $\tilde{Q}_\infty(a, m, j)^{-q_j} \in L^1(\tilde{\mathbb{P}})$ pour $q_j = (p + d + 1)(p + d + 3 - j)$ [resp. $q_j > d(p + 1)(p + 3 - j)$], alors η a une densité de classe C^p .

(c) Si on a $(H_1(\infty))$ (resp. $(H'_1(\infty))$, (H'_3)) et si, pour tout $q \geq 1$, il existe $a \in \left[1, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$ tel que $\tilde{Q}_\infty(a)^{-q} \in L^1(\tilde{\mathbb{P}})$ (resp. si, pour tout $m \geq 2$ et tout $j = 1, \dots, m$, il existe $a \in \left[1, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$ tel que $\tilde{Q}_\infty(a, m, j)^{-q_j} \in L^1(\tilde{\mathbb{P}})$ pour $q_j = m(m + 2 - j)$) alors η a une densité de classe C^∞ .

Preuve. - 1. Démonstration du (a) (cas où $m = 1$). - (i) De (2.34) et de l'expression explicite de H^i donnée en (1.11) on déduit, en prenant $F_r(\tilde{W}_\infty(a, l)) = F(\tilde{W}_\infty(a, l)) \cdot \Psi(r \cdot \tilde{Q}_\infty(a)) \cdot \tilde{Q}_\infty(a)^{-\beta - 2}$ à la place de F ,

avec $\Psi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \Psi \leq 1$, $\Psi(u) = 0$ si $|u| \leq \frac{1}{2}$ et $\Psi(u) = 1$ si $|u| \geq 1$ et en faisant tendre r vers $+\infty$ que :

$$(2.36) \quad \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{\partial f}{\partial x^i}(\tilde{X}_\infty) \cdot \tilde{Q}_\infty^{-\beta}(a) \cdot F(\tilde{W}_\infty(a, l)) \right] \\ = \tilde{\mathbb{E}} [f(\tilde{X}_\infty) \cdot \tilde{Q}_\infty^{-\beta-2} \Delta_{F, 1, \beta}^i(\tilde{W}_\infty(a, l+1))]$$

pour $0 \leq \beta \leq q-2$, $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $F \in C_p^\infty(E_l)$, avec $\Delta_{F, 1, \beta}^i \in C_p^\infty(E_{l+1})$.

[La preuve est identique à celle du lemme (4.14) de [1] qui ne repose que sur la formule (2.34).]

(ii) Les itérations.

Soit $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$ et soit α un multi-indice d'ordre $|\alpha| = n$ avec $\alpha = (\alpha_{n-1}, i)$ où $|\alpha_{n-1}| = n-1$. On applique (2.36) avec $F \equiv 1$. On obtient donc

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(\tilde{X}_\infty) \right] = \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{\partial^{\alpha_{n-1}}}{\partial x^{\alpha_{n-1}}}(\tilde{X}_\infty) \cdot \tilde{Q}_\infty^{-2}(a) \cdot \Delta_{1, 1, 0}^i(\tilde{W}_\infty(a, 1)) \right].$$

Les hypothèses du (a) de (2.35) entraînent que si $n = p+d+1$ (resp. $n = p+1$), on peut appliquer (2.36) $n-1$ autres fois. Ce qui donne :

$$(2.37) \quad \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(\tilde{X}_\infty) \right] = \tilde{\mathbb{E}} [f(\tilde{X}_\infty) \cdot \tilde{Q}_\infty^{-2n}(a) \cdot H_\alpha(\tilde{W}_\infty(a, n))]$$

avec $H_\alpha \in C_p^\infty(E_n)$. D'où le (a) du théorème (2.35) à partir de la proposition (2.1) [et en utilisant le fait que $\tilde{U}_\infty(a, l) \in L^\infty(\tilde{P})$ pour $l=0, 1, \dots, n$].

2. *Démonstration du (b) (cas où $m \geq 2$). - (i)* Par la même méthode de troncation que la preuve de (2.36), on obtient à partir de (2.34), pour $0 \leq l \leq m$:

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{\partial f}{\partial x^i}(\tilde{X}_\infty) \cdot \left(\prod_{j=1}^{l+1} \tilde{Q}_\infty^{-\beta_j}(a, m, j) \right) \cdot F(\tilde{W}_\infty(a, l, m)) \right] \\ = \tilde{\mathbb{E}} [f(\tilde{X}_\infty) \cdot K^i(\tilde{Q}_\infty^{-1}(a, m, 1), \dots, \tilde{Q}_\infty^{-1}(a, m, l+1), \tilde{W}_\infty(a, l+1, m))]$$

(2.38) avec K^i fonction de classe C_p^∞ pour laquelle, pour tout w fixé, $(s_1, \dots, s_{l+1}) \rightarrow K^i(s_1, \dots, s_{l+1}, w)$ est une fonction polynôme en s_1, \dots, s_{l+1} ne contenant que des monômes de degré total

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{l+1} \begin{cases} +3 \\ \text{ou si } l \geq 1 \text{ (resp. } \beta_1 + 2 \text{ si } l=0) \text{ le degré en } s_{l+1} \\ +2 \end{cases}$$

chaque monôme étant 2. (Voir l'appendice.)

(ii) Les itérations.

On prend $m = p+d+1$ (resp. $p+1$).

Une première application de (2.38) avec $l=0$ et $\beta_1=0$ [qui correspond à (2.29) avec $\tilde{Q}_\infty(a, m, 1)$ au lieu de $\tilde{Q}_\infty(a)$] donne si $F \equiv 1$, pour α multi-indice tel que $|\alpha| = m$ et $\alpha = (\alpha_{m-1}, i)$ et $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$:

$$\tilde{E} \left[\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(\tilde{X}_\infty) \right] = \tilde{E} \left[\frac{\partial^{\alpha_{m-1}} f}{\partial x^{\alpha_{m-1}}}(\tilde{X}_\infty) \cdot (\tilde{Q}_\infty^{-2}(a, m, 1) \cdot \Delta_{1,1,0}^i(\tilde{W}_\infty(a, 1, m))) \right].$$

En appliquant à nouveau (2.38) $m-1$ fois (avec $\beta_1=2$ et $\beta_2=0$ la première fois) on obtient :

$$(2.39) \quad \tilde{E} \left[\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(\tilde{X}_\infty) \right] = \tilde{E} [f(\tilde{X}_\infty) \cdot L_\alpha(\tilde{Q}_\infty^{-1}(a, m, 1), \dots, \tilde{Q}_\infty^{-1}(a, m, m), \tilde{W}_\infty(a, m, m))]$$

avec L_α de classe C_p^∞ pour laquelle $(s_1, \dots, s_m) \rightarrow L_\alpha(s_1, \dots, s_m, w)$ est pour tout w fixé une fonction polynôme en s_1, \dots, s_m de degré total $3m-1$, le degré en s_j de chaque monôme étant compris entre 2 et $m-j+2$.

D'où le (b) du théorème (2.35) en utilisant la proposition (2.1), le fait que $\tilde{W}_\infty(a, l, m) \in L^\infty(\tilde{P})$ pour tout $l=0, 1, \dots, m$ et l'inégalité de Hölder.

[Suivant qu'on utilise (a) ou (b) de (2.1) il est nécessaire que $\tilde{Q}_\infty^{-1}(a, m, j) \in L^{m-j+2}(\tilde{P})$ (resp. $L^q(\tilde{P})$ pour un $q > d(m-j+2)$) et il y a m «matrices de Malliavin» $\tilde{Q}_\infty(a, m, j)$.] D'où la condition suffisante: $\tilde{Q}_\infty^{-1}(a, m, j) \in L^{m(m-j+2)}(\tilde{P})$.

3. (c) se déduit facilement de (a) et (b). ■

Voici maintenant le résultat général de régularité de η qui sera utilisé pour prouver le théorème (1.18).

(2.40) THÉORÈME. — Si on a $(H_1(r))$ avec $r=p+d+2$ et avec $\theta_r=0$, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait $(H_3(q_0))$ avec :

$$q_0 = \left[\left(1 + \frac{2(p+d+1)}{\varepsilon} (2d-1) \right) \cdot \frac{(p+d+2)^2}{2} \right] \sqrt{2 \cdot \left(1 + \frac{2(p+d+1)}{\varepsilon} \right) (p+d+2)!}$$

et si $\tilde{Q}_\infty(1)^{-q_1} \in L^1(\tilde{P})$ avec $q_1 = 2(p+d+1) + \varepsilon$, alors η a une densité de classe C^p .

Preuve. — Soit $\varphi_{q,r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_{q,r}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{2(r-1)}} \exp\left(-\frac{1}{q \cdot x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On a $\varphi_{q,r} \in C_b^\infty$, donc si $(H_1(r-1))$ est vérifiée, on peut appliquer (2.10) à $\Phi = X_n^x$, $F = \varphi_{q,r} \circ g$, $Y_1 = U_n^x(1)$. D'où l'on obtient :

$$(2.41) \quad E [D_{x,r}^{-1} f(X_n^x) (Q_n^x(1))^{2(r-1)} \cdot \varphi_{q,r}(Q_n^x(1))] = E [f(\Phi) \cdot F_{r-1}(Y_{r-1})]$$

où $F_{r-1}(Y_{r-1})$ est définie par :

$$\begin{aligned} F_0 &= F = \varphi_{q,r}(Y(0)_n^x) \\ F_1 &= \Delta_{F_0, 2(r-2)} \\ &\vdots \\ F_{r-1} &= \Delta_{F_{r-2}, 0}. \end{aligned}$$

(2.42) LEMME. — On a :

$$F_{r-1}(Y_{r-1}) = \sum_{k=0}^{r-1} \varphi_{q,r}^{(k)}(Q_n^x(1)) \cdot (Q_n^x(1))^k G_{k,r-1}(Y(0)_n^x, \dots, Y(2(r-1))_n^x),$$

où $G_{k,r-1}$ a des composantes qui sont des polynômes vérifiant :

$$\begin{aligned} &\|G_{k,r-1}(y(0), \dots, y(2(r-1)))\| \\ &\leq K_{r-1,k} \left\{ \left(\sum_{l=1}^m (\|y(2l)\| \cdot \|y(0)\|^{(2d-1)l-1})^{m+1-l} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{l=1}^m (\|y(2l-1)\| \cdot \|y(0)\|^{(2d-1)m+1-l+1}) \right) \right\}. \end{aligned}$$

[Voir [2], lemme (2.13) pour la démonstration de ce résultat.]

On déduit du lemme (2.42) grâce au théorème de Fubini appliqué à \tilde{P} que l'on a, avec $m=r-1$:

$$\begin{aligned} &\tilde{E}[D_{x^m}^m f(\tilde{X}_n) (\det \tilde{U}_n(1))^{2m} \varphi_{q,m}(\det \tilde{U}_n(1))] \\ &= \tilde{E} \left[f(\tilde{X}_n) \left(\sum_{k=0}^m \varphi_{q,m}^{(k)}(\det \tilde{U}_n(1)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (\det \tilde{U}_n(1))^k G_{k,m}(\tilde{Y}(0)_n, \dots, \tilde{Y}(2m)_n) \right) \right] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\| \tilde{E}[D_{x^m}^m f(\tilde{X}_n) (\det \tilde{U}_n(1))^{2m} \varphi_{q,m}(\det \tilde{U}_n(1))] \| \\ &\leq \|f\|_\infty \sum_{k=0}^m \tilde{E} [|\varphi_{q,m}^{(k)}(\det \tilde{U}_n(1)) (\det \tilde{U}_n(1))^k|^{p_1}]^{1/p_1} \\ &\quad \tilde{E} [\|G_{k,m}(\tilde{Y}(0)_n, \dots, \tilde{Y}(2m)_n)\|^{p_2}]^{1/p_2} \end{aligned}$$

si $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$.

Par le lemme (2.42),

$$\begin{aligned} &\tilde{E} [\|G_{k,m}(\tilde{Y}(0)_n, \dots, \tilde{Y}(2m)_n)\|^{p_2}]^{1/p_2} \\ &\leq K \left\{ \sum_{l=1}^m (\tilde{E} [\|\tilde{Y}(2l)\|^{p_2(m+1-l)} \|\tilde{Y}(0)\|^{p_2(m+1-l)((2d-1)l-1)}])^{1/p_2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \tilde{\mathbb{E}} [\| (\tilde{Y}(2l-1))_n \|^{p_2(m+1-l)} \| \tilde{Y}(0) \|^{p_2(m+1-l)(2d-1)l}]^{1/p_2+1} \Big\} \\
 & \leq \mathbf{K} \left\{ \sum_{l=1}^m (\tilde{\mathbb{E}} [\| \tilde{Y}(2l) \|^{2 p_2(m+1-l)}]^{1/2 p_2} \right. \\
 & \times \tilde{\mathbb{E}} [\| \tilde{Y}(0) \|^{2 p_2(m+1-l)((2d-1)l-1)}]^{1/2 p_2} + \tilde{\mathbb{E}} [\| \tilde{Y}(2l-1) \|^{2 p_2(m+1-l)}]^{1/2 p_2} \\
 & \left. \times \tilde{\mathbb{E}} [\| \tilde{Y}(0) \|^{2 p_2(m+1-l)(2d-1)l}]^{1/2 p_2+1} \right\}
 \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
 & \sup_{1 \leq l \leq m} [(2 p_2(m+1-l)((2d-1)l-1) \\
 & \quad \vee (2 p_2(m+1-l)(2d-1)l)] = p_2(2d-1) \frac{(m+1)^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Supposons que $(H_3(\alpha))$ soit vérifiée pour

$$\alpha = p_2(2d-1) \frac{(m+1)^2}{2} \vee (m+1)!(2p_2).$$

On a alors par la proposition (2.28) :

$$\forall l=1, \dots, m \left\{ \begin{aligned} & \sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mathbb{E}} [\| \tilde{Y}(0)_n \|^{2 p_2(m+1-l)(2d-1)l-1}] < +\infty \\ & \sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mathbb{E}} [\| \tilde{Y}(0)_n \|^{2 p_2(m+1-l)(2d-1)l}] < +\infty \end{aligned} \right.$$

Comme $\forall l=1, \dots, m, 2 p_2(m+1-l) \leq \frac{(m+1)!(2 p_2)}{(l+1)!}$, on a :

$$\begin{aligned}
 & \sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mathbb{E}} [\| \tilde{Y}(2l)_n \|^{2 p_2(m+1-l)}] < +\infty \\
 & \sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mathbb{E}} [\| \tilde{Y}(2l-1)_n \|^{2 p_2(m+1-l)}] < +\infty.
 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
 & \| \tilde{\mathbb{E}} [D_x^m f(\tilde{X}_n(\det \tilde{U}_n(1))^{2m} \varphi_{q,m}(\det \tilde{U}_n(1)))] \| \\
 & \leq \mathbf{K} \| f \|_\infty \sum_{k=0}^m \tilde{\mathbb{E}} [| \varphi_{q,m}^{(k)}(\det \tilde{U}_n(1)) (\det \tilde{U}_n(1))^k |^{p_1}]^{1/p_1}.
 \end{aligned}$$

Or $\forall k=1, \dots, m, | \varphi_{q,m}^{(k)}(x) | \leq \frac{C_k}{|x|^{2m+k}}$ si $x \neq 0$ où C_k est une constante indépendante de q .

Les conditions $(H_3(\alpha))$ et $(H_1(m+2))$ impliquent d'après [4] que $(\tilde{X}_n, \tilde{U}_n)$ converge en loi vers $(\tilde{X}_\infty, \tilde{U}_\infty)$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} & \|\tilde{E}[D_{x^m}^m f(\tilde{X}_\infty)(\det \tilde{U}_\infty(1))^{2m} \varphi_{q,m}(\det \tilde{U}_\infty(1))]\| \\ & \leq K \|f\|_\infty \sum_{k=0} \tilde{E}[|\varphi_{q,m}^{(k)}(\det \tilde{U}_\infty(1))(\det \tilde{U}_\infty(1))^k|^{p_1}]^{1/p_1}. \end{aligned}$$

Donc si $(\det \tilde{U}_\infty(1))^{-1}$ appartient à L^{2mp_1} , on en déduit par passage à la limite quand q tend vers $+\infty$ que $\|\tilde{E}[D_{x^m}^m f(\tilde{X}_\infty)]\| \leq K \|f\|_\infty$, d'où le résultat par le lemme (2.42).

On obtient le théorème en posant

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 + \frac{\varepsilon}{2m} \\ p_2 &= 1 + \frac{2m}{\varepsilon}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque. — En posant $\varepsilon = 2m$, on obtient l'énoncé plus simple suivant : s'il existe $m \geq d+1$ tel que

$$(H_1(m+2)) \quad \text{et} \quad (H_3((2d-1)(m+1)^2 \vee 4(m+1)!))$$

soient vérifiées et tel que $(\det \tilde{U}_\infty(1))^{-1} \in L^{4m}$,

alors η admet une densité de classe C^p avec $p = m - d - 1$.

III. ÉTUDE DE L'INTÉGRABILITÉ $(\det(\tilde{U}_\infty(a, m, j)))^{-q}$ ET APPLICATION

1. Introduction et résultat général

Quelque soit (a, m, j) , avec m entier ≥ 1 et j entier entre 1 et m , la suite $(\tilde{U}_n(a, m, j))_{n \geq 0}$ est à valeurs dans $M(d)_s$ et vérifie, d'après (1.13) et (1.15) une équation aux différences aléatoire de la forme suivante :

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}_0 = 0 \\ \text{et, pour } n \geq 1, \\ \tilde{U}_n = D(\tilde{X}_{n-1}(m), Z_n(m)) \cdot \tilde{U}_{n-1} \\ \quad \times (D(\tilde{X}_{n-1}, Z_n(m)))^T + B(\tilde{X}_{n-1}, Z_n(m)) \\ \text{avec } D: \mathbb{R}^d \times E^m \rightarrow M(d) \\ \text{et } B: \mathbb{R}^d \times E^m \rightarrow M(d)_s. \end{array} \right.$$

Posons $z(m) = (z_1, \dots, z_m) \in E^m$ et :

$$(3.2) \quad A^{(i,j),(k,l)}(x, z(m)) = D^{i,k}(x, z(m)) \cdot D^{j,l}(x, z(m)).$$

On a alors, pour tout $n \geq 1$:

$$(3.3) \quad \tilde{U}_n = A(\tilde{X}_{n-1}(m), Z_n(m)) \cdot \tilde{U}_{n-1} + B(\tilde{X}_{n-1}(m), Z_n(m)), \text{ en notant } A \cdot U = D \cdot U \cdot D^T.$$

On pose également :

$$(3.4) \quad C(x, z(m)) = \begin{cases} A^{-1}(x, z(m)) \cdot B(x, z(m)) \\ \text{si } \det(D(x, z(m))) \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

(avec de même $A^{-1} \cdot B = D^{-1} \cdot B \cdot D^{-1} \cdot T$)

et on considère si $d > 1$ les conditions (I), (II_q), (III) et (IV_q) suivantes.

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i) il existe } \theta \geq 0, K \geq 0, \text{ tel que, pour tout } x \in \mathbb{R}^d, \text{ on ait :} \\ \sup_{z(m) \in E^m} \|B(x, z(m))\| \leq K(1 + \|x\|^\theta) \\ \text{(ii) } \sup_{(x, z(m)) \in \mathbb{R}^d \times E^m} \|D(x, z(m))\| = \delta < +\infty \text{ (norme opérateur)} \\ \text{avec } \delta < 1 \text{ si } m > 1 \text{ et, si } m = 1, \text{ on a soit } \delta < 1, \text{ soit } \delta \geq 1 \text{ avec} \\ \theta = 0 \text{ et} \\ \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int \|D(x, z)\|^2 \lambda(dz) < 1. \end{array} \right.$$

(II_q) Si $m = 1$:

• il existe un ouvert D inclus dans \mathbb{R}^d tel que $\eta(D) > 0$ et tel que $\forall \alpha \in]0, \eta(D)[, \exists D_\alpha > 0$ tel que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\text{Log } \tilde{P} \left[\frac{1}{n} \sum_{r=1}^n 1_D(\tilde{X}_r) \leq a \right] \right) \leq -D_\alpha$$

• il existe c appartenant à $]0, 1[$ et il existe pour η presque tout x de D et pour tout y de S_{d-1} un ensemble ouvert $E(x, y)$ de E contenu dans $\{z : y^T C(x, z)y \neq 0\}$ tels que :

$$(i) \quad \exists \varepsilon_0 > 0 \text{ tel que } E(x, y) = \{z \in E : y^T C(x, z)y > \varepsilon_0 \|y\|^2\}$$

et

$$(ii) \quad \lambda(E(x, y)) \geq c.$$

Si $m > 1$:

• il existe $c \in]0, 1[$ et il existe, pour η -presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $y \in S_{d-1}$, un ensemble ouvert $E(x, y)$ de E^m contenu dans $\{z : C(x, z(m))(y) \neq 0\}$ tels que :

$$(i) \quad \lambda(E(x, y)) \geq c$$

et

$$(ii) \quad \iint_{\mathbb{R}^d \times S_{d-1}} \left(\int_{E(x, y)} \frac{\lambda(dz(m))}{(y^T \cdot C(x, z(m)) \cdot y)^{dq}} \right) \eta(dx) s(dy) < +\infty.$$

(s désigne la répartition uniforme sur la sphère unité centrée en 0 notée S_{d-1} .)

(III) il existe $\xi \in]0, 1[$ telle que, pour η -presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, pour tout $y \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ et pour λ -presque tout $z(m) \in E^m$ on ait :

$$\|D(x, z(m))y\| \geq \xi \cdot \|y\|.$$

(IV_q) On pose

$$A = \exp \left\{ - \left[\sup_{a \in]0, \eta[\text{ (D)}} (-a \text{Log}(1-c) \wedge D_a) \right] \right\}$$

si $m=1$ et $A=1-c$ si $m>1$. Les constantes de (I), (II_q) et (III) sont telles que : $\frac{A}{\xi^{2dq}} < 1$ et $A \left(\frac{\delta}{\xi} \right)^{2dq} < 1$.

On a alors, lorsque $d > 1$, le résultat général suivant :

(3.5) THÉORÈME. — (a) (I) entraîne que $(\tilde{X}_n(m), \tilde{U}_n)$ converge en loi lorsque $n \rightarrow +\infty$. On note $(\tilde{X}_\infty(m), \tilde{U}_\infty)$ la loi limite $[\tilde{X}_\infty(m)$ a pour loi $\eta]$.

(b) Si on suppose, en plus de (I), que (II_q), (III) et (IV_q) sont vérifiées, alors $(\det(\tilde{U}_\infty))^{-q} \in L^1(\tilde{P})$.

Le (a) est un cas particulier de l'étude faite en II.2 de la convergence en loi de $(\tilde{X}_n(m), \tilde{W}_n(a, l, m))$ quand $n \rightarrow +\infty$ (cas où $l=0$) dans le cas où $\delta < 1$ et sinon c'est la même démonstration que dans [4].

Le paragraphe 2 sera consacré à la démonstration du (b) de (3.5). Au paragraphe 3 on appliquera le résultat général (3.5) aux suites $(\tilde{U}_n((a, m, j))_{n \geq 0})$ et à leurs lois limites.

Remarques. — 1. (a) Si $d=1$, on peut utiliser B au lieu de C et l'étude est plus facile. $\left(E(x) \text{ remplace les } E(x, y) \text{ et } (II_q) \text{ (ii) devient } \int_E \left(\int_{E(x)} \frac{\lambda(dz)}{(B(x, z))^{dq}} \right) \eta(dx) < +\infty; \text{ (III) devient } |D(x, z(m))| \geq \xi \text{ pour } \eta \times \lambda\text{-presque tout couple } (x, z(m)). \right)$

(b) De même si $d > 1$ et si on considère $\det(B(x, z(m)))$ au lieu de C et des ensembles $E(x)$ tels que $E(x) \subset \{z(m) : \det(B(x, z(m))) \neq 0\}$, on a une étude plus facile avec des conditions plus fortes que (II_q) et (III).

2. La condition (III) entraîne que, pour $\eta \times \lambda$ -presque tout $(x, z(m))$, on a $\det(D(x, z(m))) \geq \xi^d$.

[Considérer $(D(x, z(m)))^T \cdot D(x, z(m))$ et utiliser le fait que, pour une matrice symétrique réelle U, $y^T \cdot U y \geq K |y|^2$ pour tout y de \mathbb{R}^2 entraîne que $\det(U) \geq K^d$.]

3. L'étude faite dans la partie V(a) de [4] dans le cas où $m=1$ et où $D(x, z) = D_x \varphi(x, z)$ s'étend et montre que, sous les hypothèses du théorème (3.5), \tilde{U}_∞ est \tilde{P} -ps inversible.

2. Preuve de (b) du théorème 3.5.

A. Notations et compléments

On étudie le cas où $m = 1$ pour alléger les notations et car le cas général s'en déduit immédiatement :

On a tout d'abord :

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}_0 = 0 \\ \text{et, pour } n \geq 1, \\ \tilde{U}_n = \sum_{k=0}^{n-1} A(\tilde{X}_{n-1}, Z_n) \dots A(\tilde{X}_{n-k-1}, Z_{n-k}) C(\tilde{X}_{n-k-1}, Z_{n-k}) \end{array} \right.$$

[Par (3.3) et (3.4) on a : $\tilde{U}_n = A(\tilde{X}_{n-1}, Z_n) \cdot [\tilde{U}_{n-1} + C(\tilde{X}_{n-1}, Z_n)]$ pour $n \geq 1$, d'où le résultat par récurrence sur n .]

Posons, pour $n \geq 1, k = 0, 1, \dots, n-1$ et $y \in \mathbb{R}^d$:

$$(3.7) \quad Y_{n,k}(y) = (D(\tilde{X}_{n-k-1}, Z_{n-k}))^T \dots (D(\tilde{X}_{n-1}, Z_n))^T \cdot y.$$

On a alors par (3.2),
tout $n \geq 1$ et tout $y \in \mathbb{R}^d$:

$$(3.8) \quad y^T \cdot \tilde{U}_n \cdot y = \sum_{k=0}^{n-1} (Y_{n,k}(y))^T \cdot C(\tilde{X}_{n-k-1}, Z_{n-k}) \cdot Y_{n,k}(y)$$

et aussi

$$(3.9) \quad y^T \cdot \tilde{U}_n \cdot y = \sum_{j=0}^{k-1} (Y_{n,j}(y))^T \cdot C(\tilde{X}_{n-j-1}, Z_{n-j}) \cdot Y_{n,j}(y) + (Y_{n,k-1}(y))^T \cdot \tilde{U}_{n-k} \cdot Y_{n,k-1}(y)$$

[pour obtenir (3.9) appliquer k fois l'égalité

$$\tilde{U}_n = A(\tilde{X}_{n-1}, Z_n) \cdot (\tilde{U}_{n-1} + C(\tilde{X}_{n-1}, Z_n)).]$$

On considère les applications T_n de $\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^d$ dans $\bar{\mathbb{N}}$ suivantes; on pose :

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_0(\tilde{\omega}, y) = +\infty \\ \text{et, pour } n \geq 1, \\ T_n(\tilde{\omega}, y) = \inf \{ k = 0, 1, \dots, n-1 : \tilde{X}_{n-k-1}(\tilde{\omega}) \in D \\ \text{et } Z_{n-k}(\tilde{\omega}) \in E(\tilde{X}_{n-k-1}(\tilde{\omega})), Y_{n,k}(y)(\tilde{\omega}) \} \\ (= +\infty \text{ si } \{-\} = \emptyset). \end{array} \right.$$

[Les membres $E(x, y)$ ont été introduits dans la condition (II_q) . Quitte à remplacer $E(x, y)$ par un plus grand ouvert on supposera lorsque $m > 1$ que c'est le plus grand ouvert sur lequel la condition (ii) de (II_q) est vérifiée.]

Posons :

$$(3.11) \quad R_l^n = \{(\tilde{\omega}, y) : \tilde{X}_{l-1} \notin D\} \cup \{(\tilde{\omega}, y) : \tilde{X}_{l-1}(\tilde{\omega}) \in D \\ \text{et } \tilde{Z}_l \notin E[\tilde{X}_{l-1}(\tilde{\omega}), Y_{n, n-l}(y)(\tilde{\omega})]\}.$$

On a alors pour $r \geq 1$:

$$(3.12) \quad \left\{ \begin{aligned} & \{(\tilde{\omega}, y) : T_n(\tilde{\omega}, y) = r\} \\ & = \{(\tilde{\omega}, y) : T_{n-r}(\tilde{\omega}, Y_{n, r-1}(y)(\tilde{\omega})) = 0\} \cap \left(\bigcap_{l=n-r+1}^n R_l^n \right) \\ & \{(\tilde{\omega}, y) : T_n(\tilde{\omega}, y) = +\infty\} = \bigcap_{l=1}^n R_l^n. \end{aligned} \right.$$

Si $y \in \mathbb{R}^d$, on pose :

$$(3.13) \quad K_l(y) = \{\tilde{\omega} : \tilde{X}_l \notin D\} \cup \{\tilde{\omega} : \tilde{X}_l(\tilde{\omega}) \in D \\ \text{et } Z_{l+1}(\tilde{\omega}) \notin E[\tilde{X}_l(\tilde{\omega}), (Y_{l, l-1})^{-1}(y)(\tilde{\omega})]\}.$$

Rappelons maintenant un résultat classique (lemme 7.29, p. 92 de [1]).

(3.14) PROPOSITION. — Si U est une matrice $d \times d$ symétrique définie positive, alors on a :

$$(3.15) \quad \frac{\Gamma(q)^d}{(\det(U))^q} \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-y^T \cdot U \cdot y} \cdot dy.$$

($\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et Γ désigne la fonction gamma usuelle.)

On va utiliser la proposition (3.14) et les fonctions φ_u suivantes pour obtenir l'intégrabilité de $(\det(\tilde{U}_\infty))^{-q}$.

Pour $u > 0$ et pour $U \in M(d)_s$, ensemble des matrices symétriques de type positif (non nécessairement inversibles) on pose :

$$(3.16) \quad \left\{ \begin{aligned} & \varphi_u(U) = \int_{\mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-y^T \cdot U \cdot y} \cdot f\left(\frac{y^T \cdot U \cdot y}{u \cdot \|y\|^2}\right) dy \quad (< +\infty) \\ & \text{où} \\ & f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2\left(x - \frac{1}{2}\right) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \end{aligned} \right.$$

Pour chaque $u > 0$, φ_u est continue et bornée (par

$$\int \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-u\|y\|^2} dy).$$

On aura donc convergence de $\tilde{E}[\varphi_u(\tilde{U}_n)]$ vers $\tilde{E}[\varphi_u(\tilde{U}_\infty)]$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

B. Étude des $\tilde{E}[\varphi_u(\tilde{U}_n)]$

On cherche à majorer uniformément en $n \in \mathbb{N}^*$ les quantités positives $\tilde{E}[\varphi_u(\tilde{U}_n)]$. Pour cela on commence par poser, pour $u > 0$:

$$(3.17) \quad \Psi_u(U) = \int_{\mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-y^T \cdot U \cdot y} \cdot 1_{\{y^T \cdot U \cdot y \geq u\|y\|^2\}}(y) dy.$$

On a alors, pour tout $u > 0$ et pour toute $U \in (M(d))_s$:

$$(3.18) \quad \varphi_u(U) \leq \Psi_{u/2}(U).$$

Il suffit donc de considérer les quantités positives $\tilde{E}[\Psi_u(\tilde{U}_n)]$.
Notant :

$$(3.19) \quad H_n(u) = \left\{ (\tilde{\omega}, y) \in \tilde{\Omega} \times (\mathbb{R}^d - \{0\}) : y^T \cdot \tilde{U}_n(\tilde{\omega}) \cdot y \geq \frac{u}{2} \|y\|^2 \right\},$$

on a l'inclusion évidente suivante pour tout $n \geq 1$:

$$(3.20) \quad H_n(u) \subseteq \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} \{T_n = k\} \right) \cup (H_n(u) \cap \{T_n = +\infty\}).$$

En utilisant (3.19) et (3.17)

$$(3.21) \quad \begin{aligned} &\tilde{E}[\Psi_{u/2}(\tilde{U}_n)] \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \iint_{\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-y^T \cdot \tilde{U}_n \cdot y} \cdot 1_{\{T_n = k\}}(\tilde{\omega}, y) \cdot dy \cdot \tilde{P}(d\tilde{\omega}) \\ &\quad + \iint_{\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-y^T \cdot \tilde{U}_n \cdot y} \cdot 1_{\{T_n = +\infty\} \cap H_n(u)}(\tilde{\omega}, y) \cdot dy \cdot \tilde{P}(d\tilde{\omega}). \end{aligned}$$

On va étudier les termes de droite de (3.21) dans la proposition suivante en précisant certains éléments liés à la valeur de m .

(3.22) PROPOSITION. — (a) L'application

$$(\tilde{\omega}, y) \rightarrow \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-y^T \cdot \tilde{U}_n \cdot y} \cdot 1_{\{T_n = k\}}(\tilde{\omega}, y)$$

est, pour tout $n \geq 1$ et tout $k = 0, 1, \dots, n-1$, $\tilde{P} \times \Lambda$ -intégrable (Λ désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d) et on a : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall k \geq n_0, \forall n \geq n_0$:

$$(3.23) \quad \iint_{\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-y^T \cdot \tilde{U}_n \cdot y} \cdot 1_{\{T_n = k\}}(\tilde{\omega}, y) \cdot dy \cdot \tilde{P}(d\tilde{\omega}) \leq L \cdot \left(\frac{A}{\xi^{2dq}} \right)^k$$

avec

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Gamma(dq)}{\xi^{2dq}} \iint_{\mathbb{R}^d \times S_{d-1}} \left(\int_{E(x,y)} \frac{\lambda(dz(m))}{(y^T \cdot C(x, z(m)) \cdot y)^{dq}} \right) \eta(dx) s(dy) \quad (< +\infty)$$

si $m > 1$ et $L = \frac{\Gamma(dq)}{\xi^{2dq} \xi_0^{dq}}$ si $m = 1$.

(b) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \forall u > 0$ on ait :

$$(3.24) \quad \iint_{\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-y^T \cdot \tilde{U}_n(\tilde{\omega}) \cdot y} \cdot 1_{H_n(u) \cap \{T_n = +\infty\}}(\tilde{\omega}, y) \cdot dy \cdot \tilde{P}(d\tilde{\omega}) \leq \frac{\Gamma(dq)}{(u/2)^{dq}} \left(\left(\frac{\delta}{\xi} \right)^{2dq} A \right)^n.$$

Preuve de (3.22). – (a) Posons

$$I_s = \iint_{\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} e^{-y^T \cdot \tilde{U}_n \cdot y} \cdot 1_{\{T_n = s\}}(\tilde{\omega}, y) \cdot dy \cdot \tilde{P}(d\tilde{\omega}).$$

1. Montrons d'abord le (a) pour I_0 .

$$\{T_n(\tilde{\omega}, y) = 0\} = \{\tilde{X}_{n-1}(\tilde{\omega}) \in D \text{ et } Z_n(\tilde{\omega}) \in E[\tilde{X}_{n-1}(\tilde{\omega}), Y_{n,0}(\tilde{\omega})(y)]\}.$$

On a :

$$y^T \tilde{U}_n(\tilde{\omega}) y \geq (Y_{n,0}(\tilde{\omega})(y))^T \cdot C(\tilde{X}_{n-1}(\tilde{\omega}), Z_n(\tilde{\omega})) (Y_{n,0}(\tilde{\omega})(y)).$$

Par suite, en faisant le changement de variable $y \rightarrow w = Y_{n,0}(\tilde{\omega})(y)$ pour $\tilde{\omega}$ fixé dans un ensemble de probabilité 1 ($y \rightarrow w(\tilde{\omega})$ est une transformation linéaire bijective de \mathbb{R}^d sur \mathbb{R}^d pour \tilde{P} – p – s tout $(\tilde{\omega})$, on obtient, par la condition (III) et la remarque 2. et après intégration par rapport à \tilde{P} :

$$\left[\|y\| \text{ est majoré par } \frac{1}{\xi} \|w\| \text{ et } |\det(D(\tilde{X}_{n-1}, Z_n))| \text{ est minoré par } \xi^d. \right]$$

$$I_0 \leq \left(\frac{1}{\xi} \right)^{2dq} \iint_{\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \times e^{-y^T C(\tilde{X}_{n-1}, Z_n(\tilde{\omega})) y} 1_{\{\tilde{X}_{n-1} \in D \text{ et } Z_n \in E(\tilde{X}_{n-1}, y)\}}(\tilde{\omega}, y) dy \tilde{P}(d\tilde{\omega}) \leq \left(\frac{1}{\xi} \right)^{2dq} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \left(\int_{E(x,y)} e^{-y^T C(x,y) y} \lambda(dz) \right) dy \eta(dx)$$

[car (\tilde{X}_{n-1}, Z_n) a pour loi $\eta \times \lambda$]
d'où

$$I_0 \leq \frac{\Gamma(dq)}{\xi^{2dq}} \iint_{\mathbb{R}^d \times S_{d-1}} \left(\int_{E(x,y)} \frac{\lambda(dz)}{(y^T C(x, z) y)^{dq}} \right) s(dy) \eta(dx)$$

d'où le (a) pour $s = 0$.

2. Montrons (a) pour $s \geq 1$.

En utilisant (3.11) et (3.12), on a :

$$I_s = \iint_{\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} e^{-y^T \tilde{U}_n} 1_{(\tilde{X}_{n-s-1}(\tilde{\omega}) \in D}$$

et

$$Z_{n-s}(\tilde{\omega}) \in E[(\tilde{X}_{n-s-1}(\tilde{\omega}), Y_{n-s,0}(X_{n,s-1}(y)(\tilde{\omega}))) \times 1\left(\bigcap_{l=n-s+1}^n \mathbb{R}_l^p\right)(\tilde{\omega}, y) dy \tilde{P}(d\tilde{\omega}).$$

Or par (3.7) $Y_{n-s,0} Y_{n,s-1} = Y_{n,s}$.

On a de plus par (3.8)

$$y^T \tilde{U}_n y \geq (Y_{n,s}(y))^T C(\tilde{X}_{n-s-1}, Z_{n-s}) Y_{n,s}(y).$$

On fait le changement de variable $y \rightarrow w = Y_{n,s}(\tilde{\omega})(y)$ pour $\tilde{\omega}$ fixé donc

$$\|y\| \leq \left(\frac{1}{\xi}\right)^{s+1} \|w\| \text{ et } |\det(Y_{n,s})| \geq \xi^{d(s+1)}, \text{ d'où}$$

$$I_s \leq \left(\frac{1}{\xi}\right)^{2dq(s+1)} \iint_{\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} e^{-y^T C(\tilde{X}_{n-s-1}, Z_{n-s}) y} \times 1_{(\tilde{X}_{n-s-1} \in D, Z_{n-s} \in E[\tilde{X}_{n-s-1}(\tilde{\omega}), y])} \times 1\left(\bigcap_{l=n-s+1}^n \mathbb{R}_l^p\right)(\tilde{\omega}, (Y_{n,s}(\tilde{\omega}))^{-1}(y)) dy \tilde{P}(d\tilde{\omega}).$$

On voit que l'expression ne dépend que de (\tilde{X}_{p-1}, Z_p) avec $n-s \leq p \leq n$.

Donc par la propriété de Markov, on a la même chose en remplaçant (\tilde{X}_{p-1}, Z_p) avec $n-s \leq p \leq n$ par (\tilde{X}_{p-1}, Z_p) où $1 \leq p \leq s+1$ d'où $(\tilde{\omega}, (Y_{n,s}(\tilde{\omega}))^{-1}(y)) \in \mathbb{R}_l^n$ devient en posant $u = l - (n-s)$, $\tilde{\omega} \in K_u(y)$ [par (3.13)]

$$I_s \leq \left(\frac{1}{\xi}\right)^{2dq(s+1)} \iint_{\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} \cdot e^{-y^T C(\tilde{X}_0, Z_1) y} \times 1_{(\tilde{X}_0 \in D, Z_1 \in E[\tilde{X}_0(\tilde{\omega}), y])} 1\left(\bigcap_{l=1}^s K_l(y)\right)(\tilde{\omega}) dy d\tilde{P}(\tilde{\omega})$$

d'où

$$I_s \leq \left(\frac{1}{\xi}\right)^{2dq(s+1)} \frac{\Gamma(dq)}{\varepsilon_0^{dq}} \iint_{S_{d-1} \times \tilde{\Omega}} 1\left(\bigcap_{l=1}^s K_l(y)\right)(\tilde{\omega}) s(dy) \tilde{P}(d\tilde{\omega}).$$

Soit $y \in S_{d-1}$ et $r \in]0, n(D)[$ et $q = [(s+1) \cdot r]$ (partie entière).

On définit la suite de temps d'arrêt S_p par :

$$S_0 = 0 \text{ et pour } p \geq 1 \quad S_p = \inf(n > S_{p-1} : \tilde{X}_n \in D).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}\left[\bigcap_{l=1}^s K_l(y)\right] &= \tilde{\mathbb{P}}\left[\bigcap_{l=1}^s K_l(y) : S_q \geq s+1\right] + \tilde{\mathbb{P}}\left[\bigcap_{l=1}^s K_l(y) : S_q \leq s\right] \\ &\leq \tilde{\mathbb{P}}[S_q \geq s+1] + \tilde{\mathbb{P}}\left[\bigcap_{l=1}^{S_q} K_l(y)\right] \end{aligned}$$

or
$$\bigcap_{l=1}^{S_q} K_l(y) \subset \bigcap_{l=1}^q \{ \tilde{\omega} : Z_{S_l(\tilde{\omega})+1} \notin E[\tilde{X}_{S_l(\tilde{\omega})}(\tilde{\omega}), Y_{S_l(\tilde{\omega})-1}^{-1}(y)(\tilde{\omega})] \}$$

d'où par la propriété de Markov et car $\lambda(E(x, y)) \geq c$, on a :

$$\tilde{\mathbb{P}}\left[\bigcap_{l=1}^{S_q} K_l(y)\right] \leq (1-c)^q.$$

De plus,

$$\tilde{\mathbb{P}}[S_q \geq s+1] = \tilde{\mathbb{P}}\left[\sum_{l=1}^{s+1} 1_D(\tilde{X}_l) \leq q\right] \leq \tilde{\mathbb{P}}\left[\frac{1}{s+1} \sum_{i=1}^{s+1} 1_D(\tilde{X}_i) \leq r\right].$$

Or par (II_q) $\exists n_0(r)$ tel que $\forall s \geq n_0$

$$\tilde{\mathbb{P}}\left[\frac{1}{s+1} \sum_{i=1}^{s+1} 1_D(\tilde{X}_i) \leq r\right] \leq e^{-(s+1)D_r}.$$

On a donc

$$\tilde{\mathbb{P}}\left[\bigcap_{l=1}^s K_l(y)\right] \leq K'(1-c)^{(s+1)r} + e^{-(s+1)D_r} \leq K e^{-(s+1)(D_r \wedge (-r \text{Log}(1-c)))}.$$

Or, D_r décroît avec r et $(-r \text{Log}(1-c))$ croît avec r , donc $\sup_{a \in]0, \eta(D)[} (-r \text{Log}(1-c) \wedge D_r)$ est atteint en $r_0 \in]0, \eta(D)[$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$

tel que $\forall k \geq n_0, \tilde{\mathbb{P}}\left[\bigcap_{l=1}^k K_l(y)\right] \leq KA^{k+1}$ où A est donnée dans (IV_q).

$$(b) \quad I = \iint_{\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} e^{-y^T \tilde{U}_n(\tilde{\omega})y} 1_{H_n(u) \cap (T_n = +\infty)}(\tilde{\omega}, y) dy \tilde{\mathbb{P}}(d\tilde{\omega}).$$

On a

$$\{T_n(\tilde{\omega}, y) = +\infty\} = \bigcap_{l=1}^n R_l^r$$

par (3.12), de plus $y^T \tilde{U}_n(\tilde{\omega})y \geq \frac{u}{2} \|y\|^2$ par (3.19) si $(\tilde{\omega}, y) \in H_n(u)$ donc en faisant le changement de variable $w = Y_{n, n-1}(\tilde{\omega})(y)$ et en utilisant le

fait que $|\det(Y_{n, n-1})^{-1}| \leq \left(\frac{1}{\xi}\right)^{nd}$ et $\|y\| \leq \left(\frac{1}{\xi}\right)^n \|w\|$ et $\|w\| \leq \delta^n \|y\|$ par (I), on a :

$$\begin{aligned}
 I &\leq \left(\frac{1}{\xi}\right)^{2dq n} \cdot \iint_{\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} e^{-(u/2\delta^{2n})\|y\|^2} \\
 &\quad \times 1_{(T_n = +\infty)}(\tilde{\omega}, (Y_{n, n-1}(\tilde{\omega}))^{-1}(y)) dy \tilde{P}(d\tilde{\omega}) \\
 &\leq \left(\frac{1}{\xi}\right)^{2dq n} \frac{\Gamma(dq)}{(u/2\delta^{2n})^{dq}} \iint_{\tilde{\Omega} \times S_{d-1}} 1_{(T_n = +\infty)}(\tilde{\omega}, (Y_{n, n-1}(\tilde{\omega}))^{-1}(y)) s(dy) d\tilde{P}(\tilde{\omega})
 \end{aligned}$$

or $(\tilde{\omega}, Y_{n, n-1}^{-1}(\tilde{\omega})(y)) \in R_l^n$ est équivalent à $\tilde{\omega} \in K_{l-1}(y)$ donc

$$I \leq \left(\frac{\delta}{\xi}\right)^{2dq n} \frac{\Gamma(dq)}{(u/2)^{dq}} \int_{S_{d-1}} \tilde{P} \left[\bigcap_{l=0}^{n-1} K_l(y) \right] s(dy)$$

et par le même calcul que dans le (a) :

$\exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0$ ont ait :

$$I \leq \frac{\Gamma(dq)}{(u/2)^{dq}} \left(\left(\frac{\delta}{\xi}\right)^{2dq} A \right)^n.$$

On déduit immédiatement de (3.18), (3.21) et de la proposition (3.22) que l'on a :

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \forall u > 0$, on ait :

$$\tilde{E}[\varphi_u(\tilde{U}_n)] \leq K + L \sum_{k=n_0}^{n-1} \left(\frac{A}{\xi 2^{dq}} \right)^k + \frac{\Gamma(dq)}{(u/2)^{dq}} \left(\left(\frac{\delta}{\xi}\right)^{2dq} A \right)^n.$$

(c) *Passages à la limite (en $n \rightarrow +\infty$ puis en $u \rightarrow 0$).* On a déjà vu que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{E}[\varphi_u(\tilde{U}_n)] = \tilde{E}[\varphi_u(\tilde{U}_\infty)]$.

Sous la condition (IV_q) on obtient, en faisant tendre n vers $+\infty$:

$\tilde{E}[\varphi_u(\tilde{U}_\infty)] \leq K$ où K est indépendante de u .

On a donc si :

$$\varphi(U) = \int_{\text{def}} \int_{\mathbb{R}^d} \|y\|^{d(2q-1)} e^{-y^T \cdot U \cdot y} \cdot 1_{\{y^T \cdot U \cdot y > 0\}} dy,$$

$$\tilde{E}[\varphi(\tilde{U}_\infty)] \leq K.$$

Or on a :

$$(\mathbb{R}^d)^* \times \{ \tilde{\omega} : \det(\tilde{U}_\infty(\tilde{\omega})) \neq 0 \} \subseteq \{ (\tilde{\omega}, y) : y^T \cdot \tilde{U}_\infty \cdot y > 0 \}.$$

En utilisant l'inégalité de gauche de (3.15) on obtient donc, avec la remarque 3 que :

$$\tilde{E}[(\det(\tilde{U}_\infty))^{-q}] = \tilde{E}[(\det(\tilde{U}_\infty))^{-q} \cdot 1_{\{\det(\tilde{U}_\infty) \neq 0\}}] \leq \frac{1}{\Gamma(q)^d} \tilde{E}[\varphi(\tilde{U}_\infty)] < +\infty.$$

D'où le (b) du théorème (3.5). ■

3. Applications du théorème (3.5)

A. Cas où $m=1$.

On va montrer le corollaire suivant de (3.5) :

(3.25) COROLLAIRE. — (a) Sous les hypothèses $(H_1(1))$, (H'_3) , (B) et (C_F) et si de plus $A < \left(\frac{\gamma^2}{\delta}\right)^{dq}$, alors il existe $a \in \left[1, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$ tel que $(\det(\tilde{U}_\infty(a)))^{-q} \in L^1(\tilde{P})$.

(b) Sous les hypothèses $(H_1(1))$ avec $\theta=0$, $(H_3(1))$, (B') et (GD), si $A' < \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{2dq}$, alors $(\det(\tilde{U}_\infty))^{-q} \in L^1(\tilde{P})$.

$$\left[\text{Rappels : } \delta = \sup_{x,z} \|D_x \varphi(x,z)\| < 1 \text{ par } (H'_3) \text{ et } \gamma = \frac{1}{b} \text{ où} \right.$$

$$b = \sup_{x,z} \| (D_x \varphi(x,z))^{-1} \| < +\infty$$

par (C_F) .

$$A = \exp \left\{ - \left[\sup_{a \in]0, \eta(D)[} (-a \text{Log } \alpha \wedge D_a) \right] \right\}$$

où D_a est donné par (GD) dans le (b) et si on a (H'_3) , $D_a = \inf_{u \in C_a} I(\mu)$ où

$$I(\mu) = - \inf_{u \in U} \int \text{Log} \left(\frac{\Pi u}{u} \right) d\mu \text{ où } U = \{ u \in C_b(\mathbb{R}^d) : u > 0 \} \text{ et}$$

$$C_a = \left\{ \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d) : \text{supp } \mu \subset S \text{ et } \mu(D) \leq a \right\}.$$

Preuve. — On pose

$$D(x,z) = a \cdot D_x \varphi(x,z), \quad B(x,z) = \rho(z) D_z \varphi(x,z) (D_z \varphi(x,z))^T$$

et

$$C(x,z) = \rho(z) C_1(x,z).$$

Dans les 2 cas (a) et (b) on a (I).

D'autre part on a (III) avec $\xi = a \cdot \gamma$ dans le cas (a) et $\xi = \gamma$ dans le cas (b) [car (C_F) est équivalente à : pour tous $(x,z) \in \mathbb{R}^d \times E$ et tout $y \in \mathbb{R}^d - \{0\}$, on a : $\|D_x \varphi(x,z)(y)\| \geq \gamma \cdot \|y\|$].

Sous les conditions du corollaire on a :

$$(3.26) \left\{ \begin{array}{l} \forall \alpha' \in]\alpha, 1[, \exists b_{\alpha'} > 0 \\ \text{telle que} \\ \inf_{x \in D, y \in \mathbb{R}^d - \{0\}} \lambda(\{z \in E : \rho(z) y^T \cdot C_1(x, z) \cdot y \geq b_{\alpha'} \|y\|^2\}) \geq 1 - \alpha'. \end{array} \right.$$

(3.26) est clair sous l'hypothèse (B') en notant α pour simplifier le terme α' intervenant dans (B'). On notera de même A au lieu de A' [sous (B')].

Quant à l'hypothèse

$$(B) \left\{ \begin{array}{l} \exists D \text{ ouvert de } \mathbb{R}^d \text{ avec } \eta(D) > 0 \text{ tel que} \\ \alpha = \sup_{x \in \bar{D}, y \in \mathbb{R}^d - \{0\}} \lambda(\{z \in : y^T C_1(x, z) y = 0\}) < 1 \end{array} \right.$$

[respectivement l'hypothèse (B_F) où D est remplacé par S le support compact de η), elle implique que :

$$(3.27) \alpha = \inf_{\varepsilon > 0} \left(\sup_{x \in \bar{D}, y \in \mathbb{R}^d - \{0\}} \lambda(\{z \in E : y^T C_1(x, z) y \leq \varepsilon \|y\|^2\}) \right)$$

(voir le 4) de l'appendice] et (3.27) entraîne d'une manière évidente (3.26).

(3.27) entraîne (II) avec

$$c = 1 - \alpha' \quad \text{et} \quad E(x, y) = \{z \in E : \rho(z) y^T C_1(x, z) y > b_{\alpha'} \|y\|^2\}$$

pour $y \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ et $x \in D$ [ou $x \in S$ sous l'hypothèse (B_F)].

• Si $A < \left(\frac{\gamma^2}{\delta}\right)^{dq}$, il existe alors $\alpha' \in]\alpha, 1[, \exists a \in \left[1, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$ tels que $A' < \xi^{2dq}$ avec $\xi = a\gamma$ et avec $A' = \exp\left\{-\sup_{a \in]0, \eta(D)[} (-a \text{Log } \alpha' \wedge D_a)\right\}$ ce qui prouve

le (a).

• Si $A < \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{2dq}$, il existe alors $\alpha' \in]\alpha, 1[$ tel que $A' < \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{2dq}$ avec $\xi = \gamma$ et A' donné comme précédemment, ce qui nous donne (IV_q), d'où le (b).

B. Cas où $m \geq 2$.

On va prouver qu'on a le corollaire suivant du théorème (3.5) :

(3.28) COROLLAIRE. — Sous les hypothèses (H₁(1)), (H'₃), (B_F) et (C_F) et si de plus

$$\alpha < \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{2dqm} \left[\text{resp. si } \alpha < \left(\frac{\gamma^2}{\delta}\right)^{dqm} \right],$$

alors il existe

$$a \in \left[1, \frac{1}{\delta}\right] \left[\text{resp. } a \in \left[1, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right] \right]$$

tel que $(\det(\tilde{U}_\infty(a, m, j)))^{-q} \in L^1(\tilde{P})$ pour tout $j = 1, \dots, m$.

Preuve. — On pose $D(x, z(m)) = a^m \cdot D_x \varphi_m(x, z(m))$,

$$B(x, z(m)) = \rho(z_j) \cdot D_{z_j} \varphi_m(x, z(m)) \cdot (D_{z_j} \varphi_m(x, z(m)))^T$$

(pour un j entier entre 1 et m) et

$$(3.29) \left\{ \begin{array}{l} C(x, z(m)) = \rho(z_j) \cdot \frac{a^{2(m-j)}}{a^{2m}} \cdot C_{m,j}(x, z(m)) \\ \text{où} \\ C_{m,j}(x, z(m)) = (D_x \varphi_m(x, z(m)))^{-1} \\ D_{z_j} \varphi_m(x, z(m)) (D_{z_j} \varphi_m(x, z(m)))^T (D_x \varphi_m(x, z(m)))^{-1, T} \end{array} \right.$$

On obtient facilement que $C_{m,j}$ ne dépend que de x, z_1, \dots, z_j et s'écrit :

$$(3.30) \left\{ \begin{array}{l} C_1(x, z_1) \quad \text{si } j=1 \\ \text{et, pour } j=2, \dots, m, \\ C_{m,j}(x, z(j)) = (D_x \varphi_{j-1}(x, z(j-1)))^{-1} \\ \quad \times C_1(\varphi_{j-1}(x, z(j-1)), z_j) \\ \quad \times (D_x \varphi_{j-1}(x, z(j-1)))^{-1, T} \end{array} \right.$$

On obtient facilement les conditions (I), (III) et (IV_q) à partir des hypothèses de (3.36) ainsi que (II_q) pour $j=1$.

Pour prouver (II_q) pour $j=2, \dots, m$ on utilise (3.30) et on pose, pour $x \in D'$ et $y \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ et pour $\alpha' \in]\alpha, 1[$:

$$(3.31) \left\{ \begin{array}{l} E_{m,j}(x, y) = \{z(m) \in E^m : \rho(z_j) [(D_x \varphi_{j-1}(x, z(j-1)))^{-1, T}(y)]^T \\ C_1(\varphi_{j-1}(x, z(j-1)), z(j)) (D_x \varphi_{j-1}(x, z(j-1)))^{-1, T}(y) \\ \geq b_{\alpha'} \|D_x \varphi_{j-1}(x, z(j-1))^{-1, T}(y)\|^2 \}. \end{array} \right.$$

On a alors tout d'abord (II_q) (i) avec $E(x, y) = E_{m,j}(x, y)$ et $c = 1 - \alpha'$. [car

$$E_{m,j}(x, y) = \bigcup_{z(j) \in E^j} \{ (z(j-1) \in E^{j-1}, z_j \in E_1(\varphi_{j-1}(x, z(j-1)), (D_x \varphi_{j-1}(x, z(j-1)))^{-1, T}(y)) \}$$

et car

$$\lambda(E_1(\varphi_{j-1}(x, z(j-1)), (D_x \varphi_{j-1}(x, z(j-1)))^{-1, T}(y))) \geq 1 - \alpha'$$

pour tout $(x, z(j-1))$ fixé].

Pour obtenir (II_q) (ii) pour $j \geq 2$, on fait le changement de variable en direction

$$y \rightarrow w = \frac{D_x \varphi_{j-1}(x, z(j-1))^{-1, T}(y)}{\|D_x \varphi_{j-1}(x, z(j-1))^{-1, T}(y)\|}$$

pour $(x, z(j))$ fixé. Comme on a :

$$\det((D_x \varphi_{j-1}(x, z(j-1)))^{-1}) \geq 1$$

et

$$\|y\| \leq \| (D_x \varphi_{j-1}(x, z(j-1)))^{-1}(y) \| \leq \frac{1}{\delta^{j-1}} \|y\| \quad \text{avec } \|y\| = 1,$$

on obtient, par définition de $C_{m,j}$ et de $E_{m,j}(x, y)$:

$$(3.32) \quad \int_{S_{d-1}} \frac{s(dy)}{[\rho(z_j) \cdot y^T C_{m,j}(x, z(j)) \cdot y]^{dq}} 1_{\{z_j \in E_{m,j}(x, y)\}}(z_j) \\ \leq \frac{1}{\delta^{(j-1) \cdot d}} \int_{S_{d-1}} \frac{s(dw)}{[\rho(z_j) w^T C_1(x', z_j) w]^{dq}} 1_{\{z_j \in E_1(x', w)\}}(z_j)$$

avec $x' = \varphi_{j-1}(x, z(j-1))$.

Par suite, en intégrant les deux termes de (3.32) par rapport à la mesure $\eta(dx) \times \lambda(dz(j))$ et en utilisant la stationnarité de la chaîne (la mesure image de $\eta(dx) \times \lambda(dz(j-1))$ par l'application $(x, z(j-1)) \rightarrow \varphi_{j-1}(x, z(j-1))$ est η , on obtient que :

$$\iint_{\mathbb{R}^d \times S_{d-1}} \left(\int_{E_{m,j}(x, y)} \frac{\lambda(dz(m))}{[\rho(z_j) \cdot y^T \cdot C_{m,j}(x, z(j)) \cdot y]^{dq}} \right) \eta(dx) s(dy) < +\infty. \quad \blacksquare$$

Des théorèmes (2.35) et (2.40) et des corollaires (3.25) et (3.28) on déduit les théorèmes (1.17) et (1.18).

APPENDICE

1. $(H_1(1))$ et (H'_3) entraînent l'existence et l'unicité de η et que de plus η est à support compact.

On a déjà vu dans [4] que $(H_3(q))$, pour q entier ≥ 1 , entraîne l'unicité de la probabilité invariante. [Voir le début de $V(a)$ de [4].]

D'autre part $H_1(1)$ entraîne que l'on a $M = \sup_{\text{def } z \in E} \|\varphi(0, z)\| < +\infty$ (car

$$\|\varphi(0, z)\| \leq \|\varphi(0, z_0)\| + K_1 \|z - z_0\| \text{ et car } E \text{ est borné.}$$

Si $\delta = \sup_{\text{def } x, z} \|D_x \varphi(x, z)\|$ (norme opérateur), on a $\delta < 1$ (par (H'_3)) et de

$$\text{plus si } z \in E \text{ et si } \|x\| \leq \frac{M}{1-\delta}, \text{ on a } \|\varphi(x, z)\| \leq \frac{M}{1-\delta} \left(\text{car}$$

$$\|\varphi(x, z)\| \leq \|\varphi(0, z)\| + \|\varphi(x, z) - \varphi(0, z)\| \\ \leq M + \delta \|x\| \leq M + \frac{\delta M}{1-\delta} = \frac{M}{1-\delta} \Big).$$

Donc si K est la boule fermée de centre 0 et de rayon $\frac{M}{1-\delta}$, la chaîne partant d'un point quelconque du compact K reste dans K à tout instant.

Par suite et de manière classique on en déduit l'existence d'une probabilité invariante η (on considère la suite

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \Pi^k(x_0, \cdot) \right),$$

avec x_0 point de K , Π désignant la probabilité de transition de la chaîne et on utilise la compacité de K).

2. $(H_1(1))$ et $(H_3(1))$ suffisent à entraîner l'existence de η .

D'après le théorème 2 de [9], si la chaîne est « faiblement fellérienne » (c'est-à-dire si $f \in C_b$ entraîne $\Pi f \in C_b$) et si on a les « conditions de Foster » (F_1) et (F_3) suivantes, avec A compact, alors la chaîne admet au moins une probabilité invariante.

(F_1) Il existe un ensemble mesurable A de \mathbb{R}^d , une fonction mesurable positive g et un $\varepsilon > 0$ tels que : pour tout $x \in A^c$ on ait

$$\int_{A^c} \Pi(x, dy) g(y) \leq g(x) - \varepsilon.$$

$$(F_3) \sup_{x \in A} \left(\int_{A^c} \Pi(x, dy) g(y) \right) < +\infty.$$

$(H_1(1))$ et la condition $\delta_1 = \sup_{\text{def } x \in \mathbb{R}^d} \left(\int_E \|D_x \varphi(x, z)\| \cdot \lambda(dz) \right) < 1$ [plus faible que $(H_3(1))$] entraînent (F_1) et (F_3) avec $g(y) = \|y\|$ et avec A la boule fermée de centre 0 et de rayon a si $a > \frac{M}{1 - \delta_1}$.

[Car

$$\begin{aligned} \int_{A^c} \Pi(x, dy) g(y) &= \int_{\{z : \|\varphi(x, z)\| > a\}} \|\varphi(x, z)\| \cdot \lambda(dz) \\ &\leq \int_E \|\varphi(x, z)\| \lambda(dz) \leq M + \delta_1 \cdot \|x\| \leq \|x\| - \varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{si } a = \frac{M + \varepsilon}{1 - \delta_1} \text{ et si } \|x\| > a \text{ et } \int_{A^c} \Pi(x, dy) g(y) \leq M + \delta_1 a \text{ si } \|x\| \leq a.]$$

Remarque. — Les résultats de [9] permettent également de montrer que

$$(H_1(1)) \text{ et } (H_3(q)) \text{ entraînent que l'on a : } \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^{2q} \eta(dx) < +\infty.$$

Autre méthode [sous les hypothèses $(H_1(1))$ et $(H_3(1))$].

On note, pour $\beta > 0$,

$$B_\beta = \{ f \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) : \|f\|_\beta < +\infty \}$$

où

$$\|f\|_\beta = \sup_{\text{def}} \left\{ \frac{\|f(x)\|}{1 + \|x\|^{1+\beta}} : x \in \mathbb{R}^d \right\} \cdot (B_\beta, \|\cdot\|_\beta)$$

est un espace de Banach.

On pose également, pour $\beta > 0$,

$$L_\beta = \{ f \in B_\beta : m(f) < +\infty \}$$

où

$$m(f) = \sup \left\{ \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|} : x, y \in \mathbb{R}^d, x \neq y \right\}.$$

On pose, pour $f \in L_\beta$, $|f|_\beta = \|f\|_\beta + m(f)$. $(L_\beta, |\cdot|_\beta)$ est un espace de Banach.

Prenant $\beta = 1$, on voit facilement que, si $f \in B_1$, comme

$$\Pi f(x) = \int_E f(\varphi(x, z)) \cdot \lambda(dz),$$

que $\Pi f \in B_1$ avec

$$\|\Pi f\|_1 \leq (1 + M^2) \|f\|_1 \quad (M = \sup_{\text{def } z \in E} \|\varphi(0, z)\|).$$

D'autre part, si $f \in L_1$, on obtient $\Pi f \in L_1$ et

$$|\Pi f|_1 \leq (1 + M^2) \cdot \|f\|_1 + \sqrt{\delta_2} m(f) = \sqrt{\delta_2} \cdot |f|_1 + (1 + M^2 - \sqrt{\delta_2}) \|f\|_1,$$

avec $\delta_2 = \sup_{\text{def } x \in \mathbb{R}} \int_E \|D_x \varphi(x, z)\|^2 \lambda(dz) < 1$ par $(H_3(1))$.

On en déduit facilement qu'on peut appliquer le théorème de Ionescu-Tulcea-Marinescu (voir [12]) à B_1, L_1 et Π ; Voir [11] pour une approche plus détaillée avec des conditions similaires). On obtient par cette méthode de décomposition spectrale de l'opérateur Π sur L_1 l'existence et l'unicité de la probabilité invariante η ainsi que l'existence de $\rho \in]0, 1[$ et de $K > 0$ tels que $|\Pi^n f - \eta(f)|_L \leq K \cdot \rho^n$ pour tout n et de tout $f \in L_1$.

On obtient simultanément que $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 \eta(dx) < +\infty$. En considérant pour $q \geq 2$, B_{2q-1} et L_{2q-1} à la place de B_1 et L_1 on obtient que $(H_1(1))$ et $(H_3(q))$ entraînent que $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^{2q} \eta(dx) < +\infty$.

3. Exemple de chaîne stationnaire en dimension 1 et étude de la régularité de η correspondante.

Soient $\alpha, \delta \in]0, 1[$, $E =]0, \alpha[\cup]\alpha, 1[$. On considère le cas particulier de (1.1) où $d=1$ et où $\varphi(x, z) = \delta x + B(z)$ avec $B : E \rightarrow [0, 1]$ définie par :

$$B(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in]0, \alpha[\\ \frac{z-\alpha}{1-\alpha} & \text{si } z \in]\alpha, 1[. \end{cases}$$

On note ν la loi uniforme sur E et Z une v. a. de loi ν . $B(Z)$ a alors la loi $\mu = \alpha \cdot \delta_0 + (1-\alpha) \cdot \nu$ (δ_0 désigne la masse de Dirac en 0). Le corollaire (1.20) (a) s'applique ici. On peut retrouver aussi directement en quoi intervient la condition $\alpha < \delta^{p+1}$ de (1.17) (a) (on a ici $\gamma = \delta$).

En effet, notant f une densité pour η , comme $\eta = \eta_\delta * \mu$, η_δ désignant la mesure image de η par $x \rightarrow \delta \cdot x$, on en déduit, en décomposant μ , que $f = f_1 + g_1$ avec $f_1(x) = \frac{\alpha}{\delta} f\left(\frac{x}{\delta}\right)$ et avec g_1 continue (c'est la densité de la mesure $(1-\alpha) \cdot \eta_\delta * \nu$). En redécomposant la mesure $\alpha \cdot \eta_\delta$, on obtient que $f = f_2 + g_2$ avec $f_2(x) = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^2 \cdot f\left(\frac{x}{\delta^2}\right)$ et avec g_2 continue et $g_2 \geq g_1$. Au

bout de n étapes on obtient que $f = f_n + g_n$ avec $f_n(x) = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^n \cdot f\left(\frac{x}{\delta^n}\right)$ et avec g_n continue et $g_n \geq g_{n-1}$. Comme η a pour support $[0, 1]$, on voit facilement que (g_n) converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{R} - \{0\}$, d'où la continuité de f sur $\mathbb{R} - \{0\}$. Si f est bornée et si $\alpha < \delta$, on a convergence uniforme de (g_n) vers f sur tout compact de \mathbb{R} et continuité de f sur \mathbb{R} tout entier. Réciproquement si f est continue, elle est bornée (car à support compact) et on a $\alpha < \delta$ par le théorème de Dini.

B étant de classe C^∞ , on voit facilement que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et que $f_n^{(k)}(x) = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^n \cdot f^{(k)}\left(\frac{x}{\delta^n}\right)$ pour tout $x \neq 0$. Par suite si $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et si $\alpha < \delta^{k+1}$, $(f_n^{(k)})$ converge uniformément vers $f^{(k)}$ sur $]0, a[$, $\forall a > 0$ et on obtient directement que f est de classe C^k sur \mathbb{R} tout entier et on ne peut dire plus.

4. Preuve de (3.27).

(a) Pour obtenir (3.27) on pose, pour $b > c$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times S_{d-1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_b(x, y) = \lambda(\{z \in E : y^T C_1(x, z) \cdot y > b\}) \\ \text{et, pour } c' \in]0, 1-\alpha[\\ c_{c'}(x, y) = \sup\{b > 0 : c_b(x, y) > c'\} \\ (< +\infty \text{ car cet ensemble est majoré}) \end{array} \right.$$

(B) [resp. (B_F)] entraîne que $c_{c'}(x, y) > 0$ si $x \in \bar{D}$ et $y \in S_{d-1}$ [resp. : si $x \in S$ support compact de η avec (H'_3)].

De plus on a, pour $x \in \bar{D}$ et $y \in S_{d-1}$ et
(resp. S)

$$c' \in]0, 1 - \alpha[: \lambda(\{z \in E : y^T C_1(x, z)y \geq g_{c'}(x, y)\}) \geq c'.$$

Or $g_{c'}$ est semi-continue inférieurement sur $\mathbb{R}^d \times S_{d-1}$ [voir le (b) qui suit] et \bar{D} (resp. S) est un compact donc on a $\inf_{x \in S, y \in S_{d-1}} g_{c'}(x, y) > 0$.

(b) Preuve du caractère s. c. i. de $g_{c'}$.

On remarque tout d'abord que $(x, y) \rightarrow c_b(x, y)$ [définie au (a) comme g_c] est s. c. i. sur $\mathbb{R}^d \times S_{d-1}$. C'est la même preuve que celle du caractère s. c. i. de $(x, y) \rightarrow c(x, y) = \lambda(\{z \in E : C_1(x, z)(y) \neq 0\})$ faite dans l'appendice de [4].

On en déduit, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times S_{d-1}$ fixé, que si $b < g_{c'}(x, y)$, on a $c' < c_b(x, y) \leq \liminf_n c_b(x_n, y_n)$, ceci pour toute suite (x_n, y_n) tendent vers (x, y) . On a donc, par définition de $g_{c'}(x_n, y_n) : b \leq g_{c'}(x_n, y_n)$ pour tous les n sauf un nombre fini. Par suite $g_{c'}(x, y) = \liminf_n c_b(x_n, y_n)$, ce qui donne le caractère s. c. i. de $g_{c'}$ en (x, y) .

5. Preuve de (2.38).

On utilise (1.10) avec $l=0$ et la formule (1.11) avec, au lieu de Θ , $\Theta_r = \Theta \cdot \psi \left(r \cdot \prod_{k=1}^{l+1} Q_k \right) \left(\prod_{k=1}^l Q_k^{-\beta_k} \right) Q_{l+1}^{-\beta_{l+1}-2}$, où $Q_k = \det(U_k(\Phi))$ [notation $U_k(\Phi)$ du début du II], $r > 0$ et où $\psi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ est telle que $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi(u) = 0$ si $|u| \leq 1/2$ et $\psi(u) = 1$ si $|u| \geq 1$.

On obtient alors en calculant $\Gamma_{l+1}(\Theta_r, \Phi^j)$ [on décompose ce terme en une somme de termes car $\Gamma_{l+1}(F(\psi), \Phi^j)$ est égal à $F'(\psi) \cdot \Gamma_{l+1}(\psi, \Phi^j)$ pour F de classe C_p^1] et en notant $\Delta_{k,r}$ l'expression de Δ_k dans (1.11) obtenue avec Θ_r au lieu de Θ , $U_{l+1}(\Phi)$ remplaçant $U(\Phi)$, $L_{l+1}(\Phi)$ remplaçant $L(\Phi)$ et Γ_{l+1} remplaçant Γ :

$$\begin{aligned}
 (*) \quad \Delta_{k,r} = & - \sum_{j=1}^d \left(\prod_{k=1}^l Q_k^{-\beta_k} \right) \cdot Q_{l+1}^{-\beta_{l+1}-2} \\
 & \times \psi \left(r \prod_{k=1}^{l+1} Q_k \right) \left\{ 2 \Theta \cdot Q_{l+1} \cdot h^{j,k}(Q_{l+1}) \cdot L(\Phi)_{l+1} \right. \\
 & \left. - (\beta_{l+1} + 1) \cdot \Gamma_{l+1}(\Phi^j, Q_{l+1}) h^{j,k}(Q_{l+1}) + Q_{l+1} \cdot \Gamma_{l+1}(\Phi^j, h^{j,k}(Q_{l+1})) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Theta \left(- \sum_{p=1}^l \beta_p \cdot Q_p^{-1} \cdot \Gamma_{l+1}(Q_p, \Phi_j) \right) \Big\} \\
& h^{j,k}(Q_{l+1}) \left(\prod_{k=1}^l Q_k^{-\beta_k} \right) Q_{l+1}^{-\beta_{l+1}-2} \\
& \times \left(r \cdot \psi' \left(r \prod_{k=1}^{l+1} Q_k \right) \right) \left(\sum_{p=1}^{l+1} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{l+1} Q_k \right) \Gamma_{l+1}(Q_p, \Phi^j) \right).
\end{aligned}$$

On prend ensuite $\Phi = X_n^x$, $\Theta = F(W_n^x(a, l, m))$ avec F de classe C_p^∞ , on passe à l'espace produit $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$, on fait tendre d'abord n vers $+\infty$ et ensuite r vers $+\infty$ et on obtient le résultat à cause des propriétés de ψ .

RÉFÉRENCES

- [1] K. BICHTLER, J. B. GRAVEREAUX et J. JACOD, *Malliavin Calculus for Processes with Jumps*, Gordon and Breach Science Publishers LTD, 1987.
- [2] A. COQUIO, Conditions pour que la mesure invariante d'une chaîne de Markov Doebelin-récurrente ait une densité de classe C^p , *Thèse*, Paris-VI, janvier 1990.
- [3] J. B. GRAVEREAUX et J. JACOD, Opérateur de Malliavin sur l'espace de Wiener-Poisson, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **300**, série I, n° 3, 1985.
- [4] J. B. GRAVEREAUX, Calcul de Malliavin et probabilité invariante d'une chaîne de Markov, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. **24**, n° 2, 1988, p. 159-188.
- [5] E. LE PAGE, Théorèmes de renouvellement pour les produits de matrices aléatoires, Équations aux différences aléatoires, *Séminaire de Probabilités*, Rennes-I, 1983.
- [6] N. MAIGRET, Majorations de Chernoff et statistique séquentielle pour des chaînes de Markov récurrentes au sens de Doebelin, *Astérisque*, n° **68**, 1979, p. 125-142.
- [7] D. REVUZ, *Markov chains*, North Holland, American Elsevier, 2° éd, 1984.
- [8] A. V. SKOROKHOD, Topologically recurrent Markov chains: ergodic properties, *Theory Proba. Appl.*, vol. **31**, n° 4, 1986, p. 563-571.
- [9] R. L. TWEEDIE, Invariant measures for Markov chains with no irreducibility assumptions, *J. Appl. Probab.*, Special vol. **25 A**, Applied Probability, Trust, 1988).
- [10] V. VERVAAT, On a Stochastic Difference Equation and Representation of non negative In finitely divisible random variables, *Adv. Appl. Prob.*, vol. **11**, 1979, p. 750-783).
- [11] J. P. LEGUESDRON, Marche aléatoire sur le semi-groupe des contractions de \mathbb{R}^d . Cas de la marche aléatoire sur \mathbb{R}^+ avec chocs élastiques en zéro, *Annales de l'I.H.P.*, *Thèse de 3° cycle*, Rennes, 1987 (à paraître).
- [12] F. NORMAN, *Markov processes and learning models*, Academic Press, New York, 1972.
- [13] D. STROOCK, *An Introduction to the Theory of Large Deviations*, Springer Verlag, Berlin, New York, 1984.
- [14] M. D. DONSKER et S. R. S. VARADHAN, *Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time*. I. *Comm. Pure Appl. Math.*, **28**, 1975, p. 1-47.

(Manuscrit reçu le 31 octobre 1990;
révisé le 17 mars 1992.)