ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN-PASCAL ANSEL
CHRISTOPHE STRICKER

Lois de martingale, densités et décomposition de Föllmer Schweizer

Annales de l'I. H. P., section B, tome 28, nº 3 (1992), p. 375-392
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1992__28_3_375_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 28, n° 3, 1992, p. 375-392. *Probabilités et Statistiques*

Lois de martingale, densités et décomposition de Föllmer Schweizer

par

Jean-Pascal ANSEL et Christophe STRICKER

Université de Franche-Comté, U.R.A.-C.N.R.S. 741,
25030 Besançon Cedex, France

RÉSUMÉ. — Cet article continue l'étude entreprise dans [8] concernant l'absence d'opportunités d'arbitrage et l'existence de lois de martingale. Nous nous intéressons en particulier à l'écriture explicite des densités de ces lois de martingale dans le cas continu. Ensuite nous abordons le cas discontinu et nous terminons cette étude en étendant la décomposition de Föllmer-Schweizer à cette situation.

Mots clés : Loi de martingale, théorème de Girsanov, arbitrage, semimartingale.

ABSTRACT. — The purpose of this paper is to investigate the relationship between no arbitrage and laws of martingale. In particular we are interested in the explicit form of the density of these laws in the continuous case: we improve a result of Heath, Jarrow and Morton [5]. Then we study the discontinuous case. We conclude this paper by extending the decomposition of Föllmer-Schweizer to that situation.

Classification A.M.S. : 60 G 44, 60 H 05.

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques - 0246-0203
Vol. 28/92/03/375/18/$ 3,80/© Gauthier-Villars

0. INTRODUCTION

Étant donné un processus (X_t) càdlàg et adapté, l'un de nous a étudié dans [8] des conditions nécessaires et suffisantes portant sur les intégrales stochastiques élémentaires qui assurent l'existence d'une loi Q équivalente à la loi initiale P telle que (X_t) soit une martingale sous Q. Dorénavant nous dirons que la loi Q est une *loi de martingale* pour X. De nombreux auteurs ont étudié ce problème qui est fondamental dans les modélisations financières. Dalang, Morton et Willinger ont établi dans [2] l'équivalence entre l'existence d'une loi de martingale pour X et une condition très simple de non arbitrage lorsque X est un processus indexé par $\{0, 1, \ldots, n\}$. Leur résultat ne s'étend pas au cas où X est indexé par $[0, 1]$.

Dans un premier temps nous allons rappeler les résultats de [8]. Puis nous étudierons la densité $\frac{dQ}{dP}$ lorsque X est continu. Nous généralisons à une filtration quelconque les résultats de Heath, Jarrow et Morton [5] établis dans le cadre d'une filtration brownienne. Lorsque X est à valeurs réelles nous retrouvons aussi des résultats de Yoeurp ([10] et [11]).

Lorsque X est seulement càdlàg mais vérifie une certaine condition de non arbitrage, nous montrons que X peut se représenter sous la forme $X = M + \alpha . \langle M, M \rangle$ où M est une martingale locale et α un processus prévisible vérifiant $\int_0^1 \alpha_s^2 \, d\langle M, M \rangle_s < +\infty$. On peut alors définir l'exponentielle stochastique $\mathscr{E}(-\alpha . M)$ mais malheureusement dans le cas discontinu on n'a pas nécessairement $1 - \alpha \Delta M > 0$, si bien que $\mathscr{E}(-\alpha . M)$ peut s'annuler ou changer de signe. Deux exemples illustrent cette situation. Nous terminons ce paragraphe en montrant que la loi de martingale minimale Q* existe si et seulement si l'exponentielle stochastique $\mathscr{E}(-\alpha . M)$ est une martingale strictement positive. Dans ce cas $\frac{dQ^*}{dP} = \mathscr{E}(-\alpha . M)_1$.

La troisième partie de notre travail est consacrée à l'extension de la décomposition de Föllmer-Schweizer [4] au cas discontinu. Cette décomposition généralise celle de Kunita-Watanabe qui concerne les martingales locales. Nous montrons qu'il y a toujours unicité et nous établissons l'existence dans certains cas. Ce résultat est étroitement lié à l'existence locale de la loi minimale Q*.

1. NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Toutes les filtrations et tous les processus considérés seront indexés par $[0, 1]$ sauf mention contraire. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles. Nous supposerons que $\mathcal{F}=\mathcal{F}_1$ et que $\mathcal{F}_0$ est la tribu dégénérée. La notation $(H.X)_t$ désigne l'intégrale stochastique du processus prévisible H à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ intégrable par rapport à la semimartingale vectorielle $X=(X^1, \ldots, X^d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Nous supposerons toujours que $(H.X)_0=0$. Si H est localement borné, il est bien connu que $(H.X)_t=\sum_{j=1}^{d}\int_0^t H_s^j\,dX_s^j$. Pour la définition générale de l'intégrale stochastique nous renvoyons à Jacod [7]. Lorsque H est un processus prévisible élémentaire, c'est-à-dire $H=\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i 1_{]t_i, t_{i+1}]}$ où $0\leqq t_0<t_1<\ldots<t_n\leqq 1$ et $\lambda_i=(\lambda_i^1, \ldots, \lambda_i^d)$ est un vecteur aléatoire $\mathcal{F}_{t_i}$ mesurable, on peut définir l'intégrale stochastique $(H.X)_1$ même si X n'est pas une semimartingale. On pose $(H.X)_1=\sum_{i=0}^{n-1}(\lambda_i\,|\,X_{t_{i+1}}-X_{t_i})$ où la notation $(\ |\ )$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$. Nous dirons que H est un processus prévisible élémentaire généralisé s'il s'écrit sous la forme $H=\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i 1_{]T_i, T_{i+1}]}$ où $0\leqq T_0\leqq T_1\leqq\ldots\leqq T_n\leqq 1$ est une suite de temps d'arrêt (abréviation: t. a.) et λ_i une suite de vecteurs aléatoires $\mathcal{F}_{T_i}$ mesurables. Lorsque X est une semimartingale, on note $\mathcal{E}(X)$ la solution de l'équation différentielle stochastique $dZ=Z_-\,dX$ avec la condition initiale $Z_0=1$. Si α est un nombre réel, on pose $\alpha^-=\sup(-\alpha, 0)$, $\alpha^+=\sup(\alpha, 0)$ et on désigne par $\operatorname{sign}(\alpha)$ le signe de α avec la convention $\operatorname{sign}(0)=0$. Enfin lorsque $(Z_i)_{i\in I}$ est une famille de variables aléatoires (abréviation: v. a.), on note $\mathcal{T}((Z_i)_{i\in I})$ la tribu engendrée par ces v. a.

2. QUELQUES RAPPELS

Nous commençons par rappeler quelques résultats établis dans [8]. Soit X un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, càdlàg adapté et vérifiant $X_t\in L^p$ pour tout $t\in[0, 1]$. Posons: $K=\{(H.X)_1 : H$ étant prévisible, élémentaire et borné$\}$. On désigne par B^+ (resp. L_+^p) l'ensemble des v. a. positives ou nulles appartenant à L^∞ (resp. L^p). Si U est un sous-ensemble de L^p, on note $\bar{U}$ l'adhérence de U dans L^p et on désigne par q l'exposant conjugué de p, c'est-à-dire $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

THÉORÈME 1. — Les trois conditions suivantes sont équivalentes si $1 \leqq p < +\infty$:

(i) Pour tout $A \in \mathscr{F}_1$ tel que $P(A) > 0$ on a $1_A \notin \overline{K - B^+}$

(ii) $L_+^p \cap \overline{K - B^+} = \{0\}$

(iii) Il existe une v.a. strictement positive Z appartenant à L^q, de moyenne 1 et telle que, sous la loi Q équivalente à P de densité $\frac{dQ}{dP} = Z$, le processus X soit une martingale.

Lorsque le processus X est continu, on peut affaiblir la condition (ii).

THÉORÈME 2. — *Si le processus* X *est continu sur* [0, 1], *alors la condition* (iii) *du théorème précédent est équivalente à la condition* $L_+^p \cap \bar{K} = \{0\}$.

Enfin lorsque X *est seulement càdlàg mais avec un nombre fini de sauts tous prévisibles on a aussi le*

THÉORÈME 3. — *Soit* (X_t) *un processus càdlàg, adapté et borné. Supposons que les instants de sauts soient en nombre fini et prévisibles. Si* $\bar{K} \cap L_+^1 = \{0\}$, *il existe une loi* Q *équivalente à* P *telle que* X *soit une martingale sous* Q.

3 QUELQUES REMARQUES SUR LA DENSITÉ Z DANS LE CAS CONTINU

Ce paragraphe est consacré à l'étude de la densité Z de la loi Q par rapport à P (*voir* théorèmes 1 et 2). Nous supposerons dorénavant que X est une Q martingale continue, si bien que X sera une P semimartingale de décomposition canonique $X = M + B$ où M est une martingale locale continue à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et B un processus prévisible continu à variation finie à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Soient $(N^i)_{i=1,\ldots,d}$ des martingales locales réelles continues deux à deux orthogonales telles que chaque composante M^i de M appartienne au sous-espace stable $\mathscr{S}$ engendré par $(N^i)_{i=1,\ldots,d}$. Dans ce cas il existe une matrice prévisible σ d'ordre d telle que pour tout i et j on ait $\int_0^1 (\sigma_s^{ij})^2 \, d\langle N^j, N^j \rangle_s < +\infty$ et $M^i = \sum_{j=1}^{d} \sigma^{ij} . N^j$, c'est-à-dire $M = \sigma . N$. Soit A un processus croissant continu adapté tel que $\langle N^i, N^i \rangle$ soit absolument continu par rapport à A pour tout $i = 1, \ldots, d$. On peut alors choisir un processus prévisible ζ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ vérifiant $d\langle N^i, N^i \rangle = \zeta^i \, dA$.

THÉORÈME 4. — *S'il existe une loi* Q *équivalente à* P *telle que* X *soit une martingale continue sous* Q, *alors on peut choisir des processus prévisibles* $\tilde{\theta}$ *et* b *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *vérifiant*: $b = \sigma \tilde{\theta}$, $X = \sigma . N + b . A$ *et le processus* $\theta^i = (\tilde{\theta}^i / \zeta^i) \, 1_{\{\zeta^i \neq 0\}}$ *est intégrable par rapport à* N^i *pour tout* $i = 1, \ldots, d$.

Démonstration. — Soient $Z_1 = \frac{dQ}{dP}$ et $Z_t = E[Z_1 \mid \mathcal{F}_t]$. Introduisons la martingale locale $U = Z_-^{-1}.Z$ qui existe car $Z_- > 0$ (*voir* théorème 17, p. 85 de [3]). Cette martingale locale s'écrit $U^c + U^d$ où U^c est une martingale locale continue et U^d une martingale locale purement discontinue orthogonale à toute martingale locale continue. Comme U^c est localement bornée, donc localement de carré intégrable, on peut définir sa projection sur le sous-espace stable $\mathcal{S}$ engendré par N, si bien qu'il existe un processus prévisible θ intégrable par rapport à N tel que $U^c = -\theta.N + K$ où K est une martingale locale orthogonale à chaque N^i (nous avons écrit $-\theta.N$ pour retrouver les formules classiques du cas brownien [6]). Quitte à poser $L = K + U^d$, on a $U = -\theta.N + L$ où L est une martingale locale orthogonale à chaque N^i. Par définition de Z, le processus ZX^i est une martingale locale. Or

$$dZ = Z_-\, dU = Z_- \left(\sum_{j=1}^{d} -\theta^j\, dN^j + dL \right)$$

$$d(ZX^i) = Z_-\, dX^i + X^i\, dZ + d[X^i, Z] = Z_-\, dM^i + X^i\, dZ + Z\, dB^i + d\langle M^i, Z \rangle.$$

Donc :

$$0 = Z\, dB^i + d\langle M^i, Z \rangle = Z\left(dB^i - \sum_{j=1}^{d} \sigma^{ij} \theta^j\, d\langle N^j, N^j \rangle \right).$$

Ainsi

$$dB^i = \sum_{j=1}^{d} \sigma^{ij} \theta^j \zeta^j\, dA.$$

Le théorème est établi si on pose $\tilde{\theta}^j = \theta^j \zeta^j$.
La démonstration du théorème précédent nous fournit immédiatement le

THÉORÈME 5. — *Toutes les densités* Z *s'écrivent sous la forme* $Z = \mathcal{E}(-\theta.N + L) = \mathcal{E}(-\theta.N)\mathcal{E}(L)$ *où* L *est une martingale locale orthogonale à chaque* N^i.

On est alors tenté d'émettre la conjecture suivante : s'il existe une loi Q équivalente à P telle que X soit une martingale sous Q, alors $\mathcal{E}(-\theta.N)$ est une *martingale*. Nous ne sommes pas parvenus à établir ce résultat. Toutefois d'après Jacod [7], la loi Q est unique si et seulement si M possède la propriété de représentation prévisible. Dans ce cas $L = 0$ car toute martingale locale orthogonale à N, donc à M, est constante. Ainsi $\mathcal{E}(-\theta.N)$ est une martingale. Le théorème suivant va nous fournir un critère d'unicité de Q qui étend celui de Heath, Jarrow et Morton [5].

THÉORÈME 6. — *Supposons qu'il existe une loi de martingale* Q *pour* X. *Alors* Q *est unique si et seulement si* N *possède la propriété de représentation prévisible et si on peut choisir* σ *inversible.*

Démonstration. — Si N possède la propriété de représentation prévisible, la martingale locale L du théorème 5 est nulle. En outre lorsque σ est inversible l'équation $\sigma\tilde{\theta}=b$ admet une solution unique si bien que θ est unique. D'où l'unicité de Q. Étudions maintenant la réciproque. Sur l'ensemble $\{\zeta^j=0\}$ nous commençons par modifier la j-ième colonne de σ pour qu'elle soit linéairement indépendante des autres. Un tel choix peut être fait de manière prévisible en testant successivement l'indépendance des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^d$ avec les autres vecteurs colonnes de σ. On choisit le premier vecteur de cette base qui convient. Une telle modification ne change pas la valeur de $\sigma.\mathrm{N}$ puisque $d\langle \mathrm{N}^j, \mathrm{N}^j\rangle=\zeta^j d\mathrm{A}$. Grâce à la méthode de substitution on voit facilement que l'équation $\sigma\delta=0$ admet une solution prévisible δ non nulle sur $\{\det\sigma=0\}$. Lorsque $\zeta^j=0$, la j-ième colonne de σ est linéairement indépendante des autres si bien que $\delta^j=0$. On pose $\eta^i=\delta^i/(\|\delta\|\zeta^i)$ avec la convention $0/0=0$. Par hypothèse il existe une loi de martingale Q dont la densité s'écrit $\mathscr{E}(-\theta.\mathrm{N})$ d'après le théorème 5. Introduisons le temps d'arrêt

$$\mathrm{T}=\inf\left\{t:\mathscr{E}\left(-\sum_{j=1}^{d}\int_0^t \eta^j\theta^j\zeta^j\,d\mathrm{A}-(\eta.\mathrm{N})_t\right)\geqq 2\right\}$$

et posons $\gamma^i=\eta^i 1_{[0,\mathrm{T}]}$. Comme

$$\mathscr{E}(-(\gamma+\theta).\mathrm{N})_t=\mathscr{E}\left(-\sum_{j=1}^{d}\int_0^t \gamma^j\theta^j\zeta^j\,d\mathrm{A}-(\gamma.\mathrm{N})_t\right)\mathscr{E}(-(\theta.\mathrm{N})_t)$$

et que $\mathscr{E}(-\theta.\mathrm{N})_1$ est une densité, le processus $\mathscr{E}(-(\gamma+\theta).\mathrm{N})$ est une martingale uniformément intégrable. Un calcul analogue à celui de la démonstration du théorème 4 montre que la loi Q' de densité $\dfrac{d\mathrm{Q}'}{d\mathrm{P}}=\mathscr{E}(-(\gamma+\theta).\mathrm{N})_1$ est une loi de martingale pour X. Grâce à l'unicité de la loi de martingale, $(\gamma+\theta).\mathrm{N}=\theta.\mathrm{N}$, c'est-à-dire $\sum_{j=1}^{d}\int(\gamma^j)^2\zeta^j\,d\mathrm{A}=0$. En particulier $\gamma.\mathrm{N}=0$, $\mathrm{T}=1$ et $\delta=0$ $d\mathrm{A}$ p.s. Ainsi $\{\det\sigma=0\}$ est $d\mathrm{A}$-négligeable. On peut alors choisir σ inversible quitte à remplacer σ par l'identité sur $\{\det\sigma=0\}$.

Remarque. — Supposons pour simplifier que $\zeta_i=1$ pour tout i. N. El Karoui et M. C. Quenez ont montré dans un travail récent (Programmation dynamique et évaluation des actifs contingents en marché incomplet) l'équivalence des deux conditions suivantes:

(i) il existe une loi Q* équivalente à P qui transforme X en une martingale locale et préserve l'orthogonalité (c'est-à-dire toute martingale locale L orthogonale à M sous P reste une martingale locale sous Q*).

(ii) il existe un processus prévisible θ vérifiant $b=\sigma\theta$, $\theta\in\operatorname{Im}\sigma^*$ (σ^* étant la transposée de σ), $\mathscr{E}(-\theta.N)$ est une martingale et $\dfrac{dQ^*}{dP}=\mathscr{E}(-\theta.N)_1$.

Supposons que les hypothèses du théorème 4 soient vérifiées, c'est-à-dire qu'il existe une loi Q équivalente à P telle que X soit une martingale. Il existe alors un processus prévisible θ vérifiant $\sigma\theta=b$ et $(\|\theta\|^2.A)_1<+\infty$, $\|\theta\|$ désignant la norme euclidienne du vecteur θ. Soit θ' la projection orthogonale de θ sur $(\operatorname{Ker}\sigma)^\perp$. Alors $b=\sigma\theta=\sigma\theta'$ car $\theta-\theta'\in\operatorname{Ker}\sigma$. Comme $\operatorname{Im}\sigma^*=(\operatorname{Ker}\sigma)^\perp$, on en déduit que $\theta'\in\operatorname{Im}\sigma^*$, si bien qu'il existe φ vérifiant $\sigma\sigma^*\varphi=b$. La méthode du pivot de Gauss nous permet de choisir φ prévisible. Puisque $\sigma(\theta-\sigma^*\varphi)=0$, on a $\sigma^*\varphi=\theta'$ et $\|\theta'\|^2\leqq\|\theta\|^2$. Le processus prévisible θ' est intégrable par rapport à N et on peut définir la martingale locale $\mathscr{E}(-\theta'.N)$. Toutefois nous ignorons si cette martingale locale est une *vraie martingale*. Bien entendu, si $\theta.N$ vérifie la condition de Novikov $E\left[\exp\left(\frac{1}{2}(\|\theta\|^2.A)_1\right)\right]<+\infty$, il en sera de même pour $\theta'.N$. Dans ce cas Q^* existera. L'étude de la loi Q^* sera poursuivie au paragraphe 4.

4. ÉTUDE DU CAS DISCONTINU. LOI DE MARTINGALE MINIMALE

Avant de passer à l'étude du cas discontinu nous avons besoin d'un résultat de dualité énoncé dans [9] mais démontré de manière inexacte.

THÉORÈME 7. — *Soient* D *un processus croissant prévisible continu à droite,* A *un processus prévisible continu à droite à variation finie et p un réel vérifiant* $1<p<+\infty$. *On désigne par q le conjugué de p, c'est-à-dire* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. *Si l'ensemble* $\left\{(K.A)_1 : K \textit{ prévisible borné et } \int_0^1 |K_s|^p\,dD_s\leqq 1\right\}$ *est borné dans* L^0, *alors il existe un processus prévisible* α *tel que* $dA_s=\alpha_s\,dD_s$ *et* $\int_0^1|\alpha_s|^q\,dD_s<+\infty$.

Démonstration. — Montrons d'abord que $dA_s=\alpha_s\,dD_s$. Soit B un ensemble prévisible tel que $(1_B.D)_1=0$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $\int_0^1(n\,1_B)^p\,dD=0$. Donc la suite $\int_0^1 n\,1_B\,dA$ est bornée dans L^0 si bien que $(1_B.A)_1=0$. Il est bien connu (remarques 68 *bis*, p. 144 de [3]) que cette condition assure l'existence d'un processus prévisible α tel que $dA=\alpha\,dD$.

Supposons maintenant qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que $P\left[\int_0^1 |\alpha_s|^q dD_s = +\infty\right]>\varepsilon$ et considérons le processus borné $\alpha^n=\alpha 1_{\{|\alpha|\leqq n\}}$. Puisque la suite $\left\{\int_0^1 |\alpha_s^n|^q dD_s>\lambda\right\}$ tend en croissant vers $\left\{\int_0^1 |\alpha_s|^q dD_s>\lambda\right\}$ pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on peut choisir une suite croissante de réels positifs (λ_n) tendant vers $+\infty$ telle que $P\left[\int_0^1 |\alpha_s^n|^q dD_s>\lambda_n\right]\geqq\varepsilon$. On pose:

$$T_n=\inf\left\{t: \int_0^t |\alpha_s^n|^q dD_s\geqq\lambda_n\right\},$$
$$\varepsilon_s=\operatorname{sign}(\alpha_s)$$

et

$$H^n=\lambda_n^{-1/p}\varepsilon_s|\alpha_s^n|^{q-1}1_{[0,T_n[}+\varepsilon_{T_n}|\alpha_{T_n}^n|^{q-1}(\lambda_n+|\alpha_{T_n}^n|^q\Delta D_{T_n})^{-1/p}1_{[T_n]}.$$

Comme T_n est un t. a. prévisible, H^n est un processus prévisible. En outre

$$\int_0^1 |H_s^n|^p dD_s\leqq\lambda_n^{-1}\int_{[0,T_n[} |\alpha_s^n|^q dD_s+|\alpha_{T_n}^n|^q\Delta D_{T_n}(\lambda_n+|\alpha_{T_n}^n|^q\Delta D_{T_n})^{-1}.$$

Or

$$\int_{[0,T_n[} |\alpha_s^n|^q dD_s\leqq\lambda_n$$

par définition de T_n et la fonction $f(x)=x(x+\lambda_n)^{-1}\leqq 1$ pour $x\geqq 0$ si bien que $\int_0^1 |H_s^n|^q dD_s\leqq 2$. Mais:

$$\begin{aligned}\int_0^1 H_s^n\alpha_s dD_s &=\lambda_n^{-1/p}\int_{[0,T_n[} |\alpha_s^n|^q dD_s+|\alpha_{T_n}^n|^q\Delta D_{T_n}(\lambda_n+|\alpha_{T_n}^n|^q\Delta D_{T_n})^{-1/p}\\ &\geqq\int_0^{T_n}|\alpha_s^n|^q dD_s\left(\lambda_n+\int_0^{T_n}|\alpha_s^n|^q dD_s\right)^{-1/p}.\end{aligned}$$

Comme on a manifestement $x(\lambda_n+x)^{-1/p}\geqq 2^{-1/p}\lambda_n^{1/q}$ pour $x\geqq\lambda_n$, on obtient

$$P\left[\int_0^1 H_s^n\alpha_s dD_s\geqq 2^{-1/p}\lambda_n^{1/q}\right]\geqq\varepsilon$$

compte tenu de l'hypothèse $P\left[\int_0^1 |\alpha_s^n|^q dD_s\geqq\lambda_n\right]\geqq\varepsilon$. Ainsi la suite $(H^n.A)_1$ n'est pas bornée dans L^0, ce qui est absurde et le lemme est démontré.

Comme au paragraphe 2 nous posons $K=\{(H.X)_1 : H$ prévisible élémentaire borné$\}$ et nous désignons à nouveau par $\bar{K}$ l'adhérence de K dans L^1. L'objet de ce paragraphe est l'étude de la condition $\bar{K} \cap L^1_+ = \{0\}$ lorsque X est seulement càdlàg. Nous ne sommes pas parvenus à étendre le théorème 2 à cette situation et nous obtenons seulement le résultat partiel suivant :

THÉORÈME 8. — *Soit* (X_t) *un processus càdlàg réel adapté nul en* 0 *et vérifiant* $\sup_{s \leqq 1} |X_s| \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$. *Si* $\bar{K} \cap L^1_+ = \{0\}$, *alors* X *est une semi-martingale spéciale de décomposition canonique* $X = M + \alpha . \langle M, M \rangle$ *où* M *est une martingale locale localement de carré intégrable et* α *un processus prévisible vérifiant* $\int_0^1 \alpha^2 \, d\langle M, M \rangle < +\infty$.

La démonstration de ce théorème comporte plusieurs lemmes. Le premier lemme nous montre qu'on peut remplacer les processus prévisibles élémentaires H par des processus prévisibles élémentaires généralisés. Cette extension nous servira en particulier à arrêter convenablement les processus de la forme H.X. Dans toute la suite de ce paragraphe nous supposerons que X *vérifie les conditions du théorème* 8.

LEMME 1. — *L'ensemble* $\{\sum_i \lambda_i (X_{T_{i+1}} - X_{T_i}) : T_i$ *étant un t.a.*, $0 \leqq T_0 \leqq \ldots \leqq T_n \leqq 1$ *et* λ_i *étant une v.a.* $\mathscr{F}_{T_i}$ *mesurable bornée*$\}$ *est contenu dans* $\bar{K}$.

Démonstration. — Nous dirons qu'un t.a. est élémentaire s'il ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Il est bien connu que tout t.a. S à valeurs dans [0, 1] est limite décroissante d'une suite de t.a. élémentaires (S_n) à valeurs dans [0, 1]. Ainsi chaque T_i est la limite décroissante d'une suite de t.a. élémentaires $(S_i^p)_p$. On pose alors $T_i^p = \sup_{0 \leqq j \leqq i} S_j^p$, si bien que $0 \leqq T_0^p \leqq \ldots \leqq T_n^p \leqq 1$. Pour achever la démonstration du lemme il reste à vérifier que si S et T sont deux temps d'arrêt ne prenant qu'un nombre fini de valeurs avec $S \leqq T$, alors $\lambda (X_T - X_S)$ appartient à K si λ est une v.a. $\mathscr{F}_S$ mesurable bornée. Soient $\theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_q$ et $\alpha_1 < \ldots < \alpha_r$ les valeurs respectives de S et T. Pour i fixé on pose $j = \min \{k : \alpha_k \geqq \theta_i\}$. Alors

$$\lambda (X_T - X_S) = \sum_i \lambda \, 1_{\{S=\theta_i\}} [X_{\alpha_j} - X_{\theta_i} + (X_{\alpha_{j+1}} - X_{\alpha_j}) 1_{\{T > \alpha_j\}} + \ldots + (X_{\alpha_n} - X_{\alpha_{n-1}}) 1_{\{T > \alpha_{n-1}\}}].$$

Cette v.a. est dans K et le lemme 1 est démontré.

Le deuxième lemme qui est au cœur de la démonstration est parfaitement intuitif. En effet, il nous dit que si X vérifie les hypothèses du théorème 8, alors $(H.X)_1$ ne prend pas de «grandes» valeurs positives s'il ne prend pas aussi de «petites» valeurs négatives.

LEMME 2. — *Soient* θ *une constante et* (H^n) *une suite de processus prévisibles élémentaires généralisés bornés par* θX_1^*. *Si la suite* $(H^n.X)_1^-$ *est bornée dans* L^1, *alors la suite* $(H^n.X)_1$ *est bornée dans* L^0.

Démonstration. — On pose $X_t^* = \sup_{s \leq t} |X_s|$. Raisonnons par l'absurde en supposant que la suite $(H^n.X)_1$ n'est pas bornée dans L^0. Quitte à extraire une sous-suite, encore notée H^n, nous pouvons choisir $\varepsilon > 0$ tel que $P[(H^n.X)_1 \geqq n] \geqq \varepsilon$. On pose $T_n = \inf\{t : (H^n.X)_t \geqq n\}$. Puisque $(H^n.X)_{T_n -} \leqq n$, on a $(H^n.X)_{T_n} \leqq n + 2\theta (X_1^*)^2$. En remarquant que si $T_n < 1$, alors $(H^n.X)_{T_n} \geqq n$, on obtient aussi les inégalités

$$-(H^n.X)_1^- \leqq (H^n.X)_{T_n} \leqq n + 2\theta (X_1^*)^2.$$

On pose alors $Z_n = \frac{1}{n}(H^n.X)_{T_n}$ et on note que selon le lemme 1 les v. a. Z_n appartiennent à $\bar{K}$. La suite (Z_n) étant manifestement uniformément intégrable, le théorème de compacité de Dunford-Pettis montre l'existence d'une sous-suite (Z_{p_n}) qui converge au sens $\sigma(L^1, L^\infty)$ vers une v. a. Z appartenant encore à $\bar{K}$ (l'adhérence faible est égale à l'adhérence forte en vertu de la convexité de K). Puisque $E[Z_n^-]$ tend vers 0 et que $P[Z_n \geqq 1] \geqq \varepsilon$ entraîne $E[Z_n^+] \geqq \varepsilon$, on a $Z \in L_+^1 \cap \bar{K}$ et $E[Z] \geqq \varepsilon$, ce qui est absurde. Donc la suite $((H^n.X)_1)_n$ est bornée dans L^0.

Le troisième lemme nous permettra d'introduire une espèce de variation quadratique de X. Cette «variation quadratique» nous servira ensuite à contrôler la partie «martingale» du processus discret H.X lorsque H est un processus prévisible élémentaire généralisé.

LEMME 3. — *L'ensemble*

$$G = \{\sum_i (X_{T_{i+1}} - X_{T_i})^2 : T_i \ \textit{t.a.} \quad \textit{et} \quad 0 \leqq T_0 \leqq \ldots \leqq T_n \leqq 1\}$$

est borné dans L^0.

Démonstration. — Remarquons d'abord que

$$\sum_{i=0}^{n-1} (X_{T_{i+1}} - X_{T_i})^2 + 2 \sum_{i=0}^{n-1} X_{T_i}(X_{T_{i+1}} - X_{T_i}) = \sum_{i=0}^{n-1} X_{T_{i+1}}^2 - X_{T_i}^2 = X_{T_n}^2 - X_{T_0}^2.$$

En posant $H = -\sum_{i=0}^{n-1} 2 X_{T_i} 1_{]T_i, T_{i+1}]}$ on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n-1} (X_{T_{i+1}} - X_{T_i})^2 = X_{T_n}^2 - X_{T_0}^2 + (H.X)_1. \qquad (*)$$

Si l'ensemble G n'est pas borné dans L^0, il existe $\varepsilon>0$ et une suite (Y^n) de G telle que $P[Y_n>n+(X_1^*)^2]\geqq\varepsilon$. Donc $P[(H^n.X)_1>n]\geqq\varepsilon$ où H^n désigne le processus prévisible associé à Y^n dans l'égalité $(*)$. Or $(H^n.X)_1\geqq X_{T_0^n}^2-X_{T_n^n}^2\geqq-(X_1^*)^2$ si bien que la suite (H^n) vérifie les hypothèses du lemme 2. Donc la suite $(H^n.X)_1$ est bornée dans L^0, ce qui est absurde!

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que X est une semimartingale en utilisant le critère de Dellacherie-Mokobodzki (*voir* [3], p. 401).

LEMME 4. — *X est une semimartingale.*

Démonstration. — D'après le critère de Dellacherie et Mokobodzki X est une semimartingale si et seulement si l'ensemble $\{(H.X)_1 : H$ processus prévisible élémentaire vérifiant $|H|\leqq 1\}$ est borné dans L^0. Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un $\varepsilon>0$ et d'une suite (H^n) de processus prévisibles élémentaires tels que $|H^n|\leqq 1$ et $P[(H^n.X)_1\geqq n]\geqq\varepsilon$. Puisque H^n est un processus prévisible élémentaire, H^n est de la forme $H^n=\sum_i \lambda_i^n 1_{]t_i^n,t_{i+1}^n]}$ où λ^n est une v. a. $\mathscr{F}_{t_i^n}$ mesurable et bornée par 1.

D'après le lemme 3 l'ensemble G est borné dans L^0 si bien qu'il existe $c>0$ tel que $\forall\zeta\in G$, $P[\zeta\geqq c]\leqq\frac{\varepsilon}{2}$. On considère alors le processus $\zeta_t^n=\sum_{t_{i+1}^n\leqq t}(X_{t_{i+1}^n}-X_{t_i^n})^2$ et les t. a. $T_n=\inf\{t:\zeta_t^n\geqq c\}$. Comme T_n est à valeurs dans $\{t_0^n, t_1^n, \ldots\}$, on a

$$\sum_i (X_{t_{i+1}^n}^{T_n}-X_{t_i^n}^{T_n})^2\leqq c+4(X_1^*)^2.$$

D'autre part $\{T_n<1\}\subset\{\zeta_1^n\geqq c\}$ si bien que $P[X\neq X^{T_n}]<\frac{\varepsilon}{2}$. Compte tenu de l'inégalité $P[(H^n.X)_1\geqq n]\geqq\varepsilon$, on en déduit que $P[(H^n.X)_{T_n}\geqq n]\geqq\frac{\varepsilon}{2}$. Posons: $Z_i^n=X_{t_{i+1}^n}^{T_n}-X_{t_i^n}^{T_n}$, $\tilde{Z}_i^n=E[Z_i^n\,|\,\mathscr{F}_{t_i^n}]$ et $M^n=\sum_i \lambda_i^n(Z_i^n-\tilde{Z}^n i)$. Comme les v. a. $(\lambda_i^n(Z_i^n-\tilde{Z}_i^n))_i$ sont orthogonales dans L^2 et que $|\lambda_i^n|\leqq 1$, on obtient les inégalités:

$$\begin{aligned}E[(M^n)^2]&\leqq\sum_i E[(Z_i^n-\tilde{Z}_i^n)^2]\leqq\sum_i E[(Z_i^n)^2]-E[(\tilde{Z}_i^n)^2]\\&\leqq\sum_i E[(Z_i^n)^2]\leqq c+4E[X_1^*]^2.\end{aligned}$$

Donc la suite (M^n) est bornée dans L^2 et aussi dans L^0. Puisque la suite $(H^n.X)_{T_n}$ n'est pas bornée dans L^0, il en sera de même pour la suite $A_n=(H^n.X)_{T_n}-M^n=\sum_i\lambda_i\tilde{Z}_i^n$ et *a fortiori* pour la suite de v. a. positives

$A'_n = \sum_i \varepsilon_i^n \tilde{Z}_i^n$ où ε_i^n est le signe de la v. a. $\tilde{Z}_i^n$. Si K^n désigne le processus prévisible élémentaire $\sum_i \varepsilon_i^n 1_{]t_i^n, t_{i+1}^n]}$, alors la suite $(K^n . X)_{T_n}^-$ est majorée par la suite $(\sum_i \varepsilon_i^n (Z_i^n - \tilde{Z}_i^n))^-$ qui est bornée dans L^2 et *a fortiori* dans L^1. D'après le lemme 2 la suite $(K^n . X)_{T_n}$ est bornée dans L^0, ce qui est absurde car elle est la somme de la suite $\sum_i \varepsilon_i^n (Z_i^n - \tilde{Z}_i^n)$ bornée dans L^0 et de A'_n qui ne l'est pas.

Démonstration du théorème 8. — Nous venons de montrer que, sous les hypothèses du théorème 8, X est une semimartingale. Comme X_1^* est dans L^2, elle est nécessairement spéciale de décomposition canonique $X = M + A$ où M est une martingale locale localement de carré intégrable et A un processus à variation finie prévisible. Montrons que l'ensemble $E = \left\{ (K . A)_1 : \text{K prévisible élémentaire et } \int_0^1 K_s^2 \, d\langle M, M \rangle_s < 1 \right\}$ est borné dans L^0. S'il n'en est pas ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ et une suite de processus prévisibles K^n vérifiant les deux inégalités $\int_0^1 (K_s^n)^2 \, d\langle M, M \rangle_s \leqq 1$ et $P[|(K^n . A)_1| \geqq n] \geqq \varepsilon$. Soit β^n un processus prévisible à valeurs dans $\{-1, 1\}$ tel que $K^n \beta^n dA = |K^n| \, |dA|$. Introduisons la suite de t. a. prévisible $T_n = \inf \left\{ t : \int_0^t K_s^n \beta_s^n \, dA_s \geqq n \right\}$ et les processus

$$H^n = n^{-1} K^n \beta^n 1_{[0, T_n[} + K_{T_n}^n \beta_{T_n}^n (n + |K_{T_n}^n \Delta A_{T_n}|)^{-1} 1_{[T_n]}.$$

Manifestement $((H^n)^2 . \langle M, M \rangle)_1 \leqq \frac{1}{n^2}$ si bien que $E[(H^n . M)_1^2] \leqq \frac{1}{n^2}$, tandis que

$$0 \leqq (H^n . A)_1 = n^{-1} \int_{[0, T_n[} \beta_s^n K_s^n \, dA_s + |K_{T_n}^n| \, |\Delta A_{T_n}| (n + |K_{T_n}^n \Delta A_{T_n}|)^{-1} \leqq 2.$$

Ainsi la suite $(H^n . X)_1$ est uniformément intégrable. Sur l'ensemble $\{(K^n . A)_1 \geqq n\}$ on a :

$$(H^n . A)_1 \geqq \left(n + \int_0^{T_n} |K_s^n| \, |dA_s| \right)^{-1} \int_0^{T_n} |K_s^n| \, |dA_s| \geqq 1/2.$$

En outre

$$E[(H^n . X)_1^-] \leqq E[(H^n . M)_1^-] \leqq \| (H^n . M)_1 \|_2 \leqq n^{-1}$$

et $P[(H^n . X)_1^+ \geqq 1/4] \geqq \varepsilon$ pour n assez grand car $E[(H^n . M)_1^2]$ tend vers 0 et $P[(H^n . A)_1 \geqq 1/2] \geqq P[(K^n . A)_1 \geqq n] \geqq \varepsilon$. Un raisonnement analogue à celui de la démonstration du lemme 2 montre que ceci est absurde si bien que l'ensemble E est borné dans L^0. D'après le théorème 7 on a

$$dA_s = \alpha_s \, d\langle M, M\rangle_s$$

avec $(\alpha^2 . \langle M, M\rangle)_1 < +\infty$.

Nous allons maintenant illustrer par deux exemples les pathologies pouvant se produire dans le cas discontinu.

Deux exemples. — Le théorème 8 nous permet de définir $\mathscr{E}(-\alpha . M)$. Le processus $X\mathscr{E}(-\alpha . M)$ est une martingale locale (*voir* § 5) mais malheureusement $\mathscr{E}(-\alpha . M)$ peut prendre des valeurs négatives et même s'annuler, suivant la valeur de $1-\alpha\Delta M$! Voici un tel exemple. Considérons le processus M défini par $M_t = 0$ pour $t < 1$ et

$$P[M_1 = 2] = P[M_1 = 0] = \frac{1}{2} P[M_1 = -1] = \frac{1}{4}.$$

Si $(\mathscr{F}_t)$ est la filtration naturelle de ce processus, on constate que M est une $(\mathscr{F}_t)$ martingale. On choisit alors un processus prévisible A tel que $A_t = 0$ pour $t < 1$ et A_1 soit une constante. Enfin on remarque que $\langle M, M\rangle_t = 0$ pour $t < 1$ et $\langle M, M\rangle_1 = E[M_1^2] = \frac{3}{2}$ si bien que $\alpha_t = 0$ pour $t < 1$ et $\alpha_1 = \frac{2}{3} A_1$. Lorsque $A_1 = \frac{3}{4}$, $1-\alpha_1 M_1$ s'annule et lorsque $A_1 > \frac{3}{4}$, $1-\alpha_1 M_1$ prend des valeurs négatives. Cependant la semi-martingale $X = M + A$ peut être transformée en une martingale par un changement de loi dès que X_1 prend des valeurs positives et négatives, c'est-à-dire dès que $-2 < A_1 < 1$. Dans ces conditions X vérifie les hypothèses du théorème 8 mais $\mathscr{E}(-\alpha . M)$ n'est pas nécessairement une v.a. strictement positive, contrairement au cas continu. Voici un deuxième exemple. Considérons un mouvement brownien (B_t) et un processus de Poisson (N_t) standards indépendants. On note $(\mathscr{F}_t)$ la filtration naturelle du couple (B_t, N_t) et on désigne par α un processus prévisible vérifiant $\int_0^1 \alpha_s^2 \, ds < +\infty$. Soit $T = \inf\{t : \mathscr{E}(-(2\alpha) . B)_t \geqq \theta\}$ où θ est une constante strictement supérieure à 1. Dans ce cas le processus $X_t = B_t^T + N_t^T + (2\alpha - 1)\, t \wedge T$ est manifestement une martingale sous la loi Q de densité $\mathscr{E}(-(2\alpha) . B)_T$. En reprenant les notations du théorème 8 on constate que $M_t = B_t^T + N_t^T - t \wedge T$ et $\langle M, M\rangle_t = 2\, t \wedge T$. Comme la densité de Q est bornée, on a l'inclusion $L^1(P) \subset L^1(Q)$ si bien que X vérifie les hypothèses du théorème 8 mais $\alpha\Delta M = \alpha\Delta N^T = \alpha\, 1_{\{\Delta N^T \neq 0\}}$ peut prendre des valeurs quelconques suivant le choix de α.

Le rôle très important de la loi Q^*, qui a été mis en évidence au paragraphe 3 nous conduit à la définition suivante (*voir* Föllmer-Schweizer [4] lorsque X est un processus continu).

DÉFINITION 1. — Soit X une semimartingale spéciale de décomposition canonique $X=M+A$ où M est une martingale locale et A un processus prévisible à variation finie. Nous dirons qu'une loi Q équivalente à P est une *loi de martingale minimale* si X est une martingale sous Q et si toute martingale locale N orthogonale à M reste une martingale locale sous Q.

L'unicité et l'écriture explicite d'une telle loi ont été établies par Föllmer et Schweizer dans le cas continu. Les travaux de Yoeurp [11] vont nous permettre de traiter le cas discontinu. Nous reprenons *les hypothèses et notations du théorème* 8.

THÉORÈME 9. — *Si une loi de martingale minimale* Q *existe pour* X, *alors* $\mathscr{E}(-\alpha.M)$ *est une martingale strictement positive et la densité* $\dfrac{dQ}{dP}$ *est égale à* $\mathscr{E}(-\alpha.M)_1$.

Démonstration. — Soient Z_1 la densité $\dfrac{dQ}{dP}$ et (Z_t) la martingale associée à Z_1. D'après la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned} d(ZX) &= Z_-\,dX + X_-\,dZ + d[X,Z] \\ &= Z_-\,dM + X_-\,dZ + \alpha Z_-\,d\langle M,M\rangle + d[M,Z] + d[\alpha.\langle M,M\rangle, Z]. \end{aligned}$$

Comme $[\alpha.\langle M,M\rangle, Z]$ est une martingale locale d'après un lemme de Yoeurp [10] et que ZX est une martingale par hypothèse, on en déduit que $(\alpha Z_-).\langle M,M\rangle+[M,Z]$ est aussi une martingale locale. Il en est de même pour $[M, Z+(\alpha Z_-).M]$, si bien que $L=Z+(\alpha Z_-).M$ est une martingale locale orthogonale à M. D'après la définition de Q, L reste une martingale locale sous Q, c'est-à-dire LZ est une martingale locale sous P. Ainsi L^2 est aussi une martingale locale, donc constante. Il ne reste plus qu'à noter que cette constante est égale à 1 ($\mathscr{F}_0$ est une tribu dégénérée) et que la solution de l'équation différentielle $dZ=-(\alpha Z_-)\,dM$ avec la condition initiale $Z_0=1$ est justement $\mathscr{E}(-\alpha.M)$.

Remarques. — (i) Il est bien connu que le processus $N=\mathscr{E}(-\alpha.M)X$ est toujours une martingale locale. En effet d'après la formule d'intégration par parties et la définition de $\mathscr{E}(-\alpha.M)$, on a :

$$\begin{aligned} dN &= \mathscr{E}(-\alpha.M)_-\,dX + X_-\,d\mathscr{E}(-\alpha.M) + d[X, \mathscr{E}(-\alpha.M)] \\ &= \mathscr{E}(-\alpha.M)_-\,dM + X_-\,d\mathscr{E}(-\alpha.M) + \alpha\,d[\langle M,M\rangle, \mathscr{E}(-\alpha.M)] \\ &\qquad + \alpha\mathscr{E}(-\alpha.M)_-\,(d\langle M,M\rangle - d[M,M]). \end{aligned}$$

Comme $\langle M,M\rangle$ est un processus prévisible à variation finie, on sait [10] que $[\langle M,M\rangle, \mathscr{E}(-\alpha.M)]$ est une martingale locale. Ainsi il est clair que N est aussi une martingale locale.

(ii) Nous avions fourni deux exemples de semimartingales X vérifiant les hypothèses du théorème 8 mais pas la condition $1-\alpha\Delta M>0$. Dans ce cas il n'y a pas de loi minimale Q* bien qu'il existe des lois de martingale pour X.

5. DÉCOMPOSITION DE FÖLLMER-SCHWEIZER GÉNÉRALISÉE

Soit X une semimartingale spéciale de décomposition canonique $X=M+\alpha.\langle M, M\rangle$ où M est une martingale locale localement de carré intégrable et α un processus prévisible vérifiant les deux conditions $(\alpha^2.\langle M, M\rangle)_1<+\infty$ et $\alpha\Delta M<1$. Rappelons que la solution notée $\mathscr{E}(-\alpha.M)$, de l'équation différentielle $dY=-Y_-\alpha\, dM$ vérifiant la condition initiale $Y_0=1$ s'écrit:

$$\mathscr{E}(-\alpha.M)_t=\exp\left(-(\alpha.M)_t-\frac{1}{2}(\alpha^2.\langle M^c, M^c\rangle)_t\right)\prod_{0\leqq s\leqq t}(1-\alpha_s\Delta M_s)\,e^{\alpha_s\Delta M_s}.$$

Puisque la martingale locale $\alpha.M$ est localement de carré intégrable (en vertu de la condition $(\alpha^2.\langle M, M\rangle)_1<+\infty$) et que Y_- est localement borné, Y est une martingale locale localement de carré intégrable. De plus elle est strictement positive à cause de l'hypothèse $\alpha\Delta M<1$.

DÉFINITION 2. — Soit H une v. a. $\mathscr{F}_1$ mesurable. Nous dirons que H admet une décomposition de Föllmer-Schweizer généralisée s'il existe un réel λ, un processus prévisible ζ intégrable par rapport à la semimartingale X et une semimartingale L nulle en 0 tels que $H=\lambda+(\zeta.X)_1+L_1$, que $\mathscr{E}(-\alpha.M)(\lambda+\zeta.X+L)$ soit *une martingale* et que $[X, L]\mathscr{E}(-\alpha.M)$ soit une martingale locale.

Remarques: (i) On montre aisément par un caclul analogue à celui du paragraphe 4 que $\mathscr{E}(-\alpha.M)(\zeta.X)$ est une martingale locale.

(ii) Lorsque X est une semimartingale continue, alors L est une martingale locale orthogonale à M. En effet:

$$d([X, L]\mathscr{E}(-\alpha.M))=[X, L]\,d\mathscr{E}(-\alpha.M)+\mathscr{E}(-\alpha.M)\,d[X, L]+d[[X, L], \mathscr{E}(-\alpha.M)].$$

Comme $[X, L]$ est un processus à variation finie continu et que $\mathscr{E}(-\alpha.M)$ est une martingale locale, $d[[X, L], \mathscr{E}(-\alpha.M)]=0$. Ainsi $[X, L]$ est une martingale locale continue à variation finie, donc nulle. En vertu de la continuité du processus croissant $\langle M, M\rangle$ on a aussi $[L, M]=[L, X]=0$. Appliquons une nouvelle fois la formule d'intégration par parties pour montrer que L est une martingale locale:

$$\begin{aligned} d(\mathrm{L}\mathscr{E}(-\alpha.\mathrm{M})&=\mathrm{L}_-\,d\mathscr{E}(-\alpha.\mathrm{M})+\mathscr{E}(-\alpha.\mathrm{M})\,d\mathrm{L}+d[\mathrm{L},\mathscr{E}(-\alpha.\mathrm{M})]\\ &=\mathrm{L}_-\,d\mathscr{E}(-\alpha.\mathrm{M})+\mathscr{E}(-\alpha.\mathrm{M})\,(d\mathrm{L}-\alpha\,d[\mathrm{L},\mathrm{M}])\\ &=\mathrm{L}_-\,d\mathscr{E}(-\alpha.\mathrm{M})+\mathscr{E}(-\alpha.\mathrm{M})\,d\mathrm{L}\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{L}\mathscr{E}(-\alpha.\mathrm{M})$ et $\mathrm{L}_-.\mathscr{E}(-\alpha.\mathrm{M})$ sont des martingales locales, il en est de même pour L.

(iii) Rappelons que Föllmer et Schweizer se sont intéressés à la décomposition suivante de la v. a. H lorsque X est continu: $\mathrm{H}=\lambda+(\zeta.\mathrm{X})_1+\mathrm{L}_1$ où $\zeta.\mathrm{X}$ est une semimartingale appartenant à $\mathscr{S}^2$ et L une martingale de carré intégrable orthogonale à M. La remarque (ii) et l'unicité de la décomposition qui sera établie au théorème 10 nous indiquent qu'une telle décomposition est un cas particulier de la définition 2.

THÉORÈME 10. — (i) *La décomposition de Föllmer-Schweizer est unique.*

(ii) *Si* X *est continu,* H *admet une décomposition de Föllmer-Schweizer généralisée si et seulement si* $\mathrm{H}\mathscr{E}(-\alpha.\mathrm{M})_1$ *est dans* L^1.

(iii) *Si* X *est localement borné, si* $\mathrm{H}\mathscr{E}(-\alpha.\mathrm{M})_1$ *est dans* L^1 *et si le processus* $\mathrm{E}[\mathrm{H}\mathscr{E}(-\alpha.\mathrm{M})_1\,|\,\mathscr{F}_t](\mathscr{E}(-\alpha.\mathrm{M})_t)^{-1/2}$ *est localement de carré intégrable, alors* H *admet une décomposition de Föllmer-Schweizer généralisée.*

Démonstration. — (i) Considérons deux décompositions de Föllmer-Schweizer de H:

$$\mathrm{H}=\lambda+(\zeta.\mathrm{X})_1+\mathrm{L}_1=\lambda'+(\zeta'.\mathrm{X})_1+\mathrm{L}'_1.$$

Dans ce cas les martingales

$$\mathscr{E}(-\alpha.\mathrm{M})(\lambda+\zeta.\mathrm{X}+\mathrm{L})\qquad\text{et}\qquad\mathscr{E}(-\alpha.\mathrm{M})(\lambda'+\zeta'.\mathrm{X}+\mathrm{L}')$$

sont égales si bien que $\lambda=\lambda'$ et $(\zeta-\zeta').\mathrm{X}=\mathrm{L}'-\mathrm{L}$. Puisque $\mathscr{E}(-\alpha.\mathrm{M})$ est localement de carré intégrable, on peut construire une suite croissante de t. a. (T_n) tendant stationnairement vers 1 telle que les processus $\mathscr{E}(-\alpha.\mathrm{M})^{\mathrm{T}_n}$, $(\mathrm{X}\mathscr{E}(-\alpha.\mathrm{M}))^{\mathrm{T}_n}$ et $((\mathrm{L}'-\mathrm{L})\mathscr{E}(-\alpha.\mathrm{M}))^{\mathrm{T}_n}$ soient des martingales. On considère alors la loi Q_n de densité $\dfrac{d\mathrm{Q}_n}{d\mathrm{P}}=\mathscr{E}(-\alpha.\mathrm{M})_{\mathrm{T}_n}$. Sous Q_n les processus $\mathrm{X}^{\mathrm{T}_n}$ et $(\mathrm{L}-\mathrm{L}')^{\mathrm{T}_n}$ sont des martingales orthogonales. D'après le théorème 2 page 134 de [1], le processus $(\zeta-\zeta')$ est intégrable par rapport à $\mathrm{X}^{\mathrm{T}_n}$ au sens des martingales locales sous Q_n et $(\zeta-\zeta').\mathrm{X}^{\mathrm{T}_n}$ est une martingale locale sous Q_n, orthogonale à $(\mathrm{L}-\mathrm{L}')^{\mathrm{T}_n}$. Quitte à remplacer $\zeta-\zeta'$ par $(\zeta-\zeta')1_{\{|\zeta-\zeta'|\leq p\}}$ et $\mathrm{L}'-\mathrm{L}$ par $1_{\{|\zeta-\zeta'|\leq p\}}.(\mathrm{L}'-\mathrm{L})$, on a la propriété suivante sous Q_n: $[\mathrm{L}'-\mathrm{L},\mathrm{L}'-\mathrm{L}]^{\mathrm{T}_n}=((\zeta-\zeta').[\mathrm{X},\mathrm{L}'-\mathrm{L}])^{\mathrm{T}_n}$ est une martingale locale, positive et nulle en 0. Donc elle est nulle. Il en résulte que $\mathrm{L}=\mathrm{L}'$ et $\zeta.\mathrm{X}=\zeta'.\mathrm{X}$, c'est-à-dire la décomposition de Föllmer-Schweizer est unique.

(ii) Il est bien connu que si U et V sont deux martingales locales localement de carré intégrables, il existe un réel α et un processus θ uniques tels que $\mathrm{U}=\alpha+\theta.\mathrm{V}+\mathrm{W}$ où $(\theta^2.\langle\mathrm{V},\mathrm{V}\rangle)_1<+\infty$, $\mathrm{W}_0=0$ et $[\mathrm{W},\mathrm{V}]=0$.

Cette décomposition sera appelée *décomposition de Kunita-Watanabe* de U par rapport à V.

Introduisons le processus $N_t = E[H\mathscr{E}(-\alpha.M)_1 \mid \mathscr{F}_t]/\mathscr{E}(-\alpha.M)_t$. Soit (T_n) une suite croissante de t.a. tendant stationnairement vers 1, telle que $\mathscr{E}(-\alpha.M)_{t\wedge T_n}$ soit une martingale de carré intégrable et que X^{T_n} soit borné. On considère alors la loi Q_n équivalente à P de densité $\frac{dQ_n}{dP} = \mathscr{E}(-\alpha.M)_{T_n}$. On pose $\lambda = E[H\mathscr{E}(-\alpha.M)_1]$, et on note ζ la densité de $[X, N]$ par rapport à $[X, X]$. Comme ces deux processus sont continus, ζ est prévisible. En outre si $(N^{T_n})^c$ désigne la partie continue de la martingale N^{T_n} sous Q_n, alors $[X, N]^{T_n} = [X^{T_n}, N^{T_n}] = [X^{T_n}, (N^{T_n})^c]$ si bien que $\zeta^n = \zeta\, 1_{[0, T_n]}$ est nécessairement le processus prévisible θ^n intervenant dans la décomposition de Kunita-Watanabe de $(N^{T_n})^c$ par rapport à X^{T_n} (sous la loi Q_n). Donc ζ^n est intégrable par rapport à X^{T_n} et il en sera de même de ζ par rapport à X. Enfin $L^n = N^{T_n} - (\zeta.X)^{T_n}$ est une Q^n martingale locale orthogonale à X^{T_n} de telle sorte que si L désigne le processus vérifiant $L^{T_n} = L^n$, alors $[L, X]\mathscr{E}(-\alpha.M)$ est une P martingale locale. La décomposition de Föllmer-Schweizer de H est établie lorsque X est une semimartingale continue.

(iii) On reprend les notations de la partie (ii) mais on exige de plus que le processus $N^{T_n}(\mathscr{E}(-\alpha.M)^{T_n})^{1/2}$ soit de carré intégrable, c'est-à-dire N^{T_n} est une martingale de carré intégrable sous la loi Q_n. La décomposition de Kunita-Watanabe de N^{T_n} par rapport à X^{T_n} s'écrit sous la loi $Q_n : N^{T_n} = \lambda + \theta^n . X^{T_n} + L^n$. Or lorsque U est une martingale sous Q_{n+1}, le processus arrêté U^{T_n} est manifestement une Q_n martingale. On en déduit que $(\theta^n - \theta^{n+1})\, 1_{[0, T_n]} = 0$ et $L^n = (L^{n+1})^{T_n}$. Pour obtenir la décomposition de Föllmer-Schweizer généralisée de H, il ne reste plus qu'à définir les processus ζ et L par $\zeta = \theta^n$ sur $[0, T_n]$ et $L^{T_n} = L^n$.

Remarque. — Considérons deux martingales M et N nulles en 0 et supposons que M soit bornée. Dans ce cas $[M, M]$ est localement borné si bien que $[M, N]$ est à variation localement intégrable en vertu de l'inégalité de Kunita-Watanabe. On peut donc définir les projections duales prévisibles de $[M, N]$ et $[M, M]$ notées $\langle M, N \rangle$ et $\langle M, M \rangle$. En outre si H est un processus prévisible borné vérifiant $H.\langle M, M \rangle = 0$, il en est de même pour $H.[M, M]$, donc pour $H.[M, N]$ et aussi $H.\langle M, N \rangle$. Ainsi $\langle M, N \rangle$ est absolument continu par rapport à $\langle M, M \rangle$. On pose $\zeta = \frac{d\langle M, N \rangle}{d\langle M, M \rangle}$. Si $((\zeta^2.[M, M]))^{1/2}$ est *localement intégrable*, alors on peut définir $\zeta.M$ et poser $L = N - \zeta.M$ qui sera une martingale locale orthogonale à M. Inversement s'il existe un processus prévisible H tel que H soit intégrable par rapport à M et que $L = N - H.M$ soit une martingale locale orthogonale à M, alors $\langle N, M \rangle - H.\langle M, M \rangle$ est la projection duale prévisible de $[N, M] - H.[M, M] = [N - H.M, M] = [L, M]$: puisque $[L, M]$ est une martingale locale à variation finie, sa projection duale prévisible est nulle si bien que $H = \frac{d\langle N, M \rangle}{d\langle M, M \rangle} = \zeta$. Malheureusement la condition $(\zeta^2.[M, M])^{1/2}$ localement intégrable n'est pas toujours vérifiée et nous étudierons ce problème en détail dans un prochain article.

REMERCIEMENTS

Nous remercions l'un des rapporteurs de nous avoir signalé les travaux sur le même sujet de W. Schachermayer (1991). A General Theorem on the Existence of Equivalent Martingale Measures, preprint Université de Vienne et M. Schweizer (1991), Martingale Densities for General Asset Prices, SFB 303 discussion paper n° B-194, Université de Bonn (à paraître dans *Journal of Mathematical Economics*).

RÉFÉRENCES

[1] C. S. Chou, P. A. Meyer et C. Stricker, Sur les intégrales stochastiques de processus prévisibles non bornés, Séminaire de Probabilités XIV, *Lect. Notes Math.*, n° 784, Springer, 1980, p. 128-139.

[2] R. C. Dalang, A. Morton et W. Willinger, Equivalent Martingale Measures and No-Arbitrage in Stochastic Securities Market Models, *Stochastics and Stochastics Reports*, vol. 29, n° 2, 1990, p. 185-202.

[3] C. Dellacherie et P. A. Meyer, *Probabilités et potentiel*, Chapitres V à VIII, Théorie des Martingales, Hermann, 1980.

[4] H. Föllmer et M. Schweizer, Hedging of Contingent Claims under Incomplete Information, *Applied Stochastic Analysis*, *Stochastics Monographs*, vol. **5**, Gordon and Breach, 1991, p. 389-414.

[5] D. Heath, R. Jarrow et A. Morton, Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: a New Methodology for Contingent Claims Valuation, *Econometrica* (to appear).

[6] I. Karatzas et S. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, 1988.

[7] J. Jacod, Calcul Stochastique et Problème de Martingales, *Lect. Notes Math.*, n° 714. Springer, 1979.

[8] C. Stricker, Arbitrage et lois de martingale, *Ann. Inst. Henri Poincaré, sér. B*, vol. **26**, n° 3, 1990, p. 451-460.

[9] C. Stricker, Absolute Continuity of a Semimartingale with respect to a Continuous Increasing and Adapted Process, *Lect. Notes Control and Information Sciences*, 96, Springer, 1987, p. 373-380.

[10] C. Yoeurp, Décomposition des martingales locales et formules exponentielles, Séminaire de Probabilités X, *Lect. Notes Math.*, n° 511, Springer, 1976, p. 432-480.

[11] C. Yoeurp, Contribution au Calcul Stochastique, *Thèse de Doctorat d'État*, Paris-VI, 1982.

(*Manuscrit reçu le* 11 *juin* 1991; *corrigé le* 16 *décembre* 1991.)