ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MICHEL LEDOUX

Sur les déviations modérées des sommes de variables aléatoires vectorielles indépendantes de même loi

Annales de l'I. H. P., section B, tome 28, nº 2 (1992), p. 267-280

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1992__28_2_267_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 28, n° 2, 1992, p. 267-280. *Probabilités et Statistiques*

Sur les déviations modérées des sommes de variables aléatoires vectorielles indépendantes de même loi

par

Michel LEDOUX

U.E.R. de Mathématiques, Laboratoire de Statistique et Probabilités,
Université Paul-Sabatier, 118, route de Narbonne,
31062 Toulouse Cedex, France

RÉSUMÉ. — Soit X une variable aléatoire faiblement centrée et faiblement de carré intégrable à valeurs dans un espace de Banach réel séparable B. Soit $(X_i)_{i \geqq 1}$ une suite de copies indépendantes de X et, pour tout entier $n \geqq 1$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Posons $I(x) = |x|^2/2$ ou $+\infty$ selon que x appartient ou non à l'espace de Hilbert autoreproduisant $(H, |\,.\,|)$ associé à la structure de covariance de la loi de X. Pour une large classe de suites de normalisation $(b_n)_{n \geqq 1}$ telles que $b_n/\sqrt{n} \to +\infty$ et $b_n/n \to 0$, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour que

$$\limsup_{n \to \infty} n b_n^{-2} \log \mathbb{P}\{S_n/b_n \in F\} \leqq -\inf_{x \in F} I(x)$$

pour tout fermé F de B.

Le résultat s'applique en particulier aux suites $b_n = n^{1/p}$, $1 < p < 2$ (déjà traitées par Chen Xia [CX1]), et à la suite $b_n = (2n\,\mathrm{LL}\,n)^{1/2}$ de la loi du logarithme itéré. La démonstration proposée voudrait illustrer dans ce cadre l'intérêt et l'efficacité des récents outils isopérimétriques du calcul des probabilités dans les espaces de Banach.

Mots clés : déviations modérées, sommes de variables aléatoires vectorielles indépendantes de même loi, inégalités isopérimétriques.

ABSTRACT. — Let X be a Borel random variable with values in a real separable Banach space B such that $\mathbb{E}f(X) = 0$ and $\mathbb{E}f^2(X) < \infty$ for every

Classification A.M.S. : 60 B 12, 60 F 10, 60 E 15, 60 G 50, 60 F 17.

f in B'. Let $(X_i)_{i \geqq 1}$ be a sequence of independent copies of X and set, for each $n \geqq 1$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Let $I(x) = |x|^2/2$ or $+\infty$ according as x belong or not to the reproducing kernel Hilbert space (H, $|\,.\,|$) associated to the covariance structure of the distribution of X. For large classes of normalizing sequences $(b_n)_{n \geqq 1}$ with $b_n/\sqrt{n} \to \infty$ and $b_n/n \to 0$, we give necessary and sufficient conditions in order that

$$\limsup_{n \to \infty} n b_n^{-2} \log \mathbb{P}\{S_n/b_n \in F\} \leqq - \inf_{x \in F} I(x)$$

for every closed set F of B.

The result applies in particular to the sequences $b_n = n^{1/p}$, $1 < p < 2$ (already studied by Chen Xia [CX1]), and to the normalizing sequence $b_n = (2n\,\mathrm{LL}\,n)^{1/2}$ of the law of the iterated logarithm. The proof would like to emphasize the usefulness and efficiency of the recent isoperimetric tools of Probability in Banach spaces and appears as an illustration of the power of these techniques in the context of large or moderate deviations.

Les propriétés de grandes déviations ou de déviations modérées apparaissent souvent comme des énoncés précisant les théorèmes limites classiques du calcul des probabilités. C'est le cas par exemple du théorème de Cramer pour la loi des grands nombres ; c'est aussi le cas du théorème de Schilder de grandes déviations pour la mesure de Wiener de laquelle on déduit classiquement comme corollaire la loi du logarithme itéré de Strassen pour le mouvement brownien (*voir* par exemple [Az], [D-S], [V]).

L'objet principal de cet article est de fournir des conditions *nécessaires et suffisantes* pour les déviations modérées par rapport aux ensembles fermés des sommes de variables aléatoires vectorielles indépendantes de même loi. Une conséquence importante concerne la loi du logarithme itéré que nous précisons ainsi sous la forme d'un théorème de déviations modérées. Les techniques de démonstration que nous proposons reposent sur les outils isopérimétriques récents du calcul des probabilités dans les espaces de Banach exposés dans l'ouvrage [L-T2]. Le présent travail a en fait pour but principal d'amplifier et de développer ces idées en vue de possibles applications ultérieures dans le cadre des grandes déviations ou des déviations modérées.

Soit B un espace de Banach réel séparable de norme $\|\,.\,\|$ et d'espace dual B'. Soit X une variable aléatoire borélienne sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans B. Nous notons $(X_i)_{i \geqq 1}$ une suite de copies indépendantes de X et, pour tout entier $n \geqq 1$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Lorsque $(b_n)_{n \geqq 1}$ est une suite de réels positifs telle que $b_n/\sqrt{n} \to \infty$ et $b_n/n \to 0$, l'étude du comportement asymptotique des probabilités $\mathbb{P}\{S_n/b_n \in A\}$ est rassemblée dans la littérature sous la terminologie de « déviations modérées ». Comme dans le cas classique des grandes déviations (correspondant à $b_n = n$), elle a pour but de déterminer une fonctionnelle I sur B et des conditions sur la loi de la variable X pour lesquelles il est possible d'établir simultanément que

$$\limsup_{n \to \infty} n b_n^{-2} \log \mathbb{P}\{S_n/b_n \in F\} \leqq -\inf_{x \in F} I(x) \qquad \text{pour} \quad F \text{ fermé} \tag{1}$$

et

$$\liminf_{n \to \infty} n b_n^{-2} \log \mathbb{P}\{S_n/b_n \in G\} \geqq -\inf_{x \in G} I(x) \qquad \text{pour} \quad G \text{ ouvert.} \tag{2}$$

Contrairement à la loi des grands nombres usuelle $b_n = n$ où la fonctionnelle I est construite comme la transformée de Cramer de la transformée de Laplace de la loi de X ([Az], [B-Z], [D-S], [V]), les déviations modérées font intervenir la fonctionnelle I associée à l'espace de Hilbert autoreproduisant construit à partir de *la structure de covariance* de la loi de X. Le cas d'une variable aléatoire X gaussienne pour laquelle ces deux fonctionnelles coïncident est le lien naturel entre grandes déviations et déviations modérées.

Décrivons de façon plus précise la fonctionnelle associée à la covariance de X qui intervient dans les déviations modérées (1) et (2). Supposons que la variable X soit telle que $\mathbb{E}f(X)=0$ et $\mathbb{E}f^2(X)<\infty$ pour tout élément f du dual B' de B. Il est bien connu (*voir* par exemple [G-K-Z], [L-T2]) que, comme pour une variable aléatoire gaussienne, on peut alors parler de l'espace de Hilbert autoreproduisant associé à la covariance de X (par exemple l'espace de Cameron-Martin si X a une covariance brownienne). Pour résumer sa construction, soit S l'opérateur linéaire continu de B' dans B défini par $S(f)=\mathbb{E}(Xf(X))$, l'espérance étant prise au sens faible, et l'on vérifie effectivement que celle-ci définit un élément de B. Sur l'image S(B') de B' par S on peut transporter le produit scalaire usuel de $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ en posant, pour f, g dans B', $\langle S(f), S(g)\rangle = \mathbb{E}f(X)g(X)$. La complétion de S(B') pour ce produit scalaire définit l'espace de Hilbert autoreproduisant $(H, |\,.\,|)$ (où $|x|^2 = \langle x, x\rangle$) associé à la structure de covariance de X (il ne dépend en effet que de celle-ci). Parmi ses propriétés, rappelons que sa boule unité $K=\{x \in H;\ |x| \leqq 1\}$ est un ensemble borné de B et l'on a

$$\sup_{x \in K} \|x\| = \sup_{\|f\| \leqq 1} (\mathbb{E}f^2(X))^{1/2} < \infty. \tag{3}$$

De façon équivalente, si l'on note $\sigma = \sigma(X) = \sup_{\|f\| \leqq 1} (\mathbb{E}f^2(X))^{1/2}$, tout élément x de H vérifie $\|x\| \leqq \sigma |x|$. (On conviendra dans la suite que $|x| = +\infty$ si $x \notin H$.) Notons également que si K est une partie bornée de

B, K n'est pas toujours compacte; l'intégrabilité uniforme de la famille de variables aléatoires réelles $\{f^2(\mathrm{X}); f \in \mathrm{B}', \|f\| \leqq 1\}$, en particulier réalisée lorsque $\mathbb{E}\|\mathrm{X}\|^2 < \infty$, est une caractérisation, parmi d'autres, de la compacité de K. Nous renvoyons à [G-K-Z] ou [L-T2], pp. 207-210, pour plus de précisions sur ce point ainsi que sur cette construction et les propriétés de H.

Soit donc X une variable aléatoire à valeurs dans B, faiblement centrée et faiblement de carré intégrable, et d'espace autoreproduisant $(\mathrm{H}, |\,.\,|)$. Posons alors

$$\mathrm{I}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}|x|^2 & \text{si } x \in \mathrm{H}, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4}$$

De façon équivalente, $\mathrm{I}(x) = \sup_{f \in \mathrm{B}'} \left(f(x) - \dfrac{1}{2} \mathbb{E} f^2(\mathrm{X}) \right)$ comme la construction de H permet de le vérifier immédiatement. Cette fonctionnelle est la fonctionnelle usuelle de grandes déviations pour une variable aléatoire X gaussienne. C'est elle qui intervient naturellement dans les propriétés de déviations modérées pour des variables quelconques.

Dans [Ac], A. de Acosta établit les propriétés (1) et (2) pour la fonctionnelle I de (4) sous diverses conditions (*voir* aussi [B-M2] et, en dimension finie, [F-W], [P]). Il suppose dans tous les cas la propriété de limite centrale, c'est-à-dire que la suite $(\mathrm{S}_n/\sqrt{n})_{n \geqq 1}$ converge étroitement dans B vers une variable aléatoire gaussienne (de même covariance que X et donc de même fonctionnelle I, rapprochant ainsi ces déviations modérées des grandes déviations gaussiennes). Cette seule hypothèse suffit pour (2) et remonte en fait sous cette forme aux travaux [B-M1] et [A-K]. Pour la borne supérieure (1), A. de Acosta fait en outre l'hypothèse de moments exponentiels de tous ordres.

Très récemment, Chen Xia [CX2] vient d'améliorer le résultat sur les minorations en caractérisant en fait (2) par la condition

$$\liminf_{n \to \infty} n b_n^{-2} \log \mathbb{P}\{\|\mathrm{S}_n\| < u b_n\} = 0 \quad \text{pour tout } u > 0.$$

En particulier, cette condition est réalisée dès que la suite $(\mathrm{S}_n/b_n)_{n \geqq 1}$ converge vers zéro en probabilité.

Cet article est consacré aux majorations et a pour but de fournir des conditions nécessaires et suffisantes pour les déviations modérées par rapport aux ensembles fermés (1). Après avoir complété cette rédaction, nous avons eu connaissance du travail [CX1] où Chen Xia traite le cas des suites polynomiales $b_n = n^{1/p}$, $1 < p < 2$, et de la suite $b_n = (n \log n)^{1/2}$, que, indépendamment, cet article recouvre et développe. Ces conditions nécessaires et suffisantes, qui se déduisent immédiatement des déviations modérées des complémentaires de boules centrées à l'origine, font intervenir des propriétés d'intégrabilité, plus précisément des conditions sur la queue, de la loi de X liées au comportement de la suite (b_n). Elles sont plus faibles que l'hypothèse de moments exponentiels (elles n'impliquent même pas toujours que $\mathbb{E}\|X\|^2<\infty$) et ne font pas intervenir non plus le théorème limite central (et donc les limites gaussiennes). Rappelons par exemple (*voir* [L-T2]) que, contrairement à la dimension finie, il existe en dimension infinie des variables aléatoires centrées et bornées presque sûrement qui ne vérifient pas le théorème limite central et que réciproquement celui-ci n'implique pas toujours l'intégrabilité du carré de la norme.

A part quelques classes d'espaces un peu plus agréable (incluant en tout cas les espaces de dimension finie), un trait caractéristique du calcul des probabilités dans les espaces de Banach est de ne pouvoir déduire en général un comportement en probabilité ou en loi des sommes partielles S_n à partir d'hypothèses de moments sur X. Cette remarque justifie quelque peu la nature de la caractérisation que nous obtenons. Celle-ci sera déduite des approches isopérimétriques récentes de l'étude des variables aléatoires vectorielles exposées en détail dans [L-T2]. Nous utilisons plus précisément l'inégalité isopérimétrique pour mesures produits de M. Talagrand [T1] (qui vient très récemment, [T2], d'en simplifier, pour les conséquences qui nous occupent, certains des quelque peu délicats arguments isopérimétriques sous-jacents). Notre résultat semble de quelque intérêt dès le cas réel (qui existe probablement depuis fort longtemps déjà), cas pour lequel les énoncés se simplifient quelque peu (*voir* les commentaires suivant le théorème).

Nous traitons le cas de suites de normalisation $(b_n)_{n\geqq 1}$ telles que $b_n/\sqrt{n}\to\infty$ et $b_n/n\to 0$, avec une petite restriction d'ordre technique. Nous supposerons en effet que la suite (b_n) est croissante et qu'il existe $0<\delta<1$ et $A\geqq 1$ tels que pour tous entiers $n, k\geqq 1$,

$$b_{nk}\leqq A\,k^{1-\delta}\,b_n. \tag{5}$$

Cette restriction empêche de trop se rapprocher de la suite $b_n=n$ (mais autorise cependant les suites usuelles). Elle est certainement améliorable, et peut-être même inutile, mais nous avons préféré en rester là pour la clarté de l'exposition et pour mieux insister sur les points qui nous paraissent les plus importants.

Nous énonçons à présent le résultat principal de ce travail.

THÉORÈME. — *Soit* X *une variable aléatoire à valeurs dans un espace de Banach réel séparable* B. *Supposons que* $\mathbb{E}f(X)=0$ *et* $\mathbb{E}f^2(X)<\infty$ *pour tout* f *de* B′ *et notons* $(H, |\,.\,|)$ *l'espace de Hilbert autoreproduisant associé à la covariance de* X. *Désignons en outre par* I *la fonctionnelle sur* B *définie par* $I(x)=|x|^2/2$ *ou* $+\infty$ *selon que* x *appartient ou non à* H.

Supposons que la famille $\{f^2(\mathrm{X})\,;\, f\in \mathrm{B}',\ \|f\| \leqq 1\}$ *est uniformément intégrable et soit* $(b_n)_{n\geqq 1}$ *une suite croissante de réels positifs telle que* $b_n/\sqrt{n} \to \infty$ *et* $b_n/n \to 0$ *et vérifiant* (5). *Alors, pour que*

$$\limsup_{n\to\infty} n b_n^{-2} \log \mathbb{P}\{\mathrm{S}_n/b_n \in \mathrm{F}\} \leqq -\inf_{x\in \mathrm{F}} \mathrm{I}(x)$$

pour tout fermé F *de* B, *il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées* :

(i) $\mathrm{S}_n/b_n \to 0$ *en probabilité*;

(ii) *il existe* $\mathrm{M}>0$ *tel que, quel que soit* $u>0$,

$$\limsup_{n\to\infty} n b_n^{-2} \log (n\,\mathbb{P}\{\|\mathrm{X}\| > u b_n\}) \leqq -\frac{u^2}{\mathrm{M}}.$$

Compte tenu de (i), le résultat de [CX2] nous fournit aussi les minorations par rapport aux ouverts dans ce cadre.

Puisque $b_n/\sqrt{n} \to \infty$, si X vérifie le théorème limite central, la propriété (i) est automatiquement satisfaite. De la même façon, en présence de moments exponentiels de tous ordres, la propriété (ii) est vérifiée (car $b_n/n \to 0$). Si X est une variable aléatoire réelle (ou à valeurs dans un espace de dimension finie), puisqu'alors $\mathbb{E}\mathrm{X}=0$ et $\mathbb{E}\mathrm{X}^2<\infty$, X vérifie le théorème limite central et la caractérisation du théorème se réduit à la condition (ii). Par ailleurs, notons que lorsque $\mathbb{E}\|\mathrm{X}\|<\infty$, une comparaison simple avec la loi des grands nombres montre que X est nécessairement centrée quand $\mathrm{S}_n/b_n \to 0$ en probabilité.

Il est facile de décrire les conditions d'intégrabilité (ii) pour quelques suites (b_n) usuelles. Le premier corollaire, dû à Chen Xia [CX1], concerne par exemple les suites $b_n = n^{1/p}$, $1<p<2$.

Corollaire 1. — *Soit* $1<p<2$. *Sous les notations et hypothèses du théorème,*

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1-2/p} \log \mathbb{P}\{\mathrm{S}_n/n^{1/p} \in \mathrm{F}\} \leqq -\inf_{x\in \mathrm{F}} \mathrm{I}(x)$$

pour tout fermé F *de* B *si et seulement si* $\mathrm{S}_n/n^{1/p} \to 0$ *en probabilité et* $\mathbb{E}\exp(\alpha\|\mathrm{X}\|^{2-p})<\infty$ *pour tout* $\alpha>0$.

Dans un espace de Banach de type p (par exemple un espace de Hilbert ou de dimension finie), seule la condition d'intégrabilité intervient puisque $\mathrm{S}_n/n^{1/p} \to 0$ en probabilité dès que $\mathbb{E}\mathrm{X}=0$ et $\mathbb{E}\|\mathrm{X}\|^p<\infty$ (*cf.* [L-T2], p. 259).

La seconde application concerne la loi du logarithme itéré et sa suite de normalisation $b_n = a_n = (2n\,\mathrm{LL}\,n)^{1/2}$, $n\geqq 1$, où $\mathrm{L}\,t = \max(1, \log t)$ et $\mathrm{LL}\,t = \mathrm{L}(\mathrm{L}\,t)$. Afin d'intégrer le résultat dans le cadre naturel de la loi du logarithme itéré, nous en rappelons quelques aspects ainsi que la caractérisation des variables la vérifiant. Nous renvoyons à [L-T2], chap. 8, pour tous les détails. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans B. La variable aléatoire X est dite vérifier la loi du logarithme itéré (sous sa forme compacte) si la suite $(S_n/a_n)_{n \geqq 1}$ est presque sûrement relativement compacte dans B et si (c'en est en fait une conséquence ou une définition équivalente), presque sûrement,

$$\lim_{n \to \infty} d\left(\frac{S_n}{a_n}, K\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad C\left(\frac{S_n}{a_n}\right) = K$$

où K est la boule unité de H, $d(x, K) = \inf\{\|x-y\|;\ y \in K\}$ et $C(S_n/a_n)$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (S_n/a_n). Les variables aléatoires X vérifiant la loi du logarithme itéré ont été caractérisées dans [L-T1] (*voir* aussi [L-T2] pour la démonstration isopérimétrique) comme les variables telles que $\mathbb{E}(\|X\|^2/LL\|X\|) < \infty$, la famille $\{f^2(X);\ f \in B',\ \|f\| \leqq 1\}$ est uniformément intégrable et $S_n/a_n \to 0$ en probabilité. Rappelons concernant ce résultat que l'intégrabilité uniforme de la famille $\{f^2(X);\ f \in B',\ \|f\| \leqq 1\}$ est équivalente à la compacité de K et qu'elle est bien sûr satisfaite dès que $\mathbb{E}\|X\|^2 < \infty$. Lorsque B est un espace de Banach de type 2, par exemple un espace de Hilbert ou un espace L^p, $2 \leqq p < \infty$, (*voir* [L-T2]), la convergence en probabilité vers 0 de la suite (S_n/a_n) est automatiquement satisfaite sous les hypothèses de moments $\mathbb{E}X = 0$ et $\mathbb{E}(\|X\|^2/LL\|X\|) < \infty$. Il convient également de rappeler qu'une variable aléatoire X vérifiant le théorème limite central vérifie la loi du logarithme itéré dès que $\mathbb{E}(\|X\|^2/LL\|X\|) < \infty$ mais que réciproquement il existe des variables aléatoires vectorielles centrées et bornées presque sûrement pour lesquelles $S_n/a_n \to 0$ en probabilité ne vérifiant pas le théorème limite central.

Les propriétés régularisantes des fonctions logarithme et logarithme itéré montrent que la propriété (ii) du théorème équivaut à $\mathbb{E}(\|X\|^2 (L\|X\|)^\alpha) < \infty$ pour tout $\alpha > 0$. Le théorème a donc la conséquence suivante :

COROLLAIRE 2. — *Soit* $a_n = (2n\,LL\,n)^{1/2}$, $n \geqq 1$. *Sous les notations et hypothèses du théorème,*

$$\limsup_{n \to \infty} n a_n^{-2} \log \mathbb{P}\{S_n/a_n \in F\} \leqq -\inf_{x \in F} I(x)$$

pour tout fermé F *de* B *si et seulement si* $S_n/a_n \to 0$ *en probabilité et* $\mathbb{E}(\|X\|^2 (L\|X\|)^\alpha) < \infty$ *pour tout* $\alpha > 0$. *Dans un espace de type* 2 *(en particulier sur la droite ou dans un espace de dimension finie), l'équivalence a lieu sous les seules conditions* $\mathbb{E}X = 0$ *et* $\mathbb{E}(\|X\|^2 (L\|X\|)^\alpha) < \infty$ *pour tout* $\alpha > 0$.

Le reste de l'article est consacré à la démonstration du théorème.

Démonstration du théorème. — Nous établissons pour commencer la partie nécessaire de l'équivalence. A cet effet, notons que si F est le fermé de B, $F=\{x\in B;\ \|x\|\geqq u\}$, $u>0$, on a

$$\inf_{x\in F} I(x)=\frac{u^2}{2\sigma^2} \tag{6}$$

où nous rappelons que $\sigma=\sigma(X)=\sup_{\|f\|\leqq 1}(\mathbb{E}f^2(X))^{1/2}<\infty$. Par homogénéité, il suffit de considérer le cas $u=1$ et, par (3), il faut établir que $(\inf_{\|x\|\geqq 1}|x|)(\sup_{|x|\leqq 1}\|x\|)=1$. Ceci est élémentaire : si x (élément de H) vérifie $\|x\|\geqq 1$,

$$|x|\geqq\frac{|x|}{\|x\|}=\frac{1}{\|x/|x|\|}\geqq\frac{1}{\sup_{|y|\leqq 1}\|y\|},$$

l'inégalité étant triviale si $x\notin H$ (où nous convenons que $|x|=+\infty$) ; si $|x|\leqq 1$,

$$\|x\|\leqq\frac{\|x\|}{|x|}=\frac{1}{|x/\|x\||}\leqq\frac{1}{\inf_{\|y\|\geqq 1}|y|}$$

et l'assertion s'ensuit.

Si l'on applique à présent la propriété de déviations modérées à $F=\{x\in B;\ \|x\|\geqq u\}$, $u>0$, on a par (6) que

$$\limsup_{n\to\infty} nb_n^{-2}\log\mathbb{P}\{\|S_n\|\geqq ub_n\}\leqq-\frac{u^2}{2\sigma^2}.$$

Pour $u>0$ fixé, il existe donc un entier $n_0=n_0(u)$ tel que, par exemple, pour tout $n\geqq n_0$,

$$\mathbb{P}\{\|S_n\|\geqq ub_n\}\leqq\exp\left(-\frac{u^2}{4\sigma^2}\cdot\frac{b_n^2}{n}\right).$$

Comme $b_n/\sqrt{n}\to\infty$, il est clair que cette propriété entraîne la convergence en probabilité vers 0 de la suite (S_n/b_n). Elle entraîne également (ii). Soit en effet X' une copie indépendante de X et soit $\tilde{X}=X-X'$ qui définit une variable aléatoire symétrique. Désignons par $\tilde{S}_n$, pour tout $n\geqq 1$, la somme partielle de copies indépendantes $\tilde{X}_i$ de X. Par l'inégalité du triangle, pour tout $n\geqq n_0$,

$$\mathbb{P}\{\|\tilde{S}_n\|>2ub_n\}\leqq 2\exp\left(-\frac{u^2}{4\sigma^2}\cdot\frac{b_n^2}{n}\right),$$

et, par les inégalités maximales de P. Lévy pour variables symétriques [L-T2], p. 46,

$$\mathbb{P}\{\max_{i\leqq n}\|\tilde{X}_i\|>2ub_n\}\leqq 4\exp\left(-\frac{u^2}{4\sigma^2}\cdot\frac{b_n^2}{n}\right).$$

On peut toujours supposer le membre de droite de cette inégalité plus petit que 1/2 (car $b_n/\sqrt{n} \to \infty$). Alors, par indépendance et équidistribution,

$$\frac{1}{2} \geqq \mathbb{P}\{\max_{i \leqq n} \|\tilde{X}_i\| > 2ub_n\} = 1 - (1 - \mathbb{P}\{\|\tilde{X}\| > 2ub_n\})^n$$
$$\geqq 1 - \exp(-n\,\mathbb{P}\{\|\tilde{X}\| > 2ub_n\}).$$

En particulier $n\,\mathbb{P}\{\|\tilde{X}\| > 2ub_n\} \leqq 1$ et puisque $1 - \exp(-x) \geqq x/2$ pour $0 \leqq x \leqq 1$, il vient

$$\mathbb{P}\{\max_{i \leqq n} \|\tilde{X}_i\| > 2ub_n\} \geqq \frac{1}{2} n\,\mathbb{P}\{\|\tilde{X}\| > 2ub_n\}.$$

Nous avons ainsi obtenu que pour tout $n \geqq n_0$,

$$n\,\mathbb{P}\{\|\tilde{X}\| > 2ub_n\} \leqq 8 \exp\left(-\frac{u^2}{4\sigma^2} \cdot \frac{b_n^2}{n}\right).$$

Par indépendance et l'inégalité du triangle, pour tout n assez grand,

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}\{\|X\| > 3ub_n\} \leqq \mathbb{P}\{\|X'\| \leqq ub_n\}\,\mathbb{P}\{\|X\| > 3ub_n\} \leqq \mathbb{P}\{\|\tilde{X}\| > 2ub_n\},$$

et la borne précédente fournit ainsi immédiatement (ii) (avec par exemple $M = 36\sigma^2$).

Nous démontrons à présent que les conditions (i) et (ii) sont aussi suffisantes pour la propriété de déviations modérées par rapport aux ensembles fermés. Il va être suffisant d'établir que pour toute norme équivalente q sur B,

$$\limsup_{n \to \infty} n b_n^{-2} \log \mathbb{P}\{q(S_n) > b_n\} \leqq -\frac{1}{2\sigma_q^2} \tag{7}$$

où $\sigma_q = \sup_{x \in K} q(x)$. En effet, si F est un fermé de B et si $0 < r < \inf_{x \in F} I(x)$, alors $F \cap (2r)^{1/2} K = \varnothing$. Comme K est compact et F est fermé, il existe un réel $\delta > 0$ tel que l'on ait encore $F \cap ((2r)^{1/2} K + \delta U) = \varnothing$ où U est la boule unité de (B, $\|\,.\,\|$). Il s'ensuit que

$$\mathbb{P}\{S_n/b_n \in F\} \leqq \mathbb{P}\{S_n/b_n \notin (2r)^{1/2} K + \delta U\}.$$

Si l'on considère alors la jauge q de l'ensemble convexe symétrique borné $(2r)^{1/2} K + \delta U$, celle-ci définit une norme sur B équivalente (compte tenu de la présence du terme δU) à la norme initiale $\|\,.\,\|$ (*i.e.* la jauge de U). Par sa définition même, $\sigma_q \leqq (2r)^{-1/2}$ de sorte que (7) appliquée à q fournit

$$\limsup_{n \to \infty} n b_n^{-2} \log \mathbb{P}\{S_n/b_n \in F\} \leqq -r.$$

Le choix de $r>0$ arbitrairement plus petit que $\inf_{x \in F} I(x)$ prouve alors la conclusion souhaitée.

Démontrons donc (7). Les conclusions (i) et (ii) sont satisfaites pour toute norme équivalente sur $(B, \|\,.\,\|)$. Pour alléger les notations nous écrirons simplement $q(.)=\|\,.\,\|$ et $\sigma_q=\sigma=\sigma(X)$ dans (7). Il va en fait suffire, sous les hypothèses du théorème, de montrer l'existence d'une constante numérique C_0 (>2) telle que pour toute variable X vérifiant (i) et (ii),

$$\limsup_{n \to \infty} n b_n^{-2} \log \mathbb{P}\{\|S_n\|>b_n\} \leqq -\frac{1}{C_0 \sigma^2}. \tag{8}$$

A cet effet, nous observons d'abord que (7) est immédiatement satisfaite lorsque X est une variable aléatoire réelle bornée presque sûrement : c'est là une conséquence directe de l'inégalité exponentielle classique de Kolmogorov (sous la forme par exemple du lemme 1.5 de [L-T2], p. 32), ou encore, mais à plus de prix, du résultat de A. de Acosta. En fait, un petit argument de troncation, implicite dans notre démonstration générale, permet d'utiliser directement l'inégalité de Kolmogorov pour démontrer (7) pour des variables réelles (centrées) vérifiant (ii). Le résultat est certainement connu dans ce cas mais, par rapport aux schémas usuels, sa démonstration requiert cependant cet argument un peu inhabituel peut-être de troncation que nous voudrions décrire brièvement. L'observation est la suivante : si $(X_i^*)_{i \leqq n}$ est le réarrangement décroissant de l'échantillon $(|X_1|, \ldots, |X_n|)$, pour tous $t>0$, $0<\varepsilon<1$ et $k \leqq n$ entier,

$$\mathbb{P}\{|S_n|>t\} \leqq \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{k} X_i^* > \varepsilon t\right\} + \mathbb{P}\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} u_i\right| > (1-\varepsilon)t\right\}$$

où $u_i = X_i I_{\{|X_i| \leqq \varepsilon t k^{-1}\}}$, $i=1, \ldots, n$. En effet, si J est l'ensemble des indices i pour lesquels $|X_i|>\varepsilon t k^{-1}$, alors, quand $\sum_{i=1}^{k} X_i^* \leqq \varepsilon t$, nécessairement Card $J \leqq k$ et

$$|S_n| \leqq \left|\sum_{i \in J} X_i\right| + \left|\sum_{i \notin J} X_i\right| \leqq \sum_{i=1}^{k} X_i^* + \left|\sum_{i=1}^{n} u_i\right|.$$

En choisissant t de l'ordre de b_n et k de l'ordre de b_n^2/n, il est aisé de constater comment, après recentrage, l'inégalité exponentielle de Kolmogorov peut être utilisée pour traiter les sommes de variables tronquées $\sum_{i=1}^{n} u_i$. Les grandes valeurs $\sum_{i=1}^{n} X_i^*$ sont estimées comme dans le cas général (*voir* plus loin) à l'aide de l'hypothèse (ii).

Après cette parenthèse et forts donc du cas réel, fixons $0<\varepsilon<1$ et montrons comment (7) se déduit de (8). Comme X est de Radon et la famille $\{f^2(X)\,;\, f\in B',\ \|f\|\leqq 1\}$ est uniformément intégrable, il existe par un argument d'approximation étagée une variable aléatoire centrée Y ne prenant qu'un nombre fini de valeurs dans B telle que

$$\frac{\varepsilon^2}{C_0\,\sigma(X-Y)^2}\geqq\frac{1}{2\sigma^2}$$

où $\sigma=\sigma(X)$. En particulier, $\sigma(Y)\leqq(1+\varepsilon)\sigma$. Pour tout entier n,

$$\mathbb{P}\{\|S_n\|>b_n\}\leqq\mathbb{P}\{\|R_n\|>(1-\varepsilon)b_n\}+\mathbb{P}\{\|T_n\|>\varepsilon b_n\}$$

où R_n (respectivement T_n) désigne la somme partielle associée à des copies indépendantes de Y (respectivement $X-Y$). En vertu de (8) appliquée à la variable $\varepsilon^{-1}(X-Y)$ qui par homogénéité vérifie aussi (i) et (ii) du théorème, et par le choix de Y,

$$\limsup_{n\to\infty} nb_n^{-2}\log\mathbb{P}\{\|T_n\|>\varepsilon b_n\}\leqq-\frac{1}{2\sigma^2}.$$

Les variables R_n prennent leurs valeurs dans un sous-espace de dimension finie de B. Il existe une famille finie $\{f_l,\ l\in L\}$ de formes linéaires continues sur B de normes inférieures ou égales à 1 telle que

$$(1-\varepsilon)\|R_n\|\leqq\max_{l\in L}|f_l(R_n)|.$$

Puisque Y ne prend qu'un nombre fini de valeurs et que (7) vaut pour des variables réelles centrées bornées, et puisque $\sigma(f_l(Y))\leqq(1+\varepsilon)\sigma$,

$$\limsup_{n\to\infty} nb_n^{-2}\log\mathbb{P}\{\|R_n\|>(1-\varepsilon)b_n\}\leqq-\frac{(1-\varepsilon)^4}{(1+\varepsilon)^2}\cdot\frac{1}{2\sigma^2}.$$

Le caractère arbitraire de $\varepsilon>0$ permet donc bien de conclure que (8) suffit à établir (7) et donc le théorème.

La démonstration de (8) utilise un argument de type isopérimétrique sous la forme de l'inégalité pour mesures produits de M. Talagrand [T1] (*voir* aussi [T2]), en suivant la présentation de [L-T2], section 6.3. C'est dans cette utilisation que réside peut-être l'apport principal de cet article. Comme nous travaillons à une constante numérique près, un argument simple de symétrisation prouve qu'il suffit de considérer le cas où la variable X est symétrique. Nous pouvons alors employer le théorème 6.17 de [L-T2], p. 166. Celui-ci énonce que si $(\|X_i\|^*)_{i\leqq n}$ est le réarrangement décroissant de l'échantillon $(\|X_1\|,\ldots,\|X_n\|)$, pour tous $s,t>0$ et tout entier $k\geqq 2K_0$ où $K_0\geqq 1$ est une certaine constante numérique,

$$\mathbb{P}\{\|S_n\|>16K_0M+2s+t\}$$
$$\leqq 2^{-k}+\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{k}\|X_i\|^*>s\right\}+2\exp\left(-\frac{t^2}{256K_0(n\sigma^2+8Msk^{-1})}\right)\quad(9)$$

où $\mathrm{M}=\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} u_i\right\|, u_i=\mathrm{X}_i \mathrm{I}_{\{\|\mathrm{X}_i\| \leqq s k^{-1}\}}$, $i=1, \ldots, n$ et $\sigma=\sigma(\mathrm{X})$. [C'est donc le théorème 6.17 de [L-T2] avec $q=2\mathrm{K}_0$ et l'estimation (6.18).] Nous choisissons, pour n assez grand, $s=t=b_n$ et $k=k_n=[b_n^2/4n\sigma^2]$ où [.] est la fonction partie entière. Par le lemme 7.3 de [L-T2], qui découle aisément de l'inégalité de J. Hoffmann-Jørgensen, l'hypothèse de convergence en probabilité vers 0 de la suite (S_n/b_n) entraîne que, pour tout n assez grand, $\mathrm{M} \leqq b_n$. Nous déduisons ainsi de (9) que, pour tout entier n suffisamment grand,

$$\mathbb{P}\{\|\mathrm{S}_n\| > (16\mathrm{K}_0+3)b_n\}$$
$$\leqq 2^{-k_n}+\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{k_n}\|\mathrm{X}_i\|^* > b_n\right\}+2\exp\left(-\frac{1}{256.40\,\mathrm{K}_0\,\sigma^2}\cdot\frac{b_n^2}{n}\right). \quad (10)$$

Il reste donc essentiellement à se convaincre que le terme $\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{k_n}\|\mathrm{X}_i\|^* > b_n\right\}$ est du bon ordre. C'est dans cette estimation que nous faisons usage de la condition (5); il est possible qu'un calcul plus habile permette de s'en passer. Soit $p=p(\delta)>1$ tel que $(2p-1)(1-\delta)<1$ où $0<\delta<1$ provient de (5), et soit $c(p)>0$ tel que $c(p)\sum_{i\geqq 1} i^{-p} \leqq 1$. On a

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{k_n}\|\mathrm{X}_i\|^* > b_n\right\} \leqq \sum_{i=1}^{k_n}\mathbb{P}\{\|\mathrm{X}_i\|^* > c(p)\,i^{-p}b_n\}.$$

Pour tout n et tout i, $1 \leqq i \leqq k_n$, soit $m=m(n, i) \geqq 1$ l'entier tel que $ub_m \leqq c(p)\,i^{-p}b_n < ub_{m+1}$ où $u \geqq 1$ est à préciser. Notons que $m(n, i)$ est décroissant en i et que, par (5) et le choix de p, $m(n, k_n)$ tend vers l'infini avec n. L'inégalité précédente s'écrit

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{k_n}\|\mathrm{X}_i\|^* > b_n\right\} \leqq \sum_{i=1}^{k_n}\mathbb{P}\{\|\mathrm{X}_i\|^* > ub_{m(n,i)}\}.$$

Or, par une inégalité binomiale élémentaire,

$$\mathbb{P}\{\|\mathrm{X}_i\|^* > ub_{m(n,i)}\} = \mathbb{P}\left\{\sum_{j=1}^{n}\mathrm{I}_{\{\|\mathrm{X}_j\| > ub_{m(n,i)}\}} \geqq i\right\}$$
$$\leqq (ei^{-1}n\,\mathbb{P}\{\|\mathrm{X}\| > ub_{m(n,i)}\})^i.$$

D'après (ii) il va exister $\mathrm{M}>0$ tel que si n est assez grand, pour tout $i=1, \ldots, k_n$,

$$n\,\mathbb{P}\{\|\mathrm{X}\| > ub_{m(n,i)}\} \leqq \frac{n}{m(n,i)}\exp\left(-\frac{u^2}{\mathrm{M}}\cdot\frac{b_{m(n,i)}^2}{m(n,i)}\right).$$

Par (5) on a tout d'abord $c(p)\,i^{-p}\,b_n \leqq 2\,A\,u b_{m(n,\,i)}$. D'autre part, si $k \leqq n$, $b_n \leqq A\,k^{1-\delta}\,b_{[n/k]+1}$ de sorte que pour tout n assez grand et tout $i=1, \ldots, k_n$,

$$m(n,\,i) \leqq C\,u^{-\gamma}\,i^{-\lambda}\,n$$

où $\lambda = p/1-\delta$, $\gamma = 1/1-\delta$ et $C = C(\delta,\,A) > 0$. Il existe ainsi un entier n_0 suffisamment grand tel que pour tout $n \geqq n_0$ et tout $i=1, \ldots, k_n$,

$$n\,\mathbb{P}\left\{ \|X\| > u b_{m(n,\,i)} \right\} \leqq \frac{1}{C}\,u^{\gamma}\,i^{\lambda} \exp\left(-\frac{i^{\mu-1}\,u^{\gamma}}{4\,A^2\,MC\,c(p)} \cdot \frac{b_n^2}{n} \right)$$

où $\mu = \lambda - (2p-1) > 0$. On peut toujours supposer $C \geqq e$ et poser $M_1 = 4\,A^2\,MC\,c(p)^{-2}$. En rassemblant ces estimations, il vient, pour $n \geqq n_0$,

$$\mathbb{P}\left\{ \sum_{i=1}^{k_n} \|X_i\|^* > b_n \right\} \leqq \sum_{i=1}^{k_n} u^{\gamma i}\,i^{\lambda i} \exp\left(-\frac{i^{\mu}\,u^{\gamma}}{M_1} \cdot \frac{b_n^2}{n} \right).$$

Pour tout l, $1 \leqq l \leqq k_n$, le membre de droite de l'inégalité précédente est majoré par

$$\exp\left(-\frac{u^{\gamma}}{M_1} \cdot \frac{b_n^2}{n} \right) \sum_{i=1}^{l} u^{\gamma i}\,i^{\lambda i} + \exp\left(-\frac{l^{\mu}\,u^{\gamma}}{M_1} \cdot \frac{b_n^2}{n} \right) \sum_{i=1}^{k_n} u^{\gamma i}\,i^{\lambda i}.$$

Si l est choisi de l'ordre de $\sqrt{k_n}$ (par exemple), cette somme est contrôlée, pour tout n assez grand, par

$$\exp\left(-\frac{u^{\gamma}}{2\,M_1} \cdot \frac{b_n^2}{n} \right)$$

où $M_1 > 0$ ne dépend donc que de M [provenant de (ii)] et de A et δ [de (5)]. Il reste à choisir u suffisamment grand pour que $u^{\gamma} \geqq 2\,M_1/\sigma^2$ et l'on constate en reportant dans (10) que

$$\limsup_{n \to \infty} n b_n^{-2} \log \mathbb{P}\left\{ \|S_n\| > (16\,K_0 + 3)\,b_n \right\} \leqq -\frac{1}{256 \, . \, 40\,K_0\,\sigma^2}.$$

Quitte à travailler avec $(16\,K_0+3)$ X au lieu de X, c'est bien la propriété (8) annoncée. Le théorème est ainsi établi.

Ce travail a été réalisé alors que l'auteur était en visite, durant l'année universitaire 1990/1991, au sein de l'Équipe d'Analyse, Unité Associée au C.N.R.S. 754, Université de Paris-VI, qu'il remercie de son hospitalité.

RÉFÉRENCES

[Ac] A. DE ACOSTA, Moderate Deviations and Associated Laplace Approximations for Sums of Independent Random Variables, 1990, *Trans. Am. Math. Soc.*, (to appear).

[A-K] A. DE ACOSTA, J. KUELBS, Some Results on the Cluster set $C\left(\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}\right)$ and the LIL, *Ann. Probab.*, vol. **11**, 1983, pp. 102-122.

[Az] R. AZENCOTT, Grandes déviations et applications, *École d'été de Probabilités de Saint-Flour*, 1978; *Lect. Notes Math.*, No. **774**, 1979, pp. 1-176, Springer-Verlag.

[B-Z] R. R. BAHADUR, S. ZABELL, Large Deviations of the Sample Mean in General Vector Spaces, *Ann. Probab.*, vol. **7**, 1979, pp. 587-621.

[B-M1] A. A. BOROVKOV, A. A. MOGULSKII, Probabilities of Large Deviations in Topological Vector Spaces I, *Siberian Math. J.*, vol. **19**, 1978, pp. 697-709.

[B-M2] A. A. BOROVKOV, A. A. MOGULSKII, Probabilities of Large Deviations in Topological Vector Spaces II, *Siberian Math. J.*, vol. **21**, 1980, pp. 12-26.

[CX1] CHEN XIA, Probabilities of Moderate Deviations for Independent Random Vectors in a Banach Space, *Chinese J. Appl. Prob. Statist.*, vol. **7**, 1991, pp. 24-32.

[CX2] CHEN XIA, On the Lower Bound of the Moderate Deviations of i. i. d. Random Variables in a Banach Space, 1990, *Chinese J. Appl. Prob. Statist.* (to appear).

[D-S] J. D. DEUSCHEL and D. STROOCK, *Large Deviations*, Academic Press, 1989.

[F-W] M. I. FREIDLIN and A. D. WENTZELL, *Random Perturbations of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1984.

[G-K-Z] V. GOODMAN, J. KUELBS, J. ZINN, Some Results on the LIL in Banach Space with Applications to Weighted Empirical Processes, *Ann. Probab.*, vol. **9**, 1981, pp. 713-752.

[L-T1] M. LEDOUX and M. TALAGRAND, Characterization of the Law of the Iterated Logarithm in Banach Spaces, *Ann. Probab.*, vol. **16**, 1988, pp. 1242-1264.

[L-T2] M. LEDOUX and M. TALAGRAND, *Probability in Banach Spaces* (*Isoperimetry and Processes*), Springer-Verlag, 1991.

[P] V. V. PETROV, *Sums of Independent Random Variables*, Springer-Verlag, 1975.

[T1] M. TALAGRAND, Isoperimetry and the Integrability of the Sum of Independent Banach Space Valued Random Variables, *Ann. Probab.*, vol. **17**, 1989, pp. 1546-1570.

[T2] M. TALAGRAND, A New Isoperimetric Inequality for Product Measure and the Tails of Sums of Independent Random Variables, *Geometric Funct. Analysis*, vol. **1**, 1991, pp. 211-223.

[V] S. R. S. VARADHAN, *Large Deviations and Applications*, S.I.A.M., Philadelphia, 1984.

(*Manuscrit reçu le* 28 *février* 1991;
corrigé le 28 *juin* 1991.)