ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

L. PRATELLI

Sur la convergence vers la loi de Poisson

Annales de l'I. H. P., section B, tome 28, nº 2 (1992), p. 151-164
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1992__28_2_151_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 28, n° 2, 1992, p. 151-164. *Probabilités et Statistiques*

Sur la convergence vers la loi de Poisson

par

L. PRATELLI

Università di Pisa, Dipartimento di Matematica,
Via Buonarroti 2, I-56100 Pisa, Italy

RÉSUMÉ. — Dans le cadre d'une « famille triangulaire » de lois sur $\mathbb{R}$ (ne vérifiant pas forcément l'hypothèse UAN), on donne une condition nécessaire et suffisante pour la convergence vers la loi de Poisson.

Mots clés : Famille triangulaire, Uniform Asymptotic Negligibility, Convergence étroite, Loi de Poisson.

ABSTRACT. — We consider a family of laws on $\mathbb{R}$, arising from a "triangular array" for which the UAN condition is not necessarily verified. For such a family we give a necessary and sufficient condition concerning the weak convergence to a Poisson law.

0. INTRODUCTION

Le « problème central de convergence » relatif à la loi de Poisson peut être formulé de la manière suivante: étant donnée une suite (μ_i) de lois sur $\mathbb{R}$, dont le terme d'indice i est le produit de convolution d'une suite finie (de longueur dépendant de i) de lois μ_{ij}, étudier des conditions sur la

Classification A.M.S. : Primary 60 B 10, 60 F 05; Secondary 60 G 50.

« famille triangulaire » (μ_{ij}), permettant d'assurer la convergence étroite de la suite (μ_i) vers une loi de Poisson.

Presque tous les résultats existant dans la littérature à ce sujet concernent le cas où les moments du second ordre des lois μ_{ij} convergent vers 0 de manière uniforme par rapport à j. Cette condition, qui se traduit par la relation

$$\lim_i \sup_j \int x^2 \mu_{ij}(dx) = 0, \tag{0.1}$$

est appelée, par les auteurs de langue anglaise, UAN (*Uniform Asymptotic Negligibility*).

En outre, les lois μ_{ij} sont souvent supposées concentrées sur $\mathbb{N}$, ou même sur $\{0, 1\}$ (*voir*, par ex., [1], [4], [5]).

Dans le présent article nous étudions le problème dans un cadre un peu plus général. En effet, nous n'imposons pas la condition UAN, et nous supposons seulement que les lois μ_{ij} soient concentrées sur $\mathbb{R}_+$. En outre, nous remplaçons la suite (μ_i) par une famille filtrée (c'est-à-dire par une famille $(\mu_i)_{i \in \mathrm{I}}$ dont l'ensemble I des indices est muni d'un filtre).

Dans un tel cadre, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour la convergence étroite de la famille (μ_i) vers une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ (voir Théorème (1.3)). Cette condition consiste essentiellement à imposer que les barycentres des lois μ_i convergent vers λ et que, dans le calcul des intégrales du type $\int (x-t)^+ \mu_{ij}(dx)$ (avec $t > 0$), l'erreur commise en remplaçant la loi μ_{ij} par la loi de Poisson de même barycentre soit assez petite.

Pour la démonstration de la nécessité, nous utilisons un résultat classique concernant la convergence vers la loi de Poisson (*voir* [2], p. 317). Comme ce résultat est relatif au cas où la famille (μ_{ij}) vérifie la condition UAN, notre démonstration consiste essentiellement à ramener le cas général à ce cas particulier.

Dans le dernier paragraphe, au lieu de supposer les lois μ_i, μ_{ij} concentrées sur $\mathbb{R}_+$, nous supposons simplement qu'elles possèdent des barycentres positifs, et nous exposons quelques extensions du résultat principal, ainsi que quelques contre-exemples.

1. HYPOTHÈSES, NOTATIONS, ÉNONCÉ DU RÉSULTAT PRINCIPAL

Chaque fois que l'on considère, dans la suite, une loi sur $\mathbb{R}$ (*i.e.* une mesure de probabilité sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$), on convient tacitement qu'elle possède un moment du second ordre fini. On dit qu'une famille de lois sur $\mathbb{R}$ est *bornée en moyenne quadratique* si la borne supérieure des moments du second ordre des lois de la famille est finie.

On appelle *factorisation* d'une loi μ toute suite $(\mu_j)_{j \geqq 1}$ de lois, telle que μ_j coïncide, à partir d'un certain indice, avec la loi de Dirac ε_0, et que le produit de convolution des lois μ_j soit égal à μ.

Lorsque le barycentre d'une loi μ est positif, on désigne par $\tilde{\mu}$ la loi de Poisson de même barycentre (égale à ε_0 si ce barycentre est nul), et l'on pose, pour tout nombre réel t,

$$(1.1) \quad \delta_t(\mu) = \int (x-t)^+ \mu(dx) - \int (x-t)^+ \tilde{\mu}(dx)$$
$$= \int (x-t)^- \mu(dx) - \int (x-t)^- \tilde{\mu}(dx).$$

On remarquera que, pour $t \leqq 0$, on a simplement (la loi $\tilde{\mu}$ étant concentrée sur $\mathbb{R}_+$)

$$\delta_t(\mu) = \int (x-t)^- \mu(dx).$$

Par conséquent, la restriction de $t \mapsto \delta_t(\mu)$ à l'intervalle $]-\infty, 0]$ est une fonction positive et croissante, qui est identiquement nulle si (et seulement si) la loi μ est concentrée sur $\mathbb{R}_+$.

Il est bien connu que, pour qu'une famille filtrée $(\mu_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de lois sur $\mathbb{R}$, bornée en moyenne quadratique, converge étroitement vers une loi μ, il faut et il suffit que l'on ait

$$\lim_i \int (x-t)^+ \mu_i(dx) = \int (x-t)^+ \mu(dx)$$

pour tout nombre réel t (voir [3] pour le cas d'une suite). Par conséquent, si chacune des lois μ_i possède un barycentre positif, alors, pour que la famille $(\mu_i)_{i \in \mathrm{I}}$ converge étroitement vers la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, il faut et il suffit que le barycentre de μ_i converge vers λ et que l'on ait

$$(1.2) \qquad \lim_i \delta_t(\mu_i) = 0$$

pour tout nombre réel t.

Supposons maintenant que la famille $(\mu_i)_{i \in \mathrm{I}}$ soit définie par la formule $\mu_i = *_{j \geqq 1} \mu_{ij}$, à partir de la donnée d'une famille double $(\mu_{ij})_{i \in \mathrm{I},\, j \in \mathbb{N}^*}$ de lois sur $\mathbb{R}$, telle que, pour tout i fixé, les termes de la suite $(\mu_{ij})_{j \geqq 1}$ coïncident avec ε_0 à partir d'un certain rang. Supposons en outre que chacune des lois μ_{ij} possède un barycentre positif. On peut alors se demander s'il existe des conditions, suffisantes à assurer la convergence étroite de μ_i vers une loi de Poisson, qui fassent intervenir, au lieu des quantités $\delta_t(\mu_i)$, les quantités $\delta_t(\mu_{ij})$ (liées de façon plus directe aux données du problème).

Dans le cas où les lois μ_{ij} sont concentrées sur $\mathbb{R}_+$, une réponse fort simple est fournie par le théorème suivant, qui donne une condition *nécessaire et suffisante*, et qui constitue le résultat principal du présent article :

(1.3) THÉORÈME. — *Soit* $(\mu_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *une famille, bornée en moyenne quadratique, de lois sur* $\mathbb{R}$, *concentrées sur* $\mathbb{R}_+$. *Pour tout indice i de* I, *soit* $(\mu_{ij})_{j \geqq 1}$ *une factorisation de* μ_i, *constituée de lois concentrées sur* $\mathbb{R}_+$, *et posons, pour tout nombre réel t* [*en utilisant la notation* (1.1)] :

$$\Delta_i(t) = \sum_j |\delta_t(\mu_{ij})|.$$

Enfin, soient λ *un nombre réel positif et* $\mathscr{F}$ *un filtre sur l'ensemble* I.

Alors, pour que μ_i *converge étroitement* (*suivant le filtre* $\mathscr{F}$) *vers la loi de Poisson* $\mathscr{P}(\lambda)$, *il faut et il suffit que le barycentre de* μ_i *converge vers* λ *et que* $\Delta_i(t)$ *converge vers* 0 *pour tout t.*

2. DÉMONSTRATION DE LA SUFFISANCE

Dans le présent paragraphe, nous démontrerons la partie de (1.3) concernant la suffisance de la condition. A cet effet, nous utiliserons les deux lemmes suivants :

(2.1) LEMME. — *Étant donnée une loi* μ *sur* $\mathbb{R}$, *admettant un barycentre* λ *positif, désignons par c la somme des moments du second ordre des lois* μ *et* $\tilde{\mu}$. *On a alors*

$$|\delta_t(\mu)| \leqq (4t)^{-1} c \qquad pour \quad t > 0, \tag{2.2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\delta_t(\mu)| \leqq \lambda(b-a) + |\delta_a(\mu)| + |\delta_b(\mu)| \\ \qquad pour \quad 0 \leqq a \leqq t \leqq b < \infty. \end{array} \right. \tag{2.3}$$

Démonstration. — La relation (2.2) résulte aussitôt de l'inégalité élémentaire $(x-t)^+ \leqq (4t)^{-1} x^2$ (valable pour tout $t > 0$).

Pour prouver (2.3), considérons les deux fonctions décroissantes f, g ainsi définies sur $\mathbb{R}_+$:

$$f(t) = \int (x-t)^+ \mu(dx) = \int_t^\infty \mu(]y, \infty[)\, dy,$$

$$g(t) = \int (x-t)^+ \tilde{\mu}(dx) = \int_t^\infty \tilde{\mu}(]y, \infty[)\, dy.$$

On a alors, pour $0 \leqq a \leqq t \leqq b < \infty$,

$$\begin{aligned}|\delta_t(\mu)| &= |f(t)-g(t)| \\ &= (f \vee g)(t) - (f \wedge g)(t) \leqq (f \vee g)(a) - (f \wedge g)(b) \\ &\leqq g(a) - g(b) + |\delta_a(\mu)| + |\delta_b(\mu)|.\end{aligned}$$

Il suffit donc de remarquer que l'on a

$$g(a)-g(b) = \int_a^b \tilde{\mu}(]y, \infty[)\, dy \leqq (b-a)\tilde{\mu}(]0, \infty[) = (b-a)\tilde{\mu}([1, \infty[) \leqq \lambda(b-a).$$

(2.4) LEMME. — *Soit* μ *une loi sur* $\mathbb{R}$, *et soit* $(\mu_j)_{j \geqq 1}$ *une factorisation de* μ, *telle que chacune des lois* μ_j *possède un barycentre positif.*

On a alors, pour tout nombre réel t,

$$|\delta_t(\mu)| \leqq \sum_j \sup_s |\delta_s(\mu_j)|.$$

Démonstration. — Puisque la suite $(\tilde{\mu}_j)_{j \geqq 1}$ est une factorisation de $\tilde{\mu}$, on a

$$\mu - \tilde{\mu} = \sum_{j \geqq 1} (\mu_j * \nu_j - \tilde{\mu}_j * \nu_j), \tag{2.5}$$

où ν_j désigne le produit de convolution des lois $\tilde{\mu}_h$ avec $1 \leqq h < j$ et des lois μ_k avec $k > j$. (C'est le même argument utilisé par Lindeberg dans la démonstration de son célèbre théorème). Il en résulte

$$\begin{aligned}|\delta_t(\mu)| &\leqq \sum_{j \geqq 1} \left| \int (x-t)^+ \mu_j * \nu_j(dx) - \int (x-t)^+ \tilde{\mu}_j * \nu_j(dx) \right| \\ &= \sum_{j \geqq 1} \left| \int \nu_j(dy)\, \delta_{t-y}(\mu_j) \right| \leqq \sum_{j \geqq 1} \sup_s |\delta_s(\mu_j)|.\end{aligned}$$

Plaçons-nous maintenant dans les hypothèses du Théorème (1.3) et démontrons la suffisance de la condition. A cet effet, il suffirait de prouver que, si $\Delta_i(t)$ converge vers 0 pour tout t, alors la relation (1.2) a lieu pour tout t. En fait, nous démontrerons un résultat plus précis :

Si $\Delta_i(t)$ *converge vers* 0 *pour tout élément* t *d'un ensemble* D *partout dense dans* $]0, \infty[$, *alors on a la relation*

$$\lim_i \sum_{j \geqq 1} \sup_s |\delta_s(\mu_{ij})| = 0 \tag{2.6}$$

(qui, grâce au lemme précédent, entraîne $\lim_i \sup_t |\delta_t(\mu_i)| = 0$).

Désignons par λ_{ij} le barycentre de μ_{ij}, et par c_{ij} la somme des moments du second ordre de μ_{ij} et de $\tilde{\mu}_{ij}$. De même, désignons par λ_i le barycentre de μ_i, et par c_i la somme des moments du second ordre de μ_i et de $\tilde{\mu}_i$.

Posons en outre $\Lambda = \sup_i \lambda_i$, $C = \sup_i c_i$, et remarquons que l'on a

$$(2.7) \qquad \sum_j \lambda_{ij} = \lambda_i \leqq \Lambda, \qquad \sum_j c_{ij} \leqq c_i \leqq C.$$

Fixons une suite finie $(t_k)_{1 \leqq k \leqq n}$ d'éléments de D, avec $0 < t_1 < \ldots < t_n$, et posons $t_0 = 0$, $\varepsilon = \sup_{1 \leqq k \leqq n} (t_k - t_{k-1})$. Le lemme (2.1) montre alors que l'on a

$$\sup_s |\delta_s(\mu_{ij})| \leqq \lambda_{ij} \varepsilon + \sum_{1 \leqq k \leqq n} |\delta_{t_k}(\mu_{ij})| + (4 t_n)^{-1} c_{ij}.$$

Il en résulte, grâce aux relations (2.7) et à la définition de Δ_i,

$$\sum_{j \geqq 1} \sup_s |\delta_s(\mu_{ij})| \leqq \Lambda \varepsilon + \sum_{1 \leqq k \leqq n} \Delta_i(t_k) + (4 t_n)^{-1} C.$$

La convergence de Δ_i vers 0 en tout point de D entraîne donc

$$(2.8) \qquad \limsup_i \sum_{j \geqq 1} \sup_s |\delta_s(\mu_{ij})| \leqq \Lambda \varepsilon + (4 t_n)^{-1} C,$$

ce qui prouve (2.6), car le deuxième membre de (2.8) peut être pris arbitrairement petit.

3. DÉMONSTRATION DE LA NÉCESSITÉ

Afin de démontrer la partie de (1.3) concernant la nécessité de la condition, nous commencerons par démontrer deux lemmes.

(3.1) LEMME. — *Avec les mêmes hypothèses que dans* (1.3), *supposons que* μ_i *converge étroitement vers la loi de Poisson* $\mathscr{P}(\lambda)$ *et que la condition* (0.1) (i. e. *la condition UAN*) *soit remplie. En outre, pour tout indice i de* I, *considérons la mesure non bornée* $\sigma_i = \sum_j \mu_{ij}$.

On a alors, pour tout nombre réel t strictement positif,

$$\lim_i \int (x - t)^+ \sigma_i(dx) = \lambda (1 - t)^+.$$

Démonstration. — Désignons par M_{ij} le moment du second ordre de μ_{ij}, par M_i celui de μ_i, et posons $c = \sup_i M_i$. On a alors

$$(3.2) \qquad \int x^2 \sigma_i(dx) = \sum_j M_{ij} \leqq M_i \leqq c.$$

Fixons s, avec $0 < s < 1$, $s \leqq t$. On sait (*voir* [2], p. 317) que la mesure induite par σ_i sur l'intervalle $[s, +\infty[$ est une mesure bornée, qui converge vaguement (suivant le filtre $\mathscr{F}$) vers $\lambda\varepsilon_1$. Par conséquent, la mesure admettant comme densité, par rapport à σ_i, la fonction $x \mapsto (x-t)^+$ (majorée par $x \mapsto (4t)^{-1} x^2$) est une mesure bornée, qui converge vaguement vers $\lambda(1-t)^+ \varepsilon_1$. Il suffit donc de vérifier que cette convergence est étroite, c'est-à-dire que la condition de compacité étroite de Prokhorov est remplie. Or, ceci résulte immédiatement de (3.2), compte tenu du fait que $(x-t)^+$ est négligeable devant x^2 lorsque x tend vers $+\infty$.

(3.3) LEMME. — *Avec les mêmes hypothèses que dans* (1.3), *supposons que* μ_i *converge étroitement* (*suivant le filtre* $\mathscr{F}$) *vers une loi de Poisson.*

Étant donnée, pour tout indice i de I, *une partie* A_i *de* $\mathbb{N}^*$, *posons*

$$(3.4) \qquad \nu_{ij} = \begin{cases} \mu_{ij} & \textit{pour} \;\; j \in A_i \\ \varepsilon_0 & \textit{pour} \;\; j \in \mathbb{N}^* \setminus A_i \end{cases}, \qquad \nu_i = *_{j \geqq 1}\, \nu_{ij}.$$

Alors, suivant tout ultrafiltre $\mathscr{U}$ *plus fin que le filtre* $\mathscr{F}$, *les deux familles* $(\nu_i)_{i \in I}$, $(\tilde{\nu}_i)_{i \in I}$ *convergent étroitement vers une même loi de Poisson.*

Démonstration. — Puisque la famille $(\nu_i)_{i \in I}$ est bornée en moyenne quadratique (donc tendue), elle converge étroitement, suivant l'ultrafiltre $\mathscr{U}$, vers une loi ν concentrée sur $\mathbb{R}_+$.

De même, si l'on désigne par $(\pi_i)_{i \in I}$ la famille de lois obtenue, par le même procédé, à partir des complémentaires (par rapport à $\mathbb{N}^*$) des ensembles A_i, on voit que π_i converge étroitement vers une loi π concentrée sur $\mathbb{R}_+$. Puisque la loi $\nu * \pi$ est de Poisson, il en est de même des lois ν et π (grâce au théorème de Raïkov). En outre, puisque la famille $(\nu_i)_{i \in I}$ est bornée en moyenne quadratique, le barycentre de ν_i converge vers celui de ν, de sorte que la loi de Poisson $\tilde{\nu}_i$ converge étroitement vers la loi de Poisson ν.

Le lemme est ainsi démontré.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la partie de (1.3) concernant la nécessité de la condition. Plaçons-nous donc dans les hypothèses de (1.3) et supposons que μ_i converge étroitement vers la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Puisque la famille (μ_i) est bornée en moyenne quadratique, le barycentre λ_i de μ_i converge vers le barycentre λ de $\mathscr{P}(\lambda)$. Pour achever la démonstration, fixons un nombre réel t strictement positif et montrons que $\Delta_i(t)$ converge vers 0 suivant tout ultrafiltre plus fin que le filtre $\mathscr{F}$. Fixons un tel ultrafiltre $\mathscr{U}$, et convenons que toute notion de limite intervenant dans la suite de la démonstration soit à entendre suivant cet ultrafiltre.

1. Plaçons-nous d'abord dans le cas où la condition UAN est remplie. Posons

$$A_i = \{ j \in \mathbb{N}^* : \delta_t(\mu_{ij}) \geqq 0 \},$$

et considérons les lois ν_{ij}, ν_i définies par (3.4).

Il résulte du lemme précédent que les deux familles $(\nu_i)_{i\in I}$, $(\tilde{\nu}_i)_{i\in I}$ convergent étroitement vers une même loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda')$.

En appliquant le lemme (3.1), on obtient les relations

$$\lim_i \sum_j \int (x-t)^+ \, \nu_{ij}(dx) = \lambda'(1-t)^+,$$

$$\lim_i \sum_j \int (x-t)^+ \, \tilde{\nu}_{ij}(dx) = \lambda'(1-t)^+,$$

d'où l'on déduit, par différence, $\lim_i \sum_j [\delta_t(\mu_{ij})]^+ = 0$.

De manière analogue, on trouve $\lim_i \sum_j [\delta_t(\mu_{ij})]^- = 0$. Il en résulte

$$\lim_i \Delta_i(t) = \lim_i \sum_j |\delta_t(\mu_{ij})| = 0.$$

2. Passons maintenant au cas général.

Si, pour un entier j fixé, on applique le lemme (3.3) en prenant $A_i = \{j\}$ pour tout indice i de I, on voit que les deux familles $(\mu_{ij})_{i\in I}$, $(\tilde{\mu}_{ij})_{i\in I}$ convergent étroitement vers une même loi. Il en résulte (ces deux familles étant bornées en moyenne quadratique)

$$(3.5) \qquad \lim_i \delta_t(\mu_{ij}) = 0 \text{ pour tout entier } j.$$

En raisonnant par l'absurde, supposons que l'on ait

$$(3.6) \qquad \lim_i \Delta_i(t) = \lim_i \sum_j |\delta_t(\mu_{ij})| > \varepsilon > 0.$$

Désignons par M_{ij}, M_i les moments du second ordre des lois μ_{ij}, μ_i, et posons $c = \sup_i M_i$. Sans diminuer la généralité, nous pourrons supposer que, pour tout indice i de I, la suite $(M_{ij})_{j\geqq 1}$ soit décroissante. On a alors, pour tout entier $n \geqq 1$,

$$(3.7) \qquad n M_{in} \leqq \sum_{1\leqq j\leqq n} M_{ij} \leqq M_i \leqq c.$$

Posons, pour tout indice i de I,

$$n_i = \inf\{k \in \mathbb{N}^* : \sum_{1\leqq j\leqq k} |\delta_t(\mu_{ij})| > \varepsilon\}$$

(avec la convention $\inf \varnothing = \infty$).

La famille $(n_i)_{i\in I}$ admet une limite dans $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Si cette limite était un entier k, l'ensemble $H = \{i \in I : n_i = k\}$ serait un élément de l'ultrafiltre $\mathscr{U}$, de sorte que la relation

$$\sum_{1\leqq j\leqq k} |\delta_t(\mu_{ij})| > \varepsilon \text{ pour tout élément } i \text{ de H}$$

serait en contradiction avec (3.5). On a donc $\lim_i n_i = \infty$. Posons

$$A_i = \{ j \in \mathbb{N}^* : j \geqq n_i \}$$

et considérons les lois ν_{ij}, ν_i définies par (3.4). D'après le lemme (3.3), la famille $(\nu_i)_{i \in I}$ converge étroitement vers une loi de Poisson. En outre, la famille (ν_{ij}) vérifie la condition UAN, car le moment du second ordre de ν_{ij}, qui est nul pour $j < n_i$ et qui coïncide avec M_{ij} pour $j \geqq n_i$, est majoré, dans ce dernier cas, par M_{i, n_i} [donc par c/n_i en vertu de (3.7)].

Il en résulte (grâce à la première partie de la démonstration)

$$\lim_i \sum_j |\delta_t(\nu_{ij})| = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_i \sum_{j \geqq n_i} |\delta_t(\mu_{ij})| = 0,$$

et par conséquent

$$\lim_i \Delta_i(t) = \lim_i \sum_{1 \leqq j < n_i} |\delta_t(\mu_{ij})| \leqq \varepsilon.$$

Comme ceci est en contradiction avec (3.6), la démonstration est achevée.

4. EXTENSIONS ET CONTRE-EXEMPLES

Dans ce dernier paragraphe nous nous plaçons dans les mêmes hypothèses que dans l'énoncé du théorème (1.3), à une différence près : au lieu de supposer les lois μ_i, μ_{ij} concentrées sur $\mathbb{R}_+$, nous supposons simplement que ces lois possèdent des barycentres positifs.

On reconnaît sans peine que le lemme (3.1) est encore valable, dans ces conditions plus générales, car la relation (3.2) est encore vraie.

On a le résultat suivant, qui généralise la partie de (1.3) concernant la nécessité de la condition :

(4.1) THÉORÈME. — *Avec les hypothèses qu'on vient de préciser, supposons que* μ_i *converge étroitement vers une loi de Poisson. Alors :*

(*a*) *Si la relation* $\lim_i \Delta_i(t) = 0$ *est vérifiée pour* $t = 0$ (*donc* a fortiori *pour* $t < 0$), *elle l'est aussi pour* $t > 0$.

(*b*) *Si la famille* (μ_{ij}) *vérifie l'hypothèse UAN, la relation* $\lim_i \Delta_i(t) = 0$ *a lieu pour* $t < 0$ *et pour* $t \geqq 1$.

Démonstration. — (*a*) On a déjà remarqué que le lemme (3.1) est encore valable dans les conditions présentes. L'hypothèse $\lim_i \Delta_i(0)=0$ assure, de son côté, que le lemme (3.3) est également valable. (Elle permet en effet d'affirmer que les deux lois ν, π qui interviennent dans la démonstration de ce lemme sont concentrées sur $\mathbb{R}_+$). Il suffit donc, pour prouver (*a*), de répéter le raisonnement déjà employé, dans le paragraphe précédent, pour prouver la partie de (1.3) concernant la nécessité de la condition.

(*b*) Soit $t \geqq 1$. Puisque le lemme (3.1) est encore valable, on a

$$\lim_i \sum_j \int (x-t)^+ \, \mu_{ij}(dx)=0.$$

En appliquant le même résultat aux lois de Poisson $\tilde{\mu}_{ij}$, on trouve

$$\lim_i \sum_j \int (x-t)^+ \, \tilde{\mu}_{ij}(dx)=0.$$

Il en résulte $\lim_i \Delta_i(t)=0$.

Soit maintenant $t<0$. Avec les notations du lemme (3.1), il s'agit de prouver la relation

$$\lim_i \int (x-t)^- \, \sigma_i(dx)=0.$$

On sait d'autre part (*voir* [2], p. 317) que l'on a $\lim_i \sigma_i(]-\infty, t])=0$. Par conséquent, la mesure admettant comme densité, par rapport à σ_i, la fonction $x \mapsto (x-t)^-$ est une mesure bornée, qui converge vaguement vers la mesure identiquement nulle. Il suffit donc de vérifier que cette convergence est étroite. Or, grâce à (3.2), ceci résulte du fait que $(x-t)^-$ est négligeable devant x^2 lorsque x tend vers $-\infty$.

Avec les mêmes hypothèses et les mêmes notations, on a aussi le résultat suivant, qui généralise la partie de (1.3) concernant la suffisance de la condition :

(4.2) THÉORÈME. — *Pour que* μ_i *converge étroitement vers la loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$, *il suffit que le barycentre de* μ_i *converge vers* λ *et que l'on ait*

(4.3) $$\lim_i \Delta_i(t)=0 \quad \textit{pour } t \neq 0, \qquad \limsup_i \Delta_i(0)<\infty.$$

Ce résultat est une conséquence du lemme suivant :

(4.4) LEMME. — *Soit* μ *une loi sur* $\mathbb{R}$, *avec*

$$\int (x+x^2)\, \mu(dx) \leqq c,$$

et soit $(\mu_j)_{j \geqq 1}$ *une factorisation de* μ, *telle que chacune des lois* μ_j *possède un barycentre positif.*

Étant donné un intervalle compact $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$, *posons*

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \textit{pour} \quad a \leqq t \leqq b \\ 1 \wedge [c/(a-t)^2] & \textit{pour} \quad t < a \\ 1 \wedge [c/(t-b)^2] & \textit{pour} \quad t > b. \end{cases}$$

On a alors

$$\left| \int f d\dot{\mu} - \int f d\tilde{\mu} \right| \leqq \| f'' \| \int_{\mathbb{R}} h(t) \sum_j |\delta_t(\mu_j)| \, dt$$

pour toute fonçtion réelle f, *deux fois continûment différentiable dans* $\mathbb{R}$, *dont la dérivée seconde soit nulle sur le complémentaire de* $[a, b]$.

Démonstration. — Utilisons le même « argument de Lindeberg » déjà employé dans la démonstration de (2.4) : c'est-à-dire l'identité (2.5), avec la même signification pour ν_j. Nous trouvons ainsi :

$$\int f d(\mu - \tilde{\mu}) = \sum_j \int f d(\mu_j * \nu_j - \tilde{\mu}_j * \nu_j) = \sum_j \int \nu_j(dy) \int f(x+y)(\mu_j - \tilde{\mu}_j)(dx).$$

La formule de Taylor fournit d'autre part, pour tout couple x, y de nombres réels,

$$f(x+y) = f(y) + f'(y) x + \int_{\mathbb{R}} f''(y+t) g(t, x) \, dt,$$

où $g(t, x)$ désigne $(x-t)^+$ si t est positif, et $-(x-t)^-$ dans le cas contraire. On a donc

$$\begin{aligned} \int f(x+y)(\mu_j - \tilde{\mu}_j)(dx) &= \int_{\mathbb{R}} dt \, f''(y+t) \int g(t, x)(\mu_j - \tilde{\mu}_j)(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dt \, f''(y+t) \operatorname{sgn}(t) \, \delta_t(\mu_j). \end{aligned}$$

En outre, puisque f'' est nulle sur le complémentaire de $[a, b]$, on a

$$\int |f''(y+t)| \, \nu_j(dy) \leqq \| f'' \| \, \nu_j([a-t, b-t]).$$

Il en résulte, en posant $h_j(t) = \nu_j([a-t, b-t])$,

$$\begin{aligned} \left| \int f d(\mu - \tilde{\mu}) \right| &\leqq \sum_j \int \nu_j(dy) \int_{\mathbb{R}} dt \, |f''(y+t)| \, |\delta_t(\mu_j)| \\ &\leqq \| f'' \| \sum_j \int_{\mathbb{R}} dt \, |\delta_t(\mu_j)| \, h_j(t). \end{aligned}$$

Il suffit donc de vérifier que la fonction h_j est majorée par h. Or, puisque le moment du second ordre de ν_j est majoré par c, ceci résulte immédiatement de l'inégalité de Markov.

(4.5) *Remarque.* — Dans le cas où le filtre $\mathscr{F}$ possède une base dénombrable, le théorème (4.2) se déduit immédiatement du lemme précédent, par convergence dominée, grâce à l'inégalité

$$\Delta_i(t) \leqq \Delta_i(0) + 2 \int x\, \mu_i(dx).$$

Dans le cas général, on pourra encore utiliser le même lemme, mais après avoir vérifié, à l'aide de (2.1), la convergence *uniforme* de Δ_i vers 0 sur le complémentaire de tout voisinage de l'origine.

Nous terminerons par quelques contre-exemples (dans lesquels la famille filtrée $(\mu_i)_{i \in \mathrm{I}}$ sera toujours une suite).

(4.6) *Exemple.* — Les conditions du théorème (4.2) sont seulement suffisantes: il peut arriver (même sous l'hypothèse UAN) que μ_i converge étroitement vers une loi de Poisson, sans qu'aucune des conditions (4.3) soit remplie.

Considérons en effet, pour tout entier $i \geqq 1$, un couple X_i, Y_i de variables aléatoires indépendantes, admettant comme lois $\mathscr{P}(1/i)$ et $(1/2)\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_{-1})$ respectivement. Choisissons en outre une suite (a_i) de nombres réels strictement positifs, telle que l'on ait

$$\lim_i i a_i^2 = 0, \qquad \lim_i i a_i = \infty,$$

et désignons par μ_{ij} la loi de $\mathrm{X}_i - 1/i + a_i \mathrm{Y}_i$ pour $1 \leqq j \leqq i$, la loi de la constante $1/i$ pour $i < j \leqq 2i$, et la loi de la constante 0 pour $j > 2i$.

On voit aisément que la condition UAN est remplie. En outre, pour tout entier $i \geqq 1$, la loi $\mu_i = \ast_{j \geqq 1} \mu_{ij}$ est le produit de convolution de la loi de Poisson $\mathscr{P}(1)$ et d'une loi centrée admettant comme moment du second ordre $i a_i^2$. Par conséquent, la suite (μ_i) converge étroitement vers $\mathscr{P}(1)$.

Pour $0 < t < 1$, on a

$$\Delta_i(t) \geqq i\,\mathrm{E}[(\mathrm{X}_i - 1/i - a_i - t)^+] \geqq i\,\mathrm{P}\{\mathrm{X}_i = 1\}\,(1 - 1/i - a_i - t)^+ \sim 1 - t.$$

Pour $t = 0$, on a

$$\Delta_i(0) = i\,\mathrm{E}[(\mathrm{X}_i - 1/i + a_i \mathrm{Y}_i)^-] \geqq i\,\mathrm{P}\{\mathrm{X}_i = 0, \mathrm{Y}_i = -1\}\,(1/i + a_i) \sim \frac{1}{2}\, i a_i.$$

Aucune des conditions (4.3) n'est donc remplie.

(4.7) *Exemple.* — Dans le théorème (4.2) on ne peut pas supprimer la condition $\limsup_i \Delta_i(0) < \infty$ (même si on ajoute l'hypothèse UAN).

Considérons, pour tout entier $i \geqq 1$, la loi normale $\nu_i = \mathcal{N}(0, 1/i)$. Posons ensuite $\mu_{ij} = \nu_i$ pour $1 \leqq j \leqq i$, et $\mu_{ij} = \varepsilon_0$ pour $j > i$. La loi $\mu_i = *_{j \geqq 1} \mu_{ij}$ coïncide alors avec $\mathcal{N}(0, 1)$. La condition UAN est vérifiée de manière évidente. En outre, pour tout nombre réel $t > 0$, on a

$$\Delta_i(-t) = \Delta_i(t) = i \int (x-t)^+ \nu_i(dx) = it \int \left(\frac{x}{t\sqrt{i}} - 1 \right)^+ \nu_1(dx)$$
$$\leqq it \int_{t\sqrt{i}}^{\infty} \frac{x^2}{it^2} \nu_1(dx) = \frac{1}{t} \int_{t\sqrt{i}}^{\infty} x^2 \nu_1(dx).$$

On voit donc que la relation $\lim_i \Delta_i(t) = 0$ est vraie pour tout $t \neq 0$.

(4.8) *Exemple.* — Il peut arriver que les conditions suffisantes de (4.2) (ainsi que la condition UAN) soient remplies, sans que $\Delta_i(t)$ converge vers 0 pour $t = 0$.

Considérons en effet, pour tout entier $i \geqq 1$, la loi

$$\nu_i = \frac{1}{i} \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{i}\right)(\varepsilon_{1/i} + \varepsilon_{-1/i}).$$

Posons $\mu_{ij} = \nu_i$ pour $1 \leqq j \leqq i$, et $\mu_{ij} = \varepsilon_0$ pour $j > i$. On vérifie aisément que la loi $\mu_i = *_{j \geqq 1} \mu_{ij}$ converge étroitement vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. En outre, la condition UAN est remplie. Pour prouver que la relation $\lim_i \Delta_i(t) = 0$ est vraie pour tout $t \neq 0$, on peut se borner [*voir* (4.1) (*b*)] aux t strictement compris entre 0 et 1. Fixons un tel t. On a alors, pour i assez grand,

$$\int (x-t)^- \nu_i(dx) = t(1 - 1/i), \qquad \int (x-t)^- \tilde{\nu}_i(dx) = t \exp(-1/i),$$

et par conséquent

$$\Delta_i(t) = i \,|\, \delta_t(\nu_i) \,| = it\,[\exp(-1/i) - 1 + 1/i] \sim t(2i)^{-1}.$$

Par contre, on a

$$\Delta_i(0) = i \int x^- \nu_i(dx) = \frac{1}{2}(1 - 1/i) \sim 1/2.$$

(4.9) *Exemple.* — Dans l'assertion (*b*) de (4.1), la condition UAN est essentielle. Posons en effet

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \mathcal{P}(1/2) * \varepsilon_{-1/2} & \text{pour } j = 1 \\ \mathcal{P}(1/2\,i) * \varepsilon_{1/2\,i} & \text{pour } 1 < j \leqq i+1 \\ \varepsilon_0 & \text{pour } j > i+1. \end{cases}$$

La loi $\mu_i = *_{j \geqq 1} \mu_{ij}$ coïncide alors avec $\mathcal{P}(1)$. La relation $\lim_i \Delta_i(t) = 0$ est cependant fausse pour tout élément t de $]-1/2, 0]$. On a en effet, pour un tel t, en désignant par X une variable aléatoire de loi $\mathscr{P}(1/2)$,

$$\Delta_i(t)=\mathrm{E}[\mathrm{X}-1/2-t)^-]=\mathrm{P}\{\mathrm{X}=0\}(1/2+t)=(1/2+t)\exp(-1/2).$$

RÉFÉRENCES

[1] D. FREEDMAN, The Poisson approximation for dependent events, *Ann. Prob.*, vol. **2**, 1974, p. 256-269.

[2] M. LOÈVE, *Probability Theory*, Van Nostrand, 3rd edition, 1963.

[3] L. PRATELLI, Une caractérisation de la convergence dans L^1. Application aux quasimartingales, *Sém. Prob.* (à paraître).

[4] R. J. SERFLING, A general Poisson approximation theorem, *Ann. Prob.*, vol. **3**, 1975, p. 726-731.

[5] A. N. SHIRYAYEV, *Probability*, Springer, 1984.

(*Manuscrit reçu le* 6 *juin* 1990,
révisé le 10 *septembre* 1991.)