

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

YU. A. KUTOYANTS

T. MOURID

D. BOSQ

Estimation paramétrique d'un processus de diffusion avec retards

Annales de l'I. H. P., section B, tome 28, n° 1 (1992), p. 95-106

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1992__28_1_95_0

© Gauthier-Villars, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Estimation paramétrique d'un processus de diffusion avec retards

par

Yu. A. KUTOYANTS

Université d'Erevan, U.R.S.S.
et Laboratoire de Probabilités,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

et

T. MOURID et D. BOSQ

Laboratoire de Statistique Théorique et Appliqué,
Tour 45, 3^e étage,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

RÉSUMÉ. — Ce travail est consacré à l'estimation paramétrique dans un processus à temps continu. On étudie un modèle naturel d'autorégression à temps continu. Ce processus est solution d'une équation différentielle stochastique avec une dérive dépendant du passé du processus. A partir des résultats obtenus par Ibragimov-Hasminski sur le comportement asymptotique du processus de vraisemblance, on étudie l'estimation d'une mesure discrète représentant les « retards » du processus, dans le cadre des petites diffusions en suivant la méthode de Kutoyants.

ABSTRACT. — We study the parametric estimation of an autoregressive process with continuous time. We use the asymptotic properties of the likelihood process, given by Ibragimov-Hasminski and give some results about convergence, asymptotic normality and minimax bound for the estimator extending Kutoyant's results.

Classification A.M.S. : 60J60, 62A10, 62A15.

**1. INTRODUCTION
NOTATIONS ET DÉFINITIONS**

Les processus autorégressifs d'ordre k à temps continu sont usuellement définis par la relation (voir par ex. [5]) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX_t^{(k)}}{dt^k} &= a_1 \frac{dX_t^{(k-1)}}{dt^{k-1}} + \dots + a_k \frac{dX_t}{dt} + \varepsilon_t, \\ t &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

où la dérivation est en moyenne quadratique, $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ et $(\varepsilon_t, t \geq 0)$ est un bruit blanc. L'ordre k est un entier et l'autorégression est faite sur l'ordre de dérivation pour t fixé. Nous proposons un modèle de « type diffusion » [4] qui nous semble convenir à l'autorégression à temps continu où l'observation X_t dépend du passé du processus et l'ordre k est un réel.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P, (F_t)_{t \geq 0})$ un espace probabilisé muni d'une filtration croissante.

Le modèle général est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\left. \begin{aligned} dX_t^\varepsilon &= \left(\int_0^k X^\varepsilon(t-s) d\mu(s) \right) dt + \varepsilon dW_t, \\ 0 &\leq t \leq T \\ X^\varepsilon(s) &= X_0, \quad -k \leq s \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

avec $X_0(s) (-k \leq s \leq 0)$ une fonction donnée, $(W_t, F_t)_{t \geq 0}$ un processus de Wiener, μ une mesure à signe sur $]0, k]$ où k est un réel strictement positif. Dans la suite on prend $X_0 \equiv x_0 > 0$.

On s'intéresse à l'estimation de la mesure μ dans le cas particulier où

$\mu = \sum_{i=1}^p a_i \delta_{b_i}$, avec p un entier donné. On estime le paramètre

$$\theta = (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p) \in \Theta =]0, A[^p \times \prod_{i=1}^p]\alpha_{i-1}, \alpha_i[$$

où $A > 0$ et $0 < \alpha_0 < \dots < \alpha_p$, en utilisant les résultats obtenus par Ibragimov-Hasminski [2] sur le comportement asymptotique du processus de vraisemblance et sa convergence étroite sur un espace fonctionnel. Soit P_θ^e la loi du processus $(X_t^\varepsilon, 0 \leq t \leq T)$ sur $(\mathcal{C}_{[0, T]}, \mathcal{B})$, espace mesurable des fonctions continues sur $[0, T]$ muni de la topologie de la convergence uniforme, solution de l'équation :

$$dX_t^\varepsilon = \left(\sum_{i=1}^p a_i X_{t-b_i}^\varepsilon \right) dt + \varepsilon dW_t, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2')$$

A la valeur $\varepsilon=0$, on associe l'équation déterministe :

$$(X_t^0)' = \sum_{i=1}^p a_i X_{t-b_i}^0, \quad X_s^0 = x_0 > 0 \quad \text{pour } -k \leq s \leq 0.$$

On considère le rapport de vraisemblance calculé pour l'observation $(X_t^\varepsilon, 0 \leq t \leq T)$:

$$Z_{\varepsilon, \theta}(u) = \frac{dP_\theta^\varepsilon + \varphi_\varepsilon(\theta)u}{dP_\theta^\varepsilon}(X^\varepsilon) \quad (3)$$

où $\theta \in \Theta$.

$\varphi_\varepsilon(\theta)$ une matrice $2p \times 2p$ telle que $\theta + \varphi_\varepsilon(\theta)u \in \Theta$, $u \in \mathbb{R}^{2p}$.

Le processus $Z_{\varepsilon, \theta}(\cdot)$ est défini pour

$$u \in \mathcal{U}_{\varepsilon, \theta} = \varphi_\varepsilon^{-1}(\theta), \quad (\Theta - \theta) \subset \mathbb{R}^{2p}.$$

Par prolongement par continuité, le processus $Z_{\varepsilon, \theta}(u)$ est à trajectoires dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{2p})$ espace des fonctions continues sur \mathbb{R}^{2p} tendant vers 0 à l'infini et muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts [2].

L'estimateur $\hat{\theta}_\varepsilon$ de θ est défini par :

$$\frac{dP_{\hat{\theta}_\varepsilon}^\varepsilon}{dP_{\theta_0}^\varepsilon}(X^\varepsilon) = \sup_{\theta \in \Theta} \frac{dP_\theta^\varepsilon}{dP_{\theta_0}^\varepsilon}(X^\varepsilon) \quad (4)$$

où θ_0 est une valeur fixée du paramètre.

On note $W_{\varepsilon_1, 2}$ ([2], p. 19) la classe des fonctions de perte majorées à l'infini par les fonctions $\exp(\varepsilon_1 \|u\|^2)$, $\varepsilon_1 > 0$.

Les résultats sont établis dans le cadre des « petites diffusions » (i.e. $\varepsilon \rightarrow 0$). Dans la partie II, on montre la normalité asymptotique locale de la famille des lois $(P_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta)$, et la tension de la suite des processus $(Z_{\varepsilon, \theta}(u), u \in \mathbb{R}^{2p})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{2p})$.

Dans la partie III, on en déduit une borne minimax pour le risque associé à $\hat{\theta}_\varepsilon$, la convergence de l'estimation et une loi limite.

II. NORMALITÉ ASYMPTOTIQUE LOCALE ET TENSION DE $(Z_{\varepsilon, \theta}(u))$

1. Existence

LEMME 2.1. — Si $\|\mu\|$ est fini, alors l'équation (2) admet une solution unique (unicité trajectorielle).

Preuve. — En écrivant l'équation (2) sous la forme :

$$dX_t^\varepsilon = S(t, X_t^\varepsilon, \theta) dt + \varepsilon dW_t,$$

avec

$$S(t, X^\varepsilon, \theta) = \int_0^t X^\varepsilon(t-s) d\mu(s),$$

on remarque que la fonctionnelle $S(t, \cdot, \theta)$, définie sur l'espace des fonctions continues $\mathcal{C}_{[t-k, T]}$, vérifie les conditions de Lipschitz ([4], chap. 4).

En effet, on a, pour tout $t > 0$ et $x, y \in \mathcal{C}_{[t-k, T]}$,

L_1 :

$$|S(t, x, \theta) - S(t, y, \theta)| \leq \int_{t-k}^t |x(s) - y(s)| \cdot |\mu_t(ds)|$$

L_2 :

$$|S(t, x, \theta)| \leq \int_{t-k}^t |x(s)| \cdot |\mu_t(ds)|,$$

où μ_t est la mesure translatée de μ sur $[t-k, t]$.

Sous L_1 et L_2 on obtient l'existence et l'unicité trajectorielle de l'équation (2).

2. Normalité asymptotique locale (LAN)

La famille des lois $(P_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta)$ possède la propriété LAN au point $\theta \in \Theta$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ ([1], [2]) s'il existe une matrice $\varphi_\varepsilon(\theta)$ ($2p \times 2p$) telle que le rapport de vraisemblance $Z_{\varepsilon, \theta}(u)$ (3) admet la représentation suivante :

$$Z_{\varepsilon, \theta}(u) = \exp \left\{ \langle u, \Delta_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon) \rangle - \frac{1}{2} |u|^2 + \psi_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon) \right\} \quad (5)$$

où, sous P_θ^ε : la v. a. $\Delta_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon)$ est asymptotiquement un vecteur gaussien : $\mathcal{N}(0, I_d)$ dans \mathbb{R}^{2p} .

I_d est la matrice identité et P_θ - $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon) = 0$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^{2p} .

Le lemme suivant établit le caractère LAN pour la famille de $(P_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta)$ solution de (2').

LEMME 2.2. — La famille $(P_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta)$ des lois de $(X_t^\varepsilon, 0 \leq t \leq T)$ solution de (2') est LAN en tout point $\theta \in K$ compact de Θ . De plus

$$\Delta_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon) = \varepsilon^{-1} \varphi_\varepsilon(\theta) \int_0^T q(\theta, t, X^0) dW_t$$

où : $\Delta_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon)$ est une v. a. gaussienne centrée : $\mathcal{N}(0, I_d)$ dans \mathbb{R}^{2p} ,

$$q(\theta, t, X^0 = \left(X_{t-b_1}^0, X_{t-b_2}^0, \dots, X_{t-b_p}^0, \right. \\ \left. -a_1 \sum_{i=1}^p a_i X_{t-b_i-b_1}^0, \dots, -a_p \sum_{i=1}^p a_i X_{t-b_i-b_p}^0 \right)$$

X^0 est la solution de (2') correspondant à $\varepsilon=0$.

$\varphi_\varepsilon(\theta)$ est la matrice $\varepsilon I^{-1/2}(\theta)$ avec $I(\theta)$ la matrice $(2p \times 2p)$ symétrique défini positive :

$$I_{i,j}(\theta) = \int_0^T (X_{t-b_i}^0)(X_{t-b_j}^0) dt, \quad i, j=1, \dots, p.$$

$$I_{i,p+j}(\theta) = -a_j \int_0^T X_{t-b_i}^0 \left(\sum_{l=1}^p a_l X_{t-b_l-b_j}^0 \right) dt, \quad i, j=1, \dots, p.$$

$$I_{p+i,p+j}(\theta) = a_i a_j \int_0^T \left(\sum_{l=1}^p a_l X_{t-b_l-b_i}^0 \right) \left(\sum_{l=1}^p a_l X_{t-b_l-b_j}^0 \right) dt, \quad i, j=1, \dots, p.$$

Preuve. — Le rapport de vraisemblance $Z_{\varepsilon, \theta}(u)$ s'écrit dans le cas où X^ε vérifie (2') ([4], chap. 7) :

$$Z_{\varepsilon, \theta}(u) = \frac{dP_{\theta+\varepsilon u}^\varepsilon(X^\varepsilon)}{dP_\theta^\varepsilon(X^\varepsilon)} \\ = \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T S(t, X^\varepsilon, \theta + \varepsilon u) - S(t, X^\varepsilon, \theta) dW(t) \right. \\ \left. - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T (S(t, X^\varepsilon, \theta + \varepsilon u) - S(t, X^\varepsilon, \theta))^2 dt \right\} \quad (6)$$

où

$$S(t, X^\varepsilon, \theta) = \sum_{i=1}^p a_i X_{t-b_i}^\varepsilon$$

et

$$S(t, X^\varepsilon, \theta + \varepsilon u) = \sum_{i=1}^p (a_i + \varepsilon u_i) X_{t-b_i-\varepsilon u_{p+i}}^\varepsilon.$$

On écrit le terme intégrale stochastique sous la forme :

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T (S(t, X^\varepsilon, \theta + \varepsilon u) - S(t, X^\varepsilon, \theta)) dW(t) \\ = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T [S(t, X^\varepsilon, \theta + \varepsilon u) - S(t, X^\varepsilon, \theta) - \langle u, \varepsilon q(\theta, t, X^0) \rangle] dW(t) \\ + \int_0^T \langle u, q(\theta, t, X^0) \rangle dW(t) \\ \text{(soit)} = J_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon) + \langle u, \Delta_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon) \rangle.$$

et

$$\frac{1}{\varepsilon} [S(t, X^\varepsilon, \theta + \varepsilon u) - S(t, X^\varepsilon, \theta)] \\ = \sum_1^n u_i X_{t-b_i-\varepsilon u_{p+i}}^\varepsilon + \sum_i a_i \frac{1}{\varepsilon} \int \left[\sum_{j=1}^p a_j X_{v-b_j}^\varepsilon \right] dv \\ + \sum_{j=1}^p a_j [W(t-b_i) - W(t-b_i-\varepsilon u_{p+i})]$$

On utilise essentiellement la continuité de la solution X^0 , un lemme de Gronwall et l'inégalité de Schwarz, pour montrer que la v. a. $J_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon)$ tend vers 0 en probabilité pour $\varepsilon \rightarrow 0$, et que la v. a. $\Delta_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon)$ est gaussienne centrée de matrice de covariance $I(\theta)$ (voir [3¹]). Pour le second terme de (6), on considère l'expression :

$$K_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T (S(t, X^\varepsilon, \theta + \varepsilon u) - S(t, X^\varepsilon, \theta))^2 dt - \langle u, I(\theta) u \rangle$$

On a, pour $u = (u_1, \dots, u_{2p})$:

$$\langle u, I(\theta) u \rangle = \sum_{i=1}^p u_i^2 \int_0^T (X_{t-b_i}^0)^2 dt \\ + \sum_{i=1}^p u_{p+i} a_i^2 \int_0^T \left(\sum_{l=1}^p a_l X_{t-b_l-b_i}^0 \right)^2 dt \\ + 2 \left(\sum_{i,j=1 \dots p} u_i u_{p+j} \left(-a_j \int_0^T X_{t-b_i}^0 \left(\sum_{l=1}^p a_l X_{t-b_l-b_j}^0 \right) dt \right) \right) \\ + \sum_{\substack{i,j=1 \dots p \\ i < j}} u_{p+i} u_{p+j} \int_0^T \left(\sum_{l=1}^p a_l X_{t-b_i-b_l}^0 \right) \left(\sum_{l=1}^p X_{t-b_j-b_l}^0 \right) dt \\ + \sum_{\substack{i,j=1 \dots p \\ i \neq k}} u_i u_j \int_0^T (X_{t-b_i}^0 X_{t-b_j}^0) dt,$$

et

$$\int_0^T (S(t, X^\varepsilon, \theta + \varepsilon u) - S(t, X^\varepsilon, \theta))^2 dt \\ = \int_0^T [\sum ((a_i + \varepsilon u_i) X_{t-b_i-\varepsilon u_{p+i}}^\varepsilon - a_i X_{t-b_i}^\varepsilon)^2 \\ + 2 \sum_{i < j} ((a_i + \varepsilon u_i) X_{t-b_i-\varepsilon u_{p+i}}^\varepsilon - a_i X_{t-b_i}^\varepsilon) \\ \times ((a_j + \varepsilon u_j) X_{t-b_j-\varepsilon u_{p+j}}^\varepsilon - a_j X_{t-b_j}^\varepsilon)] dt$$

On montre alors avec des arguments similaires, que la v. a. $K_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon)$ tend vers 0 en probabilité quand ε tend vers 0.

En regroupant les résultats précédents on déduit alors que :

$$Z_{\varepsilon, \theta}(u) = \exp \left\{ \langle u, \Delta_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon) \rangle + J_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon) - \frac{1}{2} \langle u, I(\theta)u \rangle - \frac{1}{2} K_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon) \right\}$$

d'où le résultat moyennant le changement de variable $u = I(\theta)^{-1/2} v$.

3.

Les lemmes suivants montrent la tension de la suite du processus de vraisemblance $(Z_{\varepsilon, \theta}(u), u \in \mathbb{R}^{2p})$ dans l'espace fonctionnel $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{2p})$.

LEMME 2.3. — Pour tout $m > 8p$, $R > 0$, et K compact de Θ , on a :

$$\sup_{\theta \in K} \sup_{\substack{u_1, u_2 \in \mathcal{W}_{\varepsilon, \theta} \\ \|u_1\| < R, \|u_2\| < R}} \|u_2 - u_1\|^{-m/4} E_\theta |Z_{\varepsilon, \theta}^{1/m}(u_2) - Z_{\varepsilon, \theta}^{1/m}(u_1)|^m < C(1 + R^a)$$

où la constante C dépend de K et $a = \frac{3m}{4}$.

Preuve. — On pose $\theta_i = \theta + \varepsilon u_i$, $u_i = (u_{ji})_j \in \mathbb{R}^{2p}$, $i = 1, 2$ et

$$\Delta X_\varepsilon(t) = S(t, X^\varepsilon, \theta_1) - S(t, X^\varepsilon, \theta_2).$$

Le rapport de vraisemblance pour deux valeurs θ_1 et θ_2 du paramètre s'écrit, pour l'observation X^ε :

$$\frac{dP_{\theta_1}^\varepsilon}{dP_{\theta_2}^\varepsilon}(X^\varepsilon) = \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \Delta X_\varepsilon(t) dW(t) - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T \Delta^2 X_\varepsilon(t) dt \right\}$$

Posons :

$$V(t) = \exp \left\{ \frac{1}{m\varepsilon} \int_0^t \Delta X_\varepsilon(t) dW(t) - \frac{1}{2m\varepsilon^2} \int_0^t \Delta^2 X_\varepsilon(t) dt \right\}$$

De la définition (3) de $Z_{\varepsilon, \theta}(u)$ on déduit que :

$$V(T) = \exp \left(\frac{Z_{\varepsilon, \theta}(u_1)}{Z_{\varepsilon, \theta}(u_2)} \right)^{1/m} = \left(\frac{dP_{\theta_1}^\varepsilon}{dP_{\theta_2}^\varepsilon}(X^\varepsilon) \right)^{1/m} P_{\theta_2}^\varepsilon \text{ p. s.}$$

On écrit alors $V(t) = \exp y(t)$, où $(y(t), 0 \leq t \leq T)$ est le processus vérifiant :

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_t = -\frac{1}{2m\varepsilon^2} \int_0^t (\Delta X_\varepsilon(t))^2 dt + \frac{1}{m\varepsilon} \int_0^t \Delta X_\varepsilon(t) dW(t). \end{cases}$$

La formule de Ito donne alors :

$$\begin{aligned} dV(t) &= V(t) \left(-\frac{1}{2m\varepsilon^2} (\Delta X_\varepsilon(t))^2 \right) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} V(t) \cdot \left(\frac{1}{(m\varepsilon)^2} \Delta^2 X_\varepsilon(t) \right) dt + V(t) \cdot \frac{1}{m\varepsilon} \Delta X_\varepsilon(t) dW(t) \\ &= \frac{1-m}{2(m\varepsilon)^2} \cdot (\Delta X_\varepsilon(t))^2 V(t) dt + \frac{1}{m\varepsilon} \Delta X_\varepsilon(t) V(t) dW(t) \end{aligned}$$

Comme $V(0) = 1$, il en résulte :

$$V(T) = 1 + \frac{1-m}{2(m\varepsilon)^2} \int_0^T \Delta^2 X_\varepsilon(t) V(t) dt + \frac{1}{m\varepsilon} \int_0^T \Delta X_\varepsilon(t) V(t) dW(t).$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} E_\theta | Z_{\varepsilon, \theta}^{1/m}(u_2) - Z_{\varepsilon, \theta}^{1/m}(u_1) |^m &= E_\theta \left| Z_{\varepsilon, \theta}^{1/m}(u_2) \left(1 - \frac{Z_{\varepsilon, \theta}^{1/m}(u_1)}{Z_{\varepsilon, \theta}^{1/m}(u_2)} \right) \right|^m \\ &= E_\theta \left| \left(\frac{dP_{\theta_2}^\varepsilon}{dP_{\theta_1}^\varepsilon} \right)^{1/m} (1 - V(T)) \right|^m = E_{\theta_2} |1 - V(T)|^m. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité $(a+b)^m \leq 2^{m-1}(a^m + b^m)$ et l'inégalité de Holder pour $p=m$ et $q = \frac{m}{m-1}$, on obtient :

$$\begin{aligned} E_\theta | Z_{\varepsilon, \theta}^{1/m}(u_2) - Z_{\varepsilon, \theta}^{1/m}(u_1) |^m &\leq \frac{C_1}{\varepsilon^{2m}} \int_0^T E_{\theta_2} ((\Delta X_\varepsilon(t))^{2m} V^m(t)) dt + \frac{C_2}{\varepsilon^m} \int_0^T E_{\theta_1} (\Delta X_\varepsilon(t))^m dt \\ &\leq \frac{C_1}{\varepsilon^{2m}} \int_0^T E_{\theta_1} ((\Delta X_\varepsilon(t))^{2m} dt + \frac{C_2}{\varepsilon^m} \int_0^T E_{\theta_1} (\Delta X_\varepsilon(t))^m dt \end{aligned}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes positives.

De la définition,

$$\Delta X_\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^p [(a_i + \varepsilon u_{i,1}) X_{t-b_i-\varepsilon u_{p+i,1}}^\varepsilon - (a_i + \varepsilon u_{i,2}) X_{t-b_i-\varepsilon u_{p+i,2}}^\varepsilon],$$

de l'inégalité de Holder, des propriétés du mouvement brownien, il découle :

$$E_{\theta_1} (\Delta X_\varepsilon(t))^{2m} \leq K_1 \varepsilon^{2m} \|u_2 - u_1\|^m + K_2 \varepsilon^{3m} \|u_2 - u_1\|^{m/2}$$

et

$$E_{\theta_1} (\Delta X_\varepsilon(t))^m \leq M_1 \varepsilon^m \|u_2 - u_1\|^{m/2} + M_2 \varepsilon^{2m} \|u_2 - u_1\|^{m/4}$$

Le lemme se déduit des majorations précédentes.

LEMME 2.4. — Pour tout $\varepsilon > 0$ et $u \in \mathcal{U}_{0, \varepsilon}$, on a, pour tout compact K de Θ :

$$\sup_{\theta \in K} \mathbf{P}_{\theta}^{\varepsilon} (Z_{\varepsilon, \theta}(u) \geq e^{-\gamma \|u\|^2}) \leq C e^{-\gamma \|u\|^2}$$

où γ et C sont des constantes positives.

Preuve. — En suivant [3²], soit $0 < a < \frac{1}{2}$ et $u = (u_1, \dots, u_{2p}) \in \mathbb{R}^{2p}$ avec $u_i > 0$. En appliquant l'inégalité de Schwartz, on a pour $b > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\theta}^{\varepsilon} (Z_{\varepsilon, \theta}(u) \geq e^{-\gamma \|u\|^2}) &\leq e^{a\gamma \|u\|^2} \mathbf{E}_{\theta} (Z_{\varepsilon, \theta}(u))^a \\ &\leq e^{a\gamma \|u\|^2} \mathbf{E}_{\theta} \left\{ \exp \left(\frac{a}{\varepsilon} \int_0^T \Delta X_{\varepsilon}(t) dW(t) - \frac{a}{2\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_{\varepsilon}(t))^2 dt \right) \right\} \\ &\leq e^{a\gamma \|u\|^2} \mathbf{E}_{\theta} \left\{ \exp \left(\frac{a}{\varepsilon} \int_0^T \Delta X_{\varepsilon}(t) dW(t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{b}{2\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_{\varepsilon}(t))^2 dt + \frac{b-a}{2\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_{\varepsilon}(t))^2 dt \right) \right\} \\ &\quad \times \left(\mathbf{E}_{\theta} \exp \left(\frac{b-a}{\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_{\varepsilon}(t))^2 dt \right) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

D'autre part on a ([4], p. 216) :

$$\mathbf{E}_{\theta} \exp \left(\int_0^T \frac{2a}{\varepsilon} \Delta X_{\varepsilon}(t) dW(t) - \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{2a \Delta X_{\varepsilon}(t)}{\varepsilon} \right)^2 dt \right) = 1.$$

En choisissant $b = 2a^2$ et en notant

$$\Delta X_0(t) = S(t, X^0, \theta + \varepsilon u) - S(t, X^0, \theta)$$

où X^0 est la solution de (2') pour $\varepsilon = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\theta} \left(\exp \cdot \frac{b-a}{\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_{\varepsilon}(t))^2 dt \right) \\ \leq \mathbf{E}_{\theta} \exp \left[\left(- \frac{a(1-2a)}{\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_0(t))^2 dy \right) \right. \\ \left. \times \exp \cdot \left(\frac{2a(1-a)}{\varepsilon^2} \int_0^T |\Delta X_0(t)| \cdot |\Delta X_{\varepsilon}(t) - \Delta X_0(t)| dt \right) \right] \end{aligned}$$

En prenant $X_0^0 = x_0 > 0$, on montre que la solution $(X_t^0, t \geq 0)$ est croissante et que $X_t^0 \geq x_0$ pour tout t positif. On en déduit alors que :

$$|\Delta X_0(t)| \geq x_0 \varepsilon \cdot \beta \|u\|, \quad \text{où } \beta > 0.$$

Ce qui entraîne :

$$\exp \left(- \frac{a(1-2a)}{\varepsilon^2} \int_0^T \Delta^2 X_0(t) dt \right) \leq \exp \cdot (-K_a \|u\|^2),$$

où $K_a > 0$.

D'autre part par un lemme de Gronwal, on a :

$$X_t^0 \leq x_0 B e^{At}, \quad 0 \leq t \leq T$$

où A, B sont des constantes positives.

Par conséquent :

$$|\Delta X_t^0| \leq \varepsilon x_0 e^{At} A_2 \|u\| \quad (0 \leq t \leq T),$$

où $A_2 > 0$.

$$|\Delta X_\varepsilon(t) - \Delta X_0(t)| \leq K'_a \varepsilon e^{At} \sup_{0 \leq t \leq T} |W(t)|,$$

$$K'_a > 0.$$

En appliquant la majoration suivante [3¹] :

$$E \exp(l \sup_{0 \leq t \leq T} |W(t)|) \leq 2(1 + Tl^2) \exp\left(\frac{1}{2} Tl^2\right)$$

On obtient

$$E_\theta \exp\left(\frac{2a(1-a)}{\varepsilon^2} \int_0^T |\Delta X_0(t)| \cdot |\Delta X_\varepsilon(t) - \Delta X_0(t)| dt\right) \\ \leq 2(1 + TL_a \|u\|^2) \cdot \exp\left(\frac{1}{2} TL_a^2 \|u\|^2\right)$$

où L_a est une constante positive.

On a alors :

$$P(Z_{\varepsilon, \theta}(u) \geq e^{-\gamma \|u\|^2}) \leq C \cdot \exp\left(a\gamma \|u\|^2 - \|u\|^2 \left(K_a - \frac{3}{2} TL_a^2\right)\right)$$

En choisissant a tel que $K_a - \frac{3}{2} TL_a^2 = \frac{1}{4} K_a$ et γ vérifiant $\frac{1}{4} K_a - a\gamma > \gamma$,

on en déduit que

$$P(Z_{\varepsilon, \theta}(u) \geq e^{-\gamma \|u\|^2}) \leq C \cdot \exp(-\gamma \|u\|^2).$$

d'où le lemme.

III. BORNE MINIMAX. PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES

On déduit de la normalité asymptotique locale de la famille $(P_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta)$, comme dans [2], p. 162, une inégalité de Hajek :

THÉORÈME 3.1. — Pour tout estimateur $\hat{\theta}_\varepsilon^*$ du paramètre θ , on a la minoration suivante :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|\theta - \theta_0| < \delta} E_\theta^\varepsilon(w(\varphi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)(\hat{\theta}_\varepsilon^* - \theta))) \geq E w(\xi) \quad (*)$$

pour tout $w \in W_{\varepsilon_1, 2}$ (voir I) et où : ξ est une v. a. de loi normale : $\mathcal{N}(0, I_d)$ dans \mathbb{R}^{2p} et $\varphi_\varepsilon(\theta_0)$ est la matrice de normalisation du lemme 2.2.

— Les estimateurs qui réalisent l'égalité dans (*), pour tout θ_0 , sont dits asymptotiquement efficaces.

THÉORÈME 3.2. — *L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_\varepsilon$ est tel que, uniformément pour tout $\theta \in K$ compact de Θ :*

1. Sous $P_\theta^\varepsilon : P_\theta^\varepsilon\text{-lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{\theta}_\varepsilon = \theta$

$$\varphi_\varepsilon^{-1}(\theta)(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi, \quad \mathcal{L}(\xi) \sim \mathcal{N}(0, \text{Id}) \text{ dans } \mathbb{R}^{2p}$$

2. *Tous les moments d'ordre $p > 0$ de la v. a. $\varphi_\varepsilon^{-1}(\theta)(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta)$ converge vers les moments du même ordre de la v. a. ξ quand ε tend vers 0.*

3. *L'estimation $\hat{\theta}_\varepsilon$ est asymptotiquement efficace.*

Preuve. — En suivant [2], p. 105, on note μ^ε la loi du processus $(Z_{\varepsilon, \theta}(u), u \in \mathbb{R}^{2p})$ sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{2p})$, on déduit du lemme 2.2 la convergence des lois finidimensionnelles de $Z_{\varepsilon, \theta}$, et du lemme 2.3 et 2.4 découle la convergence faible, sous P_θ^ε , dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{2p})$, de la suite μ^ε vers μ^0 loi du processus :

$$Z(u) = \exp \left\{ \langle u, \xi \rangle - \frac{1}{2} \|u\|^2 \right\} \quad \text{où } \mathcal{L}(\xi) \sim \mathcal{N}(0, \text{Id}).$$

D'autre part de la définition de $\hat{\theta}_\varepsilon$, et de la continuité de la fonctionnelle définie sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{2p})$ par : $h \rightarrow \sup_{u < x} h(u) - \sup_{u \geq x} h(u)$, on a pour $x \in \mathbb{R}^{2p}$:

$$\begin{aligned} & P_\theta^\varepsilon(\varphi_\varepsilon^{-1}(\theta)(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta) < x) \\ &= P_\theta^\varepsilon \left(\sup_{u < x} \frac{dP_\theta^\varepsilon + \varphi_\varepsilon(\theta)u}{dP_\theta^\varepsilon} > \sup_{u \geq x} \frac{dP_\theta^\varepsilon + \varphi_\varepsilon(\theta)u}{dP_\theta^\varepsilon} \right) \\ &= P_\theta^\varepsilon(\sup_{u < x} Z_{\varepsilon, \theta}(u) \geq \sup_{u \geq x} Z_{\varepsilon, \theta}(u)) \\ &\quad \rightarrow P(\sup_{u < x} Z(u) \geq \sup_{u \geq x} Z(u)) \\ &= P(\sup_{u < x} \exp \left\{ \langle u, \xi \rangle - \frac{1}{2} \|u\|^2 \right\} \geq \sup_{u \geq x} \exp \left\{ \langle u, \xi \rangle - \frac{1}{2} \|u\|^2 \right\}) \\ &= P(\xi < x) \end{aligned}$$

puisque $Z(u)$ atteint presque sûrement son maximum au point $\hat{u}(\theta) = \xi$, d'où le théorème.

Les autres assertions du théorème découlent du théorème 1.1 [2], p. 174.

— *Estimateurs bayesiens.* — Si le paramètre θ est une v. a. dans \mathbb{R}^{2p} de densité a priori $\Pi(\theta)$ sur Θ , on note $\tilde{\theta}_\varepsilon(X^\varepsilon)$ l'estimateur de Bayes correspondant à la densité $\Pi(\theta)$ et à la fonction de perte $W(\theta, y) = W(\theta - y)$, où $W(u) = |u|^a$, pour $a > 1$.

L'estimateur $\tilde{\theta}(X^e)$ est défini par l'équation :

$$\int_{\Theta} W(\theta, \tilde{\theta}_e) p(\theta | X^e) d\theta = \inf_{y \in \Theta} \int_{\Theta} W(\theta, y) p(\theta | X^e) d\theta$$

où $p(\theta | X^e)$ est la densité *a posteriori* de θ .

On a alors en utilisant les lemmes 2.2, 2.3, 2.4 et le théorème 2.1 [2], p. 179 :

THÉORÈME 3.3. — *Si la densité a priori $\Pi(\theta)$ est continue et strictement positive, l'estimateur de Bayes $\tilde{\theta}_e$ possède les propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance du théorème 3.2.*

RÉFÉRENCES

- [1] J. HAJEK, Local Asymptotic Minimax and Admissibility in Estimation, *Proceedings of the sixth Berkeley Symposium on Math. Statist. and Proba.*, Univ. Calif. Press, Berkeley, vol. 1, 1972, p. 175-194.
- [2] I. A. IBRAGIMOV et R. Z. HASMINSKI, *Statistical Estimation: Asymptotic Theory*, Springer, New York, 1981.
- [3¹] Yu. A. KUTOYANTS, *Parameter Estimation for Stochastic Process*, Berlin, Heldermann, 1984.
- [3²] Yu. A. KUTOYANTS, An Example of Estimating a Parameter of a Nondifferentiable Drift, *Theory Proba. Appl.*, vol. 33, n° 1, 1988, p. 175-179.
- [4] R. S. LIPTZER et A. N. SHIRYAEV, *Statistics of Random Processes*, vol. I, Springer, New York, 1977.
- [5] M. B. PRIESTLEY, *Spectral Analysis and Times Series*, vol. 1, Academic Press, 1981.
- [6] D. G. KORENEVSKY, *Stability of Dynamical Systems Under Random Perturbation of Parameters, Algebraic Criteries*, Kiev, Naukova Dumka., 1989 (en russe).

(Manuscrit reçu le 7 janvier 1991 ;
corrigé le 13 mai 1991.)