ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ANNE ESTRADE

Exponentielle stochastique et intégrale multiplicative discontinues

Annales de l'I. H. P., section B, tome 28, n° 1 (1992), p. 107-129

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1992__28_1_107_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 28, n° 1, 1992, p. 107-129. *Probabilités et Statistiques*

Exponentielle stochastique et intégrale multiplicative discontinues

par

Anne ESTRADE

Département de Mathématiques, Université d'Orléans, B.P. 6759,
45067 Orléans Cedex 2, France

RÉSUMÉ. — Pour toute semi-martingale càdlàg M à valeurs dans l'algèbre d'un groupe de Lie, on donne un sens géométrique à l'équation $dX = X_- \, dM$, où l'inconnue X est une semi-martingale à valeurs dans le groupe de Lie. On montre que cette équation admet pour toute condition initiale une solution unique, que cette solution est une intégrale multiplicative, et on retrouve ainsi ce qu'avait énoncé McKean pour les mouvements browniens. On présente enfin comment obtenir de manière réciproque M à partir de X.

Mots clés : Exponentielle stochastique; logarithme stochastique; intégrale multiplicative; groupe de Lie.

ABSTRACT. — Let M be a not necessarily continuous Lie group algebra-valued semimartingale, and consider from a geometrical point of view the equation $dX = X_- \, dM$, where the unknown X is a Lie group-valued semimartingale. It will be proved that this equation admits a unique solution for every given initial condition, that this solution is a multiplicative integral, and thus McKean's result for brownian motion will be extended. Conversely, a method to derive M from X will be presented.

Classification A.M.S. : 60 G 48, 60 B 15.

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques - 0246-0203
Vol. 28/92/01/107/23/$ 4,30/© Gauthier-Villars

Nous proposons ici une extension au cas càdlàg de l'exponentielle stochastique des groupes de Lie, introduite par M. Hakim-Dowek et D. Lépingle [HDL] dans le cas continu.

Cette exponentielle stochastique permet de plonger les semi-martingales de $\mathbb{R}^d$ dans un groupe de Lie de dimension d; le résultat est obtenu par deux méthodes, soit en résolvant une équation différentielle stochastique sur le groupe, soit comme une intégrale stochastique multiplicative.

La coïncidence de ces deux procédés pour construire des processus à valeurs dans un groupe a été précisée depuis longtemps dans le cas particulier des processus browniens [McK], plus récemment pour les processus à accroissements indépendants [FS], et de manière assez complète en ce qui concerne les groupes de matrices (*voir* par exemple [I] pour les processus de diffusion, [Ma] pour les processus ponctuels, [Em1] et [K] pour les semi-martingales càdlàg).

En préliminaire, nous présentons un certain type d'équations différentielles sur $\mathbb{R}^d$, qui sont en fait celles que l'on obtient en transportant à l'aide de cartes locales les équations du groupe. Elles concernent donc des processus réels, s'écrivent $X = F(X, M)$, et se résolvent avec le même esprit que celles de [DDM] ou [Em1], malgré un terme supplémentaire dans la fonctionnelle F qui précise les sauts de X.

Dans le premier paragraphe, nous donnons une interprétation sur le groupe de l'équation exponentielle $dX = X_- \, dM$ (où M est une semi-martingale à valeurs dans l'algèbre de Lie) en précisant l'action de X sur dM, et en imposant le saut multiplicatif de X : $(X_-)^{-1} X = \exp(\Delta M)$. Nous résolvons cette équation comme on résout les équations sur une variété (*cf.* [IW]), en étudiant le problème image sur $\mathbb{R}$. On définit alors l'exponentielle stochastique du groupe et on obtient une formule d'addition.

Nous montrons dans le paragraphe suivant que l'exponentielle stochastique est une intégrale multiplicative : la solution X de l'équation précédente peut en effet être approchée par des produits de termes, fonctions des accroissements infinitésimaux de M, en l'occurence $\exp(M(t_{i+1}) - M(t_i))$.

En troisième partie, nous mettons en évidence une application réciproque de l'exponentielle stochastique; il suffit pour cela d'inverser l'équation $dX = X_- \, dM$. Ce logarithme stochastique est exactement, dans le cas continu, le relèvement sur l'espace tangent à l'origine [Em2].

0. NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

On se fixe un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathscr{F}_t)_t$ complète, continue à droite, telle que $\mathscr{F} = \vee_t \mathscr{F}_t$. Tous les processus seront càdlàg et adaptés à la filtration, l'intégrale d'Itô sera symbolisée par un point, celle de Stratonovitch par un petit rond.

On note $\mathbb{D}$ (resp. $\mathbb{D}_d$) l'espace des processus càdlàg adaptés et $\mathbb{S}$ (resp. $\mathbb{S}_d$) celui des semi-martingales càdlàg, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^d$).

Pour $p \in [1, +\infty[$, on utilisera le sous-espace $\mathscr{S}^p$ de $\mathbb{D}$:

$$\| X \|_{\mathscr{S}^p} = \| X^* \|_{L^p} \quad \text{où} \quad X^* = \sup_{t \leq .} | X_t |$$

et les sous-espaces $\mathscr{H}^p$ et $\mathscr{H}^\infty$ de $\mathbb{S}$. Ces espaces, ainsi que des inégalités concernant les normes associées, sont présentés en détails dans [Me]. Si $X = (X^i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{D}_d$, on notera X^* le processus réel égal à $\max_{1 \leq i \leq d} (X^i)^*$, et on disposera ainsi des sous-espaces $\mathscr{S}_d^p$ de $\mathbb{D}_d$ et $\mathscr{H}_d^p$ et $\mathscr{H}_d^\infty$ de $\mathbb{S}_d$.

Si $X \in \mathbb{D}$ et si $\mathbb{J}$ est un intervalle aléatoire, on définit $\Delta_{\mathbb{J}} X$, restriction de X à $\mathbb{J}$ de la manière suivante :

pour S et T des temps d'arrêt tels que $S \leq T$ p. s.,

si	$\mathbb{J} =$	$[S, T]$	$]S, T[$	$[T]$	...
alors	$\Delta_{\mathbb{J}} X =$	$(X - X^{S-})^T$	$(X - X^S)^{T-}$	$\Delta_T X = (X - X^{T-})^T$	...

Notre but dans ce paragraphe est d'énoncer, sans démonstration, un résultat d'existence concernant les équations de la forme

$$X = H + u X_- . M + v X . \langle M^c, M^c \rangle + w(X, .)_- * \mu^M$$

où l'étoile désigne l'intégrale par rapport à une mesure aléatoire et μ^M la mesure aléatoire associée aux sauts de M (*cf.* [JS]).

On introduit les conditions suivantes, pour toute fonction u de $\mathbb{D}_m$ dans $\mathbb{D}_n$ et pour tout $a > 0$:

(C0) $u\underline{0} = \underline{0}$ p. s. ($\underline{0}$ est le processus nul),

(C1) $\forall X, Y \in \mathbb{D}_m$ et $\forall T$ temps d'arrêt, $X^{T-} = Y^{T-} \Rightarrow (uX)^{T-} = (uY)^{T-}$,

(C2$-a$) $\forall X, Y \in \mathbb{D}_m$ et $\forall t \geq 0$, $(uX - uY)_t^* \leq a (X - Y)_t^*$.

On définit de nouveaux espaces de semi-martingales :

si $0 < \alpha < 1$, $\beta \in \mathbb{R}^+$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $D_d(\alpha, \beta, k)$ désignera l'ensemble des semi-martingales $M \in \mathscr{H}_d^\infty$ pour lesquelles il existe une famille de $k+1$ temps d'arrêt $0 = T_0 < T_1 < \ldots < T_k$, telle que $M = (M)^{T_k^-}$ et pour $i = 0, \ldots, k-1$

$$\| \Delta_{]T_i, T_{i+1}]} M \|_{\mathscr{H}_d^\infty} < \alpha \quad \text{et} \quad \| \Delta_{T_i} M \|_{\mathscr{H}_d^\infty} < \beta.$$

DÉFINITION. — Soit F une fonction de $\mathbb{D}_m \times \mathbb{S}_n$ dans $\mathbb{D}_m$, soit g une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ localement bornée et soit $a > 0$. Nous dirons que F est une *machine* (a, g). *lipschitzienne*, et nous noterons $F \in \mathrm{Lip}(a, g)$, s'il existe trois fonctions : u de $\mathbb{D}_m$ dans $\mathbb{D}_{nm}$; v de $\mathbb{D}_m$ dans $\mathbb{D}_{(n^2 m)}$ et w de $\mathbb{D}_m \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{D}_m$ telles que :

- u et v vérifient (C0), (C1) et (C2-a)
- $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $w(., x)$ vérifie (C0), (C1) et (C2$- g(x) | x |^2$)
- $\forall X \in \mathbb{D}_m$, $\forall M \in \mathbb{S}_n$,

$$F(X, M) = u X_- . M + v X . \langle M^c, M^c \rangle + w(X, .)_- * \mu^M$$

Pour $M \in \mathbb{S}_n$, M^c est la partie martingale continue de M et μ^M est la mesure aléatoire sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ définie par :

$$\mu^M(dt, dx) = \sum_s 1_{(\Delta M_s \neq 0)} \delta_{(s, \Delta M_s)}(dt, dx).$$

Plus généralement, on dira que F est une *machine lipschitzienne*, et on notera $F \in \mathrm{Lip}$, s'il existe un réel $a > 0$ et une application g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ localement bornée tels que $F \in \mathrm{Lip}(a, g)$.

PROPOSITION 0.1. – *Soient* $H \in \mathcal{S}^p_m$, $M \in D_n(\alpha, \beta, k)$ *et* $F \in \mathrm{Lip}(a, g)$. *L'équation*

$$X = H + F(X, M) \tag{1}$$

admet une unique solution dans $\mathcal{S}^p_m$. *De plus cette solution* X *vérifie :* $\|X\|_{\mathcal{S}^p_m} \leq b \|H\|_{\mathcal{S}^p_m}$ *où* b *ne dépend que de* (α, β, k, a, g).

On trouvera une démonstration de cette proposition dans [Es]. La méthode est identique à celle de [DDM] ou [Em1] et consiste à appliquer un théorème de point fixe sur chaque intervalle $]T_i, T_{i+1}[$, intervalle sur lequel M varie peu en norme $\mathcal{H}^\infty_n$. Ce résultat local permet d'obtenir, par arrêt en des temps arbitrairement grands, le résultat global suivant :

PROPOSITION 0.2. – *Soient* $H \in \mathbb{D}_m$, $M \in \mathbb{S}_n$ *et* $F \in \mathrm{Lip}$. *L'équation* (1) *admet une solution et une seule dans* $\mathbb{D}_m$.

1. DÉFINITION DE L'EXPONENTIELLE STOCHASTIQUE

Dans ce qui suit, G sera un groupe de Lie de dimension d connexe (G est alors localement compact et admet une base dénombrable de voisinages). On notera e l'élément neutre de G, et $\mathcal{G}$ l'espace tangent à G en e ($\mathcal{G} = T_e G$).

$\mathcal{G}$ est un espace vectoriel de dimension d et une algèbre de Lie pour un certain crochet. Nous utiliserons peu l'ensemble $\mathcal{G}$ en tant qu'algèbre; par contre nous identifierons de manière constante $\mathcal{G}$ à l'espace des champs de vecteurs sur G invariants à gauche.

Plus précisément, à tout élément A de $\mathcal{G}$ on peut associer un unique champ de vecteurs Z_A invariant à gauche tel que $Z_A(e) = A$: Z_A est donné par $g \to Z_A(g) = dL_g(A)$ où dL_g est l'application tangente en e à $L_g : x \to gx$. Nous noterons de la même manière l'élément A de $\mathcal{G}$ et le champ de vecteurs qui lui correspond, et si $g \in G$, gA désignera le champ de vecteurs translaté à gauche, c'est-à-dire $gA = Z_A(g)$. Pour plus de rigueur et de détails nous renvoyons à [H].

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions de G dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞, à support compact.

Soit $(H_i)_{1<i\leqq d}$ une base de $\mathcal{G}$. Toute semi-martingale M à valeurs dans $\mathcal{G}$ [ce qu'on écrit $M \in \mathbb{S}(\mathcal{G})$] est de la forme $M = M^i H_i$ où $(M_i)_{1\leqq i\leqq d}$ est une famille de semi-martingales réelles.

DÉFINITION. — On appelle *semi-martingale sur G* tout processus $(X_t)_t$ à valeurs dans G tel que, pour tout $f \in \mathscr{C}$, $(f(X)_t)_t$ est une semi-martingale réelle. On note $\mathbb{S}(G)$ l'ensemble des semi-martingales sur G.

THÉORÈME 1.1. — *Quel que soit* $M \in \mathbb{S}(\mathcal{G})$ *et quelle que soit la variable aléatoire* X_0 $\mathscr{F}_0$. *mesurable à valeurs dans* G, *l'équation :*

$$\forall f \in \mathscr{C}, \quad f(X) = f(X_0) + H_i f(X_-) \circ M^i + \sum_{s\leqq .} (f(X_{s-} \exp \Delta M_s) - f(X_{s-}) - H_i f(X_{s-}) \Delta M_s^i) \quad (2)$$

admet une unique solution X *dans* $\mathbb{S}(G)$.

DÉFINITION. — Pour tout $M \in \mathbb{S}(\mathcal{G})$, on appelle *exponentielle stochastique de M* l'unique solution de (2) issue de e, et on la note $\mathscr{E}(M)$.

Remarques. — 1. Dans le cas où la semi-martingale sur $\mathcal{G}$, M, est continue, l'équation (2) devient :

$$\forall f \in \mathscr{C}, \quad f(X) = f(X_0) + H_i f(X) \circ M^i.$$

C'est cette équation qu'ont utilisée M. Hakim-Dowek et D. Lépingle [HDL] pour construire l'exponentielle stochastique des groupes de Lie. On peut illustrer cette équation par une sorte d'équation différentielle stochastique sur G :

$$dX_t = X_t \, dM_t$$

où dX_t doit être considéré comme un élément de l'espace tangent $T_{X_t}G$, dM_t comme un élément de $\mathcal{G} = T_e G$, et $X_t \, dM_t$ comme l'image de dM_t par la translation à gauche de X_t. De même que dans [IW], on utilise une intégrale de Stratonovitch et non d'Itô pour traduire la translation à gauche; la première de ces intégrales est stable par changement de cartes, ce qui n'est pas le cas de la seconde.

2. Dans le cas où M n'est pas continue, on peut définir le processus $X = \mathscr{E}(M)$ directement sur G :

— aux instants où M ne saute pas, l'accroissement infinitésimal de X est toujours donné par : $dX_t = X_t \, dM_t$

— en revanche, aux instants où M saute, il faut définir le saut multiplicatif de X. On a choisi d'imposer le saut à gauche :

$$(X_{t-})^{-1} X_t = \exp \Delta M_t$$

Quand G est un groupe de matrices, on peut donner un sens au saut additif de X, $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$, et imposer de manière naturelle $\Delta X_t = X_{t-} \, \Delta M_t$. C'est ainsi que procède M. Emery [Em1]. Il obtient alors comme saut multiplicatif de X, $(X_{t-})^{-1}X_t=I+\Delta M_t$, et son exponentielle stochastique n'est pas exactement $\mathscr{E}$.

3. L'équation (2) est équivalente à :

$$\begin{aligned}\forall f\in\mathscr{C},\quad f(X)=f(X_0)&+H_i f(X_-)\,.\,M^i\\&+1/2\,H_iH_l f(X)\,.\,\langle M^{ic}, M^{lc}\rangle\\&+\sum_{s\leqq .}(f(X_{s-}\exp\Delta M_s)-f(X_{s-})-H_i f(X_{s-})\,\Delta M_s^i).\end{aligned}$$

LEMME 1.2. – *Soit* $X\in\mathbb{S}(G)$ *tel que* $X_0=0$ *et soit* T *un temps d'arrêt.*

1. *Soient* Γ *et* Γ' *des variables aléatoires* $\mathscr{F}_{0.}$ *mesurables à valeurs dans* G. *Il y a équivalence entre :*

(i) ΓX *est solution de* (2) *issue de* Γ

(ii) $\Gamma' X$ *est solution de* (2) *issue de* Γ'.

2. *Soit* Γ'' *une variable aléatoire à valeurs dans* G, $\mathscr{F}_{T.}$ *mesurable. Si* X *est une solution de* (2) *alors* $\Gamma'' X$ *vérifie l'équation suivante :*

$$\begin{aligned}f(Y_{T+t})=f(Y_T)&+\int_{]T,\,T+t]}H_i f(Y_{s-})\,dM_s^i\\&+1/2\int_{]T,\,T+t]}H_iH_l f(Y_s)\,d\langle M^{ic}, M^{lc}\rangle_s\\&+\sum_{T<s\leqq T+t}(f(Y_{s-}\exp\Delta M_s)-f(Y_{s-})-H_i f(Y_{s-})\,\Delta M_s^i)\end{aligned}$$

□ 1. Il suffit de montrer que (i) ⇒ (ii). On suppose que (i) est réalisée. Soit $f\in\mathscr{C}$. Pour tout Z dans $\mathbb{S}(G)$, on considère la semi-martingale réelle :

$$F(Z, M)=H_i f(Z_-)\circ M^i+\sum_{s\leqq .}(f(Z_{s-}\exp\Delta M_s)-f(Z_{s-})-H_i f(Z_{s-})\,\Delta M_s^i)$$

En s'arrêtant en des temps d'arrêt arbitrairement grands, on peut supposer que $M\in\mathscr{H}^\infty$. Les fonctions f, $H_i f$ et $x\to f(x\exp m)$, pour m dans $\mathscr{G}\cap B(0, \|M\|_{\mathscr{H}^\infty})$ étant à support (dans le même) compact, il existe une constante K et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, un voisinage W_n de e dans G tel que :

$$\forall Y, Z\in\mathbb{S}(G),\qquad \text{si}\quad Z_tY_t^{-1}\in W_n\quad \forall t,\ \text{p.s.},$$

alors

$$|f(Y_t)-f(Z_t)|\leqq 1/n,\quad \forall t.\ \text{p.s.}\quad \text{et}\quad \|F(Y, M)-F(Z, M)\|_{\mathscr{S}^\infty}\leqq K/n.$$

En choisissant une suite $(g_k^n)_k$ dans G telle $(W_n g_k^n)_k$ recouvre G, et une partition $(A_k^n)_k$ de Ω telle que $A_k^n\subseteq(\Gamma'\Gamma^{-1}\in W_n g_k^n)$, la variable aléatoire étagée Γ_n à valeurs dans G, égale à g_k^n sur A_k^n réalise la convergence de :

- $f(\Gamma_n\Gamma X_t)$ vers $f(\Gamma' X_t)$ p.s. uniformément en t,
- $F(\Gamma_n\Gamma X, M)_t$ vers $F(\Gamma' X, M)_t$ en probabilité uniformément sur tout compact.

L'hypothèse (i) et l'invariance à gauche des opérateurs H_i $(H_i(f \circ L_\gamma) = H_i f \circ L_\gamma)$ donnent $\forall n, f(\Gamma_n \Gamma X) - f(\Gamma_n \Gamma) = F(\Gamma_n \Gamma X, M)$, et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient $f(\Gamma' X) - f(\Gamma') = F(\Gamma' X, M)$. Ceci montre (ii).

2. On se ramène à 1 en translatant de T. ■

□ *Démonstration du théorème* 1.1. — Pour obtenir l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation (2), on procède de la manière suivante : à l'aide d'une carte locale sur G, on déplace le problème dans $\mathbb{R}^d$, on le résout dans $\mathbb{R}^d$, puis on remonte la solution dans le groupe G. Grâce au lemme 1.2, on se contente de résoudre l'équation (2) pour $X_0 = e$.

1° *Transfert de* G *vers* $\mathbb{R}^d$. — Soient $a > 0$ et (V, Φ) une carte locale de G dans $\mathbb{R}^d$ telle que :

$$e \in V, \quad \Phi(e) = 0 \qquad \text{et} \qquad \overline{B(0, 2a)} \subseteqq \Phi(V)$$

On peut alors construire deux fonctions :

$\Psi : \mathbb{R}^d \to G$ de classe C^∞, à support dans $\overline{B(0, 2a)}$ [c'est-à-dire valant e en dehors de $\overline{B(0, 2a)}$], coïncidant avec Φ^{-1} sur $B(0, a)$,

$\bar{\Phi} : G \to \mathbb{R}^d$ de classe C^∞, à support dans $\Phi^{-1}(\overline{B(0, 2a)})$, coïncidant avec Φ sur $\Phi^{-1}(B(0, a))$.

On notera $U = \Phi^{-1}(B(0, a))$ et $(\bar{\Phi}^j)_{1 \leqq j \leqq d}$ les coordonnées de $\bar{\Phi}$.

Si $X \in \mathbb{S}(G)$ est solution de l'équation (2), alors, tant que X restera dans U, la semi-martingale $\bar{\Phi}(X)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ sera solution de :

$$Y^j = \lambda_i^j(Y_-) \circ M^i + \sum_{s \leqq .} (\bar{\Phi}^j(\Psi(Y_{s-}) \exp \Delta M_s) - \bar{\Phi}^j(\Psi(Y_{s-})) - \lambda_i^j(Y_{s-}) \Delta M_s^i) \qquad (3)$$

où on appelle λ_i^j la fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞, à support compact donnée par $\lambda_i^j = H_i \bar{\Phi}^j \circ \Psi$ pour $1 \leqq i, j \leqq d$.

2° *Résolution dans* $\mathbb{R}^d$. — On peut écrire l'équation (3) sous la forme :

$$Y^j = \lambda_i^j(Y_-) . M^i + 1/2\, \lambda_{il}^j(Y) . \langle M^{ic}, M^{lc} \rangle + v^j(Y, .)_- * \mu^M \qquad (3)$$

où

$$\lambda_{il}^j = H_l H_i \bar{\Phi}^j \circ \Psi = (D_k \lambda_i^j) \lambda_l^k,$$

et $v : (y, m) \in \mathbb{R}^d \times \mathscr{G} \to v(y, m) \in \mathbb{R}^d$ est donné par $(m = m_i H_i)$:

$$v^j(y, m) = \bar{\Phi}^j(\Psi(y) \exp m) - \bar{\Phi}^j(\Psi(y)) - \lambda_i^j(y) m_i$$

Ce qui s'écrit encore, à l'aide d'une fonctionnelle F de $\mathbb{D}_d \times \mathbb{S}^d$ dans $\mathbb{D}_d$:

$$Y = F(Y, M) \qquad (3)$$

D'après la proposition 1.2, l'équation (3) admet une solution et une seule si $F \in \mathrm{Lip}$; ceci est assuré par le lemme suivant :

LEMME 1.3. — *Il existe un réel $c>0$ et une fonction g de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^+$ localement bornée tels que* : $\forall (Y, Z) \in \mathbb{D}_d \times \mathbb{D}_d$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall t$

$$|(\lambda_i^j(Y) - \lambda_i^j(Z))_t| \leq c\,|(Y-Z)_t|$$
$$|(\lambda_{il}^j(Y) - \lambda_{il}^j(Z))_t| \leq c\,|(Y-Z)_t|$$
$$|(v^j(Y, x^i H_i) - v^j(Z, x^i H_i))_t| \leq g(x)\,|x|^2\,|(Y-Z)_t|.$$

En particulier, $F \in \mathrm{Lip}(c, g)$.

□ *Démonstration du lemme* 1.3. — Les deux premières inégalités découlent du fait que $(\lambda_i^j)_{i,j}$ est une fonction C^∞ à support compact.

Pour obtenir la troisième, on va s'intéresser à l'application

$$\varphi : \quad (y, m) \in \mathbb{R}^d \times \mathscr{G} \to \varphi(y, m) = \bar{\Phi}(\Psi(y) \exp m)$$

Pour $y, z \in \mathbb{R}^d$, $m = m_i H_i \in \mathscr{G}$ et $1 \leq i, j \leq d$:

$$\varphi^j(y, 0) = \bar{\Phi}^j \circ \Psi(y); \qquad \frac{\partial \varphi^j}{\partial m_i}(y, 0) = H_i \bar{\Phi}^j \circ \Psi(y) = \lambda_i^j(y)$$

$$\begin{aligned} v^j(y, m) - v^j(z, m) &= (\varphi^j(y, m) - \varphi^j(z, m)) \\ &\quad - (\varphi^j(y, 0) - \varphi^j(z, 0)) - m_i\left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial m_i}(y, 0) - \frac{\partial \varphi^j}{\partial m_i}(z, 0)\right) \end{aligned}$$

et en appliquant la formule de Taylor à l'ordre 1, entre 0 et 1, à la fonction $t \to \varphi^j(y, tm) - \varphi^j(z, tm)$, on obtient pour un réel $\theta \in]0, 1[$:

$$v^j(y, m) - v^j(z, m) = 1/2\, m_i m_l \left(\frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial m_i \partial m_l}(y, \theta m) - \frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial m_i \partial m_l}(z, \theta m)\right).$$

Enfin l'inégalité des accroissements finis donne :

$$|v^j(y, m) - v^j(z, m)| \leq 1/2\, |m|^2\, |y-z|\, g(m)$$

avec

$$g(m) = \sup_{\theta \in]0, 1[;\, y \in \mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial^3 \varphi}{\partial m\, \partial m\, \partial y}(y, \theta m) \right|.$$

Comme $\varphi(y, m) = \varphi(0, m)$ pour $|y| > 2a$, $g(m)$ est en fait égal à

$$g(m) = \sup_{|x| \leq |m|;\, |y| \leq 2a} \left| \frac{\partial^3 \varphi}{\partial m\, \partial m\, \partial y}(y, x) \right|$$

et g est alors localement bornée. ■

3° *Remontée vers* G. — On construit la solution sur G en « remontant » les solutions locales obtenues sur $\mathbb{R}^d$ (*cf.* [IW]).

Soient $Y^{(1)}$ la solution de l'équation (3) et $Z^{(1)}$ la semi-martingale à valeurs dans G égale à $\Psi(Y^{(1)})$. On considère le temps d'arrêt

$$\begin{aligned} T_1 &= \inf(t>0;\ Z_t^{(1)} \notin U \text{ ou } Z_{t-}^{(1)} \notin U) \\ &= \inf(t>0;\ |Y_t^{(1)}| \geqq a \text{ ou } |Y_{t-}^{(1)}| \geqq a) \end{aligned}$$

Alors $(Z^{(1)})^{T_1^-} \in U$ p. s. et $X^{(1)} = (Z^{(1)})^{T_1^-}$ est solution de l'équation (2) arrêtée en T_1^-, c'est-à-dire de l'équation (2) où M est remplacée par $M^{T_1^-}$.

On note $M' = M - M^{T_1}$ et (3)' l'équation (3) où M est remplacée par M'. Soient $Y^{(2)}$ la solution de (3)' et $Z^{(2)}$ la semi-martingale image de $Y^{(2)}$ par Ψ. On considère, comme précédemment, le temps d'arrêt

$$\begin{aligned} T_2 &= \inf(t>0;\ Z_t^{(2)} \notin U \text{ ou } Z_{t-}^{(2)} \notin U) \\ &= \inf(t>0;\ |Y_t^{(2)}| \geqq a \text{ ou } |Y_{t-}^{(2)}| \geqq a) \end{aligned}$$

On a nécessairement $T_2 > T_1$ p. s. Enfin on définit $X^{(2)}$ par :

$$\begin{gathered} (X^{(2)})^{T_1^-} = X^{(1)} \\ X_{T_1}^{(2)} = X_{T_1^-}^{(1)} \exp \Delta M_{T_1} \\ ((X^{(2)})^{T_1})^{-1} X^{(2)} = (Z^{(2)})^{T_2^-}. \end{gathered}$$

Alors d'après le lemme 1.2, $X^{(2)}$ est solution de (1) arrêtée en T_2^-.

On continue ainsi avec $M'' = M - M^{T_2}$...

On construit de la sorte une suite croissante $(T_k)_k$ de temps d'arrêt et une suite $(X^{(k)})_k$ dans $\mathbb{S}(G)$ telles que $\forall k$:

$$X^{(k)} \text{ est solution de (2) arrêtée en } T_k^-$$

et

$$(X^{(k)})^{T_{k-1}^-} = X^{(k-1)}$$

Il ne reste plus qu'à montrer qu'on arrive ainsi jusqu'à l'infini, c'est-à-dire que $\lim_{k\to\infty} T_k = +\infty$. Il suffira alors de prendre comme solution de (2) la semi-martingale X qui, restreinte à chaque intervalle $[0, T_k[$, coïncide avec $X^{(k)}$.

Montrons que $T_k \to +\infty$. — Il existe des temps d'arrêt T arbitrairement grands tels que $M^{T-} \in \mathscr{H}^\infty$. Pour de tels temps d'arrêt, on va montrer que $(T \wedge T_k)_k$ tend vers T, et on aura alors la convergence de $(T_k)_k$ vers $+\infty$.

Il suffit donc de supposer que $M \in \mathscr{H}^\infty$ et de montrer que $\lim T_k = +\infty$ p. s. comme $Y^{(1)}$ est solution de l'équation (3) : $Y = F(Y, M)$, on a :

$$Y^{(1)j} = \lambda_i^j(Y_-^{(1)}) . M^i + 1/2\, \lambda_{il}^j(Y^{(1)}) . \langle M^{ic}, M^{lc}\rangle + v^j(Y^{(1)}, .)_- * \mu^M$$

avec

$$\begin{gathered} \|(\lambda_i^j)\|_\infty = \alpha < +\infty \\ \|(\lambda_{il}^j)\|_\infty = \beta < +\infty \\ \|v^j(Y, x^i H_i)\|_{\mathscr{S}^\infty} \leqq \gamma |x|^2, \\ \forall Y \in \mathbb{D}_d \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } |x| \leqq \|M\|_{\mathscr{H}^\infty} \end{gathered}$$

En effet,

$$|v^j(\mathrm{Y}, x^i \mathrm{H}_i)_t| = \left| \varphi^j(\mathrm{Y}_t, x) - \varphi^j(\mathrm{Y}_t, 0) - \frac{\partial \varphi^j}{\partial x_i}(\mathrm{Y}_t, 0)\, x_i \right|$$

$$\leqq 1/2\, |x|^2 \sup_{y \in \mathbb{R}^d;\ |x| \leqq \|\mathrm{M}\|_{\mathscr{H}^\infty}} \left| \frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial x_i \partial x_l}(y, x) \right|$$

$$\leqq 1/2\, |x|^2 \sup_{|y| \leqq 2a;\ |x| \leqq \|\mathrm{M}\|_{\mathscr{H}^\infty}} \left| \frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial x_i \partial x_l}(y, x) \right| = \gamma\, |x|^2.$$

Par suite, en posant $\mathrm{K} = 3\,\alpha + (3/2\,\beta + 2\,\gamma)\, \|\mathrm{M}\|_{\mathscr{H}^\infty}$,

$$\|(\mathrm{Y}^{(1)})^{\mathrm{T}_1}\|_{\mathscr{S}^2} \leqq \mathrm{K}\, \|\mathrm{M}^{\mathrm{T}_1}\|_{\mathscr{H}^2},$$

d'où

$$\mathbb{P}(\mathrm{T}_1 < +\infty) \leqq (\mathrm{K}/a)^2\, (\|\mathrm{M}^{\mathrm{T}_1}\|_{\mathscr{H}^2})^2.$$

On montre de même que

$$\mathbb{P}(\mathrm{T}_k < +\infty) \leqq (\mathrm{K}/a)^2\, (\|\Delta_{]\mathrm{T}_{k-1}, \mathrm{T}_k]} \mathrm{M}\|_{\mathscr{H}^2})^2.$$

Par suite

$$\sum_{k \geqq 0} \mathbb{P}(\mathrm{T}_k < +\infty) \leqq (\mathrm{K}/a)^2 \sum_{k \geqq 0} (\|\Delta_{]\mathrm{T}_{k-1}, \mathrm{T}_k]} \mathrm{M}\|_{\mathscr{H}^2})^2$$

$$\leqq 2\,(\mathrm{K}/a)^2 \sum_{k \geqq 0} \mathrm{E}\left([\mathrm{N}, \mathrm{N}]_{\mathrm{T}_k} - [\mathrm{N}, \mathrm{N}]_{\mathrm{T}_{k-1}} + \left(\int_{\mathrm{T}_{k-1}}^{\mathrm{T}_k} |d\mathrm{A}_s| \right)^2 \right)$$

$$\leqq 2\,(\mathrm{K}/a)^2\, \mathrm{E}\left([\mathrm{N}, \mathrm{N}]_\infty + \left(\int_0^\infty |d\mathrm{A}_s| \right)^2 \right)$$

pour toute décomposition de M en N + A, donc

$$\sum_{k \geqq 0} \mathbb{P}(\mathrm{T}_k < +\infty) \leqq 2\,(\mathrm{K}/a)^2\, (\|\mathrm{M}\|_{\mathscr{H}^2})^2 < +\infty$$

d'où

$$\mathbb{P}(\lim_{k \to +\infty} \mathrm{T}_k < +\infty) = 0.$$

Conclusion. – On a ainsi construit une solution $\mathrm{X} \in \mathbb{S}(\mathrm{G})$ de l'équation (2). Il reste à vérifier qu'elle est unique : c'est clair par unicité de la solution Y de (3).

FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1 ■

Pour terminer ce paragraphe de présentation de l'exponentielle stochastique nous allons donner une formule d'addition. Cette formule, établie pour des semi-martingales continues (*cf.* [HDL]), se généralise aux semi-martingales càdlàg sous une condition qui s'avère nécessaire.

PROPOSITION 1.4. — *Soient* M *et* N *dans* $\mathbb{S}(\mathscr{G})$.

$$\mathscr{E}(M+N)=\mathscr{E}(\mathrm{ad}(\mathscr{E}(N)_{-})\circ M)\,\mathscr{E}(N)$$

si et seulement si

$$\exp(\Delta M+\Delta N)=(\exp\Delta M)(\exp\Delta N)$$

Remarques :

1. On obtient bien sûr une expression analogue en permutant M et N :

$$\mathscr{E}(M+N)=\mathscr{E}(\mathrm{ad}(\mathscr{E}(M)_{-})\circ N)\,\mathscr{E}(M) \Leftrightarrow \exp(\Delta M+\Delta N)=(\exp\Delta N)(\exp\Delta M)$$

2. La condition $\exp(\Delta M+\Delta N)=(\exp\Delta M)(\exp\Delta N)$ est équivalente à : $[\Delta M, \Delta N]=0$ (où $[.,.]$ désigne ici le crochet de Lie) et sous cette forme, elle est symétrique en M et N.

Cette condition est remplie par exemple :

— si M et N ne sautent pas en même temps, c'est-à-dire si l'ensemble aléatoire $\{t;\ \Delta M_t\neq 0 \text{ et } \Delta N_t\neq 0\}$ est p. s. vide,

— ou s'il existe un processus réel α tel que $\Delta M=\alpha\,\Delta N$. En particulier, ceci est réalisé pour $M=-N$ et on obtient alors :

$$\mathscr{E}(N)^{-1}=\mathscr{E}(-\mathrm{ad}(\mathscr{E}(N)_{-})\circ N),\qquad \forall N\in\mathbb{S}(\mathscr{G}).$$

□ *Démonstration de la proposition* 1.4.

1° *Condition nécessaire.* — On suppose que $\mathscr{E}(M+N)=XY$ avec $Y=\mathscr{E}(N)$ et $X=\mathscr{E}(\mathrm{ad}(Y_{-})\circ M)$. En calculant le saut multiplicatif de XY à l'instant s :

$$\begin{aligned}\exp(\Delta(M+N)_s)&=(Y_{s-})^{-1}(X_{s-})^{-1}X_s Y_s\\&=(Y_{s-})^{-1}\exp(\mathrm{ad}(Y_{s-})(\Delta M_s))\,Y_s\end{aligned}$$

et comme $\forall g\in G$, $\forall H\in\mathscr{G}$, $\exp(\mathrm{ad}(g)H)=g\exp H g^{-1}$,

$$\exp(\Delta(M+N)_s)=(\exp\Delta M_s)(Y_{s-})^{-1}Y_s=(\exp\Delta M_s)(\exp\Delta N_s).$$

2° *Condition suffisante.* — On suppose que $\exp(\Delta M+\Delta N)=(\exp\Delta M)(\exp\Delta N)$ et on note $Y=\mathscr{E}(N)$ et $X=\mathscr{E}(\mathrm{ad}(Y_{-})\circ M)$. Il s'agit de montrer que $XY=\mathscr{E}(M+N)$.

Soit $f\in\mathscr{C}$. Si $(U_a, \varphi_a)_{a\in A}$ est un recouvrement de G par une famille dénombrable de cartes locales et si $(k_a)_{a\in A}$ est une partition de l'unité associée, on note, $\forall(a, b)\in A\times A$:

$$\begin{aligned}\bar f_{a,b} &: \varphi_a(U_a)\times\varphi_b(U_b)\to\mathbb{R}\\ &(x, y)\to f(\varphi_a^{-1}(x)\,\varphi_b^{-1}(y))\end{aligned}$$

Alors, $\forall t$,

$$f(X_t Y_t)=\sum_{a,b}(k_a(X_t)\,k_b(Y_t)\,\bar f_{a,b}(\Phi_a(X_t), \Phi_b(Y_t)))$$

On va calculer $f(X_t Y_t)$ en utilisant la formule d'Itô à partir de cette écriture, où apparaît une fonction des deux processus réels $\Phi_a(X)$ et $\Phi_b(Y)$. Pour ceci, on a besoin des dérivées suivantes :

pour $(x, y) \in \Phi_a(U_a) \times \Phi_b(U_b)$

$$\frac{\partial \bar{f}_{a,b}}{\partial x_k}(x, y) = D_k(f \circ R_{(\Phi_b^{-1}(y))})(\Phi_a^{-1}(x))$$

$$\frac{\partial \bar{f}_{a,b}}{\partial y_k}(x, y) = D_k(f \circ L_{(\Phi_a^{-1}(x))})(\Phi_b^{-1}(y))$$

où, pour $g \in G$, $R_g : h \in G \to R_g = hg$ et $L_g : h \in G \to L_g = gh$.

Pour simplifier l'écriture, on va effectuer le calcul dans le cas où G est recouvert par une seule carte $\Phi : G \to \mathbb{R}^d$. La formule d'Itô donne alors :

$$\begin{aligned} f(X_t Y_t) &= \bar{f}(\Phi(X_t), \Phi(Y_t)) \\ &= f(X_0 Y_0) + \int_0^t D_k(f \circ R_{Y_{s-}})(X_{s-}) \circ d\Phi^k(X_s) \\ &\qquad + \int_0^t D_l(f \circ L_{X_{s-}})(Y_{s-}) \circ d\Phi^l(X_s) \\ &\quad + \sum_{s \leq t} (f(X_s Y_s) - f(X_{s-} Y_{s-}) - D_k(f \circ R_{Y_{s-}})(X_{s-}) \Delta\Phi^k(X_s) \\ &\qquad\qquad - D_l(f \circ L_{X_{s-}})(Y_{s-}) \Delta\Phi^l(Y_s)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(X_t Y_t) = f(e) &+ \int_0^t D_k(f \circ R_{Y_{s-}})(X_{s-}) \operatorname{ad}(Y_{s-})(H_i) \Phi^k(X_{s-}) \circ dM_s^i \\ &+ \int_0^t D_l(f \circ L_{X_{s-}})(Y_{s-}) H_i \Phi^l(Y_{s-}) \circ dN_s^i \\ &+ \sum_{s \leq t} (f(X_s Y_s) - f(X_{s-} Y_{s-}) \\ &- D_k(f \circ R_{Y_{s-}})(X_{s-}) \operatorname{ad}(Y_{s-})(H_i) \Phi^k(X_{s-}) \Delta M_s^i \\ &- D_l(f \circ L_{X_{s-}})(Y_{s-}) H_i \Phi^l(Y_{s-}) \Delta N_s^i) \end{aligned}$$

Or, $\forall g \in G$,

$$D_l(f \circ L_g) H_i \Phi^l = H_i(f \circ L_g) = H_i f \circ L_g$$

$$D_k(f \circ R_g) \operatorname{ad}(g)(H_i) \Phi^k = \operatorname{ad}(g)(H_i)(f \circ R_g) = H_i f \circ R_g$$

donc

$$f(X_t Y_t) = f(e) + \int_0^t H_i f(X_{s-} Y_{s-}) \circ d(M^i + N^i)_s$$
$$+ \sum_{s \leq t} (f(X_s Y_s) - f(X_{s-} Y_{s-}) - H_i f(X_{s-} Y_{s-})(\Delta M_s^i + \Delta N_s^i))$$

et il ne reste plus qu'à remarquer que :

$$f(X_s Y_s) = f(X_{s-} \exp(\mathrm{ad}(Y_{s-})(\Delta M_s)) Y_{s-} \exp \Delta N_s)$$
$$= f(X_{s-} Y_{s-} \exp \Delta M_s \exp \Delta N_s) = f(X_{s-} Y_{s-} \exp(\Delta M_s + \Delta N_s)). \quad \blacksquare$$

2. INTÉGRALE STOCHASTIQUE MULTIPLICATIVE

L'exponentielle stochastique s'interprète comme une intégrale stochastique multiplicative à valeurs dans le groupe G; en utilisant le formalisme de [I] ou [Em1] on peut écrire :

$$\forall M \in \mathbb{S}(\mathscr{G}), \quad \mathscr{E}(M) = \prod_s \exp(dM_s)$$

au sens où le produit, effectué de gauche à droite, $\prod_k \exp(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})$ tend vers $\mathscr{E}(M)$ quand le pas de la subdivision $(t_k)_k$ tend vers 0.

La convergence a lieu uniformément sur tout compact en probabilité, ce qui se traduit sur G de la manière suivante :

DÉFINITION. — Soit $(X^\alpha)_\alpha$ une suite de $\mathbb{D}(G)$ et soit $X \in \mathbb{D}(G)$. $(X^\alpha)_\alpha$ converge vers X *uniformément sur tout compact en probabilité* quand $\alpha \to 0$, si pour tout voisinage W de e dans G et pour tout $T \in \mathbb{R}^+$,

$$\lim_{\alpha \to 0} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{t \leq T} \{(X_t^\alpha)^{-1} X_t \in W\}\Big) = 1$$

On note Σ l'ensemble des subdivisions de $\mathbb{R}^+$ de pas fini (c'est-à-dire l'ensemble des suites $\sigma = (t_k)_k$ strictement croissantes, tendant vers $+\infty$ telles que $t_0 = 0$ et $|\sigma| = \sup\{(t_{k+1} - t_k); k\} < +\infty$) et pour tout T dans $\mathbb{R}^+$, $\Sigma(T)$ l'ensemble des subdivisions de $[0, T]$. Si $\sigma = (t_k)_k \in \Sigma$ et si H est un processus càdlàg, on désigne par $J^\sigma H$ le processus càdlàg donné par :

$$(J^\sigma H)_t = H_{t_k} \qquad \text{pour} \quad t \in [t_k, t_{k+1}[$$

THÉORÈME 2.1. — *Soit* $M \in \mathbb{S}(\mathscr{G})$. *La famille* $(X^\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ *de processus appartenant à* $\mathbb{D}(G)$, *définis par :*

$$X^\sigma = (J^\sigma X^\sigma)_- \exp(M - J^\sigma M_-)$$

converge vers $\mathscr{E}(M)$ *uniformément sur tout compact en probabilité quand* $|\sigma|$ *tend vers* 0.

Si $\sigma=(t_k)_k\in\Sigma$, le processus X^σ est tel que $X_0^\sigma=e$ et

$$X_t^\sigma=X_{t_k}^\sigma \exp(M_t-M_{t_k}) \qquad \text{pour} \quad t\in]t_k, t_{k+1}].$$

□ On va effectuer la démonstration de nouveau en deux grandes étapes : après avoir transféré le problème de G vers $\mathbb{R}^d$ comme dans la démonstration du théorème 1.1, on étudie le problème sur $\mathbb{R}^d$ puis on le remonte de $\mathbb{R}^d$ vers G.

1° *Résolution dans* $\mathbb{R}^d$. — Les notations sont les mêmes que celles utilisées au cours de la démonstration du théorème 1.1.

Soit $Y=(Y^j)_{1\leqq j\leqq d}$ la semi-martingale à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, solution de l'équation :

$$Y^j=\lambda_i^j(Y_-).M^i+1/2\,\lambda_{il}^j(Y).\langle M^{ic}, M^{lc}\rangle+v^j(Y, .)_- * \mu^M \tag{3}$$

Pour toute subdivision $\sigma=(t_k)_k$ on considère le processus Y^σ défini par :

$Y_0^\sigma=0$

$Y_t^\sigma=Y_{t_k}^\sigma+\bar\Phi(\Psi(Y_{t_k}^\sigma)\exp(M_t-M_{t_k}))-\bar\Phi(\psi(Y_{t_k}^\sigma))$ pour $t\in]t_k, t_{k+1}]$

PROPOSITION 2.2. — $(Y^\sigma)_\sigma$ *converge vers* Y *uniformément sur tout compact en probabilité quand* $|\sigma|\to 0$.

□ La convergence uniforme sur tout compact en probabilité étant (*cf.* [Em1]) une convergence locale dans $\mathcal{S}^p(1\leqq p<+\infty)$, pour montrer que $(Y^\sigma)_\sigma$ tend vers Y, il suffit de montrer qu'il existe des temps d'arrêt T arbitrairement grands tels que $(Y^\sigma)^{T-}$ et Y^{T-} soient dans $\mathcal{S}^p$ et $\|(Y^\sigma-Y)^{T-}\|_{\mathcal{S}^p}$ tende vers 0.

Soit $\alpha\in]0,1[$. Il existe (*cf.* [Em1]) des temps d'arrêt T arbitrairement grands tels que :

$$\forall\sigma,\quad (Y^\sigma)^{T-}\in\mathcal{S}^p,\quad Y^{T-}\in\mathcal{S}^p \quad\text{et}\quad M^{T-}\in\mathcal{S}^\infty\cap\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\ \bigcup_{\beta\in\mathbb{R}^+} D_d(\alpha,\beta,k)\Big).$$

Quitte à s'arrêter avant de tels temps d'arrêt, on peut supposer que :

$$\forall\sigma,\qquad Y^\sigma\in\mathcal{S}^p,\qquad Y\in\mathcal{S}^p \qquad\text{et}\qquad M\in\mathcal{S}^\infty\cap D_d(\alpha,\beta,k)$$

et montrer qu'alors $(Y^\sigma)_\sigma$ converge vers Y dans $\mathcal{S}^p$.

LEMME 2.3. — *Il existe un réel* $b>0$ *tel que, pour tout* σ,

$$\|Y-Y^\sigma\|_{\mathcal{S}^p}\leqq b\,\|F(Y, M)-F(J^\sigma Y, M)-H^\sigma\|_{\mathcal{S}^p}$$

où H^σ *est le processus de* $\mathbb{D}_d$ *défini par* $H_0^\sigma=0$ *et pour* $t>0$:

$$(H_t^\sigma)^j=\sum_{k;\,t_k<t} v^j(Y_{t_k}^\sigma, M_{t\wedge t_{k+1}}-M_{t_k})$$

$$-1/2\int_0^t \lambda_{il}^j(J^\sigma Y_s^\sigma)\,d\langle M^{ic}, M^{lc}\rangle_s-\sum_{s\leqq t} v^j(J^\sigma Y_{s-}^\sigma, \Delta M_s)$$

□ *Démonstration du lemme* 2.3. — En utilisant la définition de l'application v^j, on obtient :

● pour $t \in]t_k, t_{k+1}]$:

$$(Y_t^\sigma)^j = (Y_{t_k}^\sigma)^j + v^j(Y_{t_k}^\sigma, M_t - M_{t_k}) + \lambda_i^j(Y_{t_k}^\sigma)(M_t^i - M_{t_k}^i)$$

et par conséquent

$$(Y_t^\sigma)^j = \int_0^t \lambda_i^j(J^\sigma Y_{s-}^\sigma)\, dM_s^i + \sum_{k;\, t_k<t} v^j(Y_{t_k}^\sigma, M_{t\wedge t_{k+1}} - M_{t_k})$$

ce qui s'exprime encore

$$Y^\sigma = H^\sigma + F(J^\sigma Y^\sigma, M).$$

Alors, $Y - Y^\sigma = (F(Y, M) - F(J^\sigma Y, M) - H^\sigma) + F(J^\sigma Y, M) - F(J^\sigma Y^\sigma, M)$, et en notant K^σ le processus $F(Y, M) - F(J^\sigma Y, M) - H^\sigma$, et G^σ la fonctionnelle : $(U, M) \to F(J^\sigma Y, M) - F(J^\sigma(Y-U), M)$,

$$Y - Y^\sigma \text{ est solution de l'équation } U = K^\sigma + G^\sigma(U, M).$$

Il est clair que G^σ est, comme F, une machine (c, g).lipschitzienne (lemme 1.3), et donc d'après la proposition 0.1, il existe une constante b (dépendant de (α, β, k, c, g) mais pas de σ) telle que la solution $Y - Y^\sigma$ de l'équation $U = K^\sigma + G^\sigma(U, M)$ vérifie

$$\forall \sigma : \| Y - Y^\sigma \|_{\mathcal{S}^p} \leqq b \| K^\sigma \|_{\mathcal{S}^p}. \quad \blacksquare$$

LEMME 2.4. — $K^\sigma = F(Y, M) - F(J^\sigma Y, M) - H^\sigma$ *tend vers* 0 *dans* $\mathcal{S}^p$ *quand* $|\sigma| \to 0$.

□ *Démonstration du lemme* 2.4. — En utilisant les inégalités du lemme 1.3, on obtient par convergence dominée : $F(J^\sigma Y, M) \to F(Y, M)$ dans $\mathcal{S}^p$. Il reste alors à étudier H^σ. On utilise la formule d'Itô entre t_k et t pour calculer $v^j(Y_{t_k}^\sigma, M_t - M_{t_k})$:

$$\begin{aligned} v^j(Y_{t_k}^\sigma, M_t - M_{t_k}) = & \int_{]t_k, t]} \frac{\partial v^j}{\partial m_i}(Y_{t_k}^\sigma, M_{s-} - M_{t_k})\, dM_s^i \\ & + 1/2 \int_{]t_k, t]} \frac{\partial^2 v^j}{\partial m_i \partial m_l}(Y_{t_k}^\sigma, M_s - M_{t_k})\, d\langle M^{ic}, M^{lc}\rangle_s \\ & + \sum_{t_k < s \leqq t} \Bigg(v^j(Y_{t_k}^\sigma, M_s - M_{t_k}) - v^j(Y_{t_k}^\sigma, M_{s-} - M_{t_k}) \\ & \qquad\qquad - \frac{\partial v^j}{\partial m_i}(Y_{t_k}^\sigma, M_{s-} - M_{t_k})\, \Delta M_s^i \Bigg) \end{aligned}$$

Alors,

$$(\mathrm{H}_t^\sigma)^j = \int_0^t \frac{\partial v^j}{\partial m_i}(\mathrm{J}^\sigma \mathrm{Y}_{s-}^\sigma, (\mathrm{M}-\mathrm{J}^\sigma \mathrm{M})_{s-})\, d\mathrm{M}_s^i$$
$$+ 1/2 \int_0^t \left(\frac{\partial^2 v^j}{\partial m_i \partial m_l}(\mathrm{J}^\sigma \mathrm{Y}_{s-}^\sigma, (\mathrm{M}-\mathrm{J}^\sigma \mathrm{M})_{s-}) - \lambda_{il}^j (\mathrm{J}^\sigma \mathrm{Y}_{s-}^\sigma) \right) d\langle \mathrm{M}^{ic}, \mathrm{M}^{lc} \rangle_s$$
$$+ \sum_{s \leqq t} \left(v^j (\mathrm{J}^\sigma \mathrm{Y}_{s-}^\sigma, (\mathrm{M}-\mathrm{J}^\sigma \mathrm{M})_{s-} + \Delta \mathrm{M}_s) - v^j (\mathrm{J}^\sigma \mathrm{Y}_{s-}^\sigma, (\mathrm{M}-\mathrm{J}^\sigma \mathrm{M})_{s-}) \right.$$
$$\left. - \frac{\partial v^j}{\partial m_i}(\mathrm{J}^\sigma \mathrm{Y}_{s-}^\sigma, (\mathrm{M}-\mathrm{J}^\sigma \mathrm{M})_{s-}) \Delta \mathrm{M}_s^i - v^j (\mathrm{J}^\sigma \mathrm{Y}_{s-}^\sigma, \Delta \mathrm{M}_s) \right)$$

ce qu'on note : $\mathrm{H}_t^\sigma = \mathrm{I}_t^{\sigma 1} + 1/2\, \mathrm{I}_t^{\sigma 2} + \mathrm{I}_t^{\sigma 3}$.

• Le premier terme $\mathrm{I}^{\sigma 1}$ s'écrit $\mathrm{Z}_-^\sigma . \mathrm{M}$, où $\forall (\omega, t)$ $\mathrm{Z}_{t-}^\sigma (\omega)$ tend vers 0 $\left(\text{car, quand } m \text{ tend vers } 0, \frac{\partial v^j}{\partial m_i}(y, m) \text{ tend vers 0 uniformément en } y\right)$ et

$$|\mathrm{Z}_{t-}^\sigma (\omega)| \leqq 2 \|\mathrm{M}\|_{\mathscr{S}^\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^d;\, |m| \leqq \|\mathrm{M}\|_{\mathscr{S}^\infty}} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial m^2}(y, m) \right|,$$

donc $\mathrm{I}^{\sigma 1}$ tend vers 0 dans $\mathscr{S}^p$ par convergence dominée.

• Il en est de même pour $\mathrm{I}^{\sigma 2}$ $\left(\text{car } \frac{\partial^2 v^j}{\partial m_i \partial m_l}(y, m) - \lambda_{il}^j (y) \text{ tend vers 0, quand } m \text{ tend vers 0, uniformément en } y\right)$.

• On écrit $\mathrm{I}^{\sigma 3}$ sous la forme $\sum_{s \leqq .} \gamma_s^\sigma$ où, pour (ω, s) fixé, $\gamma_s^\sigma (\omega)$ est de la forme :

$$\gamma_s^\sigma (\omega) = g(m+h) - g(m) - g(h) - \nabla g(m) . h$$

pour $m = (\mathrm{M}-\mathrm{J}^\sigma \mathrm{M})_{s-} (\omega)$, $h = \Delta \mathrm{M}_s (\omega)$, $y = \mathrm{J}^\sigma \mathrm{Y}_{s-}^\sigma (\omega)$ et $g(m) = v^j (y, m)$.

Alors $\frac{\partial g}{\partial m_i}(m) = \frac{\partial \varphi^j}{\partial m_i}(y, m) - \frac{\partial \varphi^j}{\partial m_i}(y, 0)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial m_i \partial m_l} = \frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial m_i \partial m_l}(y, .)$ est, sur la boule $\overline{\mathrm{B}(0; \|\mathrm{M}\|_{\mathscr{S}^\infty})}$, lipschitzienne de rapport

$$k = \sup_{y \in \mathbb{R}^d;\, |m| \leqq \|\mathrm{M}\|_{\mathscr{S}^\infty}} \left| \frac{\partial^3 \varphi}{\partial m^3}(y, m) \right|.$$

Par suite, en considérant, l'application $\mathrm{G} : h \to \mathrm{G}(h) = g(m+h) - g(h)$

$$\begin{aligned} |g(m+h) - g(m) - g(h) - \nabla g(m) . h| &= |\mathrm{G}(h) - \mathrm{G}(0) - \nabla \mathrm{G}(0) . h| \\ &\leqq 1/2 |h|^2 \|\mathrm{G}''\| \leqq 1/2 |h|^2 k |m| \end{aligned}$$

Finalement

$$\gamma_s^\sigma (\omega) | \leqq 1/2\, k\, |(\mathrm{M}-\mathrm{J}^\sigma \mathrm{M})_{s-}|\, |\Delta \mathrm{M}_s|^2$$

et donc $\|I^{\sigma 3}\|_{\mathscr{S}^p} \leqq 1/2k \|(M - J^\sigma M)_- . S(M)\|_{\mathscr{S}^p}$ où $S(M)_t = \sum_{s \leqq t} |\Delta M|_s^2$ et de nouveau par convergence dominée : $I^{\sigma 3}$ tend vers 0 dans $\mathscr{S}^p$. ■

Conclusion. — Les lemmes 2.3 et 2.4 montrent la proposition 2.2. ■

2° *Remontée de* $\mathbb{R}^d$ *vers* G. — On fixe $R > 0$ et on se propose de montrer que $(X^\sigma)_\sigma$ converge vers X uniformément sur $[0, R]$ en probabilité.

Les processus Y et Y^σ que l'on a étudiés sur $\mathbb{R}^d$ en première partie coïncident avec $\Phi(X)$ et $\Phi(X^\sigma)$ tant que X et X^σ restent dans U. Ainsi $\Phi(X^\sigma)$ tend vers $\Phi(X)$ quand $|\sigma| \to 0$ uniformément sur tout compact en probabilité, jusqu'au premier instant de sortie de U de l'un des processus X ou X^σ.

On introduit par conséquent les instants successifs de sortie pour X d'un voisinage de e : soient b et c des réels tels que $0 < c < b < a$ et tels que le voisinage V de e dans G, défini par $V = \Phi^{-1}(B(0, b))$, vérifie $\bar{V}.\bar{V} \subset U$; on note $W = \Phi^{-1}(B(0, c))$.

On construit de proche en proche, comme dans la démonstration du théorème 1.1, une suite croissante de temps d'arrêt $(T_k)_k$:

- $T_0 = 0$.
- $T_{k+1} = \inf(t > T_k;\ \mathscr{E}(M - M^{T_k})_t \notin W$ ou $\mathscr{E}(M - M^{T_k})_{t-} \notin W$ ou $\exp(\Delta M_t) \notin \bar{V})$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et tout $\rho > 0$, on considère :

– l'événement $\mathscr{A}(r, \rho)$: « $T_r > R$ et toute subdivision de pas inférieur à ρ possède au moins un point dans chaque intervalle $]T_k, T_{k+1}[$, $k = 0, \ldots, r$ »,

– ainsi que la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{r,\rho} = \mathbb{P}(. / \mathscr{A}(r, \rho))$.

Proposition 2.5. — $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $\forall \rho > 0$, $(X^\sigma)_\sigma$ *tend vers* X *uniformément sur* $[0, R]$ *en* $\mathbb{P}_{r,\rho}$*.probabilité.*

Corollaire. — $(X^\sigma)_\sigma$ *tend vers* X *uniformément sur* $[0, R]$ *en* $\mathbb{P}$*.probabilité.*

□ *Démonstration du corollaire.* — Soit $\varepsilon > 0$.

La suite $(T_k)_k$ tend vers $+\infty$ donc il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\mathbb{P}(T_r > R) > 1 - \varepsilon.$$

La semi-martingale M est càdlàg donc il existe $\rho > 0$ tel que :

$$\mathbb{P}\left(\inf_{k=0,\ldots,r-1} (T_{k+1} - T_k) > \rho\right) > 1 - \varepsilon$$

et donc $\mathbb{P}(\mathscr{A}(r, \rho)) > 1 - 2\varepsilon$ pour un certain couple (r, ρ).

Alors, pour tout voisinage W de e dans G, on aura, grâce à la proposition 2.5 :

$$\mathbb{P}((X^\sigma)^{-1} X \notin W) = \mathbb{P}_{r,\rho}((X^\sigma)^{-1} X \notin W)\, \mathbb{P}(\mathscr{A}_{r,\rho}) > 1 - 3\varepsilon$$

pour $|\sigma|$ assez petit; ce qui montre le corollaire, et donc le théorème 2.2. ■

□ *Démonstration de la proposition* 2.5. — On se place dorénavant sous la probabilité $\mathbb{P}_{r,\rho}$, qu'on notera encore $\mathbb{P}$. Alors p.s., $[0, R] \subseteqq [0, T_r[$ et toute subdivision de pas inférieur à ρ possède au moins un point dans chaque intervalle $]T_k, T_{k+1}[$, $k=0, \ldots, r$. De plus, X reste solution de la même équation (2), et les X^σ sont inchangés.

En notant $M^{(k)} = \Delta_{]T_{k-1}, T_k[} M$ et $X^{(k)} = \mathscr{E}(M^{(k)})$, on sait que $X^{(k)}$ et $X^{(k)}_-$ sont dans $\bar{V}$ p.s. $\forall k$ et que :

$$X = \prod_k X^{(k)} \exp(\Delta_{T_k} M)$$

Pour toute subdivision $\sigma = (t_i)_i$ de Σ, on note

$$K^\sigma M = \sum_i M_{t_{i+1}} 1_{]t_i, t_{i+1}]} \qquad \text{et} \qquad K^\sigma = \sum_i t_{i+1} 1_{]t_i, t_{i+1}]}$$

et pour tout k, on considère le processus $X^{\sigma(k)}$ de $\mathbb{D}(G)$ donné par :

$$X^{\sigma(k)} = (J^\sigma X^{\sigma(k)}_-) \exp(M^{(k)} - J^\sigma M^{(k)}_-)$$

ainsi que le processus $H^{\sigma(k)}$ de $\mathbb{D}(G)$ donné

sur $[0, T_k[$ par :

$$H^{\sigma(k)} = e$$

sur $[T_k, K^\sigma_{T_k}[$ par :

$$H^{\sigma(k)} = (\exp(M - J^\sigma M)_{T_k^-})^{-1} \exp(M - J^\sigma M_{T_k^-}) (\exp(M - M_{T_k}))^{-1}$$

sur $[K_{T_k}, +\infty[$ par :

$$H^{\sigma(k)} = (\exp(M - J^\sigma M)_{T_k^-})^{-1} \exp(K^\sigma M_{T_k} - J^\sigma M_{T_k^-}) (\exp(K^\sigma M - M)_{T_k})^{-1}$$

On a alors

$$X^\sigma_t = \prod_{i \geqq 0} \exp(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}) = \prod_{k \geqq 0} X^{\sigma(k)}_t H^{\sigma(k)}_t.$$

LEMME 2.7. — *Pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, $(X^{\sigma(k)})_\sigma$ *converge vers* $X^{(k)}$ *uniformément sur* $[0, R]$ *en probabilité quand* $|\sigma| \to 0$.

LEMME 2.8. — *Pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, $(H^{\sigma(k)})_\sigma$ *converge vers* $\exp(\Delta_{T_k} M)$ *uniformément sur* $[0, R]$ *en probabilité quand* $|\sigma| \to 0$.

□ *Démonstration du lemme* 2.7. — Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour toute subdivision σ de Σ, on considère :

- le processus $Y^{(k)}$ de $\mathbb{D}_d$ égal à $\bar{\Phi}(X^{(k)})$,
- le processus $Y^{\sigma(k)}$ de $\mathbb{D}_d$ défini sur $]t_i, t_{i+1}]$ par :

$$Y^{\sigma(k)}_t = Y^{\sigma(k)}_{t_i} + \bar{\Phi}(\Psi(Y^{\sigma(k)}_{t_i}) \exp(M^{(k)}_t - M^{(k)}_{t_i})) - \bar{\Phi}(\Psi(Y^{\sigma(k)}_{t_i})),$$

- et le temps d'arrêt $S^{\sigma(k)} = \inf(t > 0; |Y^{\sigma(k)}_t| \geqq b$ ou $|Y^{\sigma(k)}_{t-}| \geqq b)$.

Alors $Y^{(k)}$ est solution de l'équation (3) où M est remplacée par $M^{(k)}$, et la proposition 2.2 montre que $(Y^{\sigma(k)})_\sigma$ tend vers $Y^{(k)}$ uniformément sur [0, R] en probabilité.

– En particulier, comme $|Y^{(k)}| \leqq c < b$ p.s.,

$$\mathbb{P}(S^{\sigma(k)} \geqq R) \text{ tend vers 1 quand } |\sigma| \to 0.$$

– D'autre part, sur $[0, S^{\sigma(k)}[$, $Y^{\sigma(k)} \in \overline{B(0, b)}$ donc $\Psi(Y^{\sigma(k)})$ appartient à $\Phi^{-1}(\overline{B(0, b)})$ qui est inclus dans U, donc $\bar{\Phi}(\Psi(Y^{\sigma(k)})) = Y^{\sigma(k)}$ et donc

$$Y^{\sigma(k)} = \bar{\Phi}(\Psi(J^\sigma Y_-^{\sigma(k)}) \exp(M^{(k)} - J^\sigma M_-^{(k)})).$$

– On va montrer que sur $[0, S^{\sigma(k)}[$, $X^\sigma(k)$ et $X_-^{\sigma(k)}$ restent dans U p.s.

Soit $\tau = \inf(t > 0;\ X_t^{\sigma(k)}$ ou $X_{t-}^{\sigma(k)} \notin U)$.

Alors, ou bien $X_{\tau-}^{\sigma(k)} \notin U$ et alors $X_{\tau-}^{\sigma(k)} \notin \bar{V}$, ou bien $X_\tau^{\sigma(k)} \notin U$. Comme $X_\tau^{\sigma(k)} = X_{\tau-}^{\sigma(k)} \exp(\Delta M_\tau^{(k)})$ avec $\exp(\Delta M_\tau^{(k)}) \in \bar{V}$, et comme $\bar{V}.\bar{V} \subseteqq U$, $X_{\tau-}^{\sigma(k)} \notin \bar{V}$.

Finalement, dans tous les cas, $\exists S < \tau$ tel que $X_S^{\sigma(k)} \notin \bar{V}$.

Supposons que $\tau < S^{\sigma(k)}$ sur un ensemble de probabilité non nulle.

Sur [0, S] $X_t^{\sigma(k)} \in U$ donc $\Phi(X_S^{\sigma(k)}) = Y_S^{\sigma(k)}$, et comme $Y_S^{\sigma(k)} \in B(0, a)$, $X_S^{\sigma(k)} = \psi(Y_S^{\sigma(k)})$. Par suite $Y_S^{\sigma(k)} \notin \overline{B(0, b)}$ avec $S < S^{\sigma(k)}$: ceci est impossible.

– *Conclusion* : $\bar{\Phi}(X^{\sigma(k)}) 1_{[0, S^{\sigma(k)}[}$ est égal à $Y^{\sigma(k)} 1_{[0, S^{\sigma(k)}[}$ et converge donc vers $Y^{(k)} = \bar{\Phi}(X^{(k)})$ uniformément sur [0, R] en probabilité. Enfin en utilisant l'uniforme continuité de Ψ sur $\overline{B(0, a)}$, pour la structure uniforme à gauche de G, on obtient : $(X^{\sigma(k)})_\sigma$ converge vers $X^{(k)}$ uniformément sur [0, R] en probabilité. Le lemme 2.7 est ainsi démontré. ■

□ *Démonstration du lemme* 2.8. – Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Le processus $\exp(\Delta_{T_k} M)$ est égal à : e sur $[0, T_k[$, $\exp(M_{T_k} - M_{T_k^-})$ sur $[T_k, +\infty[$

Il existe un compact C de G tel que la probabilité que chacun des facteurs composant $H^{\sigma(k)}$ soit à valeurs dans C tende vers 1 quand $|\sigma|$ tend vers 0. Par uniforme continuité, pour la structure uniforme à gauche de G, de l'application : $(g_1, g_2, g_3) \in C \times C \times C \to g_1 g_2 g_3$, et comme M est càdlàg en T_k, on obtient la convergence de $H^{\sigma(k)}$ vers $\exp(\Delta_{T_k} M)$ uniformément sur [0, R] en probabilité. ■

Finalement, X et X^σ s'écrivant sur [0, R] comme des produits d'un nombre fini de termes :

$$X = \prod_{k=1}^{r} X^{(k)} H^{(k)} \qquad \text{et} \qquad X^\sigma = \prod_{k=1}^{r} X^{\sigma(k)} H^{\sigma(k)}$$

on conclut que X^σ converge vers X uniformément sur [0, R] en probabilité comme dans la démonstration du lemme 2.8, à l'aide de l'application :

$(g_i)_{1 \leq i \leq r} \to \prod_{i=1}^{r} g_i$ qui, sur un produit fini de compacts de G, est uniformément continue pour la structure uniforme à gauche de G.

FIN DE LA DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.5 ET DU THÉORÈME 2.1 ■

3. LE LOGARITHME STOCHASTIQUE

Pour toute semi-martingale X sur G, on aimerait définir une semi-martingale $M = \mathscr{L}(X)$ à valeurs dans $\mathscr{G}$ telle que :

$$X_0 \mathscr{E}(M) = X \tag{4}$$

L'équation (4) peut se lire de la manière suivante (*cf.* § 1):

$$\begin{cases} dX = X_- \, dM \\ (X_-)^{-1} X = \exp(\Delta M). \end{cases}$$

Il suffirait de savoir inverser ce système pour obtenir l'accroissement infinitésimal dM de M à chaque instant, ainsi que les sauts ΔM de M, et donc pour connaître entièrement M. L'application exponentielle n'étant pas nécessairement bijective, il ne sera pas toujours possible d'inverser la deuxième égalité.

Soit $(H_i)_{1 \leq i \leq d}$ une base de $\mathscr{G}$. On dispose alors d'une carte exponentielle définie sur un domaine U de G; on notera $(\log^i)_{1 \leq i \leq d}$ les coordonnées canoniques :

$$x \in U \to (\log^i(x))_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{R}^d \quad \text{tel que } x = \exp(\log^i(x) H_i).$$

On note $\mathscr{U} = \exp^{-1}(U)$ et $(\theta^k)_k$ la base duale de $(H_i)_i$.

Soit $(V_a, \Phi_a)_a$ un recouvrement de G par une famille dénombrable de cartes locales. On se donne une partition de l'unité $(h_a)_a$ associée à la famille $(V_a)_a$, et on considère pour chaque a les opérateurs $(D_j^a)_{1 \leq j \leq d}$ liés à la carte (V_a, Φ_a).

DÉFINITION. — A toute semi-martingale $X \in \mathbb{S}(G)$ à sauts dans U, on associe une semi-martingale dans $\mathbb{S}(\mathscr{G})$, appelée *logarithme stochastique de* X, notée $\mathscr{L}(X)$, et définie par $\mathscr{L}(X) = M^i H_i$ avec :

$$M^i = h_a(X_-)(D_j^a, \theta^i)(X_-) \circ \Phi_a^j(X) + \sum_{s \leq .} (\log^i((X_{s-})^{-1} X_s) - h_a(X_{s-})(D_j^a, \theta^i)(X_{s-}) \Delta\Phi_a^j(X_s))$$

Remarques. — 1. On dit qu'un processus $X \in \mathbb{D}(G)$ est à sauts dans U si le processus $(X_-)^{-1} X$ prend ses valeurs dans U p. s.

2. Dans la définition de M^i, la somme sur les indices a est sous-entendue.

3. La somme sur s est bien définie car

$$(D_j^a, \theta^i)(X_{s-}) = D_j^a(\log^i \circ L_{(X_{s-}^{-1})})(X_{s-})$$

et chaque terme de la somme est donc de l'ordre de $|\Delta\Phi(X)_s|^2$.

4. $\mathscr{L}(X)$ ne dépend pas de la valeur de X_0, ni de la base $(H_i)_i$ de $\mathscr{G}$ choisie. Cependant, la définition semble dépendre du recouvrement $(V_a, \Phi_a)_a$ de G; la proposition suivante montre qu'il n'en est rien.

Proposition 3.1. – *Soit* $X \in \mathbb{S}(G)$ *à sauts dans* U, *tel que* $X_0 = e$.

$\mathscr{L}(X)$ *est la seule semi-martingale* $M \in \mathbb{S}(\mathscr{G})$, *nulle en* 0, *à sauts dans* $\mathscr{U}$, *telle que* $X = \mathscr{E}(M)$.

□ *Démonstration de la proposition* 3.1.

1° *Montrons que* $\mathscr{E}(\mathscr{L}(X)) = X$. – On note $M = \mathscr{L}(X)$.

Pour tout $f \in \mathscr{C}$ et pour tout t, on va calculer $f(X_t)$ en écrivant :

$$f(X_t) = \sum_a h_a(X_t) f_a \circ \Phi_a(X_t)$$

où f_a est définie sur $\Phi_a(V_a)$ par $f_a = f \circ \Phi_a^{-1}$, et on va utiliser la formule d'Itô. Pour cela on a besoin des dérivées de f_a :

$$\frac{\partial f_a}{\partial y_i}(y) = D_i^a f \circ \Phi_a^{-1}(y), \qquad \forall y \in \Phi_a(V_a)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} f(X_t) = f(e) &+ \int_0^t h_a(X_{s-}) D_j^a f(X_{s-}) \circ d\Phi_a^j(X_s) \\ &+ \sum_{s \leq t} (f(X_s) - f(X_{s-}) - h_a(X_{s-}) D_j^a f(X_{s-}) \Delta\Phi_a^j(X)_s) \\ = f(e) &+ \int_0^t H_i f(X_{s-})(h_a(X_{s-})(D_j^a, \theta^i)(X_{s-}) \circ d\Phi_a^j(X_s)) \\ &+ \sum_{s \leq t} (f(X_s) - f(X_{s-}) - H_i f(X_{s-}) h_a(X_{s-})(D_j^a, \theta^i)(X_{s-}) \Delta\Phi_a^j(X)_s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(X_t) = f(e) &+ \int_0^t H_i f(X_{s-}) \circ dM_s^i \\ &+ \sum_{s \leq t} (f(X_{s-} \exp \Delta M_s) - f(X_{s-}) - H_i f(X_{s-}) \Delta M_s^i) \end{aligned}$$

d'où $X = \mathscr{E}(M)$.

2° *Montrons que* $\mathscr{L}(X)$ *est la seule semi-martingale qui vérifie* $X = \mathscr{E}(\mathscr{L}(X))$. – On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{S}(\mathscr{G})$ avec $M_0 = 0$ et $\Delta M \in \mathscr{U}$ p. s. telle que $X = \mathscr{E}(M)$ et on montre que $M = \mathscr{L}(X)$.

Pour $t \geqq 0$ et $i=1, \ldots, d$, par définition de $\mathscr{L}(\mathrm{X})$:

$$\mathscr{L}(\mathrm{X})_t^i = \int_0^t h_a(\mathrm{X}_{s-})(\mathrm{D}_j^a, \theta^i)(\mathrm{X}_{s-}) \circ d\Phi_a^j(\mathrm{X}_s)$$
$$+ \sum_{s \leqq t} (\log^i((\mathrm{X}_{s-})^{-1}\mathrm{X}_s) - h_a(\mathrm{X}_{s-})(\mathrm{D}_j^a, \theta^i)(\mathrm{X}_{s-})\Delta\Phi_a^j(\mathrm{X}_{s-}))$$

Comme $\mathrm{X} = \mathscr{E}(\mathrm{M})$,

$$\mathscr{L}(\mathrm{X})_t^i = \int_0^t h_a(\mathrm{X}_{s-})(\mathrm{D}_j^a, \theta^i)(\mathrm{X}_{s-})\mathrm{H}_k\Phi_a^j(\mathrm{X}_{s-}) \circ d\mathrm{M}_s^k$$
$$+ \sum_{s \leqq t} (h_a(\mathrm{X}_{s-})(\mathrm{D}_j^a, \theta^i)(\mathrm{X}_{s-})(\Phi_a^j(\mathrm{X}_{s-} \exp \Delta\mathrm{M}_s)$$
$$- \Phi_a^j(\mathrm{X}_{s-}) - \mathrm{H}_k\Phi_a^j(\mathrm{X}_{s-})\Delta\mathrm{M}_s^k))$$
$$+ \sum_{s \leqq t} (\Delta\mathrm{M}_s^i - h_a(\mathrm{X}_{s-})(D_j^a, \theta^i)(\mathrm{X}_{s-})(\Phi_a^j(\mathrm{X}_{s-} \exp \Delta\mathrm{M}_s) - \Phi_a^j(\mathrm{X}_{s-})))$$

Or, pour (i, k) et a fixés, $\sum_j (\mathrm{D}_j^a, \theta^i)(\mathrm{X}_{s-})\mathrm{H}_k\Phi_a^j(\mathrm{X}_{s-}) = \delta_{ik}$, d'où

$$\mathscr{L}(\mathrm{X})_t^i = \int_0^t \sum_a h_a(\mathrm{X}_{s-})\, d\mathrm{M}_s^i + \sum_{s \leqq t} (\Delta\mathrm{M}_s^i - \sum_a h_a(\mathrm{X}_{s-})\Delta\mathrm{M}_s^i)$$
$$= \mathrm{M}_t^i \quad \text{en utilisant } \sum_a h_a \equiv 1. \quad \blacksquare$$

L'application $\mathscr{L}$ est ainsi la réciproque de $\mathscr{E}$ sur

$$\mathbb{S}_{\mathrm{U}}(\mathrm{G}) = \{\mathrm{X} \in \mathbb{S}(\mathrm{G});\ (\mathrm{X}_-)^{-1}\mathrm{X} \in \mathrm{U}\}$$

et par conséquent $\mathscr{L}$ dépend du domaine U de la carte exponentielle. Toutefois, si $\mathrm{U}' \subseteqq \mathrm{U}$, en notant $\mathscr{L}_{\mathrm{U}'}$ et $\mathscr{L}_{\mathrm{U}}$ les réciproques de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{S}_{\mathrm{U}'}(\mathrm{G})$ et $\mathbb{S}_{\mathrm{U}}(\mathrm{G})$, $\mathscr{L}_{\mathrm{U}'}$ et $\mathscr{L}_{\mathrm{U}}$ coïncident sur $\mathbb{S}_{\mathrm{U}'}(\mathrm{G})$. Si G est un groupe exponentiel, alors $\mathscr{E}$ admet une réciproque sur $\mathbb{S}(\mathrm{G})$ tout entier.

Voici enfin deux règles de calcul concernant le logarithme stochastique, qui ne sont qu'une conséquence de la proposition 1.4.

PROPOSITION 3.2. — *Soient* X, Y *dans* $\mathbb{S}(\mathrm{G})$ *tels que* X, X^{-1}, Y *et* XY *soient à sauts dans* U *et tels que* X *et* Y *ne sautent pas en même temps. Alors*

$$\mathscr{L}(\mathrm{X}^{-1}) = -\mathrm{ad}(\mathrm{X}_-) \circ \mathscr{L}(\mathrm{X}) \cdot$$
$$\mathscr{L}(\mathrm{XY}) = \mathrm{ad}(\mathrm{Y}_-^{-1}) \circ \mathscr{L}(\mathrm{X}) + \mathscr{L}(\mathrm{Y}).$$

L'exponentielle stochastique, le logarithme stochastique, les propositions 1.4 et 3.2, sont autant d'outils pour étudier les semi-martingales à valeurs dans le groupe. Par exemple, la première de ces propositions donne une décomposition multiplicative des éléments de $\mathbb{S}(\mathrm{G})$ en « partie martingale continue » (*cf.* [HDL]) et partie sans martingale continue, et la seconde permet de résoudre des problèmes de type Cameron-Martin-Girsanov sur le groupe (*cf.* [S]).

Ce travail est un extrait de la thèse de doctorat que j'ai eu le plaisir de préparer sous la direction de Dominique Lépingle. Je tiens à lui exprimer ici toute ma reconnaissance, et je tiens également à remercier Monique Pontier pour ses remarques constructives concernant la mise en forme des démonstrations.

RÉFÉRENCES

[DDM] C. DOLEANS-DADE, P. A. MEYER, Équations différentielles stochastiques, *Sém. Proba. XI*, 1977, p. 376-382.

[Em1] M. EMERY, Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques. Application aux intégrales multiplicatives stochastiques, *Z.W.*, vol. **41**, 1978, p. 260-280.

[Em2] M. EMERY, *Stochastic calculus in manifolds*, Springer-Verlag, 1989.

[Es] A. ESTRADE, Calcul stochastique discontinu sur les groupes de Lie, *Thèse de doctorat*, Université d'Orléans, 1990.

[FS] P. FEINSILVER et R. SCHOTT, *Operators, stochastic processus and Lie groups. Probability on groups IX*, Oberwolfach 88, H. HEYER éd., 1989.

[HDL] M. HAKIM-DOWEK et D. LEPINGLE, L'exponentielle stochastique des groupes de Lie, *Sém. Proba. XX*, 1986, p. 352-374.

[H] S. HELGASON, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, New York, 1978.

[I] M. IBERO, Intégrales stochastiques multiplicatives et construction de diffusions sur un groupe de Lie, *Bull. Sci. Math.*, vol. **100**, 1976, p. 175-191.

[IW] N. IKEDA et S. WATANABE, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North Hlland, 1981.

[JS] J. JACOD et A. N. SHIRYAEV, *Limit theorems for stochastic processes*, Springer-Verlag, 1987.

[K] R. L. KARANDIKAR, A.s. approximation results for multiplicative stochastic integrals, *Sém. Proba. XVI*, 1982, p. 384-391.

[McK] H. P. MCKEAN, *Stochastic integrals*, Academic Press, New York, 1969.

[Ma] S. I. MARCUS, Modeling and approximation of stochastic differential equations driven by semimartingales, *Stochastics*, vol. **4**, 1981, p. 223-243.

[Me] P. A. MEYER, Inégalités de normes pour les intégrales stochastiques, *Sém. Proba. XII*, 1978, p. 757-762.

[S] I. SHIGEKAWA, Transformation of the brownian motion on a riemannian symmetric space, *Z.W.*, vol. **65**, 1984, p. 493-522.

(*Manuscrit reçu le* 15 *janvier* 1991;
corrigé le 13 *mai* 1991.)