

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MICHÈLE THIEULLEN

Temps d'explosion d'équations différentielles stochastiques du type Doléans-Dade

Annales de l'I. H. P., section B, tome 27, n° 4 (1991), p. 549-557

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1991__27_4_549_0

© Gauthier-Villars, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Temps d'explosion d'équations différentielles stochastiques du type Doléans-Dade

par

Michèle THIEULLEN

Laboratoire de Probabilités, Université Paris-VI, Tour 56, 3^e étage,
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

RÉSUMÉ. — Nous montrons qu'une famille d'équations de Doléans-Dade : $X_t = x + \int_0^t A(X)_s dZ_s$ dans \mathbb{R}^d , où A est localement lipschitzien et $T(\infty, x)$ désigne le temps d'explosion de la solution issue de x , vérifie : $\mathbb{P}(\forall x \in \mathbb{R}^d, T(\infty, x) = +\infty) = 1$ lorsque A est à croissance sous-linéaire et que $C(n) \leq (\text{Log } n)^{1/2}$ pour tout n , $C(n)$ étant le rapport de Lipschitz de la restriction de A à l'ensemble des processus u tels que $\sup_{t \geq 0} |u_t| \leq n$.

Mots clés : Équations différentielles stochastiques, semi-martingales, temps d'explosion.

ABSTRACT. — For a family of Doléans-Dade equations: $X_t = x + \int_0^t A(X)_s dZ_s$ in \mathbb{R}^d where A is locally lipschitz and $T(\infty, x)$ is the explosion time of the solution starting from x , we prove that $\mathbb{P}(\forall x \in \mathbb{R}^d, T(\infty, x) = +\infty) = 1$ when A has at most linear growth and $C(n) \leq (\text{Log } n)^{1/2}$ for every n , where $C(n)$ is the lipschitz coefficient of the restriction of A to the set of processes u such that $\sup_{t \geq 0} |u_t| \leq n$.

Classification A.M.S. : 60 H 10.

1. NOTATIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité. La filtration \mathcal{F} vérifie les conditions habituelles. Nous noterons $\mathcal{C}(\mathcal{F}; d)$ [resp. $\mathcal{C}(\mathcal{F}; d, m)$] l'ensemble des processus \mathcal{F} -adaptés continus à valeurs dans \mathbb{R}^d (resp. dans l'ensemble des matrices réelles à d lignes et m colonnes). A est une application de $\mathcal{C}(\mathcal{F}; d)$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{F}; d, m)$ qui vérifie pour tout \mathcal{F} -temps d'arrêt T et tout couple (X, Y) de processus :

$$X^T = Y^T \Rightarrow A(X)^T = A(Y)^T \tag{A.1}$$

Z est une \mathcal{F} -semi-martingale continue à valeurs dans \mathbb{R}^m , $Z = (Z^i; 1 \leq i \leq m)$ où pour tout i , Z^i est une semi-martingale réelle égale à $M^i + V^i$, M^i étant une martingale locale continue et V^i un processus à variation finie continu. $\langle M^i \rangle$ désigne le crochet de M^i et pour tout $T > 0$, $\int_{[0, T]} |dV_s^i|$ est la variation totale de V^i sur $[0; T]$. On dit que Z appartient à \mathcal{S}_∞ si pour tout $1 \leq i \leq m$, $\sqrt{\langle M^i \rangle}_\infty + \int_0^\infty |dV_s^i|$ appartient à $L^\infty(\Omega)$.

$$\sup_{1 \leq i \leq m} \left\| \sqrt{\langle M^i \rangle}_\infty + \int_0^\infty |dV_s^i| \right\|_{L^\infty(\Omega)}$$

définit une norme sur \mathcal{S}^z que nous noterons $\|\cdot\|$. $|\cdot|$ désignera suivant les cas une norme sur \mathbb{R}^d ou sur l'ensemble des matrices à d lignes et m colonnes. Nous noterons \mathcal{R}_p l'ensemble des processus continus \mathcal{F} adaptés pour lesquels $E(\sup_{t \geq 0} |X_t|^p)$ est fini et $\mathcal{R}_{p,0}$ le sous-ensemble de \mathcal{R}_p formé des X tels que $X_0 = 0$. $\sup_{[0, r]} |u|$ désignera $\sup_{0 \leq t \leq r} |u_t|$ et nous convenons que la borne inférieure d'un ensemble vide est $+\infty$.

Nous considérons la famille d'équations dites de Doléans-Dade :

$$X(x)_t = x + \int_0^t A(X(x))_s dZ_s \tag{A.x}$$

où $\int_0^\cdot A(X(x))_s dZ_s$ désigne l'intégrale stochastique du processus $A(X(x))$ par rapport à la semi-martingale Z et sera notée dorénavant $\int_0^\cdot A(X(x)) dZ$.

LEMME FONDAMENTAL 1.1 (cf. [2]). — Soit $p > 2$. Supposons que Z appartient à \mathcal{S}^z . Il existe une constante $C_p > 0$ ne dépendant que de d, p et

m telle que pour tout \mathcal{F} temps d'arrêt T et tout R de $\mathcal{C}(\mathcal{F}; d, m)$

$$\left[E \left(\sup_{[0, T]} \left| \int_0^\cdot R dZ \right|^p \middle| \mathcal{F}_0 \right) \right]^{1/p} \leq C_p \|Z\| [E(\sup_{[0, T]} |R|^p | \mathcal{F}_0)]^{1/p} \quad (1.1)$$

Ce lemme est une conséquence du lemme suivant. On dit qu'un processus adapté croissant A engendre un potentiel borné par c si pour tout temps d'arrêt T , $E(A_\infty - A_T | \mathcal{F}_T) \leq c$.

LEMME 1.2. — Soit Z une semi-martingale réelle continue de décomposition $Z = M + V$ où M appartient à BMO et $\int_0^\cdot |dV_s|$ engendre un potentiel borné par c . Alors, pour tout $p > 1$ il existe une constante a dépendant de p , $\|M\|_{\text{BMO}}$ et c telle que :

$$\forall X \in \mathcal{R}_p, \quad \left\| \int_0^\cdot X dZ \right\|_{\mathcal{R}_p} \leq a \|X\|_{\mathcal{R}_p}.$$

Démonstration du lemme 1.2. — Posons

$$\begin{aligned} A_t &= \int_0^t |dV_s|, & R_t &= \sup_{[0; t]} |X|, \\ K_t &= \sup_{[0; t]} \left| \int_0^\cdot X dM \right| & \text{et} & \quad L_t = \int_0^t R_u dA_u. \end{aligned}$$

Montrons qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tous temps d'arrêt S et T tels que $S \leq T$,

$$E(K_T - K_S)^2 \leq \alpha \|M\|_{\text{BMO}}^2 E(R_T^2)$$

et

$$E(L_T - L_S)^2 \leq 4c^2 E(R_T^2).$$

L'inégalité annoncée est alors une conséquence du lemme 1.1 de [4].

Par l'inégalité de Bukholder-Davis-Gundy il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tous temps d'arrêt S et T tels que $S \leq T$

$$E(K_T - K_S)^2 \leq \alpha E \left(\int_S^T R_u^2 d\langle M \rangle_u \right),$$

Par intégration par parties le second membre de cette inégalité est majoré par $\alpha \|M\|_{\text{BMO}}^2 E(R_T^2)$. Nous remarquons également que

$$\sup_{[0; t]} \left| \int_0^\cdot X_u dV_u \right| \leq L_t$$

et que

$$(L_T - L_S)^2 = 2 \int_S^T [(L_t - L_S) R_t] dA_t.$$

Par intégration par parties cette expression est majorée par $2cE(L_T - L_S)R_T$. Ce qui donne, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $E(L_T - L_S)^2 \leq 4c^2 E(R_T^2)$.

2. ÉTUDE DE (A.x) LORSQUE A EST GLOBALEMENT LIPSCHITZIEN

Nous supposons dans ce paragraphe que A est globalement lipschitzien c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout \mathcal{F} -temps d'arrêt T et tous u, v appartenant à $\mathcal{C}(\mathcal{F}; d)$

$$\sup_{[0; T]} |A(u) - A(v)| \leq C \sup_{[0; T]} |u - v|.$$

Nous introduisons tout d'abord un type d'équations plus général que (A.x) qui permet d'étudier la solution de l'équation (A.x) après un temps d'arrêt. Ci-dessous pour une filtration \mathcal{G} , $\mathcal{C}^0(\mathcal{G}; d)$ désigne l'ensemble des X de $\mathcal{C}(\mathcal{G}; d)$ tels que $X_0 = 0$. Un résultat tel que celui du théorème 2.1 est nécessaire ici car en général la solution de (A.x) ne définit pas un processus markovien puisque, pour tout t, $A(X)_t$ dépend de $\{X_s; s \leq t\}$ et pas seulement de X_t .

THÉORÈME 2.1. — Soit \mathcal{G} une filtration vérifiant les conditions habituelles et Y une \mathcal{G} -semi-martingale continue à valeurs dans \mathbb{R}^m appartenant à \mathcal{S} . Soit $(B(x, \cdot); x \in \mathbb{R}^d)$ une famille d'applications de $\mathcal{C}^0(\mathcal{G}; d)$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{G}; d, m)$ telle que :

(B.1) Pour tout \mathcal{G} -temps d'arrêt T et tout u de $\mathcal{C}^0(\mathcal{G}; d)$

$$\int_0^\cdot B(x, u)^T dY^T = \int_0^\cdot B(x, u^T) dY^T.$$

(B.2) Il existe une application $H: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$, telle que

- (i) pour tous x, y de \mathbb{R}^d $H(x, y, \cdot)$ est \mathcal{G}_0 -mesurable;
- (ii) p. s. $(x, y) \mapsto H(x, y)$ est une distance sur \mathbb{R}^d ;
- (iii) il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tous x, y de \mathbb{R}^d , tous u, v dans $\mathcal{C}^0(\mathcal{G}, d)$ et tout \mathcal{G} -temps d'arrêt T :

$$\sup_{[0; T]} |B(x, u) - B(y, v)| \leq \alpha [H(x, y) + \sup_{[0; T]} |u - v|].$$

Alors pour tout x de \mathbb{R}^d l'équation $U = \int_0^\cdot B(x, U) dY$ (B.x) a une solution unique U(x) dans $\mathcal{B}_{p,0}$ qui vérifie pour tout \mathcal{G} -temps d'arrêt T :

$$[E(\sup_{[0; T]} |U(x) - U(y)|^p | \mathcal{G}_0)]^{1/p} \leq H(x, y) 2^{4\alpha^2 m^2 C_p^2 \|Y^T\|^2 + 1}.$$

La démonstration de ce théorème est obtenue en adaptant la méthode de [2]. Elle consiste à établir l'existence et l'unicité de la solution sur des intervalles successifs sur lesquels la norme de Y est « petite » comme l'indiquent les deux propositions suivantes que nous ne démontrons pas.

PROPOSITION 2.2. — Soit R un \mathcal{G} -temps d'arrêt tel que $\|Y^R\| \leq 1/(2\alpha C_p)$.

Alors pour tout x de \mathbb{R}^d l'équation $u = \int_0^\cdot B(x; u) dY^R$ a une solution unique notée $u(x)$ qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad [E(\sup_{[0, R]} |u(x) - u(y)|^p | \mathcal{G}_0)]^{1/p} \leq H(x, y).$$

PROPOSITION 2.3. — Soient R et S deux \mathcal{G} -temps d'arrêt vérifiant $R \leq S$ p. s. et $\|Y^R - Y^S\| \leq 1/(2\alpha C_p)$. On suppose que pour tout x de \mathbb{R}^d l'équation

$u = \int_0^\cdot B(x; u) dY^R$ a une solution unique dans $\mathcal{R}_{p,0}$. Il en est alors de même

de l'équation $v = \int_0^\cdot B(x; v) dY^S$. De plus, pour tout x , $v(x)^R = u(x)^R$ et pour tous x, y :

$$[E(\sup_{[0, S]} |v(x) - v(y)|^p | \mathcal{G}_0)]^{1/p} \leq H(x, y) + 2[E(\sup_{[0, R]} |u(x) - u(y)|^p | \mathcal{G}_0)]^{1/p}.$$

Démonstration du théorème 2.1. — Posons $Y = (Y_i; 1 \leq i \leq m)$ avec $Y_i = m_i + a_i$ où m_i est une martingale continue et a_i un processus à variation finie continu. Soit $(S_k; k \geq 0)$ la suite de temps d'arrêt définie par récurrence par $S_0 = 0$,

$$S_{k+1} = \inf \left\{ t > S_k : \sup_{1 \leq i \leq m} \left(\int_{S_k}^t d\langle m_i \rangle_s \right)^{1/2} + \int_{S_k}^t |da_i(s)| \geq \frac{1}{2\alpha C_p} \right\}.$$

Montrons que pour temps tout d'arrêt T (y compris T égal à $+\infty$ p. s.) il existe r tel que $\mathbb{P}(S_r \geq T) = 1$. Par définition de $\|Y^T\|$, on a pour tout $1 \leq i \leq m$, p. s. :

$$\|Y^T\| \geq \left(\int_0^T d\langle m_i \rangle_s \right)^{1/2} + \int_0^T |da_i(s)|$$

Grâce à la concavité de la racine carrée, ceci entraîne, pour tout $k \geq 1$:

$$\|Y^T\| \mathbf{1}_{\{S_k < T\}} \geq \mathbf{1}_{\{S_k < T\}} \frac{1}{\sqrt{k}} \left[\sum_{l=0}^{k-1} \left(\int_{S_l}^{S_{l+1}} d\langle m_i \rangle_s \right)^{1/2} + \int_{S_l}^{S_{l+1}} |da_i(s)| \right].$$

On en déduit :

$$m \| Y^T \| \mathbf{1}_{\{S_k < T\}} \geq \mathbf{1}_{\{S_k < T\}} \frac{1}{\sqrt{k}} \times \sum_{l=0}^{k-1} \left[\sum_{i=1}^m \left(\int_{S_l}^{S_{l+1}} d \langle m_i \rangle_s \right)^{1/2} + \int_{S_l}^{S_{l+1}} |da_i(s)| \right] \geq \frac{\sqrt{k}}{2m\alpha C_p} \mathbf{1}_{\{S_k < T\}},$$

par définition des S_l . On en déduit pour $r = [4(m\alpha C_p)^2 \| Y^T \|^2] + 1$, $\mathbb{P}(S_r \geq T) = 1$. Remarquons que par construction, pour $k \leq r$, $\| Y^{S_k} - Y^{S_{k-1}} \| \leq 1/(2\alpha C_p)$. On en déduit le théorème en appliquant la proposition 2.2 et en itérant la proposition 2.3.

Nous supposons désormais que $p > d$ et que A est globalement lipschitzien de rapport C . Nous supposons également dans ce paragraphe ainsi que dans le paragraphe 3 que Z appartient \mathcal{S}_∞ .

Le corollaire 2.4 ci-dessous est classique (cf. par exemple [1]).

COROLLAIRE 2.4. — (A.x) a une unique solution dans \mathcal{R}_p et l'application de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ dans \mathbb{R}^d qui à (x, t) associe $X(x)_t$ est continue.

THÉORÈME 2.5. — Soit S un \mathcal{F} -temps d'arrêt. La famille $\{ (X(x)_{t+S} - X(x)_s; t \geq 0); x \in \mathbb{R}^d \}$ est solution d'une famille d'équations (B.x) avec $\alpha = C$ et $H(x, y) = 2 \sup_{[0, S]} |X(x) - X(y)|$.

Démonstration du corollaire 2.4. — X est solution de (A.x) si et seulement si $X - x$ est solution de l'équation $u = \int_0^\cdot B(x; u) dZ$ où $B(x; u) = A(u + x)$ et $H(x, y) = |x - y|$. Il suffit alors d'appliquer le théorème 2.1 et le critère de Kolmogorov.

Démonstration du théorème 2.5. — Pour tout $t \geq 0$, posons $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{t+S}$, $Y_t = Z_{t+S} - Z_S$ et $U_t = X(x)_{t+S} - X(x)_S$. U est solution de l'équation $U_t = \int_0^t B(x; U) dY$ où pour tout u de $\mathcal{C}^0(\mathcal{G}; d)$,

$$B(x; u) = \{ A(F(u))(t+S); t \geq 0 \},$$

$F(u)$ étant défini par $F(u)_s = X(x)_s$ si $s \leq S$; $F(u)_s = u_{s-S} + X(x)_S$ si $s \geq S$. On vérifie sans difficulté que B satisfait (B.1) et (B.2).

3. ÉTUDE DE (A.x) LORSQUE A EST LOCALEMENT LIPSCHITZIEN

Rappelons tout d'abord deux définitions.

DÉFINITION 3.1. — On dit que A est localement lipschitzien si pour tout n il existe une constante $C(n) > 0$ telle que pour tout \mathcal{F} -temps d'arrêt

T et tous u, v appartenant à $\mathcal{C}(\mathcal{F}; d)$ vérifiant $\sup_{[0; T]} |u| \leq n$ et $\sup_{[0; T]} |v| \leq n$ on ait :

$$\sup_{[0; T]} |A(u) - A(v)| \leq C(n) \sup_{[0; T]} |u - v|.$$

DÉFINITION 3.2. — On dit que A est à croissance sous-linéaire s'il existe une constante $\Gamma > 0$ telle que pour tout temps d'arrêt T et tout u de $\mathcal{C}(\mathcal{F}; d)$ on ait

$$\sup_{[0; T]} |A(u)| \leq \Gamma (\sup_{[0; T]} |u| + 1).$$

Nous supposons désormais que $p > 2d$. Pour n entier, h_n désigne l'application qui à tout u de $\mathcal{C}(\mathcal{F}; d)$ associe le processus défini par $h_n(u)_t = u_t$ si $|u_t| \leq n$ et $h_n(u)_t = nu_t/|u_t|$ sinon. L'application $A \circ h_n$ est notée A_n . Les deux propositions suivantes sont bien connues

PROPOSITION 3.3. — Supposons A localement lipschitzien. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. $X^n(x)$ désigne la solution de l'équation

$$X^n(x) = x + \int_0^\cdot A_n(X^n(x)) dZ$$

et

$$T(n, x) = \inf \{ t > 0 : |X^n(x)_t| > n \}.$$

Pour tout couple d'entiers (n, m) vérifiant $n < m$ les processus $(X^n(x))^{T(n, x)}$ et $(X^m(x))^{T(n, x)}$ coïncident. La suite $(T(n, x))_n$ est strictement croissante.

Dans la suite nous noterons $T(\infty, x) = \sup_n T(n, x)$.

PROPOSITION 3.4. — Si de plus A est à croissance sous-linéaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbb{P}(T(\infty, x) = +\infty) = 1.$$

Notre résultat est le suivant :

THÉORÈME 3.5. — Si A est localement lipschitzien à croissance sous-linéaire et vérifie pour tout n $C(n) \leq (\text{Log } n)^{1/2}$, alors $\mathbb{P}(\forall x \in \mathbb{R}^d, T(\infty, x) = +\infty) = 1$.

Pour obtenir ce théorème nous utiliserons deux lemmes.

LEMME 3.6. — Soit S un temps d'arrêt tel que $\|Z^S\| < \frac{1}{2mC_p\sqrt{\text{Log } 2}}$.

Alors :

(*) pour tout compact K de \mathbb{R}^d : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{r > 0} \mathbb{P}(\exists x \in K : T(n, x) \leq S \wedge r) = 0$.

LEMME 3.7. — Soit S et T deux temps d'arrêt tels que $\|Z^T - Z^S\| < \frac{1}{2m C_p \sqrt{\text{Log } 2}}$ et $S \leq T$ p. s. Supposons que S vérifie l'assertion (\star) du lemme 3.6. Il en est alors de même de T .

Remarque. — Si un temps d'arrêt τ vérifie (\star) alors

$$P(\forall x \in \mathbb{R}^d, T(\infty, x) \geq \tau) = 1.$$

Démonstration du lemme 3.6. — Soit K un compact de \mathbb{R}^d et $r > 0$. D'après ce qui précède pour tous x, y :

$$E\left(\sup_{[0; S \wedge r]} |X^n(x) - X^n(y)|^p\right) \leq 2n^q |x - y|^p,$$

où $q = 4pm^2 C_p^2 \|Z^S\|^2 \text{Log } 2$. Fixons a dans K . D'après le lemme de Garsia-Rodemich-Rumsey (cf. [5], p. 47 et 60) p. s. pour tout x de K

$$\sup_{[0; S \wedge r]} |X^n(x) - X^n(a)|^p \leq \gamma(m, p, K) B(S, p, n, K),$$

où $\gamma(m, p, K)$ est une constante ne dépendant que de m, p , et du diamètre de K et $E(B(S, p, n, K)) \leq 2n^q |K|^2$ où $|K|$ désigne la mesure de Lebesgue de K . En posant $k = [n^p/2]$ on obtient :

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{x \in K} \sup_{[0; S \wedge r]} |X^n(x)|^p \geq n^p\right) \\ \leq P(T(k, a) \leq S \wedge r) + P\left(\gamma(m, p, K) B(S, p, n, K) \geq \frac{n^p}{2}\right). \end{aligned}$$

On obtient le lemme 3.6 en utilisant la proposition 3.4 et l'inégalité de Bienaymé-Tchébycheff.

Démonstration du lemme 3.7. — Fixons $n_0 \in \mathbb{N}$ et considérons $F(n_0) = \{S < +\infty\} \cap \{\forall x \in K, T(n_0, x) \geq S\}$. Pour $n \geq n_0$, $(X^n)^S$ et $(X^{n_0})^S$ coïncident sur $F(n_0)$. Compte tenu des théorèmes 2.1 et 2.5 ceci nous permet d'écrire pour tous x, y de K :

$$E\left(\sup_{[S; T \wedge (S+r)]} |X^n(x) - X^n(y)|^p \mathbf{1}_{F(n_0)}\right) \leq n^k n_0^l 8^p |x - y|^p,$$

avec $k = 4p C_p^2 \|Z^T - Z^S\|^2 m^2 \text{Log } 2$ et $l = 4p C_p^2 \|Z^S\|^2 m^2 \text{Log } 2$. On conclut comme précédemment grâce au lemme de Garsia-Rodemich-Rumsey que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{r \geq 0} P(\exists x \in K, T(n, x) \leq T \wedge (S+r) | F(n_0)) = 0,$$

ce qui entraîne :

$$\sup_{r \geq 0} P\left(\bigcap_{n \geq 0} \{\exists x \in K, T(n, x) \leq T \wedge (S+r)\} | F(n_0)\right) = 0.$$

On fait tendre n_0 vers $+\infty$ et on utilise que, puisque S vérifie $(*)$, $\bigcup_{n_0} F(n_0) = \{S < +\infty\}$ p. s. On conclut alors sans difficulté que T vérifie $(*)$.

Démonstration du théorème 3.5. — On obtient ce théorème en utilisant les deux lemmes précédents et le même argument que celui utilisé pour démontrer le théorème 2.1.

Remarques :

1. La condition $C(n) \leq (\text{Log } n)^{1/2}$ provient de la norme choisie sur l'espace des semi-martingales qui donne lieu à l'inégalité du lemme 1.1.

2. Léandre [3] a donné des contre exemples d'équations du type

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds$$

(où B est un mouvement brownien) avec σ et b localement lipschitziens sur \mathbb{R}^d telles que, pour tout x $\mathbb{P}(T(\infty, x) = +\infty) = 1$ et $\mathbb{P}(\forall x \in \mathbb{R}^d, T(\infty, x) = +\infty) < 1$. Mais dans aucun de ces exemples σ et b ne sont à croissance sous-linéaire.

RÉFÉRENCES

- [1] Y. BLAGOVESCENSKII et M. FREIDLIN, Certain Properties of Diffusion Processes Depending on a Parameter, *Soviet Mathematics (A.M.S. Translation of Doklady, Academy of Sciences of the U.S.S.R.)*, vol. 2, n° 3, 1961, p. 633-636.
- [2] M. EMERY, Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques; application aux intégrales stochastiques multiplicatives, *Z. Wahr. verw. Gebiete*, vol. 41, 1978, p. 241-262.
- [3] R. LÉANDRE, Un exemple en théorie des flots stochastiques, *Séminaire de probabilités, XVII; Lect. Notes Math.*, Springer-Verlag, n° 986, 1981/1982, p. 158-161.
- [4] E. LENGART, D. LÉPINGLE et M. PRATELLI, Présentation unifiée de certaines inégalités de la théorie des martingales, *Séminaire de probabilités, XIV; Lect. Notes Math.*, Springer-Verlag, n° 784, 1978/1979, p. 26-48.
- [5] D. STROOCK et S. R. S. VARADHAN, *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer-Verlag.

(Manuscrit reçu le 3 septembre 1990;
révisé le 17 mai 1991.)