ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. LACHAL

Sur le premier instant de passage de l'intégrale du mouvement brownien

Annales de l'I. H. P., section B, tome 27, nº 3 (1991), p. 385-405
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1991__27_3_385_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 27, n° 3, 1991, p. 385-405.

Probabilités et Statistiques

Sur le premier instant de passage de l'intégrale du mouvement brownien

par

A. LACHAL

Université de Lyon-I,
Institut de Mathématiques et Informatique,
Laboratoire d'Analyse et Probabilités,
43, boulevard du 11-Novembre-1918,
69622 Villeurbanne Cedex, France

RÉSUMÉ. — Considérons le processus stochastique bidimensionnel $U_t=(X_t+x+ty,\ B_t+y)$, $t \geqq 0$, B_t étant le mouvement brownien standard, $X_t=\int_0^t B_s\,ds$ et x, y deux réels quelconques. Dans cette note nous déterminons la distribution conjointe de τ_a et U_{τ_a} où τ_a est le premier instant de passage sur la droite $\{a\}\times\mathbb{R}$ du processus U_t. Nous donnons également une preuve élémentaire (ainsi qu'une généralisation) d'un résultat récent de Lefèbvre (théorèmes 1 et 3 de [15]).

Mots clés : Intégrale du mouvement brownien, temps de passage, transformation de Kontorovich-Lebedev, fonctions d'Airy.

ABSTRACT. — Let B_t, $t \geqq 0$, be the standard Brownian motion in $\mathbb{R}$. Define

$$X_t=\int_0^t B_s\,ds, \qquad U_t=(X_t+x+ty,\ B_t+y), \qquad (x,\ y)\in\mathbb{R}^2,$$

and $\tau_a=\inf\{t>0 : U_t\in\{a\}\times\mathbb{R}\}$. In this note we compute explicitely the joint distribution of τ_a and U_{τ_a}. We also indicate a simple proof of a recent result of Lefèbvre with some improvement.

Classification A.M.S. : 60 J 65, 60 G 40, 60 G 17, 60 G 15.

I. INTRODUCTION

Soit B_t le mouvement brownien standard, $X_t = \int_0^t B_s\, ds$ sa primitive et $U_t = (X_t + x + ty, B_t + y)$ le processus bidimensionnel associé. Le processus U_t intervient naturellement dans divers domaines des mathématiques appliquées, notamment en mécanique (Rice [23], Potter [20], Kac [12], McKean [19]), optimisation (Lefèbvre [15] et [16]), statistiques (Gani et McNeil [8]), biologie (Puri [21] et [22]).

Plus particulièrement on est amené à rechercher la distribution des fonctionnelles suivantes :

1. $\tau_a = \inf\{t > 0 : X_t + x + ty = a\}$: premier instant de passage en a de la première composante de U_t;
2. B_{τ_a} : position de la deuxième composante de U_t à l'instant où la première atteint le point a;
3. le couple (τ_a, B_{τ_a});
4. X_{σ_b} avec $\sigma_b = \inf\{t > 0 : B_t + y = b\}$: position de la première composante à l'instant où la deuxième atteint le point b;
5. le couple (σ_b, X_{σ_b});
6. le couple $(\sigma_{ab}, X_{\sigma_{ab}})$ avec $\sigma_{ab} = \inf\{t > 0 : B_t + y \in \{a, b\}\}$.

Certaines distributions ont pu être obtenues explicitement. Rappelons les résultats connus jusqu'à présent : dans ce qui suit nous désignerons par

$$P_{(x,y)}\{X_t \in du, B_t \in dv\} = P\{X_t + x + ty \in du, B_t + y \in dv\} = p_t(x, y; u, v)\, du\, dv$$

où

$$p_t(x, y; u, v) = \frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} \exp\left[-\frac{6}{t^3}(u - x - ty)^2 + \frac{6}{t^2}(u - x - ty)(v - y) - \frac{2}{t}(v - y)^2 \right]$$

est la densité de transition du processus (X_t, B_t).

A. La loi conjointe du couple $(\tau_a, |B_{\tau_a}|)$ a été calculée par McKean [19] dans le cas particulier $x = a$. Elle s'exprime par la formule suivante :

$$P_{(a,y)}\{\tau_a \in dt\, |B_{\tau_a}| \in dz\} = \frac{3z}{\pi \sqrt{2}\, t^2} e^{-(2/t)(y^2 - |y|z + z^2)} \int_0^{4|y|z/t} e^{-(3\theta/2)} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(z)\, dt\, dz \quad (1)$$

et en particulier :

$$P_{(a,\,y)}\{|B_{\tau_a}|\in dz\}=\frac{3}{2\pi}\,\frac{|y|^{1/2}z^{3/2}}{z^3+|y|^3}\,\mathbf{1}_{[0,\,+\infty[}(z)\,dz. \tag{2}$$

B. Gor'kov a déterminé la loi de la variable aléatoire B_{τ_a} dans le cas plus général $x<a$, $y\leqq 0$ [10]. Elle est donnée par l'expression suivante :

$$P_{(x,\,y)}\{|B_{\tau_a}|\in dz\}=z\Bigg[\Phi(a,\,-z;\,x,\,-y) \\ -\frac{3}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\mu^{3/2}}{\mu^3+1}\Phi(a,\,\mu z;\,x,\,-y)\,d\mu\Bigg]\mathbf{1}_{[0,\,+\infty[}(z)\,dz \tag{3}$$

avec $\Phi(x,\,y;\,u,\,v)=\int_0^{+\infty}p_t(x,\,y;\,u,\,v)\,dt.$

C. Goldman a déterminé la distribution de la variable aléatoire τ_a dans le cas $x<a$, $y\leqq 0$ sous la forme [9] :

$$P_{(x,\,y)}\{\tau_a\in dt\}=\Bigg[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi t^3}}\left(\frac{3(a-x)}{t}-y\right)e^{-3(a-x-ty)^2/2t^3} \\ +\int_0^{+\infty}z\,dz\int_0^t\int_0^{+\infty}P_{(0,\,z)}\{\tau_0\in ds,\,|B_{\tau_0}|\in d\mu\}\,q_{t-s}(x,\,y;\,a,\,z)\Bigg]dt \tag{4}$$

avec $q_t(x,\,y;\,u,\,v)=p_t(x,\,y;\,u,\,v)-p_t(x,\,y;\,u,\,-v)$.

D. Enfin Lefèbvre a obtenu la transformée de Laplace du couple $(\sigma_b,\,X_{\sigma_b})$ en termes de fonctions d'Airy [15] :

$$\left.\begin{aligned}&\mathbb{E}_{(x,\,y)}[e^{-\alpha\sigma_b-\gamma X_{\sigma_b}}]=e^{-\gamma x}\cdot\frac{\mathrm{Ai}(2^{1/3}((\alpha+\gamma y)/\gamma^{2/3}))}{\mathrm{Ai}(2^{1/3}((\alpha+\gamma b)/\gamma^{2/3}))}\\&\text{si } y\geqq b\geqq 0,\,\alpha>0,\,\gamma>0,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathbb{E}_{(x,\,y)}[e^{-\alpha\sigma_b-i\gamma X_{\sigma_b}}]=e^{-i\gamma x}\cdot\frac{\mathrm{Ai}(2^{1/3}((\alpha+i\gamma y)/\gamma^{2/3})\,e^{\varepsilon i\pi/3})}{\mathrm{Ai}(2^{1/3}((\alpha+i\gamma b)/\gamma^{2/3})\,e^{\varepsilon i\pi/3})}\\&\text{si } y\geqq b,\,b<0,\,\alpha>0,\\&\qquad\varepsilon=-1\quad\text{si}\quad\gamma>0,\\&\qquad\varepsilon=1\quad\text{si}\quad\gamma<0,\end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

Ai désignant la fonction d'Airy usuelle [1]. Dans le cas $b=0$ il obtient la distribution de X_{σ_0} :

$$P_{(x,\,y)}\{X_{\sigma_0}\in dz\}=\frac{\Gamma(2/3)}{\pi\,2^{2/3}\,3^{1/6}}\,\frac{|y|}{|z-x|^{4/3}}\,e^{-2|y|^3/9|z-x|}\,\mathbf{1}_A(z)\,dz, \tag{6}$$

avec $A=]x,\,+\infty[$ si $y>0$, $A=]-\infty,\,x[$ si $y<0$.

On notera que (5) et (5′) ont été récemment redémontrées par Biane et Yor [2] et (2) par McGill ([17], [18]) à l'aide de techniques différentes faisant appel au temps local du mouvement brownien et à la méthode de Wiener-Hopf.

On pourra également remarquer que l'intervention de la fonction d'Airy dans ce type de problème n'est pas nouvelle; *voir* par exemple Kac ([12], [13] en 1946), Shepp ([24] en 1982) et Groenenboom ([11] en 1989).

Dans cette note nous nous proposons de compléter ces résultats en explicitant la distribution conjointe du couple (τ_a, B_{τ_a}) dans le cas général où x et y sont des réels quelconques (c'est-à-dire dans le cas $x \neq a$, jusqu'à présent non résolu).

Nous indiquerons également une preuve très simple des résultats de Lefèbvre [formules (5) et (5')], qui nous permettra d'obtenir en plus la transformée de Laplace du couple $(\sigma_{ab}, X_{\sigma_{ab}})$.

II. LA DISTRIBUTION CONJOINTE DU COUPLE (τ_a, B_{τ_a})

Notre résultat s'énonce comme suit :

THÉORÈME 1. — *La distribution conjointe du couple* (τ_a, B_{τ_a}) *est donnée par la formule*

$$\begin{aligned} P_{(x,y)}\{\tau_a \in dt,\ B_{\tau_a} \in dz\} &= |z| \Big[p_t(x, y;\ a, z) - \int_0^t \int_0^{+\infty} P_{(0,\,-|z|)}\{\tau_0 \in ds,\ B_{\tau_0} \in d\mu\} \\ &\qquad p_{t-s}(x, y;\ a, -\varepsilon\mu) \Big] \mathbf{1}_A(z)\, dt\, dz \qquad (7) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} P_{(0,\,-|z|)}\{\tau_0 \in ds,\ B_{\tau_0} \in d\mu\} \\ = \frac{3\mu}{\pi\sqrt{2}\, s^2} e^{-(2/s)(z^2 - |z|\mu + \mu^2)} \int_0^{4|z|\mu/s} e^{-(3\theta/2)} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \mathbf{1}_{[0,\,+\infty[}(\mu)\, ds\, d\mu \qquad (8) \end{aligned}$$

et les conventions d'écriture

$$A = [0, +\infty[\quad \text{si } x < a, \qquad A =]-\infty, 0] \qquad \text{si } x > a,$$

Preuve. — Notre démarche est sensiblement la même que celle de Gor'kov [10], l'innovation par rapport à cette dernière consistant à utiliser au cours de la démonstration la technique employée par McKean pour déterminer la distribution du couple (τ_a, B_{τ_a}) dans le cas $x=a$ [19], et de lever par ce biais l'obstacle auquel Gor'kov s'était heurté.

Énonçons les points essentiels de la démonstration sous forme de lemmes que nous démontrerons au paragraphe III, la difficulté essentielle se situant au niveau du lemme 4.

LEMME 1. — *La loi de la variable aléatoire* B_{τ_a} *est portée par l'intervalle* $[0, +\infty[$ (*resp.* $]-\infty, 0]$) *lorsque* $x<a$ (*resp.* $x>a$).

LEMME 2. — *La limite suivante est satisfaite :*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} \tau_a=0 \qquad (\textit{resp. } \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} \tau_a=0) \textit{ lorsque } y>0 \ (\textit{resp. } y<0).$$

LEMME 3. — *La transformée de Laplace du couple* (τ_a, B_{τ_a}) *définie par*

$$u(x, y)=\mathbb{E}_{(x, y)}[e^{-\lambda\tau_a-\nu B_{\tau_a}}] \quad \textit{pour } x<a, \qquad -\infty<y<+\infty$$

(*resp.* $u(x, y)=\mathbb{E}_{(x, y)}[e^{-\lambda\tau_a+\nu B_{\tau_a}}]$ *pour* $x>a, -\infty<y<+\infty$), $\lambda>0$, $\nu>0$, *est solution du problème aux limites suivant :*

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)+y\dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y)=\lambda u(x, y), \\ x<a \quad (\text{resp. } x>a), \qquad -\infty<y<+\infty, \\ u(a^-, y)=e^{-\nu y}, \qquad y>0 \quad [\text{resp. } u(a^+, y)=e^{\nu y}, \ y<0], \end{array}\right\} \tag{9}$$

$u(a^-, y)$ [*resp.* $u(a^+, y)$] *désignant la limite à gauche* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} u(x, y)$ [*resp. à droite* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} u(x, y)$].

Gor'kov n'a pu résoudre le problème (9) que dans le cas particulier où $\lambda=0$ (à l'aide de la transformation de Mellin) et n'a donc pu obtenir de ce fait que l'expression de la distribution de la variable aléatoire B_{τ_a} et non celle du couple (τ_a, B_{τ_a}).

En fait nous résolvons le problème (9) dans le cas général $\lambda>0$ en utilisant la transformation de Kontorovich-Lebedev.

La solution est fournie par le lemme 4.

LEMME 4. — *Le problème aux limites* (9) *admet une solution bornée unique donnée par la formule suivante :*

$$u(x, y)=\int_0^{+\infty} z\, e^{\nu z}\, G_{\lambda, a}^-(x, y; z)\, dz, \qquad x<a, \quad -\infty<y<+\infty \tag{10}$$

$$\left[\text{resp. } u(x, y)=\int_{-\infty}^{0} |z| e^{\nu z} G^{+}_{\lambda, a}(x, y; z)\, dz, \; x>a, \; -\infty<y<+\infty\right] \tag{10'}$$

avec

$$G^{-}_{\lambda, a}(x, y; z)=\Phi_\lambda(x, y; a, z)$$
$$-\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} P_{(a, -z)}\{\tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in d\mu\}\, \Phi_\lambda(x, y; a, -\mu),$$
$$x<a, \; -\infty<y<+\infty, \qquad z>0$$

$$\Big[\text{resp. } G^{-}_{\lambda, a}(x, y; z)=\Phi_\lambda(x, y; a, z)$$
$$-\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} P_{(a, z)}\{\tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in d\mu\}\, \Phi_\lambda(x, y; a, \mu),$$
$$x \geqq a, \qquad -\infty<y<+\infty, \qquad z \leqq 0\Big],$$

$$\Phi_\lambda(x, y; u, v)=\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} p_t(x, y; u, v)\, dt,$$

la loi conjointe $P_{(a, -|z|)}\{\tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in d\mu\}$ *étant indépendante de* a *et s'exprimant par la formule* (8).

Les fonctions auxiliaires $G^{-}_{\lambda, a}(x, y; z)$ et $G^{+}_{\lambda, a}(x, y; z)$ intervenant en (10) et (10′) peuvent s'écrire sous la forme d'une transformée de Laplace :

$$\left.\begin{aligned} G^{-}_{\lambda, a}(x, y; z)&=\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} H^{-}_a(x, y; z, t)\, dt,\\ x<a, \qquad -\infty&<y<+\infty, \qquad z>0, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} G^{+}_{\lambda, a}(x, y; z)&=\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} H^{+}_a(x, y; z, t)\, dt,\\ x>a, \qquad -\infty&<y<+\infty, \qquad z<0, \end{aligned}\right\} \tag{11'}$$

avec

$$H^{-}_a(x, y; z, t)=p_t(x, y; a, z)$$
$$-\int_0^t\int_0^{+\infty} P_{(a, -z)}\{\tau_a \in ds, B_{\tau_a} \in d\mu\}\, p_{t-s}(x, y; a, -\mu), \tag{12}$$

$$H^{+}_a(x, y; z, t)=p_t(x, y; a, z)$$
$$-\int_0^t\int_0^{+\infty} P_{(a, z)}\{\tau_a \in ds\, B_{\tau_a} \in d\mu\}\, p_{t-s}(x, y; a, \mu). \tag{12'}$$

Ainsi pour accéder au résultat annoncé (7), nous sommes ramenés à une inversion immédiate de la double transformée de Laplace de la loi du couple (τ_a, B_{τ_a}).

COROLLAIRE 1. — *La distribution de la variable aléatoire* τ_a *est donnée par la formule suivante :*

$$P_{(x,y)}\{\tau_a \in dt\} = \varepsilon\left[\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\left(\frac{3}{2}\,\frac{a-x}{t^{5/2}} - \frac{1}{2}\,\frac{y}{t^{3/2}}\right)e^{-3(a-x-ty)^2/2t^3} + \int_0^{+\infty} z\,dz \int_0^t P_{(0,-z)}\{\tau_0 \in ds\}\, q_{t-s}(x, y; a, z)\right] dt \quad (13)$$

avec

$$P_{(0,-z)}\{\tau_0 \in ds\} = \int_0^{+\infty} \frac{3\mu}{\pi\sqrt{2}\,s^2}\, e^{-(2/s)(z^2-\mu z+\mu^2)}\, d\mu \int_0^{4\mu z/s} e^{-(3\theta/2)}\frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}}\, ds,$$

$$z > 0,$$

$$q_t(x, y; u, v) = p_t(x, y; u, v) - p_t(x, y; u, -v),$$

et

$$\varepsilon = \text{signe de } (a - x).$$

Preuve. — Nous avons d'après (7), (12) et (12') :

$$\left.\begin{array}{l} P_{(x,y)}\{\tau_a \in dt\} = \displaystyle\int_0^{+\infty} z\,H_a^-(x, y; z, t)\,dz\,.\,dt \\ \text{si } x < a, \ -\infty < y < +\infty, \end{array}\right\} \quad (14)$$

$$\left.\begin{array}{l} P_{(x,y)}\{\tau_a \in dt\} = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} |z|\,H_a^+(x, y; z, t)\,dz\,.\,dt \\ \text{si } x > a, \ -\infty < y < +\infty. \end{array}\right\} \quad (14')$$

Les expressions (14) et (14') font intervenir l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} z p_t(x, y; a, z)\, dz$$

dont le calcul présente une difficulté. Pour contourner cet obstacle nous allons donner une représentation différente des fonctions $H_a^-(x, y; z, t)$ et $H_a^+(x, y; z, t)$ faisant intervenir l'intégrale élémentaire $\int_{-\infty}^{+\infty} z p_t(x, y; a, z)\, dz$ et ceci à l'aide du lemme suivant :

LEMME 5. — *Les égalités suivantes sont satisfaites :*

$$\left.\begin{array}{l} p_t(x, y; a, -z) \\ \quad = \displaystyle\int_0^t\int_0^{+\infty} P_{(a,-z)}\{\tau_a \in ds,\ B_{\tau_a} \in d\mu\}\, p_{t-s}(x, y; a, \mu) \\ \textit{si } x < a, -\infty < y < +\infty, z > 0, \end{array}\right\} \quad (15)$$

$$\left.\begin{aligned}&p_t(x, y;\, a, -z)\\&\quad=\int_0^t\int_0^{+\infty} \mathrm{P}_{(a,\, z)}\{\tau_a\in ds,\ \mathrm{B}_{\tau_a}\in d\mu\}\, p_{t-s}(x, y;\, a, -\mu)\\&si\, x>a,\ -\infty<y<+\infty, z<0.\end{aligned}\right\}\qquad(15')$$

Le lemme 5 sera démontré au paragraphe III.

En ajoutant alors les égalités (12) et (15) d'une part, (12′) et (15′) d'autre part, nous obtenons une nouvelle représentation des fonctions $\mathrm{H}_a^-(x, y;\, z, t)$ et $\mathrm{H}_a^+(x, y;\, z, t)$, soit :

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{H}_a^-(x, y;\, z, t)=q_t(x, y;\, a, z)\\&\quad+\int_0^t\int_0^{+\infty} \mathrm{P}_{(a,\, -z)}\{\tau_a\in ds,\ \mathrm{B}_{\tau_a}\in d\mu\}\, q_{t-s}(x, y;\, a, \mu)\\&\text{si}\, x<a,\ -\infty<y<+\infty, z>0,\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{H}_a^+(x, y;\, z, t)=q_t(x, y;\, a, z)\\&\quad+\int_0^t\int_0^{+\infty} \mathrm{P}_{(a,\, z)}\{\tau_a\in ds,\ \mathrm{B}_{\tau_a}\in d\mu\}\, q_{t-s}(x, y;\, a, -\mu)\\&\text{si}\, x>a,\ -\infty<y<+\infty, z<0,\end{aligned}\right\}\qquad(16')$$

avec

$$q_t(x, y;\, u, v)=p_t(x, y;\, u, v)-p_t(x, y;\, u, -v).$$

Nous déduisons ainsi de (14), (14′), (16), (16′) et (8) la formule

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_{(x,\, y)}\{\tau_a\in dt\}\\&\quad=\left[\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} zp_t(x, y;\, a, z)\, dz+\int_0^{+\infty} z\, dz\int_0^{+\infty}\mu\, d\mu\int_0^t \frac{3}{\pi\sqrt{2}\, s^2}\right.\\&\quad\left.\times e^{-(2/s)(z^2-z\mu+\mu^2)}\, ds\int_0^{4\mu z/s} e^{-(3\theta/2)}\frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}}\, q_{t-s}(x, y;\, a, \varepsilon\mu)\right] dt\\&\quad=\varepsilon\left[\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\left(\frac{3}{2}\,\frac{a-x}{t^{5/2}}-\frac{1}{2}\,\frac{y}{t^{3/2}}\right)\right.\\&\quad\times e^{-3(a-x-ty)^2/2t^3}+\int_0^{+\infty}\mu\, d\mu\int_0^t ds\left[\int_0^{+\infty}\frac{3z}{\pi\sqrt{2}\, s^2}\right.\\&\quad\left.\left.\times e^{-(2/s)(z^2-\mu z+\mu^2)}\int_0^{4\mu z/s} e^{-(3\theta/2)}\frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}}\, dz\right] q_{t-s}(x, y;\, a, \mu)\right] dt\end{aligned}$$

qui coïncide précisément avec le résultat (13) annoncé.

Remarque 1. — Nous retrouvons ainsi par une autre méthode la formule que Goldman [9] avait trouvée à l'aide d'une technique d'équations intégrales.

COROLLAIRE 2. — *La distribution de la variable aléatoire* B_{τ_a} *est donnée par la formule suivante :*

$$P_{(x,y)}\{B_{\tau_a}\in dz\}=|z|\left[\Phi_0(x, y; a, z)\right.$$
$$\left.-\frac{3}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\mu^{3/2}}{\mu^3+1}\Phi_0(x, y; a, -\mu z)\,d\mu\right]\mathbf{1}_A(z)\,dz \quad (17)$$

avec

$$\Phi_0(x, y; u, v)=\int_0^{+\infty} p_t(x, y; u, v)\,dt,$$

et les conventions d'écriture

$$A=[0, +\infty[\quad \text{si}\, x<a, \qquad A=]-\infty, 0] \quad \text{si}\, x>a.$$

Preuve. — Nous avons d'après (7), (11), (11'), (12) et (12') :

$$P_{(x,y)}\{B_{\tau_a}\in dz\}=\left[\int_0^{+\infty} z\,H_a^-(x, y; z, t)\,dt\right]\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(z)\,dz$$
$$=z\,G_{0,a}^-(x, y; z)\,\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(z)\,dz$$

dans le cas $x<a$, $-\infty<y<+\infty$, et

$$P_{(x,y)}\{B_{\tau_a}\in dz\}=\left[\int_{-\infty}^{0} |z|\,H_a^+(x, y; z, t)\,dt\right]\mathbf{1}_{]-\infty,0]}(z)\,dz$$
$$=|z|\,G_{0,a}^+(x, y; z, t)\,\mathbf{1}_{]-\infty,0]}(z)\,dz$$

lorsque $x>a$, $-\infty<y<+\infty$, avec

$$G_{0,a}^-(x, y; z)=\Phi_0(x, y; a, z)-\int_0^{+\infty} P_{(a,-z)}\{B_{\tau_a}\in d\mu\}\,\Phi_0(x, y; a, -\mu),$$
$$x<a, \qquad -\infty<y<+\infty, \qquad z>0,$$
$$G_{0,a}^+(x, y; z)=\Phi_0(x, y; a, z)-\int_0^{+\infty} P_{(a,z)}\{B_{\tau_a}\in d\mu\}\,\Phi_0(x, y; a, \mu),$$
$$x>a, \qquad -\infty<y<+\infty, \qquad z<0.$$

Or d'après (8) nous avons :

$$P_{(a,-z)}\{B_{\tau_a}\in d\mu\}=\left[\int_0^{+\infty}\frac{3\mu}{\pi\sqrt{2}\,t^2}\right.$$
$$\left.\times e^{-(2/t)(z^2-|z|\mu+\mu^2)}\int_0^{4|z|\mu/t} e^{-(3\theta/2)}\frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}}\,dt\right]\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(\mu)\,d\mu$$
$$=\frac{3}{2\pi}\,\frac{|z|^{1/2}\mu^{3/2}}{\mu^3+|z|^3}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(\mu)\,d\mu,$$

la dernière égalité provenant de l'identité triviale

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt \int_0^{\beta t} e^{-(3\theta/2)} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{2\beta}{2\alpha+3\beta}\right)^{1/2}, \qquad \alpha>0, \quad \beta>0.$$

Le changement de variable $\mu \mapsto |z|\,\mu$ nous permet alors de conclure.

Remarque 2. – Nous retrouvons la loi de B_{τ_a} donnée par McKean dans le cas $x=a$ [formule (2)] grâce à l'identité élémentaire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mu^{3/2}\,d\mu}{(\mu^3+1)(\mu^2 z^2 - \mu yz + y^2)} = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{3}\,\dfrac{1}{y^2+yz+z^2} & \text{si } \; yz>0 \\[2ex] \dfrac{2\pi}{3}\,\dfrac{1}{y^2+yz+z^2} - \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\,\dfrac{|yz|^{1/2}}{|y|^3+|z|^3} & \text{si } \; yz<0. \end{cases}$$

COROLLAIRE 3. – *La distribution du maximum* $\max\limits_{0 \leqq s \leqq t} X_s$ *est donnée par la formule suivante :*

$$\begin{aligned} P_{(x,\,y)}\{\max_{0 \leqq s \leqq t} X_s \in da\} &= \left[\sqrt{\frac{3}{2\pi t^3}}\, e^{-3(a-x-ty)^2/2t^3} + \int_0^{+\infty} z\,dz \int_0^t ds \int_0^s P_{(0,\,-z)}\{\tau_0 \in d\sigma\}\right. \\ &\qquad \left. \times \Psi_{s-\sigma}(x,\,y;\,a,\,-z)\right] \mathbf{1}_{]x,\,+\infty[}(a)\,da \qquad (18) \end{aligned}$$

avec

$$P_{(0,\,-z)}\{\tau_0 \in d\sigma\} = \left[\int_0^{+\infty} \frac{3\mu}{\pi\sqrt{2}\,\sigma^2}\, e^{-(2/\sigma)(z^2 - z\mu + \mu^2)}\,d\mu \times \int_0^{4\mu z/\sigma} e^{-(3\theta/2)} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}}\right] d\sigma,$$

$$z>0,$$

et

$$\Psi_s(x,\,y;\,u,\,v) = \frac{\partial}{\partial u} p_s(x,\,y;\,u,\,v) - \frac{\partial}{\partial u} p_s(x,\,y;\,u,\,-v).$$

Lorsque $y=0$ la formule (18) s'écrit plus simplement :

$$P_{(x,\,0)}\{\max_{0 \leqq s \leqq t} X_s \in da\} = \frac{2}{3}\,\frac{t}{a-x}\,\frac{P_{(x,\,0)}\{\tau_a \in dt\}}{dt}\,\mathbf{1}_{]x,\,+\infty[}(a)\,da. \qquad (19)$$

Preuve. — Nous avons trivialement :

$$\mathrm{P}_{(x,y)}\{\max_{0\leqq s\leqq t} \mathrm{X}_s < a\} = \mathrm{P}_{(x,y)}\{\tau_a > t\}\,\mathbf{1}_{]x,+\infty[}(a),$$

donc

$$\mathrm{P}_{(x,y)}\{\max_{0\leqq s\leqq t} \mathrm{X}_s \in da\} = \left[-\int_0^t \frac{\partial}{\partial a}\mathrm{P}_{(x,y)}\{\tau_a \in ds\}\right]\mathbf{1}_{]x,+\infty[}(a)\,da, \qquad (20)$$

et (18) découle aisément de (20) et (13) après avoir remarqué l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sqrt{\frac{3}{2\pi t^3}}\,e^{-3(a-x-ty)^2/2t^3}\right] = -\frac{\partial}{\partial a}\left[\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\left(\frac{3}{2}\,\frac{a-x}{t^{5/2}} - \frac{1}{2}\,\frac{y}{t^{3/2}}\right)e^{-3(a-x-ty)^2/2t^3}\right].$$

D'autre part, en écrivant l'identité (20) sous la forme équivalente

$$\mathrm{P}_{(x,y)}\{\max_{0\leqq s\leqq t} \mathrm{X}_s \in da\} = \left[\frac{\partial}{\partial a}\int_t^{+\infty} \mathrm{P}_{(x,y)}\{\tau_a \in ds\}\right]\mathbf{1}_{]x,+\infty[}(a)\,da, \qquad (20')$$

nous en déduisons, d'après (13), l'égalité :

$$\mathrm{P}_{(x,y)}\{\max_{0\leqq s\leqq t} \mathrm{X}_s \in da\} = \left[\sqrt{\frac{3}{2\pi t^3}}\,e^{-3(a-x-ty)^2/2t^3} + \frac{\partial}{\partial a}\int_t^{+\infty} ds \int_0^{+\infty} z\,dz \right.$$
$$\left. \times \int_0^s \mathrm{P}_{(0,-z)}\{\tau_0 \in d\sigma\}\, q_{s-\sigma}(x, y;\, a, z)\right]\mathbf{1}_{]x,+\infty[}(a)\,da.$$

Lorsque $x < a$ et $y = 0$ les changements de variables successifs

$$s \in]t, +\infty[\mapsto u \in]0, a-x[, \qquad s = t\left(\frac{a-x}{u}\right)^{2/3},$$
$$\sigma \in \left]0,\, t\left(\frac{a-x}{u}\right)^{2/3}\right[\mapsto \sigma' \in]0, t[, \qquad \sigma = \left(\frac{a-x}{u}\right)^{2/3}\sigma',$$
$$z \in]0, +\infty[\mapsto z' \in]0, +\infty[, \qquad z = \left(\frac{a-x}{u}\right)^{1/3} z'$$

et les égalités

$$\mathrm{P}_{(0,-z)}\{\tau_0 \in c\,d\sigma\} = \mathrm{P}_{(0,-z/c^{1/2})}\{\tau_0 \in d\sigma\}$$

et

$$p_{ct}(x, 0;\, a, z) = \frac{1}{c^2}\,p_t\left(0, 0;\, \frac{a-x}{c^{3/2}}, \frac{z}{c^{1/2}}\right), \qquad c > 0,$$

nous fournissent l'identité

$$\int_t^{+\infty} ds \int_0^{+\infty} z\,dz \int_0^s \mathrm{P}_{(0,\,-z)}\{\tau_0 \in d\sigma\}\, q_{s-\sigma}(x,\,0;\,a,\,z)$$
$$= \frac{2t}{3}\int_0^{a-x} \frac{du}{u} \int_0^{+\infty} z'\,dz' \int_0^t \mathrm{P}_{(0,\,-z')}\{\tau_0 \in d\sigma'\}\, q_{t-\sigma'}(0,\,0;\,u,\,z').$$

Une dérivation immédiate par rapport à a nous conduit alors au résultat annoncé (19).

III. PREUVES DES LEMMES 1, 2, 3, 4 et 5

1. Preuve du lemme 1

Nous nous limiterons au cas $x<a$, le cas $x>a$ se traitant de manière analogue.

Du fait de l'identité $\frac{dX_t}{dt}=B_t$, le signe de B_t nous indique le sens de variation de la fonction $t\in[0,\,+\infty[\,\mapsto X_t$.

Ainsi, si nous avions $B_{\tau_a}<0$, la fonction $t\mapsto X_t$ serait décroissante au voisinage de τ_a et par conséquent nous aurions $X_{\tau_a-\varepsilon}>X_{\tau_a}=a$ pour un $\varepsilon>0$ pris suffisamment petit.

Or $X_0=x<a$, donc par continuité des trajectoires il existerait un instant $\tau\in\,]0,\,\tau_a-\varepsilon[$ pour lequel $X_\tau=a$, ce qui contredirait la définition de τ_a.

Le lemme 1 est donc démontré.

2. Preuve du lemme 2

Considérons le cas $y>0$ (le cas $y<0$ se traitant de la même manière).

Le fait que $B_0=y>0$ nous assure que la fonction $t\mapsto X_t$ est croissante au voisinage de 0, et qu'il existe $\varepsilon>0$, suffisamment petit, de sorte que $\alpha=\min\limits_{0\leq t\leq\varepsilon} B_t>0$.

Nous en déduisons la minoration $X_t\geqq x+\alpha t$ pour $t\in[0,\,\varepsilon]$, et nous avons donc $x=X_0<a<x+\alpha\varepsilon\leqq X_\varepsilon$ pour $x\in\,]a-\alpha\varepsilon,\,a[$, d'où $0<\tau_a<\varepsilon$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\tau_a=0$.

3. Preuve du lemme 3

Un résultat classique concernant les processus stochastiques généraux nous assure que la fonction

$$u(x, y)=\mathbb{E}_{(x, y)}[e^{-\lambda\tau_a-\nu B_{\tau_a}}]$$

$$(\text{resp. } u(x, y)=\mathbb{E}_{(x, y)}[e^{-\lambda\tau_a+\nu B_{\tau_a}}])$$

vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)+y\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)=\lambda u(x, y),$$

$$x<a \quad (\text{resp. } x>a), \qquad -\infty<y<+\infty$$

(consulter par exemple [4], p. 230-231, [5], p. 46-47 ou [7], chap. 13, la condition aux limites

$$u(a^-, y)=e^{-\nu y}, \qquad y>0 \quad [\textit{resp. } u(a^+, y)=e^{\nu y}, y<0]$$

découlant du lemme 2.

Remarque 3. — Notons à ce propos que nous ne pouvons prescrire les valeurs $u(a^-, y)$, $y<0$ [resp. $u(a^+, y)>0$], ceci étant dû au mouvement de rotation du processus (X_t, B_t) dans le sens des aiguilles d'une montre.

Plus précisément, pour $x<a$ et $y<0$ par exemple, la fonction $t\mapsto X_t$ est décroissante sur l'intervalle de temps $[0, \sigma_0]$ où $\sigma_0=\inf\{t>0: B_t=0\}$, ce qui entraîne l'inégalité $\tau_a>\sigma_0$. Ainsi τ_a ne tend pas vers zéro et de ce fait nous ne connaissons pas *a priori* les valeurs $u(a^-, y)$, $y<0$.

Cependant ces valeurs $u(a^-, y)$, $y<0$, ont été déterminées par McKean [19], et nous nous en servirons pour déterminer explicitement toutes les autres valeurs $u(x, y)$, $x<a$, $-\infty<y<+\infty$.

4. Preuve du lemme 4

La preuve de ce lemme étant particulièrement technique, nous commençons d'abord par en présenter les principales étapes.

Nous étudions tous d'abord le problème aux limites (9) sur le domaine $]-\infty, a[\times]-\infty, +\infty[$ (une symétrie élémentaire ramènera ensuite le problème (9) relatif au domaine $]a, +\infty[\times]-\infty, +\infty[$ au cas précédent).

Dans un premier temps nous écrirons la solution $u(x, y)$ du problème (9) en fonction des valeurs aux limites $u(a^-, y)$, $-\infty<y<+\infty$.

Nous déterminerons ensuite les valeurs $u(a^-, y)$, $y<0$, en fonction des valeurs connues $u(a^-, y)=e^{-\nu y}$, $y>0$.

Enfin nous expliciterons la solution du problème aux limites (9).

Précisons toutes ces étapes sous forme de lemmes. Pour cela convenons des notatons suivantes :

$D = y \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ désigne l'opérateur aux dérivées partielles associé au processus (X_t, B_t),

$D^* = -y \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ désigne l'opérateur adjoint de D,

$\Phi_\lambda(x, y; u, v) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} p_t(x, y; u, v)\, dt$ est la solution élémentaire de l'opérateur λ-D, c'est-à-dire

$$D\Phi_\lambda(x, y; u, v) = \lambda \Phi_\lambda(x, y; u, v) - \delta_{(u, v)}(x, y),$$

$\Phi_\lambda^*(x, y; u, v) = \Phi_\lambda(u, v; x, y) = \Phi_\lambda(x, -y; u, -v)$ est la solution élémentaire de l'opérateur $\lambda - D^*$.

LEMME 6. — *Toute fonction bornée $u(x, y)$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles*

$$Du(x, y) = \lambda u(x, y), \qquad x < a, \quad -\infty < y < +\infty,$$

admet la représentation

$$\left.\begin{array}{c} u(x, y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} z u(a^-, z)\, \Phi_\lambda(x, y; a, z)\, dz, \\ x < a, \qquad -\infty < y < +\infty. \end{array}\right\} \tag{21}$$

Preuve. — Il suffit d'intégrer par parties l'expression :

$$u(\xi, \eta)\, D^* \Phi_\lambda^*(\xi, \eta; x, y) - \Phi_\lambda^*(\xi, \eta; x, y)\, Du(\xi, \eta) = -\delta_{(x, y)}(\xi, \eta)$$

sur le domaine $\xi < a$, $-\infty < \eta < +\infty$, en remarquant que

$$\lim_{\xi^2 + \eta^2 \to +\infty} \Phi_\lambda^*(\xi, \eta; x, y) = \lim_{\xi^2 + \eta^2 \to +\infty} \frac{\partial \Phi_\lambda^*}{\partial \eta}(\xi, \eta; x, y) = 0.$$

LEMME 7. — *Posons $v(y) = u(a^-, -y)$, $y > 0$, u étant la fonction définie par* (21) *et vérifiant la condition aux limites $u(a^-, y) = e^{-\nu y}$, $y > 0$.*

La fonction $v(y)$ s'explicite comme suit :

$$v(y) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t - \nu z}\, P_{(a, -y)}\{\tau_a \in dt,\ B_{\tau_a} \in dz\} \tag{22}$$

avec

$$P_{(a, -y)}\{\tau_a \in dt,\ B_{\tau_a} \in dz\} = \left[\frac{3z}{\pi\sqrt{2}\, t^2}\, e^{-(2/t)(y^2 - yz + z^2)} \times \int_0^{+yz/t} e^{-(3\theta/2)} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}}\right] \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(z)\, dt\, dz.$$

Preuve. — Écrivons (21), après avoir posé $\varphi(z)=e^{-\nu z}$, $z>0$, sous la forme

$$u(x, y)=\int_0^{+\infty} z\varphi(z)\Phi_\lambda(x, y;\, a, z)\,dz - \int_0^{+\infty} zu(a^-, -z)\Phi_\lambda(x, y;\, a, -z)\,dz, \quad (23)$$

puis faisons tendre x vers a, $x<a$; nous obtenons :

$$v(y)=\int_0^{+\infty} z\varphi(z)\Phi_\lambda(a, -y;\, a, z)\,dz - \int_0^{+\infty} zv(z)\Phi_\lambda(a, -y;\, a, -z)\,dz, \qquad y>0, \quad (24)$$

avec

$$\Phi_\lambda(a, -y;\, a, z)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\,\frac{\sqrt{8\lambda}\,K_1[\sqrt{8\lambda(y^2-yz+z^2)}]}{\sqrt{y^2-yz+z^2}},$$

$$\Phi_\lambda(a, -y;\, a, -z)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\,\frac{\sqrt{8\lambda}\,K_1[\sqrt{8\lambda(y^2+yz+z^2)}]}{\sqrt{y^2+yz+z^2}},$$

K_1 désignant la fonction de Bessel modifiée usuelle [1].

L'écriture des fonctions $\Phi_\lambda(a, -y;\, a, z)$ et $\Phi_\lambda(a, -y;\, a, -z)$, ainsi que les formules [6]

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{8\lambda}\,K_1[\sqrt{8\lambda(y^2\pm yz+z^2)}]}{\sqrt{y^2\pm yz+z^2}}\,K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}\,z)\,dz=C_{i\gamma}^{\pm}\,\frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}\,y)}{y},$$

$$y>0, \qquad -\infty<\gamma<+\infty,$$

$$C_{i\gamma}^{+}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{1+2\,\mathrm{ch}\,(2\pi\gamma/3)}, \qquad C_{i\gamma}^{-}=2\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi\gamma}{3}\,C_{i\gamma}^{+},$$

nous incitent à employer la transformation de Kontorovich-Lebedev, caractérisée par les formules de réciprocité [6]

$$\hat{f}(\gamma)=\int_0^{+\infty} f(z)\,K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}\,z)\,dz, \qquad \gamma>0,$$

$$f(z)=\frac{2}{\pi^2 z}\int_0^{+\infty} \hat{f}(\gamma)\,K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}\,z)\,\gamma\,\mathrm{sh}\,\pi\gamma\,d\gamma, \qquad z>0.$$

En appliquant cette transformation à l'équation intégrale (24) nous obtenons :

$$\hat{v}(\gamma)=-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}C_{i\gamma}^{+}\hat{v}(\gamma)+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}C_{i\gamma}^{-}\hat{\varphi}(\gamma), \qquad \gamma>0,$$

soit encore :

$$\hat{v}(\gamma)=\frac{1}{2\operatorname{ch}(\pi\gamma/3)}\hat{\varphi}(\gamma), \qquad \gamma>0,$$

puis en inversant nous en déduisons l'identité

$$v(y)=\frac{2}{\pi^2 y}\int_0^{+\infty}\hat{\varphi}(\gamma)\frac{\gamma\operatorname{sh}\pi\gamma}{2\operatorname{ch}(\pi\gamma/3)}K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}\,y)\,dy, \qquad y>0. \tag{25}$$

On termine en remarquant que l'expression (25) s'écrit sous la forme d'une transformée de Laplace. Pour le voir, on fera appel aux formules classiques [6] :

$$K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}\,y)K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}\,z)=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t-2(y^2+z^2)/t}K_{i\gamma}\left(\frac{4yz}{t}\right)\frac{dt}{2t}$$

et

$$\int_0^{+\infty}K_{i\gamma}(\alpha)\frac{\gamma\operatorname{sh}\pi\gamma}{\operatorname{ch}(\pi\gamma/3)}d\gamma=\frac{3\pi\alpha}{2\sqrt{2}}e^{\alpha/2}\int_0^{\alpha}e^{-(3\theta/2)}\frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}}.$$

LEMME 8. — *La solution du problème aux limites* (9) *relatif au domaine* $]-\infty, a[\times]-\infty, +\infty[$ *est donnée par la formule* (10).

Preuve. — C'est une conséquence immédiate de (22) et (23).

Fin de la preuve du lemme 4. — Il nous reste à examiner le problème (9) sur le domaine $]a, +\infty[\times]-\infty, +\infty[$. Pour cela il suffit de remarquer que la symétrie, $(x, y)\in]a,+\infty[\times]-\infty, +\infty[\mapsto(2a-x,-y)\in]-\infty, a[\times]-\infty, +\infty[$ nous ramène au cas précédent.

En effet, posons $u(x, y)=\mathbb{E}_{(x, y)}[e^{-\lambda\tau_a+\nu B_{\tau_a}}])$, $x>a$, $-\infty<y<+\infty$. Alors la fonction $w(x, y)=u(2a-x, -y)$, $x<a$, $-\infty<y<+\infty$, vérifie le problème aux limites

$$\begin{cases} Dw(x, y)=\lambda w(x, y), & x<a, \quad -\infty<y<+\infty, \\ w(a^-, y)=e^{-\nu y}, & y>0. \end{cases}$$

Le lemme 8 nous fournit l'expression de $w(x, y)$, d'où nous en déduisons celle de $u(x, y)$, à savoir :

$$u(x, y)=w(2a-x, -y)=\int_{-\infty}^{0}|z|e^{\nu z}G_{\lambda, a}^{+}(x, y; z)\,dz, \qquad x>a, \quad -\infty<y<+\infty,$$

avec

$$G^{+}_{\lambda, a}(x, y; z) = G^{-}_{\lambda, a}(2a - x, -y; -z).$$

En remarquant que $\Phi_\lambda(2a - x, -y; a, -z) = \Phi_\lambda(x, y; a, z)$ nous voyons que nous avons obtenu la formule (10′) souhaitée.

Le théorème est ainsi complètement démontré.

5. Preuve du lemme 5

Les égalités (15) et (15′) résultent de la propriété de Markoff forte du processus (X_t, B_t) :

$$P_{(x, y)}\{X_t > u, B_t > v\} = \mathbb{E}_{(x, y)}[P_{(a, B_{\tau_a})}\{X_{t-\tau_a} > u, B_{t-\tau_a} > v\}],$$
$$x < a < u \quad (\text{resp. } u < a < x), \qquad -\infty < y, \quad v < +\infty,$$

soit, en passant aux densités de transition :

$$\left.\begin{array}{l} p_t(x, y; u, v) = \displaystyle\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} P_{(x, y)}\{\tau_a \in ds, B_{\tau_a} \in d\mu\} p_{t-s}(a, \mu; u, v), \\ x < a < u \quad (\text{resp. } u < a < x), \qquad -\infty < y, \quad v < +\infty. \end{array}\right\} \tag{26}$$

De (26) et de l'égalité $p_t(x, y; u, v) = p_t(u, -v; x, -y)$ nous obtenons une nouvelle forme de (26) :

$$\left.\begin{array}{l} p_t(x, y; u, -v) \\ \quad = \displaystyle\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} P_{(u, v)}\{\tau_a \in ds, B_{\tau_a} \in d\mu\} p_{t-s}(x, y; a, -\mu), \\ u < a < x \quad (\text{resp. } x < a < u), \qquad -\infty < y, \quad v < +\infty. \end{array}\right\} \tag{26′}$$

Un passage à la limite immédiat dans (26′) lorsque u tend vers a, $u < a$ (resp. $u > a$) nous fournit le résultat escompté (15′) [resp. (15)] après avoir noté l'égalité évidente

$$P_{(a^+, v)}\{\tau_a \in ds, B_{\tau_a} \in d\mu\} = P_{(a, -v)}\{\tau_a \in ds, B_{\tau_a} \in -d\mu\} \mathbf{1}_{]-\infty, 0[}(\mu),$$
$$v > 0$$
$$(\text{resp. } P_{(a^-, v)}\{\tau_a \in ds, B_{\tau_a} \in d\mu\} = P_{(a, v)}\{\tau_a \in ds, B_{\tau_a} \in d\mu\} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(\mu), v < 0).$$

Le lemme 5 est ainsi prouvé.

IV. AUTRE PREUVE ET GÉNÉRALISATION DES RÉSULTATS (5) ET (5') DE LEFEBVRE

Nous nous plaçons dans le cas $y \geqq b \geqq 0$.

Considérons la fonction

$$u(y) = \mathbb{E}[e^{-\alpha\sigma_b - \gamma \int_0^{\sigma_b} B_t\,dt} \mid B_0 = y] = \mathbb{E}[e^{-\int_0^{\sigma_b} (\alpha + \gamma B_t)\,dt} \mid B_0 = y].$$

D'après la formule de Feynman-Kac (*voir* par exemple [3]) nous savons que $u(y)$ est solution du problème de Sturm-Liouville suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2 u}{dy^2}(y) = (\alpha + \gamma y)\,u(y), & y > b, \\ u(b) = 1, \quad u(+\infty) = 0, \end{cases}$$

soit explicitement :

$$u(y) = \frac{\mathrm{Ai}(2^{1/3}((\alpha + \gamma y)/\gamma^{2/3})}{\mathrm{Ai}(2^{1/3}((\alpha + \gamma b)/\gamma^{2/3})}, \qquad y \geqq b.$$

Nous retrouvons alors (5) en notant l'identité triviale

$$\mathbb{E}_{(x,\,y)}[e^{-\alpha\sigma_b - \gamma X_{\sigma_b}}] = e^{-\gamma x}\,u(y)$$

(le cas $y \geqq b$, $b < 0$ se traite de manière analogue).

Cette même technique nous permet d'obtenir plus généralement la transforme de Laplace de la loi du couple $(\sigma_{ab}, X_{\sigma_{ab}})$ où σ_{ab} est le premier instant de passage en a ou b du mouvement brownien démarrant du point y. Elle s'explicite comme suit :

THÉORÈME 2. – *Fixons le point* $(x, y) \in]-\infty, +\infty[\times]a, b[$.

La transformée de Laplace du couple $(\sigma_{ab}, X_{\sigma_{ab}})$ *est caractérisée par les formules suivantes :*

si $b > a > 0$:

$$\mathbb{E}_{(x,\,y)}[e^{-\lambda\sigma_{ab} - \mu X_{\sigma_{ab}}}] = e^{-\mu x}\,F_1(a, b; y), \qquad \lambda, \mu > 0; \tag{27}$$

si $a < b < 0$:

$$\mathbb{E}_{(x,\,y)}[e^{-\lambda\sigma_{ab} + \mu X_{\sigma_{ab}}}] = e^{\mu x}\,F_2(a, b; y), \qquad \lambda, \mu > 0; \tag{27'}$$

si $a < 0 < b$:

$$\left.\begin{array}{c} \mathbb{E}_{(x,\,y)}[e^{-\lambda\sigma_{ab} + i\mu X_{\sigma_{ab}}}] = e^{i\mu x}\,F_3(a, b; y), \\ \lambda > 0, \quad \mu \neq 0, \end{array}\right\} \tag{27''}$$

avec

$$F_n(a, b; y) = \frac{(A_n(y)/A_n(a)) - (B_n(y)/B_n(a))}{(A_n(b)/A_n(a)) - (B_n(b)/B_n(a))} + \frac{(A_n(y)/A_n(b)) - (B_n(y)/B_n(b))}{(A_n(a)/A_n(b)) - (B_n(a)/B_n(b))}$$

$$n = 1, 2, 3,$$

et

$$A_1(y) = \mathrm{Ai}\left(2^{1/3}\,\frac{\lambda+\mu y}{\mu^{2/3}}\right), \qquad B_1(y) = \mathrm{Bi}\left(2^{1/3}\,\frac{\lambda+\mu y}{\mu^{2/3}}\right)$$

$$\lambda,\ \mu > 0,$$

$$A_2(y) = \mathrm{Ai}\left(2^{1/3}\,\frac{\lambda-\mu y}{\mu^{2/3}}\right), \qquad B_2(y) = \mathrm{Bi}\left(2^{1/3}\,\frac{\lambda-\mu y}{\mu^{2/3}}\right)$$

$$\lambda,\ \mu > 0,$$

$$A_3(y) = \mathrm{Ai}\left(2^{1/3}\,\frac{\lambda-i\mu y}{\mu^{2/3}}\,e^{\varepsilon i\pi/3}\right), \qquad B_3(y) = \mathrm{Bi}\left(2^{1/3}\,\frac{\lambda-i\mu y}{\mu^{2/3}}\,e^{\varepsilon i\pi/3}\right)$$

$$\lambda > 0, \qquad \mu \neq 0, \qquad \varepsilon = \text{signe de } \mu,$$

Ai et Bi désignant les fonctions d'Airy usuelles [1].

Avant d'aborder la preuve de ce théorème, faisons un certain nombre de remarques.

Remarque 4. — L'inégalité $X_{\sigma_{ab}} > x$ (resp. $X_{\sigma_{ab}} < x$) due à la croissance (resp. décroissance) de la fonction $t \mapsto X_t$ sur l'intervalle $[0, \sigma_{ab}]$ lorsque $a > 0$ (resp. $b < 0$) explique la présence du signe $-$ (resp. $+$) devant le coefficient de $X_{\sigma_{ab}}$ dans (27) [resp. (27')].

Dans le cas $a < 0 < b$ la variable aléatoire $X_{\sigma_{ab}}$ n'a *a priori* pas de signe déterminé, d'où l'apparition du coefficient i devant $X_{\sigma_{ab}}$ dans (27'').

Remarque 5. — Les formules (5) et (5') de Lefèbvre se déduisent aisément de (27) et (27'') après passage à la limite lorsque b tend vers $+\infty$.

Remarque 6. — En faisant tendre μ vers zéro nous retrouvons la transformée de Laplace bien connue de l'instant de passage en a ou b du mouvement brownien démarrant du point $y \in [a, b]$, à savoir :

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda\sigma_{ab}} \mid B_0 = y] = \frac{\mathrm{ch}\sqrt{2\lambda}\,(y - ((a+b)/2)}{\mathrm{ch}\sqrt{2\lambda}\,((b-a)/2)},$$

ceci se vérifiant facilement à l'aide des équivalents asymptotiques [1]

$$\mathrm{Ai}(z) \sim \frac{e^{-(2/3)\,z^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}\,z^{1/4}} \quad \text{lorsque } |z| \to +\infty, \qquad |\arg z| < \frac{2\pi}{3},$$

$$\mathrm{Bi}(z) \sim \frac{e^{-(2/3)\, z^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}\, z^{1/4}} \quad \text{lorsque } |z| \to +\infty, \qquad |\arg z| < \frac{\pi}{3}.$$

Abordons maintenant la preuve du théorème 2.

Preuve. — Nous nous limiterons au cas $b > a > 0$, les autres se traitant de la même façon. Posons :

$$u(y) = \mathbb{E}[e^{-\lambda\sigma_a - \mu \int_0^{\sigma_a} B_t\, dt} \mid B_0 = y].$$

La formule de Feynmann-Kac [3] nous assure que $u(y)$ est solution du problème de Sturm-Liouville suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} \dfrac{d^2 u}{dy^2}(y) = (\lambda + \mu y)\, u(y), & a < y < b, \\ u(a) = u(b) = 1, \end{cases}$$

soit explicitement :

$$u(y) = \alpha\, A_1(y) + \beta\, B_1(y), \qquad a \leqq y \leqq b, \tag{28}$$

avec

$$\alpha = \frac{B_1(b) - B_1(a)}{A_1(a)\, B_1(b) - A_1(b)\, B_1(a)},$$

$$\beta = \frac{A_1(a) - A_1(b)}{A_1(a)\, B_1(b) - A_1(b)\, B_1(a)}.$$

La formule (28) nous conduit au résultat annoncé (26), après avoir noté l'égalité évidente

$$\mathbb{E}_{(x,\, y)}[e^{-\lambda\sigma_{ab} - \mu X_{\sigma_{ab}}}] = e^{-\mu x}\, u(y),$$

et le théorème 2 est démontré.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers le Professeur A. Goldman pour l'attention qu'il a prêtée à la rédaction de cette note.

RÉFÉRENCES

[1] M. Abramowitz et I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical tables*, Wiley, New York, 1972.

[2] Ph. BIANE et M. YOR, Valeurs principales associées aux temps locaux browniens, *Bull. Sc. Math.*, 2e série, t. **111**, 1987, p. 23-101.

[3] K. L. CHUNG, *Lectures from Markov Processes to Brownian Motion*, Springer Verlag, Berlin, 1982.

[4] D. R. COX et H. D. MILLER, *The theory of Stochastic Processes*, Methuen, London, 1965.

[5] E. B. DYNKIN, *Markov Processes*, vol. **2**, Springer Verlag, Berlin, 1965.

[6] A. ERDELYI, *Tables of Intergral Transforms*, vol. **1** and **2**, McGraw-Hill, New York, 1954.

[7] A. FRIEDMAN, *Stochastic Differential Equations and Applications*, vol. **2**, Academic Press, New York, 1976.

[8] J. GANI et D. R. MCNEIL, Joint Distributions of Random Variables and their integrals for Certain Birth-Death and Diffusion Processes, *Adv. Appl. Prob.* vol. **3**, 1971, p. 339-352.

[9] M. GOLDMAN, On the First Passage of the Integrated Wiener Process, *Ann. Math. Stat.*, vol. **42**, 1971, p. 2150-2155.

[10] JU. P. GOR'KOV, A Formula for the Solution of a Certain Boundary Value Problem for the Stationary Equation of Brownian Motion, *Soviet. Math. Dokl.* vol. **16**, 1975, p. 904-908.

[11] P. GROENENBOOM, Brownian Motion with a Parabolic Drift and Airy Functions, *Prob. Theor. Rel. Fields*, vol. **81**, 1989, p. 79-109.

[12] M. KAC, On the Average of a Certain Wiener Functional and a Related Limit Theorem in Calculus of Probability, *Trans. Am. Math. Sec.*, vol. **59**, 1946, p. 401-414.

[13] M. KAC, On the Distributions of Certain Wiener Functional, *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. **65**, 1949, p. 1-13.

[14] M. KAC, Probability Theory: its Role and its Impact, *S.I.A.M. Rev.*, vol. **4**, 1962, p. 1-11.

[15] M. LEFEBVRE, First Passage Densities of a Two-Dimensional Process, *S.I.A.M. J. Appl. Math.*, vol. **49**, 1989, p. 1514-1523.

[16] M. LEFEBVRE et E. LEONARD, On the First Hitting Place of the Integrated Wiener Process, *Adv. Appl. Prob.*, vol. **21**, 1989, p. 945-948.

[17] P. MCGILL, Some Eigenvalue Identities for Brownian Motion, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. **105**, 1989, p. 589-596.

[18] P. MCGILL, Wiener-Hopf Factorisation of Brownian Motion, *Prob. Theor. Fields*, vol. **83**, 1989, p. 355-389.

[19] H. P. Jr. MCKEAN, A Winding Problem for a Resonator Driven by a White Noise, *J. Math. Kyoto Univ.* vol. **2**, 1963, p. 227-235.

[20] J. POTTER, Somme Statistical Properties of the Motion of an Oscillator Driven by a White Noise, *M.I.T. doctoral dissertation*.

[21] P. S. PURI, On the Homogeneous Birth-and-Death Process and Its Integral, *Biometrika*, vol. **53**, 1966, p. 61-71.

[22] P. S. PURI, A Class of Stochastic Models of Response to Injection of Virulent bacteria in the Absence of Defense Mechanism, *Fifth Berk. Symp. Math. Stat. Prob.*, vol. **IV**, 1967, p. 511-535.

[23] S. O. RICE, Mathematical Analysis of Random Noise, *Bell System Techn. J.*, vol. 23, 1944, p. 282-332; **24**, 1945, p. 46-156.

[24] L. A. SHEPP, On the Integral of the Absolute Value of the Pinned Wiener Process, Ann Prob., vol. **10**, 1982, p. 234-239.

(*Manuscrit reçu le* 23 *avril* 1991;
révisé le 11 *février* 1991.)