ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

L. M. WU

Grandes déviations pour les mesures de Gibbs lorsque la température tend vers zéro

Annales de l'I. H. P., section B, tome 27, nº 3 (1991), p. 273-289
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1991__27_3_273_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 27, n° 3, 1991, p. 273-289. *Probabilités et Statistiques*

Grandes déviations pour les mesures de Gibbs lorsque la température tend vers zéro (*)

par

L. M. WU

Département de Mathématiques, Université de Wuhan, 430072-Hubei, Chine

RÉSUMÉ. — Nous donnons dans cet article une description quantitative de phénomènes de transition de phase en basse température. Plus précisément, pour un système mécanique statistique sur le réseau $\mathbb{Z}^d$ déterminé par un potentiel d'interaction, soit μ_η^β la mesure de Gibbs associée à la température inverse β et l'état fondamental η. Lorsque β tend vers $+\infty$, nous obtenons une estimation de grande déviation de μ_η^β : la borne inférieure pour modèles généraux et la borne supérieure pour le modèle ferromagnétique d'Ising seulement. Dans les deux cas ci-dessus, la fonction de vitesse est donnée par l'Hamiltonien relatif $H(.\,|\,\eta)$.

ABSTRACT. — We give in this paper a quantitative description of phase transition phenomenons at low temperature. More precisely, for a statistical mechanic system on the lattoce $\mathbb{Z}^d$ given by interaction potential, let μ_η^β be the Gibbs measure corresponding to the inverse temperature β and the ground state η. When β increase to $+\infty$, we obtain an estimation of large deviation of μ_η^β: the lower bound for general cases and the upper bound only for the Ising ferromagnet. In both cases, the rate function is given by the relative Hamiltonian $H(.\,|\,\eta)$.

Classification A.M.S. : 60 F 10.

(*) Supported by the National Natural Science Foundation of China.

1. INTRODUCTION

Un système mécanique statistique d'hamiltonien βH n'a qu'un état d'équilibre (mesure de Gibbs) lorsque la température est suffisamment élevée (*i.e.* β suffisamment petite). Cette unicité est démontrée dans le livre de Ruelle [R] et dans l'article de Dobrushin [D]. Tandis qu'en basse température le système a souvent plusieurs états d'équilibres, ce qu'on appelle « transition de phase ». Les études de ce phénomène sont très difficiles, mais actives. Nous citons ici seulement le livre de Sinai [S] où il y a une étude systématique de la transition de phase et où le lecteur pourra trouver d'autres références. La motivation de notre travail est justement de bien comprendre la transition de phase.

Notre objectif initial est d'établir l'estimation de grande déviation de μ_η^β lorsque β tend vers $+\infty$, où μ_η^β est une mesure de Gibbs associée à l'hamiltonien βH et à l'état fondamental η [*voir* la remarque (2) suivant le théorème 1, § 3]. Il faut dire que cet objectif est loin d'être complètement réalisé : nous obtenons la borne inférieure de l'estimation de grande déviation pour le modèle général (théorème 1, § 3), tandis que pour la borne supérieure, notre résultat est très restreint : seulement pour le modèle d'Ising ferromagnétique 2, § 4).

On remarque que la borne supérieure de ce genre de grande déviation est plus intéressante (elle implique la transition de phase par exemple) et, souvent plus difficile à obtenir. Il sera intéressant d'étendre le théorème 2 pour des modèles plus généraux : par exemple le modèle vérifiant la condition de Peierls-Pirogov-Sinai (*voir* [5]) pour le programme de transition de phase de Pirogov-Sinai.

Comme une conséquence directe des théorèmes 1 et 2, nous trouvons la vitesse exponentielle exacte avec laquelle la fonction d'homogénéisation magnétique $f(\beta)=\mu^{+,\beta}(\omega(0)=1)-\mu^{+,\beta}(\omega(0)=-1)$ du modèle d'Ising, tend vers 1 lorsque β tend vers $+\infty$ (corollaire 1, § 4). Comme une autre application plus intéressante des théorèmes 1 et 2, nous considérons le problème suivant (de la nature physique) : quel est le comportement asymptotique de $\mu^{+,\beta}$ (l'état haut) conditionné par $\omega_V=-1$, lorsque la température tend vers 0? (où V est un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$). Nous donnons une réponse complète à ce problème dans le corollaire 2, § 4.

2. NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Nous suivons dans cette section [F] et [S].

Soient E un espace métrique compact, $\lambda(dx)$ une mesure de probabilité sur sa tribu borélienne, chargeant tous les ouverts. Sur le réseau $\mathbb{Z}^d$, soit $\mathbb{V}$ la collection de sous-ensembles finis de $\mathbb{Z}^d$, on introduit les notations suivantes ;

$\forall \omega \in \Omega$, $\omega_V = (\omega_i)_{i \in V}$ et $p_V : \omega \to \omega_V$ est la projection de Ω sur E^V;

$\mathscr{F}_V = \sigma(p_V)$ et $\mathscr{F}$ est la tribu borélienne de Ω;

$\forall i \in \mathbb{Z}^d$, θ_i est la translation par i sur Ω, *i.e.*, $(\theta_i \omega)_j = \omega(i+j)$;

$\forall \omega$, $\eta \in \Omega$, (ω_V, η) est un élément de Ω, qui coïncide avec ω sur V et avec η sur $\mathbb{Z}^d \setminus V$.

Nous considérons une famille des potentiels d'interaction $\Phi = (\varphi_V)_{V \in \mathbb{V}}$ sur l'espace produit Ω, autrement dit, Φ vérifie les conditions suivantes :

$\varphi_V : \Omega \to \mathbb{R}$ est continue, $\mathscr{F}_V$-mesurable;

(*b*) $\varphi_V \circ \theta_i = \varphi_{V+i}$;

(*c*) $\|\Phi\| := \sum_{0 \in V} \|\varphi_V\|_\infty < +\infty$.

On définit l'hamiltonien de la configuration ω_V dans V par

$$H(\omega_V) = \sum_{A 7 V} \varphi_A(\omega_A)$$

et on appelle

$$H_V(\omega_V \mid \eta) = \sum_{A \cap V \neq \varnothing} \varphi_A((\omega_V, \eta)) \tag{1}$$

[qui sera noté aussi par $H_V(\omega \mid \eta)$] hamiltonien de ω_V sur V, conditionné par η sur V^c. On appelle la somme formelle $H = \sum_{V \in \mathbb{V}} \varphi_V$ la fonction hamiltonienne (hamiltonien simplement).

DÉFINITION 1. — Une mesure de probabilité μ sur Ω est appelée mesure de Gibbs de l'hamiltonien βH (β est la température inverse), si elle vérifie l'équation DLR suivante :

$$\mu(\omega_V \in B \mid \mathscr{F}_{V^c})(\eta) = \int_B \exp(-\beta H_V(\xi \mid \eta))\, \lambda^{\otimes V}(d\xi) / Z_V^{(\beta)}(\eta) \tag{2}$$

pour μ-p.s. $\eta \in \Omega$ et tout B, un borélien de E^V; où $Z_V^{(\beta)}(\eta)$ est un normalisateur :

$$Z_V^{(\beta)}(\eta) := \int_{E^V} \exp(-\beta H_V(\xi \mid \eta))\, \lambda^{\otimes V}(d\xi) \tag{3}$$

On note par $G(\beta H)$ l'ensemble des mesures de Gibbs associé à l'hamiltonien βH, et par $G_\theta(\beta H)$ l'ensemble des mesures de Gibbs invariantes par les translations $(\theta_i, i \in \mathbb{Z}^d)$. Il est bien connu que $G_\theta(\beta H) \neq \varnothing$.

(4) *Remarque.* — La densité conditionnelle

$$\pi_V^{(\beta)}(\xi \mid \eta) = \exp(-\beta H_V(\xi \mid \eta))/Z_V^{(\beta)}(\eta)$$

est une fonction continue sur $\Omega \times \Omega$. En effet,

$$\sum_{A \cap V \neq \varnothing} |\varphi_A(\omega_V, \eta)| = \sum_{i \in V} \sum_{A : i \in A} \frac{|\varphi_A|}{|A \cap V|} \leqq |V| \sum_{0 \in A} \|\varphi_A\|$$

Par suite, la série $\sum_{A \cap V \neq \varnothing} \varphi_A(\omega_V, \eta)$ converge uniformément pour $(\omega, \eta) \in \Omega \times \Omega$. C'est-à-dire, $H_V(\omega \mid \eta)$ est une fonction continue, d'où la continuité de la densité conditionnelle.

En suivant le livre de Sinai [S], nous introduisons la

DÉFINITION 2. — (*a*) L'hamiltonien relatif $H(\omega \mid \eta)$ est défini par

$$H(\omega \mid \eta) = \sum_{V \in \mathbb{V}} [\varphi_V(\omega) - \varphi_V(\eta)] \tag{5}$$

si cette série converge absolument et $+\infty$ *sinon*

(*b*) un élément η de Ω est appellé *état fondamental* (resp. *strict*), si $H(\omega \mid \eta) \geqq 0$ (resp. >0) pour tout $\omega = \eta$ (p. p.) et $\omega \neq \eta$, où la notation « $\omega = \eta$ (p. p.) » signifie que ω coïncide avec η sauf sur un ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$.

(7) *Remarque.* — Si $\omega = \eta$ (p. p.), on a $|H(\omega|\eta)| <= +\infty$. En fait, supposons que $\omega = \eta$ sauf qur $V \in \mathbb{V}$, alors :

$$(7) \quad \sum_{A \in \mathbb{V}} |\varphi_A(\omega) - \varphi_A(\eta)|$$
$$= \sum_{A \in \mathbb{V} \,:\, A \cap V \neq \varnothing} |\varphi_A(\omega) - \varphi_A(\eta)| \leqq 2|V| . \|\Phi\| < \infty$$

et $H(\omega \mid \eta) = H_V(\omega_V \mid \eta) - H_V(\eta_V \mid \eta)$.

3. LE PRINCIPE DE GRANDE DÉVIATION : LA BORNE INFÉRIEURE

Nous commençons par énoncer le

THÉORÈME 1. — *Soit* $\eta \in \Omega$ *un état fondamental. Si la suite* $(\mu^{(\beta)})_{\beta>0}$ *avec* $\mu^{(\beta)} \in G(\beta H)$ vérifie :

(8) $$\lim_{\beta \to +\infty} \frac{1}{\beta} \log \mu^{(\beta)} (N_\delta(\eta)) = 0, \qquad \forall \delta > 0$$

où $N_\delta(\eta)$ *est le* δ*-voisinage de* η, *on a pour tout* D, *un ouvert de* E^V :

(9) $$\lim_{\beta \to +\infty} \beta^{-1} \log \mu^{(\mu)} (\omega_V \in D)$$
$$\geqq -\inf\{ H(\omega \mid \eta) : \omega = \eta\ (p.p.) \text{ et } \omega_V \in D\}.$$

(10) *Remarque.* — Si on note :

$$l_n = \inf_{\omega \in D} [H_{V_n}(\omega \mid \eta) - H_{V_n}(\eta \mid \eta)]$$

où $V \subset V_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ et $V_n \in \mathbb{V}$, alors on a d'après la remarque (7) :

$$l_n \downarrow \inf\{ H(\omega \mid \eta) : \omega = \eta \text{ (p. p.) et } \omega_V \in D\}.$$

Démonstration du théorème. — Soit

$$l = \inf\{ H(\omega \mid \eta) : \omega = \eta \text{ (p. p.) et } \omega_V \in D\}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir un ensemble fini $\bar{V}$ tel que $V \subset \bar{V}$ et

(11) $$\bar{l} = \inf_{\omega_V \in D} [H_{\bar{V}}(\omega \mid \eta) - H_{\bar{V}}(\eta \mid \eta)] < l + \varepsilon \quad \text{[remarque (10)].}$$

Comme $\mu_\beta \in G(\beta H)$, on voit que

$$\mu^{(\beta)}(\omega_V \in D) = \int \mu^{(\beta)}(\omega_V \in D \mid \mathscr{F}_{\bar{V}^c})(\eta') \,.\, \mu^{(\beta)}(d\eta')$$
$$\geqq \int_{N_\delta(\eta)} \mu^{(\beta)}(\omega_V \in D \mid \mathscr{F}_{\bar{V}^c})(\eta') \,.\, \mu^{(\beta)}(d\eta')$$

et

$$\mu^{(\beta)}(\omega_V \in D \mid \mathscr{F}_{\bar{V}^c})(\eta') = \int_{[\omega_V \in D]} \exp(-\beta H_{\bar{V}}(\omega_{\bar{V}} \mid \eta'))\, \lambda^{\bar{V}}(d\omega_{\bar{V}}) / Z_{\bar{V}}^{(\beta)}(\eta').$$

Comme $H_{\bar{V}}(\omega_{\bar{V}} \mid \eta')$ est continue en $(\omega, \eta') \in \Omega \times \Omega$ et que $\Omega \times \Omega$ est compact, métrisable [Remarque (4)], elle est uniformément continue. Par conséquent, on peut choisir un $\delta > 0$ tel que :

(12) $$\sup_{\eta' \in N_\delta(\eta)} \sup_{\omega \in \Omega} \left| H_{\bar{V}}(\omega_{\bar{V}} \mid \eta') - H_{\bar{V}}(\omega_{\bar{V}} \mid \eta) \right| < \varepsilon.$$

Ceci entraîne que pour tout $\eta' \in N_\delta(\eta)$:

$$\mu^{(\beta)}(\omega_V \in D \mid \mathscr{F}_{\bar{V}^c})(\eta') \geqq \exp(-2\beta\varepsilon) Z_{\bar{V}}^{(\beta)}(\eta)^{-1} . \int_{[\omega_V \in D]} \exp(-\beta H_{\bar{V}}(\omega_{\bar{V}} \mid \eta)) \lambda^{\bar{V}}(d\omega_{\bar{V}}).$$

Finalement on obtient :

$$\beta^{-1} . \log \mu^{(\beta)}(\omega_V \in D) \geqq -2\varepsilon + \beta^{-1} \log \int_{[\omega_V \in D]} \exp(-\beta H_{\bar{V}}(\omega_{\bar{V}} \mid \eta)) \lambda^{\bar{V}}(d\omega_{\bar{V}}) - \beta^{-1} \log Z_{\bar{V}}^{(\beta)}(\eta) + \beta^{-1} \log \mu^{(\beta)}(N_\delta(\eta))$$

d'où on déduit

$$\underline{\lim}_{\beta \to +\infty} \beta^{-1} \log \mu^{(\beta)}(\omega_V \in D) \geqq -2\varepsilon + \inf_{\omega_V \in D} H_{\bar{V}}(\omega_{\bar{V}} \mid \eta) - \inf_{\omega \in \Omega} H_{\bar{V}}(\omega_{\bar{V}} \mid \eta)$$

d'après le fait que $\| f \|_p \to \| f \|_\infty$ lorsque $p \to +\infty$, et l'hypothèse (8).

Comme $\inf_{\omega \in \Omega} H_{\bar{V}}(\omega_{\bar{V}} \mid \eta) = H_{\bar{V}}(\eta_{\bar{V}} \mid \eta)$, on obtient d'après (11) :

$$\underline{\lim}_{\beta \to +\infty} \beta^{-1} \log \mu^{(\beta)}(\omega_V \in D) \geqq -l - 3\varepsilon.$$

Puisque ε est arbitraire, le théorème est établi.

Nous allons faire quelques remarques sur le théorème :

1. On peut déduire aisément de (9) que pour tout ouvert G de Ω :

$$\liminf_{\beta \to +\infty} \beta^{-1} \log \mu^{(\beta)}(G) \geqq \inf \{ H(\omega/\eta) : \omega \in G \text{ et } \omega = \eta \text{ (p. p.)} \}$$

En introduisant la régularisée s. c. i. $\underline{H}(./\eta)$ de $H(./\eta)$ par :

(13) $$\underline{H}(\omega/\eta) = \liminf \{ H(\omega'/\eta) : \omega' \to \omega \quad \text{et} \quad \omega' = \eta \text{ (p. p.)} \}.$$

On a aussi :

(14) $$\liminf_{\beta \to +\infty} \beta^{-1} \log \mu^{(\beta)}(G) \geqq - \inf_{\omega \in G} \underline{H}(\omega/\eta)$$

puisque :

$$\inf_{\omega \in G} \underline{H}(\omega/\eta) = \inf \{ H(\omega/\eta) : \omega \in G \text{ et } \omega = \eta \text{ (p. p.)} \}.$$

On remarque que si $|H(\omega/\eta)| < \infty$, alors $\underline{H}(\omega/\eta) = H(\omega/\eta)$.

2. Pour $\eta \in \Omega$ fixé, on sait bien que l'ensemble des points limite de

$$\{ \mu_V^\beta (\,.\,/\eta) = \delta_{\eta_{V^c}} \otimes \pi_V^{(\beta)} (\,.\,/\eta)\, \lambda^{\otimes V};\ V \in \mathbb{V} \}$$

lorsque V tend vers $\mathbb{Z}^d$, est contenu dans $G(\beta H)$ [5]. On le notera par $G_\eta(\beta H)$. Remarquons que $G_\eta(\beta H) \neq \varnothing$ à cause de la compacité de Ω. On appelle un élément μ_η^β de $G_\eta(\beta H)$ mesure de Gibbs associée à l'hamiltonien βH et à l'état η.

Si on pouvait établir la borne supérieure suivante :

$$\lim_{\beta \to \infty} \beta^{-1} \log \mu_{\eta_i}^{(\beta)}(F) \leqq - \inf_{\omega \in F} H(\omega/\eta_i),$$

pour tout F fermé de Ω pour deux états fondamentaux stricts différents η_1, η_2 de H, on aurait non seulement $\mu_{\eta_1}^\beta \neq \mu_{\eta_2}^\beta$ (*i.e.* transition de phase) pour β suffisamment grand, mais aussi la vitesse exponentielle exacte avec laquelle $\mu_{\eta_i}^\beta$ tend vers δ_{η_i} $(i=1, 2)$. C'est justement la motivation de ce travail.

Mais malheureusement, dans ce travail, ce programme est réalisé seulement pour le modèle d'Ising ferromagnétique.

4. LA BORNE SUPÉRIEURE

Dans cette section, nous examinons seulement le modèle d'Ising ferromagnétique

$$E = \{ +1, -1 \}. \qquad \Omega = \{ +1, -1 \}^{\mathbb{Z}^d}$$

et l'hamiltonien formel est donné par

$$H(\omega) = - \sum_{\| j-i \| = 1} \omega_i \omega_j \tag{15}$$

où $\| i-j \|$ est la distance euclidienne entre i et j.

On désigne par + (resp. −) la configuration dans Ω prenant +1 (resp. −1) sur tout $\mathbb{Z}^d$.

Évidemment + et − sont deux états fondamentaux. On désigne par $\mu^{+,\beta}$ et $\mu^{-,\beta}$ la mesure de Gibbs associée à βH, correspondant respectivement à + et −. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cet article :

THÉORÈME 2. — *Soit $d \geqq 2$. Pour tout fermé* F *dans* Ω, *nous avons :*

$$\overline{\lim_{\beta \to +\infty}}\ \beta^{-1} \log \mu^{+,\beta}(F) \leqq - \inf_{\omega \in F} H(\omega \,|\, +) \tag{16}$$

et également :

(17) $$\overline{\lim_{\beta\to\infty}}\ \beta^{-1}\log\mu^{-,\beta}(\mathrm{F})\leqq-\inf_{\omega\in\mathrm{F}}\mathrm{H}(\omega\,|\,-).$$

Remarquons que dans cette situation, $\mathrm{H}(\omega\,|\,+)$ est fini ssi $\omega=+$ (p. p.) et $\mathrm{H}(.\,|\,+)$ est s. c. i. sur Ω.

Démonstration. — Nous prouvons seulement (16). La formule (17) peut être établie par la symétrie entre μ^{+} et μ^{-}.

Pour montrer (16), il suffit de l'établir pour F du type suivant :

$$\mathrm{F}=\{\omega\in\Omega:\omega_{\mathrm{V}}\in\mathrm{D}\}$$

où $\mathrm{V}\in\mathbb{V}$ et $\mathrm{D}\subset\{+1,\ -1\}^{\mathrm{V}}$. En effet, tout fermé F dans Ω est l'intersection d'une suite décroissante des fermés $\{\mathrm{F}_n\}$ du type précédent, on a donc :

$$\overline{\lim_{\beta\to\infty}}\ \beta^{-1}\log\mu^{+,\beta}(\mathrm{F})\leqq\overline{\lim_{\beta\to\infty}}\ \beta^{-1}\log\mu^{+,\beta}(\mathrm{F}_n)$$
$$\leqq\inf_n\{-\inf_{\omega\in\mathrm{F}_n}\mathrm{H}(\omega\,|\,+)\}=-\inf_{\omega\in\mathrm{F}}\mathrm{H}(\omega\,|\,+)$$

d'après la s. c. i. de $\mathrm{H}(.\,|\,+)$ (*voir* par exemple [St]).

Il suffit par la suite de montrer que pour tout V fini de la forme $\mathrm{V}=\{i\in\mathbb{Z}^d:|i|\leqq k\}$ et $\eta_{\mathrm{V}}\in\{+1,\ -1\}^{\mathrm{V}}$ fixé :

(18) $$\overline{\lim_{\beta\to\infty}}\ \beta^{-1}\log\mu^{+,\beta}(\omega\in\Omega:\omega_{\mathrm{V}}=\eta_{\mathrm{V}})$$
$$\leqq-\inf\{\mathrm{H}(\omega\,|\,+)\,|\,\omega\in\Omega:\omega_{\mathrm{V}}=\eta_{\mathrm{V}}\}.$$

Nous rappelons maintenant la méthode des contours de Peierls et son inégalité bien connue.

Soit $\mathrm{U}=\{i\in\mathbb{Z}^d:|i|=\max_{1\leqq k\leqq d}|i_k|\leqq l\}$. La mesure de Gibbs conditionnée par $\omega(\mathrm{U}^c)=+$ est donnée par :

(19) $$\mu_{\mathrm{U}}^{+,\beta}(\omega(\mathrm{U}))=\mu^{+,\beta}(\omega(\mathrm{U})\,|\,\omega(\mathrm{U}^c)=+)$$
$$=(\mathrm{Z}_{\mathrm{U}}^{(\beta)}(+))^{-1}\exp[\beta\sum_{\|i-j\|=1,\{i,j\}\cap\mathrm{U}\neq\varnothing}\omega(i)\,\omega(j)]$$

On définit :

(20) $$\partial\omega(\mathrm{U})=\partial[\bigcup_{i\in\mathrm{U},\,\omega(i)=-}\mathrm{E}_i]\quad\text{(frontière topologique dans }\mathbb{R}^d)$$

où $\mathrm{E}_i=\left\{x\in\mathbb{R}^d:|x-i|=\max_{1\leqq k\leqq d}|x_k-i_k|\leqq\frac{1}{2}\right\}$. Les contours de $\omega(\mathrm{U})$ sont les trajectoires fermées, simples (*i. e.* ne se croisant pas) contenues dans $\partial\omega(\mathrm{U})$. La correspondance $\omega(\mathrm{U})\to\partial\omega(\mathrm{U})$ est bijective. En fait, étant donné $\partial\omega(U)$, on commence par poser $+1$ à partir du bord

$$\partial_1 U=\{i\in\mathbb{Z}^d : d(i, U)=\min_{j\in U}\|i-j\|=1\}$$

de U jusqu'à ce qu'on rencontre le premier contour. Après être entré dans son intérieur, on pose -1 jusqu'au deuxième contour..., de cette façon, on reconstruit la configuration entière $\omega(U)$ (*voir* par exemple [S]).

Nous calculons maintenant l'hamiltonien sur U :

$$H_U(\omega(U)\,|\,+)=-\sum_{\|i-j\|=1,\,\{i,j\}\cap U\neq\varnothing}\omega(i)\,\omega(j)=-\Sigma^+-\Sigma^-$$

où Σ^+ (resp. Σ^-) est la somme sur les paires $\{i,j : \|i-j\|=1, \{i,j\}\cap U\neq\varnothing\}$ telles que $\omega(i)\,\omega(j)=1$ (resp. -1). Évidemment, $-\Sigma^-=$ le volume $|\partial\omega(U)|$ de $\partial\omega(U)$ dans $\mathbb{R}^{d-1}$.

Par conséquent, on obtient :

$$(21)\quad H_U(\omega(U)\,|\,+)-H_U(+\,|\,+)$$
$$=-\Sigma^++\Sigma^-+(\Sigma^+-\Sigma^-)=-2\Sigma^-=2\,|\partial\omega(U)|.$$

Nous avons besoin du

LEMME (Inégalité de Peierls généralisée). — *Soit* $\Gamma=\bigcup_{i=1}^{m}\gamma_i$, $i=1,\ldots,m$ *sont des contours séparés dont l'un n'est pas entouré par l'autre, on a :*

$$(22)\qquad \mu_U^{+,\beta}(\omega(U) : \Gamma\subset\partial\omega(U))\leqq\exp(-2\beta\,|\Gamma|).$$

Nous omettons sa preuve puisqu'elle est tout à fait la même que celle de l'inégalité de Peierls classique.

Nous allons maintenant établir l'estimation (18). D'abord on a d'après la propriété markovienne :

$$(23)\quad \mu^{+,\beta}(\omega : \omega(V)=\eta(V))$$
$$=\mu^{+,\beta}(\omega : \omega(\partial_0 V)=\eta(\partial_0 V))\,.\,\mu^{+,\beta}(\eta(V-\partial_0 V)\,|\,\eta(\partial_0 V))$$

où $\partial_0 V=\partial(\mathbb{Z}^d-V)=\{i\in\mathbb{Z}^d : |i|=k\}$.

Le dernier terme dans (23) est facile à estimer :

$$(24)\quad \lim_{\beta\to\infty}\beta^{-1}\log\mu^{+,\beta}(\eta(V-\partial_0 V)\,|\,\eta(\partial_0 V))$$
$$=\lim_{\beta\to\infty}\beta^{-1}\log\frac{\exp(-\beta H(\eta(V)))}{\sum_{\omega(V):\,\omega(\partial_0 V)=\eta(\partial_0 V)}\exp(-\beta H(\omega(V)))}$$
$$=-(H(\eta(V)-\min_{\omega:\,\omega(\partial_0 V)=\eta(\partial_0 V)}H(\omega(V)))$$

Il nous reste donc à estimer $\mu^{+,\beta}(\eta(\partial_0 V))$.

On introduit d'abord :

$$(\partial_0 V)^- = \{ i \in \partial_0 V : \eta(i) = -1 \}.$$

Quand $(\partial_0 V)^- = \varnothing$, *i.e.*, $\eta(\partial_0 V) \equiv +$, il est bien connu que $\lim_{\beta \to \infty} \mu^{+,\beta}(\omega(\partial_0 V) = +) = 1$. L'estimation (18) se déduit de (23) et (24). Nous supposons donc que $(\partial_0 V)^- \neq \varnothing$ dans la suite.

Pour tout $U = \{ i \in \mathbb{Z}^d : |i| \leqq l \}$ tel que $l > k$, nous avons :

$$(25) \quad \inf_{\omega : \omega(\partial_0 V) = \eta(\partial_0 V)} [H_U(\omega(U) \mid +) - H_U(+ \mid +)]$$
$$= \inf_{\omega : \omega(\partial_0 V) = \eta(\partial_0 V)} 2 \, |\partial \omega(U)| = 2 \inf \{ |\Gamma| : (\partial_0 V)^- \subset \operatorname{Int} \Gamma \}$$

où Γ est l'union finie de contours séparés qui ne sont pas entourés l'un par l'autre, et $\operatorname{Int} \Gamma = \{ i \in \mathbb{Z}^d : i \text{ est entouré par un contour de } \Gamma \}$. Nous désignons par $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ tous les éléments sur lesquels $\inf \{ |\Gamma| : (\partial_0 V)^- \subset \operatorname{Int} \Gamma \}$ est atteint. Remarquons que quand U varie, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ ne changent pas, ainsi que la quantité $|\Gamma_1| = \ldots = |\Gamma_m|$.

On note $\operatorname{Con}(\Gamma)$ le nombre des contours de Γ et par L le nombre des branches connexes de $(\partial_0 V)^-$ [un sous-ensemble A de $\mathbb{Z}^d$ est dit « *connexe* », si pour tout $i, j \in A$, il existe $i = i_0, i_1, \ldots, i_n = j \in A$ tels que $\| i_k - i_{k+1} \| = 1, k = 0, \ldots, n-1$; une branche connexe de $(\partial_0 V)^-$ est un sous-ensemble connexe maximal de $(\partial_0 V)^-$].

Nous déduisons maintenant d'après l'inégalité de Peierls généralisée :

$$\mu_U^{+,\beta}(\omega(\partial_0 V) = \eta(\partial_0 V))$$
$$\leqq \mu_U^{+,\beta}(\omega(U) : \text{il existe } \Gamma \text{ tel que } \Gamma \subset \partial\omega(U),$$
$$(\partial_0 V)^- \subset \operatorname{Int} \Gamma \text{ et } \operatorname{Con}(\Gamma) \leqq L \}$$
$$\leqq \sum_{n=|\Gamma_1|}^{\infty} \sum_{\Gamma \in A_n} \mu_U^{+,\beta}(\omega(U) : \Gamma \subset \partial\omega(U)) \leqq \sum_{n=|\Gamma_1|}^{\infty} C_n e^{-2\beta n}$$

où C_n = le cardinal de

$$A_n = \{ \Gamma : |\Gamma| = n, (\partial_0 V)^- \subset \operatorname{int} \Gamma \text{ et } \operatorname{Con}(\Gamma) \leqq L \}.$$

Évidemment, $C_{|\Gamma_1|} = m$ d'après l'hypothèse faite précédemment.

Nous estimons maintenant C_n grossièrement. Chaque contour de Γ dans A_n entoure au moins une branche connexe de $(\partial_0 V)^-$ et on sait que le nombre de contours γ entourant une branche connexe fixée avec $|\gamma| = n$ n'est pas plus grand que $(n \, 3^n)^{d-1}$. Par suite, nous obtenons :

$$C_n \leqq (n \, 3^n)^{L(d-1)}.$$

Nous obtenons finalement pour tout U suffisamment grand :

$$\mu_{U}^{+,\beta}(\omega(\partial_0 V)=\eta(\partial_0 V)) \leqq \sum_{n=|\Gamma_1|}^{\infty} C_n e^{-2\beta n}$$

$$\leqq m \,.\, e^{-2\beta|\Gamma_1|} + \sum_{n=|\Gamma_1|+1}^{\infty} (n\,3^n)^{L(d-1)} \,.\, \exp(-2\beta n)$$

d'où il résulte d'après (25) :

$$(26) \quad \overline{\lim_{\beta\to\infty}}\ \beta^{-1}\log \mu^{+,\beta}(\omega(\partial_0 V)=\eta(\partial_0 V))$$
$$= \overline{\lim_{\beta\to\infty}}\ \beta^{-1}\log \lim_{U\uparrow \mathbb{Z}^d} \mu_U^{+,\beta}(\omega(\partial_0 V)=\eta(\partial_0 V))$$
$$\leqq -2|\Gamma_1| = -\inf\{H(\omega|+)\,|\,\omega : \omega(\partial_0 V)=\eta(\partial_0 V)\}.$$

Nous déduisons de (23), (24) et (26) :

$$\overline{\lim_{\beta\to\infty}}\ \beta^{-1}\log \mu^{+,\beta}(\omega : \omega(V)=\eta(V))$$
$$\leqq -(H(\eta(V)) - \min\{H(\omega(V));\ \omega(\partial_0 V)=\eta(\partial_0 V))$$
$$-\inf\{H(\omega|+) : \omega(\partial_0 V)=\eta(\partial_0 V)\}$$
$$= -\inf\{H(\omega|+) : \omega(V)=\eta(V)\}$$

qui est justement l'estimation (18).

C.Q.F.D.

Nous faisons quelques remarques sur le théorème 2.

1. l'estimation (26) peut être améliorée.

$$\overline{\lim_{\beta\to\infty}} \frac{\mu^{+,\beta}(\omega(\partial_0 V)=\eta(\partial_0 V))}{\exp(-2\beta|\Gamma_1|)} \leqq m$$

où m est le nombre de Γ sur lequel $\inf(|\Gamma| : (\partial_0 V)^- \subset \operatorname{Int}\Gamma)$ est atteint.

2. Soit $V\in\mathbb{V}$ et $D\subset\{1, -1\}^V$, les théorèmes 1 et 2 entraînent :

$$(27) \quad \lim_{\beta\to\infty} \beta^{-1}\log \mu^{+,\beta}(\omega : \omega(V)\in D) = \inf\{H(\omega|+) : \omega(V)\in D\}$$

puisque $\mu^{+,\beta}$ converge vers la mesure de Dirac du point « + » lorsque β tend vers $+\infty$.

3. Pourquoi la méthode de contours de Peierls, que nous avons utilisée ci-dessus pour établir le théorème 3, marche-t-elle ?

La raison principale (essentielle, semble-t-il) est l'égalité :

$$(21) \qquad H_U(\omega(U)/+) - U_U(+/+) = -2|\partial\omega(U)|.$$

C'est cette égalité qui nous donne dans (26) la constante exacte que nous avons eue dans le théorème 1. Il paraît donc difficile d'étendre le théorème 2, par exemple au modèle général de transition de phase de Pirogov-Sinai ([5]) pour lequel on a un même type d'estimation que (21), mais une inégalité seulement.

Nous allons présenter deux applications des théorèmes 1 et 2.

La première est :

COROLLAIRE 1. — *Soit* V *un sous-ensemble fini de* $\mathbb{Z}^d$ $(d \geqq 2)$ *et soit* m *le cardinal de l'ensemble des points sur lesquels*

$$\inf\{ H(\omega/+) : \omega(V) = - \} := h_V$$

est atteint (*il est fini !*). *On a :*

$$\lim_{\beta \to +\infty} \mu^{+,\beta}(\omega : \omega(V) = -) . \exp(h_V \beta) = m \tag{28}$$

en particulier, pour la fonction d'homogénéisation magnétique

$$f(\beta) = \mu^{+,\beta}(\omega(0) = +) - \mu^{+,\beta}(\omega(0) = -) = 1 - 2\mu^{+,\beta}(\omega(0) = -1)$$

on a :

$$\lim_{\beta \to +\infty} (1 - f(\beta)) e^{2d\beta} = 2.$$

Preuve. — On va utiliser les idées des démonstrations des théorèmes 1 et 2. On désigne par $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ les éléments sur lesquels $\inf\{ |\Gamma| : V \subseteqq \operatorname{Int} \Gamma \}$ est atteint (on réserve Γ, Γ_i pour désigner l'union d'un nombre fini des contours séparés qui ne sont pas entourés l'un par l'autre). On remarque que $\inf\{ H(\omega/+) : \omega(V) = - \}$ n'est atteint que sur les n configurations $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)}$ données par :

$$\eta^{(k)} = - \quad \text{sur} \quad \operatorname{Int} \Gamma_k, \qquad + \text{sinon}.$$

Par conséquent, $m = n$ et $h_V = \inf\{ H(\omega/+) : \omega(V) = - \} = 2|\Gamma_k|$, $k = 1, \ldots, m$.

Maintenant, en faisant la même preuve que celle de (26), nous pouvons affirmer que la limite supérieure du côté gauche de (28) n'est pas plus grande que m. Pour estimer la limite inférieure, prenons un cube

$$U = \{ i \in Z^d : |i| = \max_{1 \leqq k \leqq d} |i_k| \leqq l \}$$

contenant $\operatorname{Int} \Gamma_k$, $k = 1, \ldots, m$. Nous avons par suite :

$$\begin{aligned} \mu^{+,\beta}(\omega(V) = -) &\geqq \mu^{+,\beta}(\omega : \omega(V) = - \text{ et } \omega(i) = + \text{ pour } |i| = l+1) \\ &= \mu^{+,\beta}(\omega(\partial U) = +) . \mu_U^{+,\beta}(\omega(V) = - \mid +) \end{aligned}$$

$(\partial U = \{ i \in \mathbb{Z}^d : |i| = l+1 \})$.

Évidemment, pour un tel cube U fixé, on a toujours :

$$\lim_{\beta \to \infty} e^{h \nu \beta} \mu_U^{+,\beta}(\omega(V) = - \mid +) = m.$$

Ces deux estimations ci-dessus entraînent que la limite inférieure du côté gauche de (28) n'est pas plus petite que m, ce qui achève la preuve du Corollaire.

Comme deuxième application des théorèmes 1 et 2, nous allons considérer le problème suivant : comment se comporte asymptotiquement la mesure $\mu^{+,\beta}$ conditionnée par $\omega(V) = -(V \in \mathbb{V})$?

La réponse est donnée par le :

COROLLAIRE 2. — *On désigne par* $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m\}$ *l'ensemble suivant*

$$\{\Gamma' : V \subset \operatorname{Int}\Gamma' \text{ et } |\Gamma'| = \inf(|\Gamma| : V \subset \operatorname{Int}\Gamma)\}.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer $\operatorname{Int}\Gamma_1 \subset \operatorname{Int}\Gamma_k \subset \operatorname{Int}\Gamma_m$ pour $k = 1, \ldots, m$.

Alors, pour $i \notin \operatorname{Int}\Gamma_m$:

$$\lim_{\beta \to \infty} \mu^{+,\beta}(\omega(i) = - \mid \omega(V) = -) = 0 \tag{29}$$

et pour toute configuration η fixée, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \to \infty} & \mu^{+,\beta}(\omega = \eta \text{ sur } \operatorname{Int}\Gamma_m \mid \omega(V) = -) \\ &= \lim_{\beta \to \infty} \mu^{+,\beta}(\omega = \eta \text{ sur } \operatorname{Int}\Gamma_m \mid \omega(\partial_1(\operatorname{Int}\Gamma_m)) = +, \omega(V) = -) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{m} \text{ si } \eta(\operatorname{Int}\Gamma_k) = - \textit{ et } \eta(\operatorname{Int}\Gamma_m - \operatorname{Int}\Gamma_k) = + \textit{ pour un } k \in \{1, 2, \ldots, m\} \\ 0 \textit{ sinon} \end{cases} \end{aligned} \tag{30}$$

Preuve :

$$\mu^{+,\beta}(\omega(i) = -1 \mid \omega(V) = -) = \frac{\mu^{+,\beta}(\omega(V) = - \text{ et } \omega(i) = -1)}{\mu^{+,\beta}(\omega(V) = -)}$$

On sait d'après (28) que

$$\lim_{\beta \to +\infty} \frac{1}{\beta} \log \mu^{+,\beta}(\omega(V) = -) = -\inf\{H(\omega \mid +) : \omega(V) = -\}$$

$$\lim_{\beta \to +\infty} \frac{1}{\beta} \log \mu^{+,\beta}(\omega(V) = - \text{ et } \omega(i) = -1)$$
$$= -\inf\{H(\omega \mid +) : \omega(V) = -1 \text{ et } \omega(i) = -1\}.$$

Lorsque i n'appartient pas à $\operatorname{Int}\Gamma_m$, il est évident que :

$$\operatorname{Inf}\{H(\omega \mid +) : \omega(V) = - \text{ et } \omega(i) = -1\} > \inf\{H(\omega \mid +) : \omega(V) = -\}.$$

Par suite, on a pour $i \notin \operatorname{Int} \Gamma_m$:

$$\lim_{\beta \to \infty} \mu^{+,\beta}(\omega(i) = -1 \mid \omega(V) = -) = 0.$$

On déduit de (29) :

$$\lim_{\beta \to \infty} \mu^{+,\beta}(\omega(i) = \eta(i) \text{ pour } i \in \operatorname{Int} \Gamma_m \mid \omega(V) = -)$$
$$= \lim_{\beta \to \infty} \mu^{+,\beta}(\omega(\partial_1(\operatorname{Int} \Gamma_m)) = + \text{ et } \omega = \eta \text{ sur } \operatorname{Int} \Gamma_m \mid \omega(V) = -)$$

d'où la première égalité de (30). Pour la seconde égalité de (30), il suffit de remarquer que l'hamiltonien sur $\operatorname{Int} \Gamma_m$ conditionné par

$$\text{« } \omega(\partial_1(\operatorname{Int} \Gamma_m)) = + \text{ et } \omega(V) = - \text{ »}$$

n'atteint son minimum que sur l'ensemble des m points $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(m)} \in \{1, -1\}^{\operatorname{Int} \Gamma_m}$ donnés par

$$\eta^{(k)}(\operatorname{Int} \Gamma_m - \operatorname{Int} \Gamma_k) = +, \qquad \eta^{(k)}(\operatorname{Int} \Gamma_k) = -.$$

Pour voir plus explicitement le corollaire ci-dessus, nous donnons deux exemples sur $\mathbb{Z}^2$:

Exemple 1. — Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$, $V = L_1 \cup L_2$ où

$$L_1 = \{0; k) : k = 0, 1, \ldots, n-1\}, \qquad L_2 = \{(m, k) : k = 0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Nous divisons en trois cas :

1. $m > n+1$:

Dans ce cas, $\inf\{|\Gamma| : V \subset \operatorname{Int} \Gamma\}$ n'atteint son minimum qu'en $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ où γ_i est le contour le plus court ($|\gamma_i| = 2n+2$) entourant L_i, $i = 1, 2$. Le corollaire nous dit :

$$\mu^{+,\beta}(. \mid \omega(V) = -) \to \text{la mesure de Dirac } \delta_\eta$$

où η est donné par $\eta(V) = -$, $\eta(Z^2 - V) = +$.

2. $m = n+1$:

Dans ce cas $\inf\{|\Gamma| : V \subset \operatorname{Int} \Gamma\}$ atteint son minimum en $\Gamma_1 = \gamma_1 \cup \gamma_2$ et Γ_2, le contour le plus court (seulement un) entourant V. On voit que $\operatorname{Int} \Gamma_2 - \operatorname{Int} \Gamma_1$ est exactement l'ensemble $\{(k, l) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \leqq k \leqq m-1; 0 \leqq l \leqq n-1\}$. Le corollaire nous dit que

$$\mu^{+,\beta}(. \mid \omega(V) = -) \to \frac{1}{2}\delta_\eta + \frac{1}{2}\delta_{\eta'},$$

où

$$\eta(\mathbb{Z}^2 - \operatorname{Int} \Gamma_2) = \eta'(\mathbb{Z}^2 - \operatorname{Int} \Gamma_2) = +;\ \eta(V) = \eta'(V) = -$$

et

$$\eta((k, l)) = -\eta'(k, l) = 1 \text{ pour } 1 \leqq k \leqq m-1,\ 0 \leqq l \leqq n-1.$$

3. $m<n+1$:

Dans ce dernier cas, $\inf\{|\Gamma| : V\subset \operatorname{Int}\Gamma\}$ n'atteint son minimum qu'en le seul contour γ le plus court entourant V. Le corollaire nous dit alors que :

$$\mu^{+,\beta}(.\,|\,\omega(V)=-)\to\delta_\eta$$

où $\eta\in\Omega$ est donné par $\eta(\operatorname{Int}\gamma)=-$, $\eta(\mathbb{Z}^2-\operatorname{Int}\gamma)=+$.

Remarquons que $\operatorname{Int}\gamma=\{(k,l)\in\mathbb{Z}^2 : 0\leqq k\leqq m,\ 0\leqq l\leqq n-1\}$ contient V comme un sous-ensemble strict.

Exemple 2. — $V=\{(0,k),(k,0) : k=0,1,2\}$.

Dans ce cas, $m=6$ et $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_6$ sont indiqués dans les figures suivantes :

Le corollaire précédent nous donne :

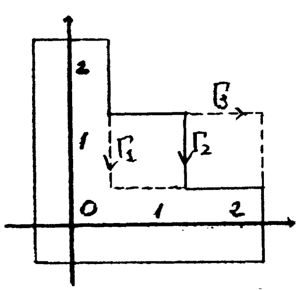
$$\lim_{\beta\to\infty}\mu^{+,\beta}(\omega(i)=-1\,|\,\omega(V)=-)=f(i)$$

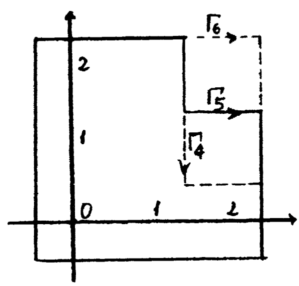
où

$$f(i)=0 \qquad \text{si} \quad i\in\operatorname{Int}\Gamma_6=\{(k,l) : k,l=0,1,2\}$$

$$f((1,1))=5/6,\qquad f((1,2))=3/6=\frac{1}{2}$$

$$f((2,1))=1/2,\qquad f((2,2))=1/6$$





Nous terminons cette section en établissant l'estimation de grande déviation pour le modèle d'Ising ferromagnétique en dimension 1.

THÉORÈME 3. — *Pour le modèle d'Ising ferromagnétique sur* $\mathbb{Z}$, *on désigne par* μ^β *l'unique mesure de Gibbs associée. Alors pour tout* $D\subset\{1,-1\}^V$ *où* V *est un ensemble fini de* $\mathbb{Z}$, *on a :*

(31) $$\lim_{\beta\to\infty}\beta^{-1}\log\mu^\mu(\omega : \omega(V)\in D)=-\inf\{2\sigma(\omega) : \omega(V)\in D\}$$

où $\sigma(\omega)=$ *le cardinal de* $\{i\in\mathbb{Z} : \omega(i)=-\omega(i+1)\}$.

Démonstration. — On désigne par $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ le système des coordonnées de $\Omega = \{1, -1\}^{\mathbb{Z}}$. Sous $\mu^{(\beta)}$, $(X_n)_{n \in Z}$ est une chaîne de Markov réversible avec :

$$\mu^{(\beta)}(X_0 = \pm 1) = \frac{1}{2}$$

On note par $P^\beta(.,.)$ la probabilité de transition de $(X_n)_{n \in Z}$. D'après la symétrie, on a :

$$P^\beta(1, -1) = P^\beta(-1, 1)$$
$$P^\beta(1, 1) = P^\beta(-1, -1).$$

On peut maintenant calculer :

$$(32) \quad \mu^\beta(X_0 = +1, X_1 = -1, X_2 = +1)$$
$$= \mu^\beta(X_0 = 1) P^\beta(1, -1) . P^\beta(-1, 1) = \frac{1}{2}[P^\beta(1, -1)]^2$$

d'où on obtient :

$$(33) \quad \lim_{\beta \to \infty} \beta^{-1} \log P^\beta(1, -1)$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{\beta \to \infty} \beta^{-1} \log \mu^{(\mu)}(X_0 = +1, X_1 = -1, X_2 = +1)$$
$$= \frac{1}{2} \times (-4) = -2.$$

Par suite, on a :

$$(34) \qquad P^\beta(1, 1) = P^\beta(-1, -1) = 1 - P^\beta(1, -1) \to 1$$

lorsque $\beta \to +\infty$.

Finalement (31) est une conséquence directe de (33) et (34).

Remarque. — (33) et (34) sont bien connues. On peut obtenir même une expression explicite de $P^\beta(1, -1)$ (*voir* PRESTON, Random Fields, *Lect. Notes in Math.*, n° **534**).

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier M. le referee pour ses commentaires et ses diverses remarques très utiles.

RÉFÉRENCES

[D] R. L. DOBRUSHIN, Description of a Random Field by Means of Conditional Probabilities and the Condition Governing its Regularity, *Theor. Probab. Appl.*, vol. **13**, 1968, p. 197-224.

[F] H. FÖLLMER, Random Fields and Diffusion Processes, *École d'Été de Probabilités de Saint-Floud*, *Lec. Notes Math.*, n° **1362**, Springer-Verlag, 1988.

[R] D. RUELLE, *Statistical Rigorous Results*, Benjamin, New York, Amsterdam, 1969.

[S] Y. A. G. SINAÏ, *Theory of Phase Transition. Rigorous Results*, Pergamon Press, Oxford, 1982.

[St] D. W. STROOCK, *An Introduction to the Theory of Large Deviations*, Springer, 1984.

(*Manuscrit reçu le* 13 *novembre* 1989;
révisé le 10 *janvier* 1991.)