ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

DANIEL PIERRE LOTI VIAUD

Grandes déviations pour une famille de processus de Galton-Watson dépendant de l'effectif de la population

Annales de l'I. H. P., section B, tome 27, n° 2 (1991), p. 141-179
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1991__27_2_141_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 27, n° 2, 1991, p. 141-179.

Probabilités et Statistiques

Grandes déviations pour une famille de processus de Galton-Watson dépendant de l'effectif de la population

par

Daniel PIERRE LOTI VIAUD

L.S.T.A., Université Paris-VI, Tour 45-55, 3e étage,
4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

RÉSUMÉ. — Nous considérons une famille indexée par ε de processus de Galton-Watson dont les lois de reproduction dépendent de l'effectif de la population. Nous montrons la majoration et la minoration des grandes déviations pour ε fois le logarithme de l'effectif de la population lorsque ε tend vers zéro.

ABSTRACT. — We consider a family indexed by ε of size dependent Galton-Watson processes. We prove the majoration and the minoration of large deviations for ε times the logarithm of the population size as ε goes to zero.

1. INTRODUCTION

Dans toute la suite $(P_x, x \in \mathbb{R}^+)$ désigne une famille de lois sur $\mathbb{N}$, ε désigne un réel strictement positif destiné à tendre vers zéro et log désigne le logarithme népérien.

Nous considérons la famille indexée par ε de processus de Galton-Watson autodépendants définis, pour chaque ε, comme une chaîne de Markov $(\Omega, \mathscr{F}_\varepsilon, \mathscr{P}_\varepsilon; Z_n, n \in \mathbb{N})$ sur $\mathbb{N}$, homogène, de probabilités de transition données par:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\mathscr{P}_\varepsilon(Z_1=0/Z_0=0)=1,\\ \forall (z_0, z_1)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N},\quad &\mathscr{P}_\varepsilon(Z_1=z_1/Z_0=z_0)=(P_{\varepsilon\log z_0})^{*z_0}(z_1). \end{aligned}$$

Notons: $X_n^\varepsilon=\varepsilon\log Z_n$, $m(x)=E(P_x)$ et $\mu=\log m$. Nous appelons $(X_n^\varepsilon, n\in\mathbb{N})$ l'ε log-densité du processus $(Z_n, n\in\mathbb{N})$ ([13], [14]); la dynamique de l'ε log-densité est donnée par l'algorithme stochastique:

$$(2)\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad X_{n+1}^\varepsilon=X_n^\varepsilon+\varepsilon\mu(X_n^\varepsilon)+\varepsilon R_{n+1}^\varepsilon;\qquad R_{n+1}^\varepsilon=\log\left(\frac{Z_{n+1}}{Z_n m(X_n^\varepsilon)}\right).$$

Remarquons que les restes R_{n+1}^ε sont très petits lorsque l'effectif de la population Z_n est grand. (2) apparaît ainsi comme un système d'équations approchant les solutions de l'équation différentielle:

$$(3)\qquad \frac{d\varphi}{dt}=\mu(\varphi).$$

Dans [13] nous avons étudié lorsque ε tend vers zéro la loi forte et le théorème limite central pour l'ε log densité. Nous étudions ici les grandes déviations. Avant de décrire plus en détail ces grandes déviations faisons quelques commentaires sur le processus défini par (1) et l'intérêt de la transformation en ε log-densité.

Lorsque ε est égal à 1 (1) décrit les probabilités de transition d'un processus de Galton-Watson autodépendant où le nombre d'enfants d'un individu peut dépendre de l'effectif de la population ([11], [10], [5]). Nous appelons processus de Galton-Watson indépendant le processus classique où les lois de reproduction ne dépendent pas de l'effectif de la population.

L'approche des processus de Galton-Watson par la transformation en ε log-densité est différente de celles de [11], [10], [5] (et des références qui y sont citées). Elle permet de quantifier le lien entre le processus et une évolution centrale déterministe. Elle s'adapte à une grande variété de processus de ramification (*cf.* [13] et [14], en particulier les résultats que nous énonçons ici se généralisent aisément au cas des processus de Galton-Watson dont la loi dépend aussi de l'instant de reproduction, pour s'implifier nous n'envisageons dans cet article que le cas dépendant de l'effectif). De plus [13] et cette étude montrent qu'elle se prête à des calculs assez fins, et, à notre connaissance, le résultat que nous présentons ici est le premier résultat trajectoriel de grandes déviations pour une famille de processus de Galton-Watson.

Pour t dans $\mathbb{R}$ notons $[t]$ l'entier relatif vérifiant: $[t]-1<t\leqq[t]$. Il nous faut indiquer ici que la transformation en ε log-densité s'accompagne d'un changement de temps en t/ε (ε tendant vers zéro on regarde l'ε log-densité à la génération $[t/\varepsilon]$). Notons que pour X_0^ε égal à y l'effectif initial de la population Z_0 et le paramètre ε sont liés par la relation: $\varepsilon=y/\log Z_0$.

Les différentes approximations diffusions de [12] et [8] (dont celle de [7]) et les théorèmes limites centraux de [9] et [13] montrent clairement que pour les processus de Galton-Watson il y a d'autres échelles de temps envisageables. Il y a donc d'autres familles approchantes correspondant avec d'autres transformations. Mentionnons particulièrement dans le cas indépendant asymptotiquement critique l'approximation diffusion de [7] qui correspond à la famille de processus $\left(\frac{Z_{[t\,Z_0]}}{Z_0}, t \in \mathbb{R}^+\right)$, Z_0 tendant vers $+\infty$ (tandis que la transformation par l'ε log-densité correspond à la famille $\left(\frac{\log Z_{[t \log Z_0]}}{\log Z_0}, t \in \mathbb{R}^+\right)$, Z_0 tendant vers $+\infty$). Soulignons que pour un problème pratique l'échelle de temps est donnée ce qui fixe la famille approchante. Dans ce contexte notre résultat de grandes déviations montre le chemin pour des études semblables avec d'autres échelles de temps.

Donnons maintenant l'intuition de la fonctionnelle des grandes déviations pour l'ε log-densité.

Fixons T dans $]0, +\infty[$, notons $\mathscr{D}$ l'ensemble des fonctions de $[0, T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{-\infty\}$ qui sont continues à gauche et ont partout une limite à droite (en abrégé qui sont càg-làd). Notons aussi pour (x, θ, a) dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$:

$$L_x(\theta) = \log \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{\theta k} P_x(k), \qquad h_x(a) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} (a\theta - L_x(\theta)).$$

L_x est le logarithme de la transformée de Laplace et h_x est la transformée de Cramer de P_x.

Lorsque ε tend vers zéro les résultats de grandes déviations pour une suite de variables réelles nous donnent pour $\mathscr{P}_\varepsilon(X^\varepsilon_{n+1} = x_1 / X^\varepsilon_n = x_0)$ l'équivalent $\exp[-e^{x_0/\varepsilon} h_{x_0}(e^{(x_1 - x_0)/\varepsilon})]$.

Si f est $\mathscr{C}^1$ par morceaux et appartient à $\mathscr{D}$ nous en déduisons l'égalité approximative :

$$\mathscr{P}_\varepsilon(\forall n \in \mathbb{N} \cap]0, T/\varepsilon] \quad X^\varepsilon_n = f(n\varepsilon) / X^\varepsilon_0 = f(0)) \approx \exp[-\sum_{n \in \mathbb{N} \cap [0, (T/\varepsilon) - 1]} u_{\varepsilon, n}]$$

où

$$u_{\varepsilon, n} = e^{f(n\varepsilon)/\varepsilon} h_{f(n\varepsilon)}(e^{[f((n+1)\varepsilon) - f(n\varepsilon)]/\varepsilon}).$$

C'est le plus grand des $u_{\varepsilon, n}$ qui fixe l'équivalent de la probabilité lorsque ε tend vers zéro. Il faut alors distinguer trois cas.

1^er cas : $f^{(1)}(n\varepsilon)$ est égal à $\mu(f(n\varepsilon))$, alors $u_{\varepsilon, n}$ est équivalent à zéro $(h_x(m(x)) = 0)$.

2^e cas : f est localement lipschitzienne au voisinage de $n\varepsilon$ (et $f^{(1)}(n\varepsilon)$ est différent de $\mu(f(n\varepsilon))$), alors $u_{\varepsilon, n}$ est équivalent à $g(n\varepsilon) \exp(f(n\varepsilon)/\varepsilon)$ où g est une fonction bornée.

3^e cas: f n'est pas continue en $n\varepsilon$, alors $u_{\varepsilon,n}$ est équivalent à $\exp[(f(n\varepsilon)+\Pi\max(0,f((n+1)\varepsilon)-f(n\varepsilon)))/\varepsilon]$ où Π est la limite des $\log h_x(a)/\log a$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Il en résulte que la fonctionnelle des grandes déviations doit être définie lorsqu'elle est finie par:

$$\mathrm{I}(f)=\sup\{f(t)+\Pi\max(0,f(t^+)-f(t)),\ t\in[0,\mathrm{T}[,\ f^{(1)}(t)\ \text{n'existe pas ou}\ f^{(1)}(t)\neq\mu(f(t))\},$$

et que nous aurons alors l'équivalent:

$$\mathscr{P}_\varepsilon(\forall n\in\mathbb{N}\cap]0,\mathrm{T}/\varepsilon]\quad \mathrm{X}_n^\varepsilon=f(n\varepsilon)\,/\,\mathrm{X}_0^\varepsilon=f(0))\approx\exp(-e^{\mathrm{I}(f)/\varepsilon}).$$

Remarquons que habituellement c'est le logarithme de la probabilité qui est équivalent à la fonctionnelle des grandes déviations, ici c'est $\exp(\mathrm{I}(f)/\varepsilon)$ qui joue le rôle de la fonctionnelle usuelle.

Présentons plus précisément nos résultats de grandes déviations.

Notons Y^ε le processus $(\mathrm{X}_{[t/\varepsilon]}^\varepsilon,\ 0\leqq t\leqq\mathrm{T})$ et munissons $\mathscr{D}$ de la topologie de Skorokhod $\mathscr{S}$. Pour un compact $\mathscr{K}$ et un ouvert $\mathscr{O}$ de $\mathscr{D}$ nous montrons les inégalités:

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log\{-\log\mathscr{P}_\varepsilon(\mathrm{Y}^\varepsilon\in\mathscr{K})\}\geqq\inf_{\mathscr{K}}\mathrm{I},\tag{4}$$

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log\{-\log\mathscr{P}_\varepsilon(\mathrm{Y}^\varepsilon\in\mathscr{O})\}\leqq\inf_{\mathscr{O}}\mathrm{I}.\tag{5}$$

Mentionnons que nous montrons que les inégalités (4) et (5) sont vraies pour toute topologie métrisable moins fine que $\mathscr{S}$, cependant si $\mathscr{G}$ est un sous-ensemble de $\mathscr{D}$ les bornes des grandes déviations $\inf_{\bar{\mathscr{G}}}\mathrm{I}$ et $\inf_{\mathring{\mathscr{G}}}\mathrm{I}$ sont moins bonnes pour la topologie la moins fine. Nous faisons quelques remarques sur (4).

Lorsque le support des P_x est fini et ne rencontre pas l'origine nous montrons que $\mathscr{S}$ peut être remplacée par la topologie de la convergence uniforme $\mathscr{U}$ (qui est plus fine que $\mathscr{S}$). Dans ce cas les ensembles de niveau de I (*i.e.* les ensembles $\{\mathrm{I}\leqq\alpha\}$) sont compacts et (4) se généralise classiquement à tous les fermés de $\mathscr{U}$.

Notons $d_{\mathscr{S}}$ la métrique usuelle associée à $\mathscr{S}$. Dans le cas général les ensembles de niveau de I ne sont pas compacts et il est facile de trouver des ensembles fermés $\mathscr{G}$ de $\mathscr{S}$ pour lesquels il existe α dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant $\alpha<\inf_{\mathscr{G}}\mathrm{I}$ et $d_{\mathscr{S}}(\mathscr{G},\{\mathrm{I}\leqq\alpha\})=0$. Pour de tels fermés nous ne savons pas montrer (4). Essayant de préciser ce point nous indiquons dans quel cas il existe une topologie métrisable moins fine sur $\mathscr{D}$ rendant les ensembles de niveau de I compacts et nous étudions le comportement de sous-ensembles particuliers de $\mathscr{D}$ vis-à-vis des grandes déviations.

Pour démontrer nos résultats nous suivons la démarche de [1] qui traite des algorithmes stochastiques avec un bruit de taille classique. Il nous faut contrôler les restes R^{ε}_{n+1}.

Pour la majoration des grandes déviations [*i.e.* pour la minoration (4), (4) correspondant à une majoration de $\mathscr{P}_{\varepsilon}(Y^{\varepsilon} \in \mathscr{K})$] nous utilisons la majoration des grandes déviations pour une suite de variables réelles i.i.d.

Pour la minoration des grandes déviations [*i.e.* pour (5)], et lorsque le support des P_x est infini, nous utilisons la minoration triviale suivante:

$$P(\xi_1 + \ldots + \xi_n \geqq ja) \geqq e^{j \log(1 - F(a))}$$

où $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sont i.i.d. de fonction de répartition F.

Notons F_x la fonction de répartition de P_x et H_x la fonction $-\log(1 - F_x)$. Pour conclure, dans le cas du support infini, à l'égalité des limites entre notre majoration et notre minoration des grandes déviations, il faut alors supposer que l'égalité suivante est vérifiée:

$$\lim_{a \to +\infty} \frac{\log h_x(a)}{\log a} = \lim_{a \to +\infty} \frac{\log H_x(a)}{\log a}. \tag{6}$$

Notons que cette condition est nécessaire pour obtenir la minoration des grandes déviations. Nous étudions en appendice l'égalité (6); nous y montrons en utilisant le théorème taubérien de Kasahara ([3]) que les limites inférieures sont égales et plus grandes que 1, de plus, lorsque les fonctions H_x sont à variation régulière, nous montrons que les limites inférieures et supérieures sont égales.

Soulignons que les trajectoires limites probables pour l'ε log-densité peuvent avoir des discontinuités. Afin de définir sans trop de difficultés la fonctionnelle I nous supposons dans tout cet article que les extrémités des supports des P_x et les limites de (6) ne dépendent pas de x.

Cet article est organisé de la manière suivante: dans la partie 2 nous présentons la fonctionnelle des grandes déviations, dans la partie 3 les hypothèses et les résultats de grandes déviations, dans la partie 4 des exemples de sous-ensembles de $\mathscr{D}$ pour lesquels nous étudions les bornes des grandes déviations, dans la partie 5 la preuve de la majoration des grandes déviations, dans la partie 6 la preuve de la minoration.

Nous terminons cette introduction en rappelant le résultat suivant de [13]. Notons $v(x)$ la variance de P_x et pour y dans $\mathbb{R}^+$ φ la solution de (3) de condition initiale: $\varphi(0) = y$.

PROPOSITION 1. — *Loi faible des grands nombres.*

Supposons que la fonction v est bornée sur les compacts de $\mathbb{R}^+$, que la fonction m est $\mathscr{C}^1$ et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^+$. Fixons B *dans* $]0, +\infty[$. *Enfin soit* T *et* y *dans* $]0, +\infty[$ *tels que* φ *existe et est strictement positive* *sur* $[0, T]$. *Alors il existe* C *dans* $]0, +\infty[$ *vérifiant* :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{P}_\varepsilon(\Lambda \cap \Gamma^c) = 0,$$

où

$$\Lambda = \{\omega \in \Omega, |X_0^\varepsilon(\omega) - y| \leqq B\varepsilon\},$$
$$\Gamma = \{\omega \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N} \cap [0, T/\varepsilon] \quad |X_n^\varepsilon(\omega) - \varphi(n\varepsilon)| \leqq C\varepsilon\}$$

(Γ^c *est le complémentaire dans* Ω *de* Γ).

2. FONCTIONNELLE DES GRANDES DÉVIATIONS

Dans tout ce qui suit T est fixé dans $]0, +\infty[$ et $\mathscr{D}$ désigne l'ensemble des fonctions qui sont continues à gauche et ont partout une limite à droite (càg-làd) de $[0, T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{-\infty\}$. Pour définir la fonctionnelle des grandes déviations nous avons besoin des notations suivantes, (x, θ, a) appartenant à $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ (par commodité pour le lecteur nous rappelons des notations introduites dans l'introduction) :

F_x la fonction de répartition de P_x;

$$L_x(\theta) = \log\left[\sum_{k \in \mathbb{N}} e^{\theta k} P_x(k)\right], \qquad h_x(a) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} (a\theta - L_x(\theta));$$

θ_x l'élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que L_x est finie sur $]-\infty, \theta_x[$ et infinie sur $]\theta_x, +\infty[$;

$$\Pi_x = \liminf_{a \to +\infty} \frac{\log[-\log(1 - F_x(a))]}{\log a}.$$

θ_x est l'abscisse de convergence de L_x. Π_x est inversement proportionnel au poids de la queue de P_x, il est toujours supérieur à 1 et lorsque le support de P_x est fini il est égal à $+\infty$, de plus nous avons l'identité (*cf.* la proposition 3 de la partie 3) :

$$\Pi_x = \liminf_{a \to +\infty} \frac{\log h_x(a)}{\log a}.$$

Soit $P = (p_k, k \in \mathbb{N})$ une probabilité sur $\mathbb{N}$. Nous dirons que les queues des distributions P_x sont équivalentes à la queue de P si pour tout compact S de $\mathbb{R}^+$ il existe l dans $\mathbb{N}$ tel que les rapports $P_x(k)/p_k$ et $p_k/P_x(k)$ sont majorés uniformément pour x dans S et k dans $\{l, l+1, \ldots\}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que les queues des P_x soient équivalentes à une probabilité P est que pour tout compact S de $\mathbb{R}^+$ il existe l dans $\mathbb{N}$ tel que le rapport $\sup(P_x(k), x \in S)/\inf(P_x(k), x \in S)$ est majoré uniformément pour k dans $\{l, l+1, \ldots\}$ (on peut prendre $P = P_0$). Nous dirons alors que les queues des P_x sont équivalentes.

Supposons vérifiée l'hypothèse :

(i) *m est* $\mathscr{C}^1$ *et ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}^+$, *de plus m vérifie* :

$$m(0)>1 \quad et \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\psi(x)} = +\infty$$

(H0) *avec* $\psi(x)=\max\{\mu^+(y), y\in[0,x]\}$, $\mu^+(y)=\max(\mu(y),0)$;

(ii) *pour tout x de* $\mathbb{R}^+$ θ_x *est strictement positif;*

(iii) *les supports des* P_x *ne sont pas réduits à un point et leurs extrémités ne dépendent pas de x;*

(iv) Π_x *ne dépend pas de x.*

(H0) (i) garantit que les solutions de (3) pour une condition initiale fixée en t égal à 0 existent et sont strictement positives sur $\mathbb{R}^+$. Notons que (H0) (i) nous permet aussi d'obtenir une majoration des solutions de (2) en utilisant le résultat classique :

Soit ε, a, T *dans* $]0, +\infty[$ *et* $(u_n, n\in\mathbb{N})$ *tels que* :

$$u_0\geqq 0 \quad et \quad \forall n\in\mathbb{N}, \qquad u_{n+1}\leqq u_n+\varepsilon(\mu(u_n)+a);$$

(M) *alors* : $\forall n\in\mathbb{N}\cap[0, T/\varepsilon]$, $u_n\leqq b$ *où b est le réel vérifiant* :

$$b>u_0 \quad et \quad \int_{u_0}^{b} \frac{dx}{a+\psi(x)} = T.$$

(H0) (ii) est indispensable pour appliquer les résultats de grandes déviations à une suite i.i.d. de loi P_x.

(H0) (iii) et (H0) (iv) permettent de définir sans trop de difficultés la fonctionnelle des grandes déviations. (H0) (iii) écarte aussi le cas dégénéré des supports des P_x réduits à un point.

(H0) (iv) est satisfaite [sous (H0) (ii) et (H0) (iii)] lorsque le support des P_x est fini. Lorsque le support des P_x est infini une condition suffisante pour que (H0) (iv) soit satisfaite est que les queues des P_x soient équivalentes. Cette dernière condition n'est pas nécessaire comme le montre l'exemple suivant : si m satisfait (H0) (i) et si P_x est la loi de Poisson de paramètre $m(x)$, alors (H0) est satisfaite $(\theta_x=+\infty, \Pi_x=1)$ et les queues des P_x ne sont pas équivalentes.

Sous (H0) notons k_i et k_s les bornes inférieure et supérieure communes aux supports des P_x et Π la valeur commune aux Π_x (remarquons que nous avons : $k_i<m<k_s$). Notons Y^ε le processus $(X^\varepsilon_{[t/\varepsilon]}, 0\leqq t\leqq T)$ ($[t]\in\mathbb{N}$ et $[t]-1<t\leqq[t]$).

Classiquement la fonctionnelle des grandes déviations donne un poids fini aux trajectoires limites qui sont probables pour le processus X. Mentionnons donc que, pour s dans $[0, T[$, si Y^ε_s vaut $-\infty$ (*i.e.* si $Z_{[s/\varepsilon]}$ vaut 0), alors presque sûrement Y^ε_t vaut $-\infty$ sur $[s, T]$. De plus, si k_i est strictement positif (resp. k_s est fini), alors presque sûrement la fonction $Y^\varepsilon_t - t\log k_i$

(resp. $Y_t^\varepsilon - t\log k_s$) est croissante (resp. décroissante). Enfin lorsque k_s est égal à $+\infty$ le contrôle sur les trajectoires ayant un saut positif dépend de Π: plus les queues des P_x sont légères plus Π et la fonctionnelle sont grands.

Dans ce qui suit y désigne un réel strictement positif et φ la solution de (3) de condition initiale: $\varphi(0)=y$. Nous notons pour f dans $\mathscr{D}$:

$T_f = \inf\{t\in[0,T], f(t)=-\infty\}$ ($T_f = T+1$ si l'ensemble est vide);

$\mathscr{E}_f = \{t\in[0,T_f]\cap[0,T], f^{(1)}(t)$ n'existe pas ou $f^{(1)}(t)\neq\mu(f(t))\}$;

f^*, f_i et f_s trois fonctions de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ définies par (lorsque la définition a un sens):

$$f^*(t)=f(t)+\Pi\max(0,f(t^+)-f(t)) \qquad [f(T^+)=f(T) \text{ et } +\infty\times 0=0],$$

$$f_i(t)=f(t)-t\log k_i \qquad \text{et} \qquad f_s(t)=f(t)-t\log k_s.$$

Pour T et y fixés dans $]0,+\infty[$ nous notons la fonctionnelle de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}^+\cup\{-\infty,+\infty\}$ définie par:

(i) $I(f)=-\infty \Leftrightarrow f=\varphi$;

$$\text{(ii) } I(f)<+\infty \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} (a) & f(0)=y,\\ (b) & \text{si } T_f<T \text{ alors } f(t)=-\infty \text{ sur }]T_f,T],\\ (c) & \text{si } k_s=\Pi=+\infty \text{ alors } f(t^+)\leqq f(t) \text{ sur } [0,T[,\\ (d) & \text{si } k_i>0 \text{ alors } f_i \text{ est croissante},\\ (e) & \text{si } k_s<+\infty \text{ alors } f_s \text{ est décroissante;}\end{cases}$$

(iii) $-\infty<I(f)<+\infty \Rightarrow I(f)=\sup\limits_{\mathscr{E}_f} f^*$

I est la fonctionnelle des grandes déviations pour l'ε log-densité Y^ε, elle correspond à la condition initiale Y_0^ε voisin de y (Z_0 voisin de $e^{y/\varepsilon}$). Remarquons que dans le cas $k_i>0$ et $\Pi=+\infty$ I ne donne un poids fini qu'à des fonctions continues.

Nous précisons maintenant quelques propriétés de I. Suivant les cas $\mathscr{D}$ est muni de la topologie de la convergence uniforme, notée $\mathscr{U}$, ou de la topologie de Skorokhod, notée $\mathscr{S}$ [nous n'envisageons pour l'instant que les topologies les plus fines pour lesquelles nous savons montrer que (4) et (5) sont vraies].

PROPOSITION 2. — *Sous* (H0) *les assertions* (i) *et* (ii) *sont vraies pour les topologies* $\mathscr{U}$ *et* $\mathscr{S}$:

(i) I *est semi-continue inférieurement;*

(ii) (*a*) *si* $k_i>0$ *et* $k_s<+\infty$, *alors* $\{I<+\infty\}$ *est compact;* (*b*) *si* $k_i=0$ *ou* $k_s=+\infty$, *alors* $\{I\leqq\alpha\}$ *n'est pas compact pour* $\alpha>y$.

De plus nous avons :

(iii) *lorsque* $m\leqq 1$ *sur* $]y, y+T\log k_s[$ *et* $m(y)=1$, I *et* e^I *sont des fonctions convexes. Dans les autres cas* I *et* e^I *ne sont pas convexes.*

Cette proposition se déduit du résultat trivial suivant énoncé sous forme de lemme. Pour f dans $\mathscr{D}$, nous notons:

$$\{f>\mathrm{I}(f)\}=\{t\in[0,\mathrm{T}], f(t)>\mathrm{I}(f)\}.$$

LEMME 1. — *Supposons* (H0) *vérifiée. Soit f dans $\mathscr{D}$ telle que l'ensemble* $\{f>\mathrm{I}(f)\}$ *n'est pas vide. Alors* $\{f>\mathrm{I}(f)\}$ *est un ouvert de* $[0,\mathrm{T}]$ *sur lequel* $f^{(1)}$ *existe et est égale à* $\mu(f)$. *De plus, pour* x_1, x_2 *dans* $]0,\mathrm{T}[$ *vérifiant:* $x_1<x_2$ *et* $]x_1,x_2[$ (*resp.* $]x_1,\mathrm{T}[$, *resp.* $[0,x_2[$) *est une composante connexe de* $\{f>\mathrm{I}(f)\}$, *nous avons:* $f(x_1)=f(x_1^+)=f(x_2)=\mathrm{I}(f)$ [*resp.* $f(x_1)=f(x_1^+)=\mathrm{I}(f)$, *resp.* $f(x_2)=\mathrm{I}(f)$].

Preuve de la proposition 2. — (i) Il suffit de considérer la topologie $\mathscr{S}$. Pour une suite $(f_n, n\in\mathbb{N})$ de $\mathscr{D}$, de limite f, nous montrons que:

$$\mathrm{I}(f)\leqq\alpha \qquad \text{où} \quad \alpha=\sup(\mathrm{I}(f_n), n\in\mathbb{N}).$$

Supposons α fini. Nous montrons que les ensembles $\{f>\alpha\}$ et $\{f^*>\alpha\}$ sont égaux, ensuite que l'ensemble $\{f^*>\alpha\}\cap\mathscr{E}_f$ est vide.

Si $\{f>\alpha\}$ et $\{f^*>\alpha\}$ n'étaient pas égaux il existerait t dans $[0,\mathrm{T}[$ tel que: $\alpha\geqq f(t^+)>f(t)$ et $f(t)+\Pi(f(t^+)-f(t))>\alpha$. Puisque f_n converge vers f pour $\mathscr{S}$, il existerait alors une suite $(t_n, n\in\mathbb{N})$ de $[0,\mathrm{T}[$ vérifiant:

$$\lim_{n\to+\infty} t_n=t, \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(t_n)=f(t), \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(t_n^+)=f(t^+),$$

Ainsi on aurait: $\mathrm{I}(f_n)>\alpha$ pour n assez grand, ce qui n'est pas possible.

Maintenant supposons $\{f>\alpha\}$ non vide. La démonstration par l'absurde précédente implique que f est continue sur $\{f>\alpha\}$. Pour k assez grand $\left\{f>\alpha+\dfrac{1}{k}\right\}$ est donc ouvert et non vide. Considérons $[t_1, t_2]$ inclus dans $\left\{f>\alpha+\dfrac{1}{k}\right\}\cap\,]0,\mathrm{T}[$. Comme la convergence de f_n vers f est uniforme sur $[t_1,t_2]$ (f étant continue sur un voisinage ouvert de $[t_1, t_2]$), pour n assez grand $[t_1, t_2]$ est inclus dans $\{f_n>\alpha\}$ et l'égalité $f_n^{(1)}=\mu(f_n)$ y est satisfaite. Cette égalité se conserve par passage à la limite. Ainsi $f^{(1)}$ existe et est égale à $\mu(f)$ sur $\{f>\alpha\}$ $\left(=\bigcup_{k=1}^{+\infty}\left\{f>\alpha+\dfrac{1}{k}\right\}\right)$. Ce qui termine la preuve de (i).

(ii) (a) Il suffit de considérer la topologie $\mathscr{U}$. (ii) (a) se déduit du théorème d'Ascoli et de l'encadrement suivant vrai pour f dans $\mathscr{D}$ telle que $\mathrm{I}(f)$ est fini:

$$\forall s, t\in[0,\mathrm{T}[, \quad \log k_i\leqq\frac{f(t)-f(s)}{t-s}\leqq\log k_s$$

[en remarquant qu'ici, d'après (i), $\{\mathrm{I}<+\infty\}$ est fermé].

(ii) (*b*) Il suffit de considérer la topologie $\mathscr{S}$ et, lorsque k_i est nul, la suite $(f_n, n\in\mathbb{N}^*)$ de $\mathscr{D}$: $f_n(t)=y(1-nt)$, si $0\leqq t<\frac{1}{n}$, $f_n(t)=0$ sinon, et, lorsque k_s est égal à $+\infty$, la suite $(f_n, n\in\mathbb{N}^*)$ de $\mathscr{D}$: $f_n(t)=y-nt(y-\alpha)$, si $0\leqq t<\frac{1}{n}$, $f_n(t)=\alpha$ sinon.

(iii) Soit ψ une solution de l'équation différentielle (3) correspondant à une condition initiale fixée en $t=0$. Rappelons que ψ est toujours monotone: si $\mu(\psi(0))=0$, ψ est constante sur $\mathbb{R}^+$, si $\mu(\psi(0))>0$, ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, si $\mu(\psi(0))<0$, ψ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ [comme ψ existe sur $\mathbb{R}^+$ sous (H0) cela provient du théorème d'unicité des solutions de (3)]. Indiquons que ces trois cas correspondent pour les processus de Galton-Watson respectivement aux cas critique $m(\psi(0))=1$, surcritique $m(\psi(0))>1$, souscritique $m(\psi(0))<1$. Ainsi, lorsque $m\leqq 1$ sur $]y, y+\mathrm{T}\log k_s[$ et $m(y)=1$, pour tout f de $\mathscr{D}$ tel que $\mathrm{I}(f)$ est fini il est facile de déduire du lemme 1 l'égalité: $\mathrm{I}(f)=\sup_{[0,\mathrm{T}]} f^*$. Ce qui implique en particulier la convexité de I et celle de e^{I}.

Supposons maintenant qu'il existe y_0 dans $[y, y+\mathrm{T}\log k_s[$ vérifiant $m(y_0)>1$. Prenons $t_0=(y_0-y)/\log k_s$ si $k_s<+\infty$ et t_0 dans $]0,(y_0-y)/\mu(y_0)[$ sinon. Notons φ_{t_0, y_0} la solution de (3) sur $[t_0, +\infty[$ vérifiant $\varphi_{t_0, y_0}(t_0)=y_0$ et f_1, f_2 les éléments de $\mathscr{D}$ définis par:

$$\forall t\in[0,\mathrm{T}],\quad f_1(t)=\frac{\mathrm{T}-t}{\mathrm{T}}y+\frac{t}{\mathrm{T}}\varphi_{t_0, y_0}(\mathrm{T}),$$

$$\forall t\in[0,t_0],\quad f_2(t)=\frac{t_0-t}{t_0}y+\frac{t}{t_0}y_0,\qquad \forall t\in]t_0,\mathrm{T}],\quad f_2(t)=\varphi_{t_0, y_0}(t).$$

Remarquons que si $\{f_1>\mathrm{I}(f_1)\}=\varnothing$ alors f_1 et f_2 sont distinctes sur un voisinage à gauche de T, et que, sinon, $\{f_1>\mathrm{I}(f_1)\}=]s, t]$ avec $s>t_0$ et f_1 et f_2 qui sont distinctes sur un voisinage à gauche de s. On déduit alors du théorème d'unicité des solutions de (3) que $\forall\lambda\in]0,1]$

$$\mathrm{I}(f_1)=\mathrm{I}(\lambda f_1+(1-\lambda)f_2)>\mathrm{I}(f_2)=y_0.$$

Ainsi dans ce cas ni I ni e^{I} ne sont convexes.

Pour conclure il suffit alors de considérer le cas $m(y)<1$. Notons f_1 et f_2 les éléments de $\mathscr{D}$ définis par:

$$f_1=\varphi \quad \text{sur } [0,\mathrm{T}/3],\qquad f_1=\varphi(\mathrm{T}/3)\quad \text{sur }]\mathrm{T}/3,\mathrm{T}],$$
$$f_2=\varphi \quad \text{sur } [0,2\mathrm{T}/3],\qquad f_2=\varphi(2\mathrm{T}/3)\quad \text{sur }]2\mathrm{T}/3,\mathrm{T}].$$

Clairement nous avons

$$\forall\lambda\in]0,1],\quad \mathrm{I}(f_1)=\mathrm{I}(\lambda f_1+(1-\lambda)f_2)=\varphi(\mathrm{T}/3)>\mathrm{I}(f_2)=\varphi(2\mathrm{T}/3),$$

et, dans ce cas aussi, ni I ni e^{I} ne sont convexes.

3. HYPOTHÈSES ET RÉSULTATS DE GRANDES DÉVIATIONS

Nous supposons ici vérifiée l'hypothèse (H0).

Notons :

$$\lambda_s(x) = \lim_{\substack{\theta \to \theta_x \\ \theta < \theta_x}} \frac{d\mathrm{L}_x(\theta)}{d\theta}, \qquad \lambda_i(x) = \lim_{\theta \to -\infty} \frac{d\mathrm{L}_x(\theta)}{d\theta}.$$

Clairement $\lambda_i(x)$ est toujours égal à k_i et $\lambda_s(x)$ majore k_s, $\lambda_s(x)$ et k_s ne différant que si $\lambda_s(x)$ est fini et k_s est infini (en particulier θ_x doit être fini, *cf.* [6]). Mentionnons que sous (H0) $\lambda_s(x)$ majore strictement $m(x)$.

Pour traiter le cas où la fonction λ_s est différente de k_s nous procédons de la manière suivante. Considérons P une probabilité sur $\mathbb{N}$, notons L le logarithme de sa transformée de Laplace, b l'abscisse de convergence de L et λ la limite $\lim\limits_{\substack{\theta \to b \\ \theta < b}} \dfrac{d\mathrm{L}(\theta)}{d\theta}$. Supposons que le support de P est infini, que b est strictement positif et que λ est fini. Si les queues des P_x sont équivalentes à P alors θ_x est égal à b et $\lambda_s(x)$ est fini [$\lambda_s(x)$ peut être différent de λ]. Indiquons que dans ce cas λ_s est continue dès que les fonctions x donne $\mathrm{P}_x(k)$ sont continues.

Pour établir la majoration des grandes déviations nous utilisons l'hypothèse :

pour tout compact S *de* $\mathbb{R}^+$ *nous avons* :

(H1)

(i) $\inf\limits_{x \in \mathrm{S}} \dfrac{\lambda_s(x)}{m(x)} > 1$;

(ii) $\inf\left\{ \dfrac{d^2 h_x(a)}{da^2},\ m(x)(1-\mathrm{A}) \leqq a \leqq m(x)(1+\mathrm{A}),\ x \in \mathrm{S} \right\} > 0$ *dès que* A *vérifie :* $0 < \mathrm{A} < \min\left(1 - \dfrac{k_i}{m}, \inf\limits_{\mathrm{S}} \dfrac{\lambda_s}{m} - 1\right)$;

(*iii*) $\liminf\limits_{a \to +\infty} \dfrac{\log h_x(a)}{\log a} \geqq \Pi$ *uniformément sur* S.

(H1) (i) est vérifiée lorsque λ_s est égale à k_s. Lorsque λ_s est différente de k_s et lorsque les queues des P_x sont équivalentes (H1) (i) est vérifiée dès que les fonctions x donne $\mathrm{P}_x(k)$ sont continues.

(H1) (ii) demande que les fonctions convexes h_x soient uniformément convexes. Sous (H1) (i) et si les fonctions $\dfrac{d^2 h_x}{da^2}$ ne s'annulent pas, une condition suffisante pour que (H1) (ii) soit satisfaite est que les fonctions

x donne $P_x(k)$ soient continues $\left[\text{pour les } a \text{ considérées } \frac{d^2 h_x(a)}{da^2} \text{ est égal}\right.$ à $\left. 1 \Big/ \frac{d^2 L_x}{da^2}(L_x^{-1}(a))\right]$.

Pour (H1) (iii) rappelons que $\frac{\log h_x(a)}{\log a}$ et $\frac{\log[-\log(1-F_x(a))]}{\log a}$ ont la même limite inférieure (*cf.* proposition 3). De plus (H1) (iii) est vérifiée lorsque k_s est fini. Et lorsque k_s est infini (H1) (iii) est satisfaite dès que les queues des P_x sont équivalentes [car alors pour tout compact S de $\mathbb{R}^+$ il existe C dans $]0, +\infty[$ et l dans $\mathbb{N}$ tels que:

$$P_0(l) \neq 0 \text{ et } \forall x \in S, \forall k \geqq l, P_x(k) \leqq CP_0(k),$$

nous en déduisons les inégalités:

$$L_x(\theta) \leqq L_0(\theta) + \log(C + P_0^{-1}(l)),\ h_x(a) \geqq h_0(a) - \log(C + P_0^{-1}(l))].$$

La condition d'équivalence des queues n'est pas nécessaire comme le montre l'exemple des lois de Poisson.

Rappelons que $v^2(x)$ est la variance de P_x. Notons H_x la fonction $-\log(1-F_x)$. Pour établir la minoration des grandes déviations nous utilisons l'hypothèse:

(H2) *v^2 est bornée sur les compacts de $\mathbb{R}^+$; de plus, pour tout compact* S *de $\mathbb{R}^+$, nous avons:*

(i) $\inf\{P_x(k_i), x \in S\} > 0$;

(ii) *lorsque k_s est fini*: $\inf\{P_x(k_s), x \in S\} > 0$;

(iii) *lorsque k_s est infini:*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \exists K \geqq k \quad \textit{vérifiant} \ \inf\{P_x(K), x \in S\} > 0;$$

(iv) *lorsque Π est fini:*

(a) $\liminf\limits_{a \to +\infty} \frac{\log h_x(a)}{\log a} \geqq \Pi$ *uniformément sur* S;

(b) $\limsup\limits_{a \to +\infty} \frac{\log H_x(a)}{\log a} \leqq \Pi$ *uniformément sur* S.

(H2) (i), (H2) (ii) et (H2) (iii) sont vérifiées quand les lois P_x ont le même support et les fonctions x donne $P_x(k)$ sont continues.

Afin de préciser les conditions de validité de (H2) (iv) (b) nous présentons des résultats reliant les comportements en $+\infty$ de la transformée de Cramer et de la queue d'une distribution sur $\mathbb{R}^+$. Ces résultats ne semblent pas avoir été énoncés jusqu'à présent. Ils sont démontrés en appendice.

PROPOSITION 3. — *Considérons* P *une loi sur $\mathbb{R}^+$ à support non compact. Soit* F *la fonction de répartition de* P *et* H *la fonction* $-\log(1-F)$. *Soit aussi θ l'abscisse de convergence de la transformée de Laplace de* P *et h la* *transformée de Cramer de* P. *Lorsque* θ *est strictement positif nous avons*:

$$\liminf_{a \to +\infty} \frac{\log h(a)}{\log a} = \liminf_{a \to +\infty} \frac{\log \mathrm{H}(a)}{\log a} \geqq 1.$$

De plus si θ *est fini alors*:

$$\lim_{a \to +\infty} \frac{\log h(a)}{\log a} = \liminf_{a \to +\infty} \frac{\log \mathrm{H}(a)}{\log a} = 1,$$

et si H *est à variation régulière d'indice* β $\left(\text{i.e. } si\ \mathrm{H}(a) = a^{\beta}\,\mathrm{G}(a)\ et\ \mathrm{G}\ est\right.$ *à variation lente*: $\left.\forall b \in]0, +\infty[\ \lim_{a \to +\infty} \frac{\mathrm{G}(ab)}{\mathrm{G}(a)} = 1\right)$ *alors*:

$$\beta \geqq 1 \qquad et \qquad \lim_{a \to +\infty} \frac{\log h(a)}{\log a} = \lim_{a \to +\infty} \frac{\log \mathrm{H}(a)}{\log a} = \beta.$$

Indiquons que h est majorée par H, que $\dfrac{\log h(a)}{\log a}$ et $\dfrac{\log \mathrm{H}(a)}{\log a}$ peuvent ne pas avoir de limites lorsque a tend vers $+\infty$ et que leurs limites supérieures peuvent ne pas être égales (*cf.* appendice).

Une condition suffisante pour que (H2) (iv) (*b*) soit satisfaite est donc que les queues des P_x soient équivalentes à celle d'une probabilité P de fonction de répartition F telle que $-\log(1-\mathrm{F})$ est à variation régulière d'indice Π.

Remarque 1. — Les résultats de la proposition 3 sont reliés à des très grandes déviations pour une suite de variables i.i.d. de loi P ([4]). Notons S_n la somme de n de ces variables. Soit α dans $]0, +\infty[$. Utilisant la proposition 3 et l'encadrement:

$$e^{-n\,\mathrm{H}(a)} \leqq \mathrm{P}(\mathrm{S}_n > na) \leqq \min(e^{-nh(a)}, ne^{-\mathrm{H}(a)}),$$

nous obtenons:

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{\log\{-\log \mathrm{P}(\mathrm{S}_n > n^{\alpha+1})\}}{\log n} = 1 + \alpha \liminf_{a \to +\infty} \frac{\log h(a)}{\log a}$$

et:

$$\max\left(1 + \alpha \limsup_{a \to +\infty} \frac{\log h(a)}{\log a}, \alpha \limsup_{a \to +\infty} \frac{\log \mathrm{H}(a)}{\log a}\right)$$
$$\leqq \limsup_{n \to +\infty} \frac{\log\{-\log \mathrm{P}(\mathrm{S}_n > n^{\alpha+1})\}}{\log n} \leqq 1 + \alpha \limsup_{a \to +\infty} \frac{\log \mathrm{H}(a)}{\log a}.$$

Observons en particulier qu'il se peut que $\log h(a)/\log a$ ait une limite sans que $\log\{-\log \mathrm{P}(\mathrm{S}_n > n^{\alpha+1})\}/\log n$ n'en ait une (*cf.* exemple 1 de l'appendice).

Venons-en aux résultats de grandes déviations que nous avons obtenus. T et y sont fixés dans $]0, +\infty[$. Nous notons $d_{\mathscr{U}}$ (resp. $d_{\mathscr{S}}$) la métrique usuelle associée à $\mathscr{U}$ (resp. $\mathscr{S}$) et :

$$d = d_{\mathscr{U}} \quad \text{si } k_i > 0 \text{ et } \Pi = +\infty, \qquad d = d_{\mathscr{S}} \quad \text{si } k_i = 0 \text{ ou } \Pi < +\infty$$

(rappelons que dans le cas $k_i > 0$ et $\Pi = +\infty$ la fonctionnelle I ne donne un poids fini qu'à des fonctions continues). Notons encore pour B dans $]0, +\infty[$:

$$\Gamma_0 = \{ \omega \in \Omega, | Y_0^\varepsilon(\omega) - y | \leqq B \}.$$

THÉORÈME 1. — *Majoration des grandes déviations.*

Supposons (H0) *et* (H1) *vérifiées, fixons* T *et* y *dans* $]0, +\infty[$. *Soit* α *et* η *dans* $]0, +\infty[$ *tels que* : $\eta < \alpha$. *Alors il existe* E *et* B *dans* $]0, +\infty[$ *vérifiant, pour tout* ε *de* $]0, E]$, $\mathscr{P}_\varepsilon$ *presque sûrement sur* Γ_0 :

$$\mathscr{P}_\varepsilon(d_{\mathscr{U}}(Y^\varepsilon, \{ I \leqq \alpha \}) > \eta / Y_0^\varepsilon) \leqq \exp(-e^{(\alpha-\eta)/\varepsilon}).$$

Le théorème 1 est bien sûr vrai pour $d_{\mathscr{S}}$ ($d_{\mathscr{S}} \leqq d_{\mathscr{U}}$).

THÉORÈME 2. — *Minoration des grandes déviations.*

Supposons (H0) *et* (H2) *vérifiées, fixons* T *et* y *dans* $]0, +\infty[$. *Soit* f *dans* $\mathscr{D}$ *différente de* φ *et* ρ *dans* $]0, +\infty[$. *Alors il existe* E *et* B *dans* $]0, +\infty[$ *vérifiant pour tout* ε *de* $]0, E]$, $\mathscr{P}_\varepsilon$ *presque sûrement sur* Γ_0 :

$$\mathscr{P}_\varepsilon(d(Y^\varepsilon, f) < \rho / Y_0^\varepsilon) \geqq \exp(-e^{(I(f)+\rho)/\varepsilon}).$$

Le cas f égale à φ est traité dans la proposition 1.

Remarque 2. — La condition (H2) (iv) (*b*) est nécessaire pour obtenir la minoration des grandes déviations. Pour illustrer donnons un exemple. Considérons un processus de Galton-Watson indépendant de loi de reproduction P. Avec les notations de la proposition 3 supposons que $\log H(a)/\log a$ n'admet pas de limite lorsque a tends vers $+\infty$. Notons Π_s la limite supérieure de $\log H(a)/\log a$. Considérons f dans $\mathscr{D}$ définie par :

$$f^{(1)} = \mu(f) \quad \text{sur } [0, T/2[\cup]T/2, T], \qquad f(0) = y,$$
$$f((T/2)^+) > \left(\frac{1}{\Pi_s - \Pi} + 1 \right) f(T/2),$$

et considérons C strictement plus grand que $f(T/2) + \Pi(f((T/2)^+) - f(T/2))$. Soit γ et ρ dans $]0, +\infty[$, ρ suffisamment petit. A partir de la remarque 1 et de la proposition 1, il est facile de montrer que, pour tout ε de $]0, +\infty[$, il existe ε' et ε'' dans $]0, \varepsilon]$ et B dans $]0, +\infty[$ tels que :

(i) $\mathscr{P}_{\varepsilon'}$ presque sûrement sur Γ_0,

$$\mathscr{P}_{\varepsilon'}(d(Y^\varepsilon, f) < \rho / Y_0^\varepsilon) \leqq \exp[-e^{[\Pi_s(f((T/2)^+) - f(T/2)) - \gamma]/\varepsilon'}]$$
$$\text{si } \Pi_s < +\infty,$$
$$\mathscr{P}_{\varepsilon'}(d(Y^\varepsilon, f) < \rho / Y_0^\varepsilon) \leqq \exp(-e^{C/\varepsilon'}) \qquad \text{si} \quad \Pi_s = +\infty;$$

(ii) $\mathscr{P}_{\varepsilon''}$ presque sûrement sur Γ_0,

$$\mathscr{P}_{\varepsilon''}(d(\mathrm{Y}^{\varepsilon}, f)<\rho\,/\,\mathrm{Y}_0^{\varepsilon})\geqq \exp\left[-e^{[f\,(\mathrm{T}/2)+\Pi\,(f\,((\mathrm{T}/2)^+)-f\,(\mathrm{T}/2))+\gamma]/\varepsilon''}\right].$$

Les théorèmes 1 et 2 sont démontrés dans les parties 5 et 6. Nous énonçons maintenant un corollaire qui est une conséquence immédiate des théorèmes 1 et 2 (*cf.* [1]). Notons $\mathscr{T}$ la topologie sur $\mathscr{D}$ associée à d.

COROLLAIRE. — *Soit* $(y^{\varepsilon},\ 0<\varepsilon<+\infty)$ *une suite de réels strictement positifs vérifiant :* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} y^{\varepsilon}=y$, *et,*

$$\forall\,\varepsilon\in]0, +\infty[,\quad e^{y^{\varepsilon}/\varepsilon}\in\mathbb{N},\qquad \mathscr{P}_{\varepsilon}(\mathrm{Y}_0^{\varepsilon}=y^{\varepsilon})=1.$$

(i) *Sous les hypothèses du théorème* 1 *et pour* $\mathscr{C}$ *compact de* $\mathscr{T}$ *nous avons :*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log\{-\log\mathscr{P}_{\varepsilon}(\mathrm{Y}^{\varepsilon}\in\mathscr{C})\}\geqq\inf_{\mathscr{C}}\mathrm{I}. \tag{7}$$

(ii) *Sous les hypothèses du théorème* 2 *et pour* $\mathscr{O}$ *ouvert de* $\mathscr{T}$ *nous avons :*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log\{-\log\mathscr{P}_{\varepsilon}(\mathrm{Y}^{\varepsilon}\in\mathscr{O})\}\leqq\inf_{\mathscr{O}}\mathrm{I}.$$

Faisons quelques remarques sur ce corollaire.

Dans ce qui suit $\mathscr{D}'$ désigne un sous-ensemble de $\mathscr{D}$ qui contient $\{\mathrm{I}<+\infty\}$, $\mathscr{T}'$ une topologie métrisable sur $\mathscr{D}'$ moins fine que la restriction de $\mathscr{T}$ à $\mathscr{D}'$, et d' une métrique sur $\mathscr{D}'$ de topologie associée $\mathscr{T}'$. Notons que les résultats des théorèmes 1 et 2 sont clairement vrais pour $(\mathscr{D}', \min(d, d'))$ [la métrique $\min(d, d')$ minore d], que $\mathscr{T}'$ est la topologie associée à la métrique $\min(d, d')$, que les résultats du corollaire sont ainsi encore vrais pour $(\mathscr{D}', \mathscr{T}')$, enfin que (7) se généralise à tous les fermés de $(\mathscr{D}', \mathscr{T}')$ dès que les ensembles de niveaux de I sont compacts dans $(\mathscr{D}', \mathscr{T}')$ (*cf.* [1]). Rappelons que dans le cas $k_i>0$ et $k_s<+\infty$ les ensembles de niveau de I sont compacts pour $(\mathscr{D}, \mathscr{U})$ et que sinon ils ne le sont pas pour $(\mathscr{D}, \mathscr{S})$ (*cf.* proposition 2). Présentons donc les cas où on peut trouver un couple $(\mathscr{D}', \mathscr{T}')$ tels que les ensembles de niveau de I soient compacts.

Nous avons besoin des notations suivantes. Soit $\mathscr{M}$ le sous-ensemble de $\mathscr{D}$ constitué des fonctions croissantes et, pour k_s fini, $\mathscr{M}'$ le sous-ensemble de $\mathscr{D}$ constitué des fonctions f telles que f_s est décroissante. Pour f dans $\mathscr{D}$ prolongeons f en $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}$ par : $\tilde{f}=f(0)$ sur $]-\infty, 0[$, $\tilde{f}=f(\mathrm{T})$ sur $]\mathrm{T}, +\infty[$. Soit $d_{\mathscr{L}}$ (resp. $d'_{\mathscr{L}}$) la métrique sur $\mathscr{M}$ (resp. sur $\mathscr{M}'$) définie par :

$$d_{\mathscr{L}}(f, g)=\inf\{h\in\mathbb{R}^{+*}, \tilde{f}(\,.-h)-h\leqq\tilde{g}\leqq\tilde{f}(\,.+h)+h\}$$

(resp. $d'_{\mathscr{L}}(f, g)=\inf\{h\in\mathbb{R}^{+*}, \tilde{f}_s(\,.+h)-h\leqq\tilde{g}_s\leqq\tilde{f}_s(\,.-h)+h\}$). Observons que nous avons : $d_{\mathscr{L}}\leqq d_{\mathscr{S}}$ sur $\mathscr{M}$ (resp. $d'_{\mathscr{L}}\leqq d_{\mathscr{S}}$ sur $\mathscr{M}'$).

La proposition suivante complète les propriétés de I énoncées dans la proposition 2.

PROPOSITION 2'. — (i) *Lorsque* $k_s < +\infty$ *et* $k_i = 0$ *les ensembles de niveau de* I *sont compacts pour* $(\mathcal{M}', d'_{\mathcal{L}})$.

(ii) *Lorsque* $k_s = +\infty$, $k_i > 0$ *et* $\Pi = 1$ *les ensembles de niveau de* I *sont compacts pour* $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{L}})$.

(iii) *Lorsque* $k_s = +\infty$, *et*, $k_i = 0$ *ou* $\Pi > 1$, *il n'existe pas de topologie métrisable sur* $\{I < +\infty\}$ *qui soit plus fine que la topologie induite obtenue en plongeant* $\{I < +\infty\}$ *dans l'ensemble des distributions et qui rende compacts les ensembles de niveau de* I.

Preuve. — (i) et (ii). Rappelons pour commencer que f_n converge vers f dans $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{L}})$ si et seulement si f_n converge vers f en tout point de continuité de f et en 0; de plus si sur $[a, b]$ f est continue alors f_n converge uniformément vers f sur $[a, b]$. On a les mêmes propriétés dans $(\mathcal{M}', d'_{\mathcal{L}})$.

En suivant le schéma de la preuve de la proposition 2 (i) et en remarquant que sous (i) $f^* = f$ et sous (ii) $f^* = \max(f, f(.^+))$ on montre alors aisément à l'aide des rappels que I est semi-continue inférieurement.

D'autre part, les ensembles de niveau de I étant constitués de fonctions monotones uniformément majorées sont relativement compacts par le théorème de Helly.

(iii) Lorsque $k_s = +\infty$ et $k_i = 0$ l'ensemble $\{I \leqq \alpha\}$ contient toutes les fonctions continues majorées par α, un tel ensemble n'est pas compact pour la topologie induite obtenue en plongeant $\{I < +\infty\}$ dans l'ensemble des distributions.

Notons $\varphi_{t,x}$ la solution de (3) sur $[t, T]$ satisfaisant $\varphi_{t,x}(t) = x$. Lorsque $k_s = +\infty$, $k_i > 0$ et $\Pi > 1$ définissons pour t dans $]0, T[$ et k dans $\mathbb{N}^*$ des fonctions f et f_k de $\mathcal{D}$ par: $f = \varphi_{0,y}$ sur $[0, t]$ et $f = \varphi_{t, \varphi_{0,y}(t)+1}$ sur $]t, T]$; $f_k = \varphi_{0,y}$ sur $[0, t]$,

$$f_k(s) = k\left(t + \frac{1}{k} - s\right)\varphi_{0,y}(t) + k(s-t)(\varphi_{0,y}(t) + 1)$$

pour s dans $\left]t, t + \frac{1}{k}\right[$ et $f_k = \varphi_{t+(1/k), \varphi_{0,y}(t)+1}$ sur $\left]t + \frac{1}{k}, T\right]$.

Clairement nous avons:

$$I(f_k) = \varphi_{0,y}(t) + 1, \qquad I(f) = \varphi_{0,y}(t) + \Pi,$$

et si pour une métrique δ la suite $(f_k, k \in \mathbb{N}^*)$ converge vers f alors I ne peut pas être semi-continue inférieurement pour δ.

Fin de la preuve.

Dans la prochaine partie pour des sous-ensembles particuliers $\mathcal{G}$ de $\mathcal{D}$ nous étudions les bornes des grandes déviations $\inf_{\bar{\mathcal{G}}} I$ et $\inf_{\mathring{\mathcal{G}}} I$.

4. EXEMPLES

Nous nous intéressons ici à la probabilité d'observer à l'instant final le processus Y^ε au voisinage d'un point quelconque de $\mathbb{R}^+$.

Commençons par indiquer quelques propriétés des solutions de (3). Pour t et x dans $\mathbb{R}^+$ notons $\varphi_{t,x}$ la solution de (3) vérifiant $\varphi_{t,x}(t)=x$ ($\varphi_{0,y}=\varphi$). Afin de pouvoir prolonger ces solutions vers la gauche nous remplaçons l'hypothèse (H0) (i) par l'hypothèse:

m est $\mathscr{C}^1$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$, de plus m vérifie:

(H0) (i') $$m(0)>1 \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\Phi(x)}=+\infty \quad \text{avec } \Phi(x)=\max_{[0,x]}|\mu|.$$

Sous (H0) (i') et pour t et x dans $]0,+\infty[$ $\varphi_{t,x}$ se prolonge sur $[t_0,+\infty[$ vérifiant t_0 appartient à $[0,t[$ et soit t_0 est nul, soit $\varphi_{t,x}(t_0)$ est nul. Nous notons (H0') la conjonction de (H0) (i'), (H0) (ii), (H0) (iii) et (H0) (iv).

Rappelons que sur $[t_0,+\infty[$ $\varphi_{t,x}$ est ou bien constante, lorsque $\mu(x)$ est nul, ou bien strictement croissante, lorsque $\mu(x)$ est strictement positif, ou bien strictement décroissante, lorsque $\mu(x)$ est strictement négatif.

Pour x dans $\mathbb{R}^+$ et C dans $]0,+\infty[$ notons:

$$\mathscr{G}=\{f\in\mathscr{D},\ |f(\mathrm{T})-x|\leqq \mathrm{C}\},\qquad \mathring{\mathscr{G}}=\{f\in\mathscr{D},\ |f(\mathrm{T})-x|<\mathrm{C}\}.$$

Pour les topologies $\mathscr{U}$ et $\mathscr{S}$ $\mathscr{G}$ est fermé d'intérieur $\mathring{\mathscr{G}}$. Lorsque k_i est nul ou k_s est infini $\mathscr{G}$ n'est pas compact cependant (7) est vrai pour $\mathscr{G}$, cela résulte de la proposition suivante.

Cette proposition précise en fait la valeur des minima de I sur $\mathscr{G}$ et sur $\mathring{\mathscr{G}}$. Nous en tirons trois conséquences. La première est que la distance pour d entre $\mathscr{G}$ et $\{\mathrm{I}\leqq\alpha\}$ est strictement positive dès que α minore strictement $\inf_{\mathscr{G}} \mathrm{I}$, ce qui permet d'obtenir (7). La seconde est que $\inf_{\mathscr{G}} \mathrm{I}$ et $\inf_{\mathring{\mathscr{G}}} \mathrm{I}$ sont en général égaux, $\mathscr{G}$ est ainsi un bon ensemble pour les grandes déviations. La troisième est que nous pouvons préciser les éléments de $\mathscr{G}$ réalisant le minimum de I sur $\mathscr{G}$.

Indiquons que l'énoncé et la démonstration de cette proposition et de ses conséquences ne demandent qu'une analyse méticuleuse des différents cas qui se présentent: il faut tenir compte de la position de $x+\mathrm{C}$ et $x-\mathrm{C}$ par rapport à $\varphi(\mathrm{T})$ [si: $x-\mathrm{C}<\varphi(\mathrm{T})<x+\mathrm{C}$, alors: $\inf_{\mathring{\mathscr{G}}} \mathrm{I}=-\infty$ et $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathscr{P}_\varepsilon(Y^\varepsilon\in\mathring{\mathscr{G}})=1$ par la propositon 1], de ce que k_i est nul ou pas et k_s est fini ou infini, mais aussi du signe de $\mu(y)$ et de celui de $\mu(x\pm\mathrm{C})$ (qui fixent les monotonies de φ et de $\varphi_{\mathrm{T},x\pm\mathrm{C}}$). Une étude semblable pourrait être conduite pour les boules de $d_{\mathscr{U}}$ centrées sur des fonctions continues.

Notons t_s (resp. t_i) l'intersection entre la courbe $\varphi_{T,x-C}$ (resp. $\varphi_{T,x+C}$) et les droites $y+t\log k_s$ (resp. $y+t\log k_i$) lorsqu'elles existent dans $[0,T]$, et t_s (resp. t_i) égal 0 sinon.

PROPOSITION 4. — *Supposons* (H0') *vérifiée. Soit* x *dans* $\mathbb{R}^+$ *et* C *dans* $]0,+\infty[$ *vérifiant*:

$$\varphi(T)\notin[x-C,x+C],\qquad \frac{x+C-y}{T}\neq\log k_i,\qquad \frac{x-C-y}{T}\neq\log k_s.$$

Alors $\inf_{\mathscr{G}} I$ *et* $\inf_{\overset{\circ}{\mathscr{G}}} I$ *sont égaux et suivant les cas valent*:

$$\min_{[t_s,T]}\varphi_{T,x-C}\quad \textit{si}\quad \varphi(T)<x-C<y+T\log k_s;$$
$$y+t_i\log k_i\quad \textit{si}\quad y+T\log k_i<x+C<\varphi(T)\quad \textit{et}\quad k_i>0;$$
$$\min_{[0,T]}\varphi\quad \textit{si}\quad x+C<\varphi(T)\quad \textit{et}\quad k_i=0;$$
$$+\infty\ \textit{sinon}.$$

Remarquons que lorsque k_i n'est pas nul et $\dfrac{x+C-y}{T}$ est égal à $\log k_i$ alors $\mathscr{P}_\varepsilon(Y^\varepsilon\in\overset{\circ}{\mathscr{G}})$ est nul, $\mathscr{P}_\varepsilon(Y^\varepsilon\in\mathscr{G})$ est égal à:

$$\prod_{n\in\mathbb{N}\cap[0,(T/\varepsilon)-1[}(P_{y_n})^{e^{(y_n/\varepsilon)}}\qquad \text{où}\quad y_n=y+n\varepsilon\log k_i,$$

et nous avons:

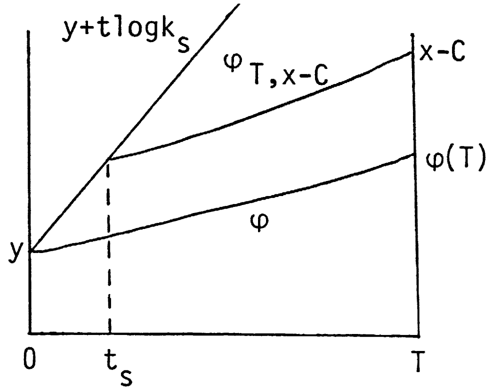
$$\inf_{\mathscr{G}} I=x+C=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log\{-\log\mathscr{P}_\varepsilon(Y^\varepsilon\in\mathscr{G})\}$$
$$<\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log\{-\log\mathscr{P}_\varepsilon(Y^\varepsilon\in\overset{\circ}{\mathscr{G}})\}=+\infty.$$

On peut faire une remarque similaire lorsque k_s est fini et $\dfrac{x-C-y}{T}$ est égal à $\log k_s$.

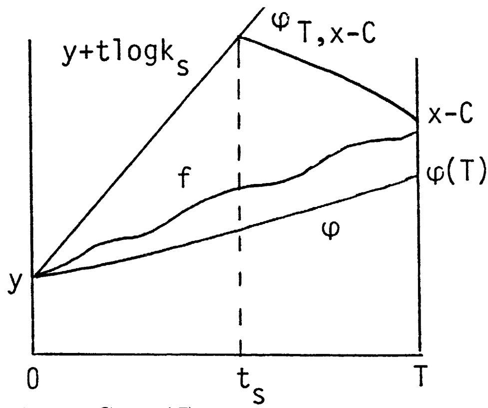
Nous explicitons maintenant quelques cas et les fonctions qui réalisent le minimum de I sur $\mathscr{G}$.

Cas 1. — $k_s<+\infty$, $x-C>\varphi(T)$, $\mu(y)\geqq 0$ et $\mu(x-C)>0$. Nous avons: $\inf_{\mathscr{G}} I=\varphi_{T,x-C}(t_s)$, et la fonction f définie par: $f(t)=y+t\log k_s$ si $0\leqq t\leqq t_s$, $f(t)=\varphi_{T,x-C}(t)$ sinon, est l'unique fonction de $\mathscr{G}$ réalisant le minimum de

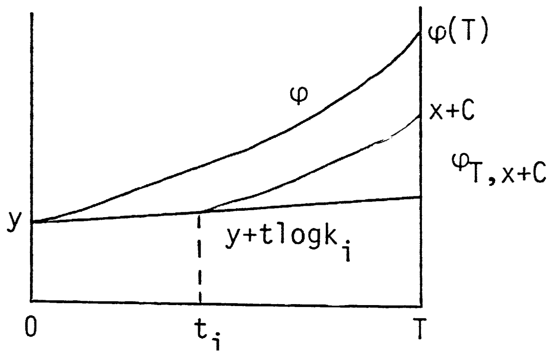
I sur $\mathcal{G}$.



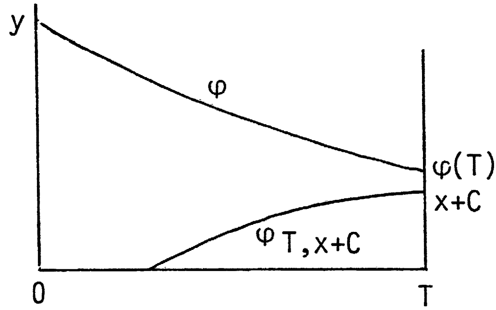
Cas 2. — $k_s < +\infty$, $x-\mathrm{C} > \varphi(\mathrm{T})$, $\mu(y) \geqq 0$ et $\mu(x-\mathrm{C}) < 0$. Nous avons: $\inf_{\mathcal{G}} \mathrm{I} = x-\mathrm{C}$, et toute fonction f de $\mathcal{G}$ telle que: $\mathrm{I}(f) < +\infty$, $f(\mathrm{T}) = x-\mathrm{C}$, $\sup_{[0,\,\mathrm{T}[} f^* \leqq x-\mathrm{C}$, réalise le minimum de I sur $\mathcal{G}$.



Cas 3. — $k_i > 0$, $x+\mathrm{C} < \varphi(\mathrm{T})$. Nous avons: $\inf_{\mathcal{G}} \mathrm{I} = y + t_i \log k_i$, et la fonction f définie par: $f(t) = y + t \log k_i$ si $0 \leqq t \leqq t_i$, $f(t) = \varphi_{\mathrm{T},\,x+\mathrm{C}}$ si $t_i < t < \mathrm{T}$, est l'unique fonction de $\mathcal{G}$ réalisant le minimum de I sur $\mathcal{G}$.



Cas 4. — $x+\mathrm{C}<\varphi(\mathrm{T})$, $\mu(y)<0$, $\mu(x+\mathrm{C})>0$. Nous avons: $\inf_{\mathscr{G}} \mathrm{I}=\varphi(\mathrm{T})$, et il n'y a pas de fonction de $\mathscr{G}$ réalisant ce minimum. Cependant, pour être proche du minimum il faut suivre φ le plus longtemps possible puis sauter dans $[x-\mathrm{C}, x+\mathrm{C}]$.

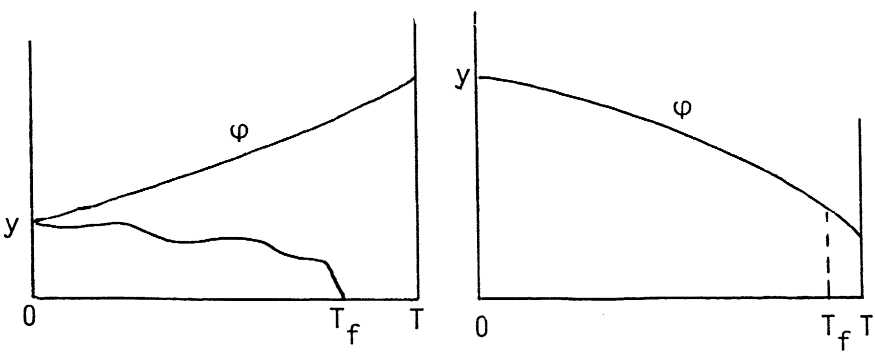


Terminons ce paragraphe par la même étude pour l'ensemble d'extinction de X. Notons: $\mathscr{G}_e=\{f\in\mathscr{D}, f(\mathrm{T})=-\infty\}$. $\mathscr{G}_e$ est à la fois ouvert et fermé (pour $\mathscr{U}$ et $\mathscr{S}$). $\mathscr{G}_e$ est encore un bon ensemble pour les grandes déviations. Nous distinguons deux cas.

Cas $\mu(y)\geqq 0$. — Alors: $\inf_{\mathscr{G}_e} \mathrm{I}=y$, et il y a beaucoup de fonctions réalisant ce minimum.

Cas de $\mu(y)<0$. — Alors: $\inf_{\mathscr{G}_e} \mathrm{I}=\varphi(\mathrm{T})$, il n'y a pas de fonctions de $\mathscr{G}_e$ réalisant ce minimum, mais pour en être proche il faut suivre φ le plus longtemps possible puis sauter en $-\infty$.

$\mu(y)\geqq 0$ $\mu(y)<0$



5. PREUVE DE LA MAJORATION DES GRANDES DÉVIATIONS

Le théorème 1 énonce une majoration de la probabilité de l'ensemble $\{d_{\mathscr{U}}(X, \{I \leqq \alpha\}) > \eta\}$. Fixons T, y, α dans $]0, +\infty[$ et η dans $]0, \alpha[$. Supposons vérifiées les hypothèses du théorème 1. Nous donnons la preuve du théorème 1 dans le cas où Π est fini et nous indiquons à la suite les changements nécessaires pour traiter le cas où Π est égal à $+\infty$.

5.1. *Principe de la démonstration.* — N est toujours l'entier vérifiant : $(N-1)\varepsilon < T \leqq N\varepsilon$. Notons

$$\Sigma = \left\{ \sigma = (x_n, n \in \{0, \ldots, N\}),\ x_n \in \mathbb{R}^+ \cup \{-\infty\},\ \text{vérifiant :} \right.$$
$$\forall n \in \{0, \ldots, N-1\},\ \log k_i \leqq \frac{x_{n+1} - x_n}{\varepsilon} \leqq \log k_s$$
$$\left. \text{et } x_n = -\infty \Rightarrow x_{n+1} = -\infty \right\};$$

et, pour σ dans Σ, f_σ la fonction de $\mathscr{D}$ vérifiant :

$$f_\sigma(t) = x_{[t/\varepsilon]}.$$

Σ contient les trajectoires de $(X_n^\varepsilon, n \in \{0, \ldots, N\})$ qui ont une probabilité non nulle de se réaliser. Notons encore :

$$\Sigma_0 = \{\sigma \in \Sigma, |x_0 - y| \leqq B\}$$
$$\Sigma_1 = \{\sigma \in \Sigma, d_{\mathscr{U}}(f_\sigma, \{I \leqq \alpha\}) > \eta\}.$$

Lorsque Π est fini la preuve du théorème 1 se déduit trivialement des deux lemmes que nous énonçons maintenant. Le premier lemme montre que Σ_1 est inclus dans la réunion de trois sous-ensembles de Σ. Le second lemme donne une majoration des probabilités que $(X_n^\varepsilon, n \in \{0, \ldots, N\})$ appartienne à ces sous-ensembles.

Notons :

$$\Sigma_2 = \left\{ \sigma \in \Sigma \text{ vérifiant : } \exists n \in \{0, \ldots, N-1\} \right.$$
$$\left. \text{tel que } x_n \leqq \alpha - \eta \text{ et } x_{n+1} \geqq \alpha - \frac{2\eta}{3} \right\};$$

$$\Sigma_3 = \left\{ \sigma \in \Sigma \text{ vérifiant : } \exists n \in \{0, \ldots, N-1\} \right.$$
$$\left. \text{tel que } x_n \leqq \alpha - \frac{2\eta}{3} \text{ et } x_n + \Pi(x_{n+1} - x_n) \geqq \alpha - \frac{\eta}{3} \right\};$$

χ le réel vérifiant : $\chi > \alpha \vee y + 2$ et $\displaystyle\int_{\alpha \vee y+1}^{\chi - 1} \frac{dx}{1 + \psi(x)} = T$;

pour A dans]0, + ∞[:

$$\Sigma_4 = \left\{ \sigma \in \Sigma \text{ vérifiant: } \exists n \in \{0, \ldots, N-1\} \right.$$
$$\left. \text{tel que } \alpha - \eta \leqq x_n \leqq \chi \text{ et } \left| \frac{x_{n+1} - x_n}{\varepsilon} - \mu(x_n) \right| > A \right\}$$

et pour i dans $\{2, 3, 4\}$:

$$\Gamma_i = \{ \omega \in \Omega, (X_n^\varepsilon(\omega), n \in \{0, \ldots, N\}) \in \Sigma_i \}.$$

Remarquons que Γ_2 et Γ_3 (resp. Γ_4) correspondent avec le cas où $(X_n^\varepsilon, n \in \{0, \ldots, N\})$ est proche d'une fonction f de $\mathcal{D}$ ayant un saut positif [resp. telle que $f^{(1)}$ est différente de $\mu(f)$ en un point au moins], ce qui dans la description intuitive de la fonctionnelle I correspond respectivement avec le troisième et le deuxième cas.

LEMME 2. — *Supposons vérifiées les hypothèses du théorème* 1 *et supposons* Π *fini. Soit* T, y, α *dans*]0, + ∞[*et* η *dans*]0, α[. *Soit* A, B *et* E′ *vérifiant:* $0 < A, B, E' \leqq 1$,

$$B e^{\nu_1 (T+1)} + (A + E' \nu_0 \nu_1) \frac{e^{\nu_1 (T+1)} - 1}{\nu_1} \leqq \min(1, \eta/3),$$
$$\max(E'(A + \nu_0), E' \log k_i) \leqq \eta/3,$$

où $\nu_0 = \max\limits_{[0, \chi]} |\mu|$ *et* $\nu_1 = \max\limits_{[0, \chi]} |\mu^{(1)}|$.

Alors $\Sigma_0 \cap \Sigma_1$ *est inclus dans* $\Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$ *dès que* ε *appartient à*]0, E′].

LEMME 3. — *Sous les conditions du lemme* 2 *et si, en plus,* A *vérifie*:

$$A \leqq \min\left(1 - \frac{k_i}{m}, \inf_{[0, \chi]} \frac{\lambda_s}{m} - 1\right),$$

alors il existe E″ *dans*]0, + ∞[*tel que nous ayons, pour* ε *dans*]0, E″], $\mathcal{P}_\varepsilon$ *presque sûrement sur* Ω:

(i) $\max(\mathcal{P}_\varepsilon(\Gamma_2/X_0^\varepsilon), \mathcal{P}_\varepsilon(\Gamma_3/X_0^\varepsilon)) \leqq \dfrac{T}{\varepsilon} \exp(-e^{(\alpha - \eta/\varepsilon)})$;

(ii) $\mathcal{P}_\varepsilon(\Gamma_4/X_0^\varepsilon) \leqq \dfrac{2T}{\varepsilon} \exp(-G e^{(\alpha - \eta/\varepsilon)})$,

où:

$$G = \frac{G'}{2} A^2 e^{-2A},$$

et,

$$G' = \inf\left\{ m^2(x) \frac{d^2 h_x(a)}{da^2}, m(x)(1 - A) \leqq a \leqq m(x)(1 + A), 0 \leqq x \leqq \chi \right\}.$$

Avant de donner la preuve (technique) du lemme 2 dans le prochain paragraphe nous démontrons le lemme 3.

5.2. *Preuve du lemme* 3. – (i) Notons: $\mathscr{X}=\{\varepsilon\log l, l\in\mathbb{N}\}$; $\alpha'=\alpha-\dfrac{2\eta}{3}$.

Remarquant que Σ_2 est inclus dans l'ensemble:

$$\{\sigma\in\Sigma \text{ vérifiant: } \exists n\in\{0,\ldots,N-1\} \text{ tel que } x_n\leqq\alpha-\eta \text{ et } x_n+\Pi(x_{n+1}-x_n)\geqq\alpha'\},$$

nous majorons les probabilités de Γ_2 et Γ_3 de la même manière. Nous montrons la majoration pour Γ_3.

Nous partons de la majoration qui a lieu $\mathscr{P}_\varepsilon$ presque sûrement:

$$\mathscr{P}_\varepsilon(\Gamma_3/X_0^\varepsilon)\leqq\sum_{n=0}^{N-1}\max_{x\in\mathscr{X}\cap[0,\alpha']}\left[\mathscr{P}_\varepsilon\left(X_n^\varepsilon+\Pi(X_{n+1}^\varepsilon-X_n^\varepsilon)\geqq\alpha-\frac{\eta}{3}\Big/X_n^\varepsilon=x\right)\right].$$

Comme, d'après (H1) (iii), nous avons pour a assez grand et uniformément en x dans $[0, \alpha']$ l'inégalité:

$$h_x(a)\geqq a^{\Pi(\alpha-\eta)/(\alpha-\eta/3)},$$

pour ε assez petit, les inégalités suivantes sont vraies dès que x appartient à $\mathscr{X}\cap[0, \alpha']$:

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_\varepsilon&\left(X_n^\varepsilon+\Pi(X_{n+1}^\varepsilon-X_n^\varepsilon)\geqq\alpha-\frac{\eta}{3}\Big/X_n^\varepsilon=x\right)\\&=\mathscr{P}_\varepsilon(Z_{n+1}\geqq Z_n e^{(\alpha-\eta/3-x)/\Pi\varepsilon}/X_n^\varepsilon=x)\\&\leqq\exp[-e^{x/\varepsilon}h_x(e^{(\alpha-\eta/3-x)/\Pi\varepsilon})]\leqq\exp[-e^{(\alpha-\eta)/\varepsilon}e^{(1-(\alpha-\eta)/(\alpha-\eta/3))x/\varepsilon}]\\&\leqq\exp(-e^{(\alpha-\eta)/\varepsilon}).\end{aligned}$$

(ii) Nous partons de la majoration qui a lieu $\mathscr{P}_\varepsilon$ presque sûrement:

$$\mathscr{P}_\varepsilon(\Gamma_4/X_0^\varepsilon)\leqq\sum_{n=0}^{N-1}\max_{x\in\mathscr{X}\cap[\alpha-\eta,\chi]}\left[\mathscr{P}_\varepsilon\left(\left|\frac{X_{n+1}^\varepsilon-X_n^\varepsilon}{\varepsilon}-\mu(X_n^\varepsilon)\right|>A\Big/X_n^\varepsilon=x\right)\right].$$

Nous concluons alors, pour ε dans $]0, 1]$ et x dans $\mathscr{X} \cap [\alpha-\eta, \chi]$, en utilisant les majorations:

$$\mathscr{P}_\varepsilon\left(\left|\frac{X_{n+1}^\varepsilon - X_n^\varepsilon}{\varepsilon} - \mu(X_n^\varepsilon)\right| > A \Big/ X_n^\varepsilon = x\right)$$
$$= \mathscr{P}_\varepsilon(Z_{n+1} > Z_n m(X_n^\varepsilon) e^A / X_n^\varepsilon = x) + \mathscr{P}_\varepsilon(Z_{n+1} < Z_n m(X_n^\varepsilon) e^{-A} / X_n^\varepsilon = x)$$
$$\leqq \exp[-e^{x/\varepsilon} h_x(m(x)(1+A))] + \exp[-e^{x/\varepsilon} h_x(m(x)(1-A e^{-A}))]$$
$$\leqq 2 \exp\left[-\frac{G'}{2} A^2 e^{-2A} e^{(\alpha-\eta)/\varepsilon}\right].$$

Ce qui termine la preuve du lemme 3.

5.3. *Preuve de l'inclusion de* $\Sigma_0 \cap \Sigma_1$ *dans* $\Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$. — Nous montrons ici le lemme 2. Rappelons que $\alpha' = \alpha - 2\eta/3$ et notons:

$$\Sigma_5 = \left\{ \sigma \in \Sigma \text{ vérifiant: } \exists n \in \{0, \ldots, \mathrm{N}-1\} \right.$$
$$\left. \text{tel que } \alpha' \leqq \max(x_n, x_{n+1}) \text{ et } \left|\frac{x_{n+1} - x_n}{\varepsilon} - \mu(x_n)\right| > A \right\}.$$

La preuve du lemme 2 résulte clairement des inclusions:

$$\Sigma_5 \cap \Sigma_0 \subset (\Sigma_2 \cup \Sigma_4) \cap \Sigma_0, \tag{8}$$

$$\Sigma_5^c \cap \Sigma_3^c \cap \Sigma_0 \subset \Sigma_1^c \cap \Sigma_0, \tag{9}$$

où $.^c$ désigne le complémentaire dans Σ.

5.3.1. *Preuve de* (8). — Supposons $\Sigma_5 \cap \Sigma_2^c \cap \Sigma_0$ non vide (le cas $\Sigma_5 \cap \Sigma_2^c \cap \Sigma_0$ vide étant trivial). Fixons $\sigma = (x_n, n \in \{0, \ldots, \mathrm{N}\})$ dans $\Sigma_5 \cap \Sigma_2^c \cap \Sigma_0$ et notons: $\mathscr{N} = \left\{ n \in \{0, \ldots, \mathrm{N}-1\} \text{ vérifiant: } x_n > \alpha - \eta \text{ et } \left|\frac{x_{n+1} - x_n}{\varepsilon} - \mu(x_n)\right| > A \right\}$; $n_0 = \min \mathscr{N}$.

Remarquons que $\mathscr{N}$ n'est pas vide. Deux cas se présentent: si $n_0 = 0$ alors $x_{n_0} \leqq y + B \leqq \chi$ (dès que $B \leqq 1$); si $n_0 > 0$ alors pour tout n de $\{0, \ldots, n_0 - 1\}$ $x_n > \alpha - \eta$ implique $\left|\frac{x_{n+1} - x_n}{\varepsilon} - \mu(x_n)\right| \leqq A$, et nous avons grâce à (M): $x_{n_0} \leqq \chi$ (dès que $A \leqq 1$).

Ainsi dans les deux cas σ appartient à Σ_4.

5.3.2. *Principe de la démonstration de* (9). — Fixons

$$\sigma = (x_n, n \in \{0, \ldots, \mathrm{N}\})$$

dans Σ et ε dans $]0, E']$. Il nous faut trouver f dans $\mathscr{D}$ vérifiant: $I(f) \leqq \alpha$ et $d_{\mathscr{U}}(f_\sigma, f) \leqq \eta$, dès que σ appartient à $\Sigma_5^c \cap \Sigma_3^c \cap \Sigma_0$.

Soit f dans $\mathscr{D}$, satisfaisant $f(0)=y$, et définie par récurrence sur les intervalles $]n\varepsilon, (n+1)\varepsilon]$, $n\in\{0, \ldots, \mathrm{N}-1\}$, par les conditions suivantes.

Pour $0\leqq n<\mathrm{N}$ et $n\varepsilon<t\leqq(n+1)\varepsilon$:

$$\text{(C1)} \qquad x_n=-\infty \quad\Rightarrow\quad f(t)=-\infty;$$
$$\text{(C2)} \qquad x_{n+1}<\min(\alpha', x_n) \quad\Rightarrow\quad f(t)=\min(x_{n+1}, f(n\varepsilon));$$
$$\text{(C3)} \qquad -\infty<x_n\leqq x_{n+1}<\alpha' \text{ et } k_i=0 \quad\Rightarrow\quad f(t)=x_{n+1}-x_n+f(n\varepsilon);$$
$$\text{(C3')} \qquad -\infty<x_n\leqq x_{n+1}<\alpha' \text{ et } k_i>0$$
$$\Rightarrow\quad f(t)=x_{n+1}-x_n+f(n\varepsilon)-((n+1)\varepsilon-t)\log k_i;$$
$$\text{(C4)} \qquad x_{n+1}\geqq\alpha' \quad\Rightarrow\quad f(t)=\varphi_{n\varepsilon, f(n\varepsilon)}(t),$$

où $\varphi_{t,x}$ est la solution de (3) vérifiant $\varphi_{t,x}(t)=x$.

Soulignons que la fonction f construite vérifie: $\mathrm{I}(f)<+\infty$, et que (C1), (C2) et (C3) correspondent avec le cas $k_i=0$.

5.3.3. *Preuve de $d_{\mathscr{U}}(f_\sigma, f)\leqq\eta$ pour des σ convenables.* — Remarquons que si σ appartient à $\Sigma_5^c\cap\Sigma_0$ nous avons pour tout n de $\{0, \ldots, \mathrm{N}-1\}$ l'implication:

$$\alpha'\leqq\max(x_n, x_{n+1}) \text{ implique } \left|\frac{x_{n+1}-x_n}{\varepsilon}-\mu(x_n)\right|\leqq\mathrm{A},$$

et en particulier, grâce à (M), nous avons la majoration:

$$\forall n\in\{0, \ldots, \mathrm{N}\}, \quad x_n\leqq\chi-1.$$

Supposons dorénavant σ dans $\Sigma_5^c\cap\Sigma_0$ et notons u_n la quantité $|x_n-f(n\varepsilon)|$. Nous commençons par majorer $\max(u_n, n\in\{0, \ldots, \mathrm{N}\})$. Nous procédons par récurrence sur n.

Soit n dans $\{0, \ldots, \mathrm{N}-1\}$ vérifiant: $\forall k\in\{0, \ldots, n\}$, $u_k\leqq 1$. Nous déduisons alors de (C1), (C2), (C3) et (C3') que u_{n+1} est majoré par u_n. Et, de (C4) et de l'hypothèse de récurrence, qu'il existe s et β dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant: $s\leqq n\varepsilon$, $\beta\leqq\alpha\vee y+1$ et $\varphi_{n\varepsilon, f(n\varepsilon)}=\varphi_{s,\beta}$, ce qui implique que f est majorée par $\chi-1$ sur $[n\varepsilon, (n+1)\varepsilon]$ et que nous avons l'inégalité:

$$\text{(10)} \qquad u_{n+1}\leqq u_n(1+\varepsilon\nu_1)+\varepsilon(\mathrm{A}+\mathrm{E}'\nu_0\nu_1)$$

(puisque:

$$x_{n+1}-f((n+1)\varepsilon)=x_n-f(n\varepsilon)+\varepsilon[\mu(x_n)-\mu(f(n\varepsilon))]$$
$$+[x_{n+1}-x_n-\varepsilon\mu(x_n)]-[f((n+1)\varepsilon)-f(n\varepsilon)-\varepsilon\mu(f(n\varepsilon))]; \quad \varepsilon\in]0, \mathrm{E}']$$

et, *cf.* (C4), $f^{(1)}=\mu(f)$ et $f^{(2)}=\mu^{(1)}(f)\mu(f)$ sur $[n\varepsilon, (n+1)\varepsilon]$). Nous avons ainsi, dans tous les cas, l'inégalité (10).

Pour a dans $]-1, +\infty]$, b dans $\mathbb{R}$ et $(u_n, n\in\mathbb{N})$ vérifiant: $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}\leqq u_n(1+a)+b$, rappelons la majoration:

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad u_n\leqq u_0 e^{na}+b\frac{e^{na}-1}{a}\left(\frac{e^{na}-1}{a}=n \quad \text{si } a=0\right).$$

Dès que E′ et $B e^{\nu_1 (T+1)} + (A + E' \nu_0 \nu_1) \dfrac{e^{\nu_1 (T+1)} - 1}{\nu_1}$ sont inférieurs à 1 l'inégalité (10) a donc lieu pour tous les n de $\{0, \ldots, N-1\}$. Nous en déduisons la majoration :

$$\max (u_n, n \in \{0, \ldots, N\}) \leqq B e^{\nu_1 (T+1)} + (A + E' \nu_0 \nu_1) \frac{e^{\nu_1 (T+1)} - 1}{\nu_1} \leqq \frac{\eta}{3}.$$

Remarquons que nous avons aussi la majoration :

$$\max (f(n\varepsilon), n \in \{0, \ldots, N\}) \leqq \max (x_n, n \in \{0, \ldots, N\}) + \max (u_n, n \in \{0, \ldots, N\}) \leqq \chi.$$

Maintenant pour : $0 \leqq n \leqq N$ et $n\varepsilon < t < \min (T, (n+1)\varepsilon)$, $|f_\sigma(t) - f(t)|$ est majoré par u_n sous (C1), (C2) et (C3), par $u_n + E' \log k_i$ sous (C3′) et par $u_n + E' \nu_0$ sous (C4). Il en résulte la majoration :

$$d_{\mathscr{U}}(f_\sigma, f) \leqq \frac{\eta}{3} + \max (E' \log k_i,\ E' \nu_0) \leqq \frac{2\eta}{3} < \eta,$$

dès que σ appartient à $\Sigma_5^c \cap \Sigma_0$.

5.3.4. *Preuve de* $I(f) \leqq \alpha$ *pour des* σ *convenables.* — Supposons σ dans $\Sigma_5^c \cap \Sigma_3^c \cap \Sigma_0$. Notons :

$$\mathscr{N}_1 = \{ n \in \{0, \ldots, N-1\},\ x_{n+1} < \alpha' \text{ et } x_{n+1} < x_n \};$$
$$\mathscr{N}_2 = \{ n \in \{0, \ldots, N-1\},\ x_n \leqq x_{n+1} < \alpha' \};$$
$$\mathscr{N} = \{ n \in \{0, \ldots, N-1\},\ x_{n+1} \geqq \alpha' \}.$$

$\mathscr{N}_1$, $\mathscr{N}_2$ et $\mathscr{N}$ forment une partition de $\{0, \ldots, N-1\}$.

Remarque 3. — Soit $\{n_0, n_0+1, \ldots, n_1\}$ une composante connexe de $\mathscr{N}$ (*i.e.* $\{n_0, n_0+1, \ldots, n_1\} = \mathscr{N} \cap [n_0, n_1]$, et, $n_0 = 0$ ou $x_{n_0} < \alpha'$, $n_1 + 1 = N$ ou $x_{n_1+2} < \alpha'$). Alors $\mathscr{E}_f \cap [n_0 \varepsilon, (n_1+1)\varepsilon]$ est inclus dans $\{n_0 \varepsilon, (n_1+1)\varepsilon\}$. De plus, si n_0 est nul $\mathscr{E}_f$ est minoré par $(n_1+1)\varepsilon$, si n_0 est strictement positif $n_0 - 1$ appartient à $\mathscr{N}_1 \cup \mathscr{N}_2$ et $n_0 \varepsilon$ appartient à $\mathscr{E}_f$, si $n_1 + 1$ est égal à N $\mathscr{E}_f$ est majoré par $n_0 \varepsilon$, et si $n_1 + 1$ est strictement inférieur à N $n_1 + 1$ appartient à $\mathscr{N}_1$ et $(n_1+1)\varepsilon$ appartient à $\mathscr{E}_f$.

Rappelons que par construction nous avons $I(f) < +\infty$. D'après la remarque 3 nous avons alors la majoration :

$$I(f) \leqq \max_{n \in \mathscr{N}_1 \cup \mathscr{N}_2} (f^*(n\varepsilon), f((n+1)\varepsilon))$$

[le terme $f((n+1)\varepsilon)$ étant là pour tenir compte des $f(n_0 \varepsilon)$]. Notons que pour n dans $\mathscr{N}_1$ c'est (C1) ou (C2) qui s'appliquent; ainsi $f^*(n\varepsilon)$ est égal à $f(n\varepsilon)$ et $f((n+1)\varepsilon)$ est majoré par $f(n\varepsilon)$. Tandis que pour n dans $\mathscr{N}_2$ c'est (C3) et (C3′) qui s'appliquent et nous avons la majoration :

$$\max (f^*(n\varepsilon), f((n+1)\varepsilon)) \leqq f(n\varepsilon) + \Pi (x_{n+1} - x_n).$$

Or nous avons les majorations :
si $n \in \mathcal{N}_1$ et $x_n < \alpha'$,

$$f(n\varepsilon) \leqq \alpha' + u_n \leqq \alpha;$$

si $n \in \mathcal{N}_1$ et $x_n \geqq \alpha'$,

$$x_n \leqq \alpha' + \mathrm{E}'(\mathrm{A} + \nu_0)$$

et

$$f(n\varepsilon) \leqq \alpha' + \mathrm{E}'(\mathrm{A} + \nu_0) + u_n \leqq \alpha$$

[puisque pour σ dans $\Sigma_5^c : x_n \leqq x_{n+1} + \varepsilon(\mathrm{A} - \mu(x_n))$];
si $n \in \mathcal{N}_2$,

$$f(n\varepsilon) + \Pi(x_{n+1} - x_n) \leqq x_n + \Pi(x_{n+1} - x_n) + u_n \leqq \alpha - \frac{n}{3} + u_n \leqq \alpha$$

(en tenant compte de ce que σ appartient à Σ_3^c).

Nous avons ainsi montré que $\mathrm{I}(f)$ est majoré par α lorsque σ appartient à $\Sigma_5^c \cap \Sigma_3^c \cap \Sigma_0$. Ce qui met un point final à la démonstration du lemme 2.

5.4. *Majoration des grandes déviations lorsque* Π *est infini.* — Nous suivons le même principe de démonstration que pour le cas Π fini.

Il faut remplacer Σ_3 par l'ensemble :

$$\Sigma_3' = \left\{ \sigma \in \Sigma \text{ vérifiant} : \exists n \in \{0, \ldots, \mathrm{N}-1\} \right.$$

$$\left. \text{tel que } x_n \leqq \alpha' \text{ et } x_{n+1} - x_n \geqq \frac{\eta}{3} \right\}.$$

Remarquons que Σ_2 est inclus dans Σ_3'.

Le lemme 2, sous les mêmes conditions (signalons que la condition $\mathrm{E}' \log k_i \leqq \eta/3$ n'est plus nécessaire), s'énonce alors : $\Sigma_0 \cap \Sigma_1$ est inclus dans $\Sigma_3' \cap \Sigma_4$ dès que ε appartient à $]0, \mathrm{E}']$. Et on doit juste remplacer dans le lemme 3 Γ_3 par $\Gamma_3' = \{\omega \in \Omega, (\mathrm{X}_n(\omega), n \in \{0, \ldots, \mathrm{N}\}) \in \Sigma_3'\}$.

La démonstration de l'alinéa (i) du lemme 3 utilise $a^{3(\alpha-\eta)/\eta}$ comme minorant de $h_x(a)$ (et 1 comme minorant de $e^{x/\varepsilon}$).

Dans le lemme 2 (8) et sa preuve ne changent pas. Dans (9) il faut remplacer Σ_3 par Σ_3'.

Pour définir la fonction f on remplace alors (C3) et (C3′) par :

$$(\mathrm{C3''}) \quad -\infty < x_n \leqq x_{n+1} < \alpha' \quad \Rightarrow \quad f(t) = f(n\varepsilon) + \frac{t - n\varepsilon}{\varepsilon}(x_{n+1} - x_n).$$

Soulignons que l'on a encore $\mathrm{I}(f) < +\infty$ et précisons les majorations qui changent. Sous (C3″) $|f_\sigma(t) - f(t)|$ se majore par $u_n + \eta/3$ dès que σ appartient à $\Sigma_3'^c$. Puisque Π est infini et $\mathrm{I}(f)$ est fini remarquons que f^*

est égal à f. Le restant est alors simple (on conserve la même partition $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}$).

Nous en avons ainsi terminé avec la preuve de la majoration des grandes déviations.

6. PREUVE DE LA MINORATION DES GRANDES DÉVIATIONS

Le théorème 2 énonce la minoration des grandes déviations pour les boules de $\mathcal{T}$. Observons que cette minoration est triviale pour les boules centrées en f vérifiant $\mathrm{I}(f)$ est égal à $+\infty$. Fixons T et y dans $]0, +\infty[$. Supposons vérifiées les hypothèses du théorème 2.

6.1. *Principe de la démonstration.* — N est toujours l'entier vérifiant: $(\mathrm{N}-1)\varepsilon<\mathrm{T}\leqq \mathrm{N}\varepsilon$. Nous dirons qu'une fonction f de $\mathcal{D}$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux si il existe un partage de $[0, \mathrm{T}_f] \cap [0, \mathrm{T}]$, fini et formé d'intervalles d'intérieurs non vides, tel que f est $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de chacun de ces intervalles, et tel que, aux bords droit et gauche de chacun de ces intervalles, f et f' admettent des limites à gauche, respectivement à droite, qui sont finies. Notons $\mathcal{B}$ le sous-ensemble de $\mathcal{D}$ constitué des fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

La preuve du théorème 2 se déduit de deux lemmes que nous énonçons maintenant. Le premier lemme dit que pour prouver le théorème 2 il suffit de considérer des boules centrées sur un élément de $\mathcal{B}$. Le second lemme permet d'obtenir la minoration de la probabilité que Y^ε appartienne à de telles boules.

LEMME 4. — *Quel que soit* η *dans* $]0, +\infty[$ *et* f *dans* $\mathcal{D}$ *vérifiant* $\mathrm{I}(f)< +\infty$ *il existe* g *dans* $\mathcal{B}$ *vérifiant*:

$$d_{\mathcal{U}}(f, g)\leqq\eta \qquad et \qquad |\mathrm{I}(f)-\mathrm{I}(g)|\leqq\eta.$$

LEMME 5. — *Supposons vérifiées les hypothèses du théorème* 2. *Soit* ρ *dans* $]0, +\infty[$ *et* f *dans* $\mathcal{B}$ *telle que* $\mathrm{I}(f)$ *est fini. Alors il existe* E′ *et* B *dans* $]0, +\infty[$ *vérifiant, pour tout* ε *de* $]0, \mathrm{E}']$, $\mathcal{P}_\varepsilon$ *presque sûrement sur* Γ_0:

$$\mathcal{P}_\varepsilon(\max_{n\in\{0, \dots, \mathrm{N}\}} |\mathrm{X}_n^\varepsilon-f(n\varepsilon)|<\rho / \mathrm{X}_0^\varepsilon)\geqq \exp[-e^{(\mathrm{I}(f)+\rho)/\varepsilon}].$$

Les preuves (techniques) des lemmes 4 et 5 sont données après la démonstration du théorème 2.

6.2. *Preuve de la minoration à partir des lemmes* 4 *et* 5. — Grâce au lemme 4 il suffit de déduire du lemme 5 la minoration des grandes déviations pour les boules de $\mathcal{T}$ centrées sur un élément de $\mathcal{B}$. Il faut distinguer le cas où la topologie sur $\mathcal{D}$ est $\mathcal{S}$ de celui où la topologie est $\mathscr{U}$. Nous ne donnons la démonstration que pour $\mathscr{S}$, celle pour $\mathscr{U}$ étant semblable et plus simple.

Supposons donc k_i nul ou k_s infini. Fixons ρ dans $]0, +\infty[$ et f dans $\mathscr{B}$ telle que $I(f)$ est fini. Nous procédons de la manière suivante. Nous utilisons un partage de $[0, T_f]$ en intervalles sur lesquels f est $\mathscr{C}^1$, la topologie de Skorokhod nous permet (par changement de temps) de faire coïncider les bornes de ce partage avec des sauts du processus Y^ε, nous déduisons alors du lemme 5 la minoration des grandes déviations. Pour effectuer ce programme nous avons besoin de quelques notations.

Soit $s_0 = 0 < s_1 < \ldots < s_k = \min(T_f, f)$ une suite pour laquelle f est $\mathscr{C}^1$ sur les $]s_i, s_{i+1}[$. Notons :

$$q = \begin{cases} k & \text{si } s_k = T, \\ k+1 & \text{si } s_k < T; \end{cases} \qquad s_q = T \quad \text{lorsque } q = k+1; \qquad n_0 = 0;$$

et pour i dans $\{1, \ldots, q-1\}$ n_i l'entier vérifiant : $n_i \varepsilon \leqq s_i < (n_i + 1)\varepsilon$.

Pour ε suffisamment petit nous pouvons définir une fonction τ bijective et continue sur $[0, T]$ par :

$$\tau(t) = \frac{t - n_i \varepsilon}{(n_{i+1} - n_i)\varepsilon} s_{i+1} + \frac{n_{i+1}\varepsilon - t}{(n_{i+1} - n_i)\varepsilon} s_i \qquad \text{si } 0 \leqq i < q-1 \text{ et}$$

$$n_i \varepsilon \leqq t \leqq n_{i+1}\varepsilon;$$

$$\tau(t) = \frac{t - n_{q-1}\varepsilon}{T - n_{q-1}\varepsilon} T + \frac{T - t}{T - n_{q-1}\varepsilon} s_{q-1} \qquad \text{si } n_{q-1}\varepsilon \leqq t \leqq T.$$

Pour ε petit et t, t_1, t_2 dans $[0, T]$ τ vérifie les inégalités :

$$|\tau(t) - t| \leqq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \left|\log \frac{\tau(t_1) - \tau(t_2)}{t_1 - t_2}\right| \leqq C\varepsilon$$

où

$$C = \frac{2}{\min(s_{i+1} - s_i, 0 \leqq i < q)}.$$

Nous en déduisons que les inégalités suivantes sont vraies dès que ε est suffisamment petit :

pour $0 \leqq n < N$ et $n\varepsilon < t \leqq \min((n+1)\varepsilon, T)$

$$|Y_t^\varepsilon - f(\tau(t))| \leqq |X_n^\varepsilon - f(n\varepsilon)| + |f(n\varepsilon) - f(\tau(t))| \leqq |X_n^\varepsilon - f(n\varepsilon)| + C'\varepsilon$$

où

$$C' = 2\max[\sup_{]s_i, s_{i+1}[} |f^{(1)}|, i \in \{0, \ldots, k\}];$$

et (*cf.* [2])

$$d_{\mathscr{S}}(X, f) \leqq \max_{n \in \{0, \ldots, N\}} (|X_n^\varepsilon - f(n\varepsilon)|) + (1 + C + C')\varepsilon.$$

Cette dernière inégalité et le résultat du lemme 5 impliquent le résultat du théorème 2.

6.3. *Preuve du lemme* 4. – Rappelons que pour f dans $\mathscr{D}$ f_i et f_s désignent les fonctions sur $[0, T]$ définies par :

$$\forall t \in [0, T], \quad f_i(t) = f(t) - t \log k_i \qquad \text{et} \qquad f_s(t) = f(t) - t \log k_s.$$

6.3.1. *Résultat préliminaire*. – Nous déduisons le lemme 4 du lemme suivant.

LEMME 6. – *Soit* η *dans* $]0, +\infty[$ *et* f *dans* $\mathscr{D}$ *telle que* f_i *est croissante et* f_s *est décroissante. Alors il existe* g *dans* $\mathscr{B}$ *vérifiant* :

$$d_{\mathscr{U}}(f, g) \leqq \eta, \qquad g(o) = f(o), \qquad g(T) = f(T),$$

g_i *est croissante*, g_s *est décroissante et, pour tout* t *de* $[0, T[$, $g(t)$ [*resp.* $g(t^+)$] *est égal à* $f(t)$ [*resp.* $f(t^+)$] *dès que* $g(t)$ *est différent de* $g(t^+)$.

Preuve du lemme 6. – L'ensemble $\left\{ t \in [0, T[, \ |f(t) - f(t^+)| \geqq \dfrac{\eta}{4} \right\}$ contient un nombre fini d'éléments. Il suffit donc de montrer le lemme 6 pour des f de $\mathscr{D}$ vérifiant :

$$\forall t \in [0, T[, \quad f(t) \geqq 0 \qquad \text{et} \qquad |f(t) - f(t^+)| < \frac{\eta}{4}.$$

En fait, dans ce cas, nous allons trouver une fonction g vérifiant les conditions du lemme 6 et qui est $\mathscr{C}^1$ sur $[0, T]$. Pour cela nous construisons une fonction h, continue et affine par morceaux au lieu d'être $\mathscr{C}^1$, et qui satisfait aux autres conditions du lemme 6; le cas $\mathscr{C}^1$ s'en déduisant trivialement par régularisation.

Construisons h. Par compacité il existe r dans $\mathbb{N}^*$ et s_i, u_i, $0 \leqq i \leqq r$, dans $[0, T]$, vérifiant :

$$0 = s_0 < s_1 < u_0 < s_2 < \ldots < s_i < u_{i-1} < s_{i+1} < u_i < \ldots < s_r < u_{r-1} < u_r = T$$

et

$$\forall i \in \{0, \ldots, r\} \ |f(t_1) - f(t_2)| < \frac{\eta}{2} \qquad \text{si} \quad s_i < t_1, \ t_2 < u_i.$$

Définissons h par interpolation linéaire entre les points de l'ensemble $\{s_i, i \in \{0, \ldots, r\}\} \cup \{u_i, i \in \{0, \ldots, r\}\}$, $h(s_i)$ [resp. $h(u_i)$] étant égal à $f(s_i)$ [resp. $f(u_i)$] pour i dans $\{0, \ldots, r\}$.

Clairement h vérifie : $d_{\mathscr{U}}(f, h) \leqq \eta$, $h(0) = f(0)$, $h(T) = f(T)$, h_i est croissante, h_s est décroissante. Ce qui termine la preuve du lemme 6.

6.3.2. *Preuve du lemme* 4. – Fixons η dans $\mathbb{R}^{+*}$ et f dand $\mathscr{D}$ vérifiant $I(f) < +\infty$. Nous distinguons deux cas.

Cas 1. — $\max_{[0,T]} f \leqq I(f)$. Soit g une fonction de $\mathscr{B}$ associée par le lemme 6 à η et f. Clairement $I(g)$ appartient à $\mathbb{R}^+ \cup \{-\infty\}$, de plus :

$$\begin{aligned} I(g) &\leqq \max_{[0,T]} g^* \leqq \max[\max_{[0,T]} g, \max\{g^*(t), t\in[0,T[, g(t)\neq g(t^+)\}] \\ &\leqq \max[\max_{[0,T]} f+\eta, \max\{f^*(t), t\in[0,T[, f(t)\neq f(t^+)\}] \leqq I(f)+\eta. \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure dans ce cas en se rappelant que I est semi-continue inférieurement.

Cas 2. — $\max_{[0,T]} f > I(f)$. D'après le lemme 1 $\{f > I(f)\}$ est ouvert, notons θ l'ensemble de ses composantes connexes. $\left\{f > I(f) + \frac{\eta}{2}\right\}$ est recouvert par un nombre fini d'éléments de θ. Notons $[u_0, u_1[$ [avec $u_0 = u_1 = 0$ si $f(0) \leqq I(f)$] et $]u_{2i}, u_{2i+1}[$, $1 \leqq i \leqq r$, ces éléments. Notons $u_{2r+2} = T$. On peut toujours supposer que :

$$0 \leqq u_1 < u_2 < u_3 < \ldots < u_{2r} < u_{2r+1} \leqq T.$$

Sur tous les $]u_{2i}, u_{2i+1}]$ nous prenons g égale à f, et sur tous les $[u_{2i-1}, u_{2i}]$ nous complétons en utilisant le lemme 6 avec $\eta/2$. Clairement $I(g)$ appartient à $\mathbb{R}^+ \cup \{-\infty\}$, de plus grâce au lemme 1 :

$$\begin{aligned} I(g) &\leqq \max[I(f), g^*(0), \max(\max_{]u_{2i-1}, u_{2i}[} g^*, 1 \leqq i \leqq r+1)] \\ &\leqq \max[I(f), \max(\max_{]u_{2i-1}, u_{2i}[} g, 1 \leqq i \leqq r+1), \\ &\qquad \max\{g^*(t), t\in[0,T[, g(t)\neq g(t^+)\}] \\ &\leqq I(f) + \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = I(f) + \eta. \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure dans ce cas aussi et termine la preuve du lemme 4.

6.4. *Preuve de la minoration pour les boules centrées sur un élément de* $\mathscr{B}$. — Nous montrons ici le lemme 5. Fixons ρ dans $]0, +\infty[$ et f dans $\mathscr{B}$ telle que $I(f)$ est fini.

6.4.1. *Principe de la démonstration.* — Nous construisons par récurrence des voisinages des $f(n\varepsilon)$ et nous minorons les probabilités que X_n^ε appartienne à ces voisinages.

Notons :

$$\chi = \max_{[0, \min(T_f, T)]} f + \frac{\rho}{6};$$

$$\nu_0 = \max_{[0,\chi]} |\mu|, \qquad \nu_1 = \max_{[0,\chi]} |\mu^{(1)}|.$$

Soit alors A, B, E″ vérifiant: $0<\mathrm{A}\leqq 1$, $0<\mathrm{B}\leqq 1$, $0<\mathrm{E}''\leqq 1$ et

$$\mathrm{B}\,e^{\nu_1(\mathrm{T}+1)}+(\mathrm{A}+\mathrm{E}''\nu_0\nu_1)\frac{e^{\nu_1(\mathrm{T}+1)}-1}{\nu_1}\leqq\min\left(\frac{\rho}{6},\frac{\eta_f}{4}\right),$$

où

$$\eta_f=\min\,(f(t^+)-f(t),\ t\in[0,\mathrm{T}[,\ f(t^+)>f(t))$$
$$(\eta_f=+\infty\ \text{si}\ f(t^+)\leqq f(t)\ \text{sur}\ [0,\mathrm{T}[).$$

Nous notons par récurrence:

$$\mathrm{B}_0=\mathrm{B},\qquad \mathrm{B}_{n+1}=(1+\varepsilon\nu_1)\,\mathrm{B}_n+\varepsilon\,(\mathrm{A}+\varepsilon\nu_0\nu_1);$$

et pour tout n de $\{0,\ldots,\mathrm{N}\}$:

$$x_{i,n}=f(n\varepsilon)-\mathrm{B}_n,\qquad x_{s,n}=f(n\varepsilon)+\mathrm{B}_n;$$
$$\mathscr{X}_n=[x_{i,n},x_{s,n}]\cap\mathscr{X}\quad(\mathscr{X}=\{\varepsilon\log l,\ l\in\mathbb{N}\}).$$

Clairement nous avons, pour tout ε de $]0,\mathrm{E}'']$:

$$\forall n\in\{0,\ldots,\mathrm{N}\},\quad \mathrm{B}_n\leqq\mathrm{B}\,e^{\nu_1(\mathrm{T}+1)}+(\mathrm{A}+\mathrm{E}''\nu_0\nu_1)\frac{e^{\nu_1(\mathrm{T}+1)}-1}{\nu_1}\leqq\frac{\rho}{6},$$

et, presque sûrement sur Γ_0:

$$(11)\quad \mathscr{P}_\varepsilon\Big(\max_{n\in\{0,\ldots,\mathrm{N}\}}|\mathrm{X}_n^\varepsilon-f(n\varepsilon)|<\rho/\mathrm{X}_0^\varepsilon\Big)\geqq\prod_{n=0}^{\mathrm{N}-1}\min_{x\in\mathscr{X}_n}[\mathscr{P}_\varepsilon(\mathrm{X}_{n+1}^\varepsilon\in\mathscr{X}_{n+1}/\mathrm{X}_n^\varepsilon=x)].$$

La preuve du lemme 5 se déduit de (11) et du lemme suivant.

Considérons $[u_0,u_1[$ [avec $u_0=u_1=0$ si $f(0)\leqq\mathrm{I}(f)+\rho/3$] et $]u_{2i},u_{2i+1}[$, $1\leqq i\leqq r$, des composantes connexes de $\left\{f>\mathrm{I}(f)+\frac{\rho}{3}\right\}$ dont la réunion recouvre $\left\{f>\mathrm{I}(f)+\frac{\rho}{2}\right\}$. On peut toujours supposer que:

$$0\leqq u_1<u_2<\ldots<u_{2r}<u_{2r+1}\leqq\mathrm{T}.$$

Notons:

$$\mathscr{N}_1=\{n\in\{0,\ldots,\mathrm{N}-1\},\ \exists\,i\in\{0,\ldots,r\}\ \text{vérifiant}:\ u_0\leqq n\varepsilon<u_1-\varepsilon\ \text{si}\ i=0,\ u_{2i}<n\varepsilon<u_{2i+1}-\varepsilon\ \text{sinon}\}$$

$\left(\text{si}\ \left\{f>\mathrm{I}(f)+\frac{\rho}{2}\right\}\ \text{est vide}\ \mathscr{N}_1\ \text{est vide}\right)$;

$$\mathscr{N}_2=\{n\in\{0,\ldots,\mathrm{N}-1\},\ \exists\,t\in[0,\mathrm{T}]\cap[n\varepsilon,(n+1)\varepsilon[\ \text{vérifiant}\ f(t^+)>f(t)\};$$

$\mathscr{N}_3$ le complémentaire dans $\{0,\ldots,\mathrm{N}-1\}$ de $\mathscr{N}_1\cup\mathscr{N}_2$;

$$\mathrm{F}_s=\sup\{f^{(1)}(t),\ t\in]0,\mathrm{T}[,\ f^{(1)}(t)\ \text{existe}\}.$$

Remarquons que $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$ est vide et que $\mathcal{N}_2$ est vide lorsque Π est infini. Remarquons aussi que F_s est fini et lorsque $I(f)$ est fini qu'il est majoré par $\log k_s$. Sous (H2)(ii) et (H2)(iii) choisissons K dans $\mathbb{N} \cap [e^{F_s}, +\infty[$ vérifiant :

$$\inf\{P_x(K),\ x \in [0, \chi]\} > 0.$$

LEMME 7. — *Sous les conditions du lemme 5 et avec les notations ci-dessus il existe* E''' *dans* $]0, +\infty[$ *vérifiant pour* ε *dans* $]0, E''']$, n *dans* $\{0, \ldots, N-1\}$ *et* x *dans* $\mathcal{X}_n$:

(i) *si n appartient à $\mathcal{N}_1$ alors :*

$$\mathcal{P}_\varepsilon(X^\varepsilon_{n+1} \in \mathcal{X}_{n+1}/X^\varepsilon_n = x) \geqq 1 - \frac{1+e^{2A}}{A^2} \max_{[0, \chi]}\left(\frac{v}{m^2}\right) e^{-(x_{i,n}/\varepsilon)};$$

(ii) *si π est fini, $\mathcal{N}_2$ n'est pas vide, n appartient à $\mathcal{N}_2$, t appartient à* $[n\varepsilon, (n+1)\varepsilon[$ *et vérifie* $f(t^+) > f(t)$, *alors :*

$$\mathcal{P}_\varepsilon(X^\varepsilon_{n+1} \in \mathcal{X}_{n+1}/X^\varepsilon_n = x) \geqq (1 - C(\varepsilon)) \exp[-e^{(f(t) + \Pi(f(t^+) - f(t)) + \rho/3)/\varepsilon}],$$

où $C(\varepsilon) = \exp(-e^{\Pi\eta_f/4\varepsilon})$;

(iii) *si n appartient à $\mathcal{N}_3$ alors :*

$$\mathcal{P}_\varepsilon(X^\varepsilon_{n+1} \in \mathcal{X}_{n+1}/X^\varepsilon_n = x) \geqq \exp[-C\, e^{x_{s,n}/\varepsilon}],$$

où

$$C = -\log[\min(\inf_{x \in [0, \chi]}(P_x(k_i)), \inf_{x \in [0, \chi]}(P_x(K)))].$$

Avant de démontrer ce lemme nous prouvons le lemme 5.

Comme pour f différente de φ lorsque ε est assez petit $\mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3$ n'est pas vide. Comme lorsque ε est assez petit nous avons uniformément pour n dans $\mathcal{N}_1$:

$$x_{i,n} > I(f) + \frac{\rho}{3} - \frac{\rho}{6} \geqq I(f) + \frac{\rho}{6} > 0.$$

Comme lorsque ε est assez petit et Π est fini nous avons uniformément pour t dans l'ensemble $\{t \in [0, T[, f(t^+) > f(t)\}$:

$$(1 - C(\varepsilon)) \exp[-e^{(f(t) + \Pi(f(t^+) - f(t)) + \rho/3)/\varepsilon}] \geqq \exp[-e^{(f(t) + \Pi(f(t^+) - f(t)) + \rho/2)/\varepsilon}].$$

Enfin comme lorsque ε est assez petit nous avons uniformément pour n dans $\mathcal{N}_3$:

$$x_{s,n} \leqq f(n\varepsilon) + \frac{\rho}{6} \leqq I(f) + \frac{2\rho}{3} + \varepsilon F \leqq I(f) + \frac{5\rho}{6},$$

où

$$F = \sup\{|f^{(1)}(t)|,\ t \in]0, T[, f^{(1)}(t) \text{ existe}\}.$$

Il résulte de (11) et du lemme 7 qu'il existe E' dans $]0, +\infty[$ vérifiant, pour ε dans $]0, E']$, presque sûrement sur Γ_0 :

$$\mathscr{P}_\varepsilon\Big(\max_{n\in\{0,\ldots,N\}} |X_n^\varepsilon - f(n\varepsilon)| < \rho / X_0^\varepsilon\Big) \geqq \exp\left[-\frac{(T+1)}{\varepsilon} C\, e^{(I(f)+5\rho/6)/\varepsilon}\right]$$
$$\geqq \exp\left[-e^{(I(f)+\rho)/\varepsilon}\right].$$

Ce qui termine la preuve du lemme 5.

6.4.2. *Preuve du lemme* 7. — (i) Nous écrivons pour n dans $\mathscr{N}_1$ et x dans $\mathscr{X}_n$

$$\mathscr{P}_\varepsilon(X_{n+1}^\varepsilon \notin \mathscr{X}_{n+1} / X_n^\varepsilon = x) = \mathscr{P}_\varepsilon(Z_{n+1} > e^{x_{s,n+1}/\varepsilon} / X_n^\varepsilon = x)$$
$$+ \mathscr{P}_\varepsilon(Z_{n+1} < e^{x_{i,n+1}/\varepsilon} / X_n^\varepsilon = x)$$
$$\leqq \mathscr{P}_\varepsilon(Z_{n+1} > Z_n m(x) e^{A} / X_n^\varepsilon = x) + \mathscr{P}_\varepsilon(Z_{n+1} < Z_n m(x) e^{-A} / X_n^\varepsilon = x)$$

[puisque, par le choix de $B_{n+1} = (1+\varepsilon\nu_1) B_n + \varepsilon(A + \varepsilon\nu_0\nu_1)$, nous avons :

$$x_{s,n+1} = x + \varepsilon \log m(x) + \varepsilon A + B_{n+1} + f(n\varepsilon) - x - \varepsilon[\log m(x)$$
$$- \log m(f(n\varepsilon))] - \varepsilon A + [f((n+1)\varepsilon) - f(n\varepsilon) - \varepsilon \log m(f(n\varepsilon))]$$
$$\geqq x + \varepsilon \log m(x) + \varepsilon A,$$

et de même : $x_{i,n+1} \leqq x + \varepsilon \log m(x) - \varepsilon A$]. Nous concluons alors en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebyschev comme dans la démonstration de la proposition 1 (*cf.* [13]).

(ii) Π est fini et $\mathscr{N}_2$ n'est pas vide. Pour n dans $\mathscr{N}_2$ et x dans $\mathscr{X}_n$ nous partons de l'égalité :

$$\mathscr{P}_\varepsilon(X_{n+1} \in \mathscr{X}_{n+1} / X_n^\varepsilon = x) = (1-R)\, \mathscr{P}_\varepsilon(Z_{n+1} \geqq e^{x_{i,n+1}/\varepsilon} / X_n^\varepsilon = x),$$

où

$$R = \frac{\mathscr{P}_\varepsilon(Z_{n+1} \geqq e^{x_{s,n+1}/\varepsilon} / X_n^\varepsilon = x)}{\mathscr{P}_\varepsilon(Z_{n+1} \geqq e^{x_{i,n+1}/\varepsilon} / X_n^\varepsilon = x)}.$$

Remarquons que pour ε inférieur à E'' et à la quantité :

$$\frac{1}{2}\min(t_2 - t_1,\ t_1 < t_2,\ t_1 \text{ et } t_2 \in \{0, T\} \cup \{t \in [0, T[, f(t^+) \neq f(t)\});$$

nous avons les inégalités :

$$\frac{x_{i,n+1} - x}{\varepsilon} \geqq \frac{f(t^+) - f(t)}{\varepsilon} + \frac{f((n+1)\varepsilon) - f(t^+)}{\varepsilon} + \frac{f(t) - f(n\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{B_{n+1} + B_n}{\varepsilon}$$
$$\geqq \frac{f(t^+) - f(t)}{\varepsilon} + F_i - \frac{\eta_f}{2\varepsilon} \geqq \frac{\eta_f}{2\varepsilon} + F_i,$$

où $F_i = \inf\{f^{(1)}(t),\ t \in]0, T[,\ f^{(1)}(t) \text{ existe}\}$;

$$\frac{x_{i,n+1}-x}{\varepsilon} \leqq \frac{f(t^+)-f(t)}{\varepsilon} + \frac{f((n+1)\varepsilon)-f(t^+)}{\varepsilon} + \frac{f(t)-f(n\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{B_{n+1}-B_n}{\varepsilon} \leqq \frac{f(t^+)-f(t)}{\varepsilon} + F_s;$$

$$\frac{x_{s,n+1}-x}{\varepsilon} \geqq \frac{\eta_f}{\varepsilon} + F_i;$$

$$\frac{x}{\varepsilon} \leqq \frac{f(t)+\rho/6}{\varepsilon} + \max(F_i, 0).$$

D'un autre côté, d'après (H2) (iv) et pour δ dans $]0, +\infty[$, nous avons dès que a est assez grand et uniformément en x dans $[0, \chi]$ les inégalités:

$$h_x(a) \geqq a^{\Pi(1-\delta)} \quad \text{et} \quad H_x(a) \leqq a^{\Pi(1+\delta)}.$$

En prenant δ suffisamment petit il en résulte, pour ε assez petit, uniformément en n dans $\mathcal{N}_2$ et x dans $\mathcal{X}_n$, que nous avons d'une part la majoration:

$$\begin{aligned} -\log \mathscr{P}_\varepsilon(Z_{n+1} \geqq e^{x_{i,n+1}/\varepsilon} / X_n^\varepsilon = x) &\leqq e^{x/\varepsilon} H_x(e^{(x_{i,n+1}-x)/\varepsilon}) \leqq e^{(x+\Pi(1+\delta)(x_{i,n+1}-x))/\varepsilon} \\ &\leqq \exp\left[\frac{f(t)+\Pi(f(t^+)-f(t))}{\varepsilon} + \frac{\rho/6+\Pi\delta(f(t^+)-f(t))}{\varepsilon} + \Pi(1+\delta)F_s + \max(F_i, 0)\right] \\ &\leqq \exp\left[\frac{f(t)+\Pi(f(t^+)-f(t))+\rho/3}{\varepsilon}\right], \end{aligned}$$

et d'autre part la minoration:

$$\begin{aligned} -\log R &\geqq e^{x/\varepsilon}[h_x(e^{(x_{s,n+1}-x)/\varepsilon}) - H_x(e^{(x_{i,n+1}-x)/\varepsilon})] \\ &\geqq e^{x/\varepsilon}[e^{\Pi(1-\delta)(x_{s,n+1}-x)/\varepsilon} - e^{\Pi(1+\delta)(x_{i,n+1}-x)/\varepsilon}] \\ &= e^{(x+\Pi(1-\delta)(x_{s,n+1}-x))/\varepsilon}[1 - e^{(2\Pi/\varepsilon)[\delta(x_{i,n+1}-x)-(1-\delta)B_{n+1}]}] \\ &\geqq e^{(\Pi/2)((\eta_f/\varepsilon)+F_i)}(1-e^{-\Pi B/\varepsilon}) \geqq e^{\Pi\eta_f/4\varepsilon} \end{aligned}$$

$\Bigg($puisque:

$$\delta(x_{i,n+1}-x)-(1-\delta)B_{n+1} \leqq \delta\left[f(t^+)-f(t)+\varepsilon F_s + \frac{\rho}{6}\right] - B \leqq -\frac{B}{2}\Bigg).$$

Ce qui termine la preuve de (ii).

(iii) Soit n dans $\mathcal{N}_3$. Deux cas se présentent. Supposons $f((n+1)\varepsilon)$ égal à $-\infty$. Nous avons alors les minorations pour x dans $\mathcal{X}_n$:

$$\mathcal{P}_\varepsilon(X_{n+1}^\varepsilon \in \mathcal{X}_{n+1}/X_n^\varepsilon = x) \geqq \exp[e^{x/\varepsilon} \log P_x(0)]$$
$$\geqq \exp[e^{x_{s,n}/\varepsilon} \log(\inf_{x\in[0,\chi]} (P_x(0)))].$$

Ce qui prouve (iii) dans ce cas.

Supposons $f((n+1)\varepsilon)$ positif. Nous avons alors:

$$e^{x_{s,n+1}/\varepsilon} - e^{x_{i,n+1}/\varepsilon} = 2\, e^{f((n+1)\varepsilon)/\varepsilon} \operatorname{sh}\left(\frac{B_{n+1}}{\varepsilon}\right) \geqq 2 \operatorname{sh}\left(\frac{B}{\varepsilon}\right),$$

et, en particulier, dés que ε est inférieur à $B/\operatorname{Argsh}\left(\frac{K-k_i}{2}\right)$:

$$e^{x_{s,n+1}/\varepsilon} - e^{x_{i,n+1}/\varepsilon} \geqq K - k_i.$$

D'autre part, comme les inégalités suivantes sont vraies dès que ε est assez petit, uniformément pour n dans $\mathcal{N}_3$ et x dans $\mathcal{X}_n$:

$$e^{(x_{s,n+1}-x)/\varepsilon} \geqq e^{(f((n+1)\varepsilon)-f(n\varepsilon))/\varepsilon + (B_{n+1}-B_n)/\varepsilon} \geqq e^{F_i} \geqq k_i;$$
$$e^{(x_{i,n+1}-x)/\varepsilon} \leqq e^{(f((n+1)\varepsilon)-f(n\varepsilon))/\varepsilon - (B_{n+1}-B_n)/\varepsilon} \leqq e^{F_s} \leqq K;$$

nous obtenons la minoration, pour ε suffisamment petit, uniformément en n dans $\mathcal{N}_3$ et x dans $\mathcal{X}_n$:

$$\mathcal{P}_\varepsilon(X_{n+1}^\varepsilon \in \mathcal{X}_{n+1}/X_n^\varepsilon = x) \geqq \exp[e^{x/\varepsilon} \log[\min(P_x(k_i), P_x(K))]].$$

On en déduit la minoration de (iii). Ce qui met un point final à la preuve du lemme 7 et à celle de la minoration des grandes déviations.

Appendice: comportement en $+\infty$ de la transformée de Cramer et de la queue d'une distribution sur $\mathbb{R}^+$.

Nous énonçons et démontrons trois résultats qui réunis prouvent la proposition 3.

Soit P une loi sur $\mathbb{R}^+$. Notons F sa fonction de répartition, L le logarithme de sa transformée de Laplace, h sa transformée de Cramer, H la fonction $-\log(1-F)$, et θ l'abscisse de convergence de L. Nous supposons θ strictement positif.

Notons encore:

$$L_i = \liminf_{a\to+\infty} \frac{\log H(a)}{\log a}, \qquad L_s = \limsup_{a\to+\infty} \frac{\log H(a)}{\log a};$$
$$l_i = \liminf_{a\to+\infty} \frac{\log h(a)}{\log a}, \qquad l_s = \limsup_{a\to+\infty} \frac{\log h(a)}{\log a}.$$

Commençons par indiquer que, dans un voisinage de $+\infty$, l'inégalité de Markov s'écrit: $h \leqq H$, et que l'inégalité: $h(a) \geqq ab - L(b)$, pour a dans $\mathbb{R}$ et b dans $[0, \theta[$, implique la minoration: $l_i \geqq 1$.

Résultat 1. – $L_i \leqq l_i$.

Preuve. – Il suffit de considérer le cas L_i strictement supérieur à 1. Soit donc A dans $]0, +\infty[$ et C dans $]1, +\infty[$ vérifiant : $H(a) \geqq a^C$ dès que $a \geqq A$. Appelons μ la mesure sur $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\mu([0, A[) = 0, \qquad \mu(A) = 1, \qquad \mu(]a, +\infty[) = e^{-a^C} \quad \text{si } a \geqq A.$$

Notons L_μ le logarithme de sa transformée de Laplace. Le théorème taubérien de Kasahara ([3]) donne l'équivalent suivant pour $L_\mu(b)$ au voisinage de $+\infty$: $(C-1)\left(\dfrac{b}{C}\right)^{C/(C-1)}$

Nous en retenons qu'il existe D et D′ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\forall b \in \mathbb{R}^+, \quad L_\mu(b) \leqq D\, b^{C/(C-1)} + D'.$$

Or nous avons les inégalités :

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \quad 1 - F(a) \leqq \mu(]a, +\infty[), \qquad \text{et}, \qquad \forall b \in \mathbb{R}^+, \quad L(b) \leqq L_\mu(b)$$

$\Bigg($ par intégration par parties nous avons :

$$e^{L(b)} = 1 + b \int_0^{+\infty} e^{bx}(1 - F(x))\, dx \leqq 1 + b \int_0^{+\infty} e^{bx} \mu(]x, +\infty[)\, dx$$
$$= 1 - \mu(\mathbb{R}^+) + e^{L_\mu(b)} \leqq e^{L_\mu(b)} \Bigg).$$

Nous en déduisons, pour a plus grand que L′ (0), la minoration :

$$h(a) \geqq \sup(ab - L_\mu(b),\ b \in]0, \theta[)$$
$$\geqq \sup(ab - D\, b^{C/(C-1)} - D',\ b \in]0, \theta[) = \frac{1}{C}\left(\frac{C-1}{DC}\right)^{C-1} a^C - D'.$$

l_i est donc minorée par C. Ce qui termine la preuve du résultat 1.

Résultat 2. – Si θ est fini alors $l_i = l_s = 1$.

Preuve. – Il suffit de remarquer que si $\lim\limits_{\substack{b \to \theta \\ b < \theta}} \dfrac{dL}{db}(b)$ est finie, alors, à partir d'un certain rang, $h(a)$ est égal à $a\theta - L(\theta)$. Et que, sinon, nous avons les égalités :

$$\lim_{a \to +\infty} \frac{h(a)}{a} = \lim_{a \to +\infty} h'(a) = \theta \qquad \text{et} \qquad \frac{\log h(a)}{\log a} = 1 + \frac{\log(h(a)/a)}{\log a}.$$

Résultat 3. — Si H est à variation régulière d'ordre β $\Big($*i. e.* si

$$\mathrm{H}(a)=a^{\beta}\,\mathrm{G}(a) \text{ et } \forall\, b\in]0,+\infty[\ \lim_{a\to+\infty}\frac{\mathrm{G}(ab)}{\mathrm{G}(a)}=1\Big)$$

alors $\mathrm{L}_i=\mathrm{L}_s=\beta\geqq 1$.

Preuve. — La fonction G est à variation lente, elle vérifie donc l'identité (*cf.* [3]):

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{\log \mathrm{G}(a)}{\log a}=0.$$

Terminons en donnant des exemples de lois pour lesquelles L_i et L_s (resp. l_i et l_s) sont distinctes. Nous énonçons d'abord un résultat trivial:

Résultat 4. — Soit $(a_n,\, n\in\mathbb{N})$ une suite de réels positifs qui est croissante et de limite $+\infty$, soit φ une fonction croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant:

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \varphi(a_{n+1})\geqq\varphi(a_n)+1.$$

Notons alors C la quantité $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\varphi(a_n)}$ et définissons la loi P par:

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{P}(a_n)=\frac{1}{\mathrm{C}}e^{-\varphi(a_n)}.$$

Dans ce cas nous avons les égalités:

$$\mathrm{L}_s=\limsup_{n\to+\infty}\frac{\log\varphi(a_n)}{\log a_{n-1}},\qquad \mathrm{L}_i=\liminf_{n\to+\infty}\frac{\log\varphi(a_n)}{\log a_n}.$$

Citons deux exemples.

Exemple 1. — $a_n=a_0^{n!}$, $a_0>1$, $\varphi(x)=\theta x$. Alors l'abscisse de convergence de P est finie et $\mathrm{L}_i=1$, $\mathrm{L}_s=+\infty$.

Exemple 2. — $a_n=a_0^{n!}$, $a_0>1$, $\varphi(x)=x\log x$. Alors l'abscisse de convergence de P est infinie, $\mathrm{L}_i=l_i=1$, $\mathrm{L}_s=+\infty$ et (plus difficilement) $l_s=+\infty$.

RÉFÉRENCES

[1] R. AZENCOTT et G. RUGET, Mélanges d'équations différentielles et grands écarts à la loi des grands nombres, *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, 1977, **38**, p. 1-54.

[2] P. BILLINGSLEY, *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York, 1968.

[3] N. H. BINGHAM, C. M. GOLDIE et J. L. TEUGELS, *Regular Variation*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.

[4] M. BRONIATOWSKI, Grandes, très grandes et petites déviations pour des suites de variables aléatoires réelles indépendantes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1987, **305**, p. 627-630.

[5] H. COHN et F. C. KLEBANER, Geometric Rate of Growth in Markov Chains with Applications to Population-Size-Dependent Models with Dependent Offspring, *Stochastic Anal. Appl.*, 1986, **4**, p. 283-307.

[6] P. DEHEUVELS, L. DEVROYE et J. LYNCH, Exact Convergence Rate in the Limit Theorems of Erdös Rényi and Shepp, *Ann. Proba.*, 1986, **14**, p. 209-223.

[7] W. FELLER, Diffusion Processes in Genetics, Proc. 2nd Berkeley Symp., *Math. Stat. Proba.*, 1951, Univ. of California Press, Berkeley, p. 227-246.

[8] A. GRIMVALL, On the Convergence of Sequences of Branching Processes, *Ann. Proba.*, 1974, **2**, p. 1027-1045.

[9] C. C. HEYDE et B. M. BROWN, An Invariance Principle and Some Convergence Rate Results for Branching Processes, *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, 1971, **20**, p. 271-278.

[10] G. KELLER, G. KERSTING et U. RÖSLER, On the Asymptotic Behaviour of Discrete Time Stochastic Growth Processes, *Ann. Proba.*, 1987, **15**, p. 303-343.

[11] P. KUSTER, Asymptotic Growth of Controlled Galton-Watson Processes, *Ann. Proba.*, 1985, **13**, p. 1157-1178.

[12] J. LAMPERTI, The Limit of a Sequence of Branching Processes, *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, 1967, **7**, p. 271-288.

[13] D. PIERRE-LOTI-VIAUD, Processus de Galton-Watson dépendant de l'effectif de la population, *Thèse d'état*, 1990, Université Paris-XI, Orsay.

[14] G. RUGET, Large Deviations and More or Less Rare Events in Population Dynamics, *Lect. Notes Biomath.*, 1981, **49**, p. 388-400.

(*Manuscrit reçu le* 4 *juillet* 1989;
révisé le 27 *juillet* 1990.)