ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

M. BABILLOT

Comportement asymptotique du mouvement brownien sur une variété homogène à courbure négative ou nulle

Annales de l'I. H. P., section B, tome 27, nº 1 (1991), p. 61-90
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1991__27_1_61_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 27, n° 1, 1991, p. 61-90. *Probabilités et Statistiques*

Comportement asymptotique du mouvement brownien sur une variété homogène à courbure négative ou nulle

par

M. BABILLOT

Université Paris-VII, U.F.R. de Mathématiques,
tour n° 45-55, 5ᵉ étage, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France

RÉSUMÉ. — Une variété homogène simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle peut s'identifier à un groupe de Lie résoluble produit semi-direct entre un groupe abélien A isomorphe à $\mathbb{R}^d$ et un groupe nilpotent N. Si la variété n'admet pas de facteur euclidien dans sa décomposition de De Rham, nous étudions la disposition géométrique des poids de la représentation adjointe de A sur N, et nous montrons en particulier que, comme dans un espace symétrique, la somme de ces poids se trouve à l'intérieur d'une chambre de Weyl.

Le comportement asymptotique du mouvement brownien se déduit alors de ce résultat par des arguments classiques et donne une paramétrisation des points de sortie à l'infini par les seuls éléments de N.

Mots clés : Mouvement brownien, variétés homogènes, groupes résolubles.

ABSTRACT. — An homogeneous riemannian manifold M with non positive sectional curvature is a solvable Lie group which is the skew-product of an abelian group A isomorphic to $\mathbb{R}^d$ and a nilpotent Lie group N. Under the assumption of no euclidian factor in the De Rham decomposition of M, we study the geometrical configuration of the weights of the adjoint representation of A on N, from which we deduce that the sum of

Classification A.M.S. : 60 B 15, 53 C 30.

the weights belongs to the interior of some Weyl chamber, like in the symmetric case.

This result, with classical arguments, gives the asymptotic behaviour of Brownian Motion on M, and the fact that the exit boundary can be identified with N.

Key words : Brownian Motion, homogeneous manifolds, solvable groups.

INTRODUCTION

L'étude d'un mouvement brownien sur une variété riemannienne simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle a fait l'objet de nombreuses approches: sa transience en dimension supérieure à 3 a été montrée en [1], et des estimations de temps de sortie de boules *en courbure pincée*, reposant sur des théorèmes de comparaison en géométrie riemannienne ([7], [18]) permettent d'estimer la vitesse de fuite à l'infini du mouvement brownien (en toute dimension dans ce cadre): la distance à un point donné du processus à l'instant t est asymptotiquement égale à αt avec $\alpha > 0$. Toujours en courbure pincée, on peut également montrer la convergence de la composante angulaire du mouvement brownien ([19], [21]). Récemment, [16], ces mêmes résultats ont été obtenus en autorisant un peu de courbure nulle, mais avec des hypothèses de géométrie bornée et de divergence exponentielle des géodésiques. A notre connaissance, hormis le cas des espaces riemanniens symétriques de type non compact [17], le comportement asymptotique du mouvement brownien n'a pas encore été étudié si, par exemple, il existe des sous espaces plats dans la variété. C'est en se restreignant aux variétés *homogènes* simplement connexes que nous avons pu illustrer ici, par des méthodes de théorie des groupes, le principe heuristique suivant: «les trajectoires du Brownien prennent les directions de courbure maximale (en valeur absolue)».

Avant de décrire plus précisément les résultats que nous obtenons, il convient de rappeler la structure des variétés riemanniennes simplement connexes, homogènes, à courbure sectionnelle négative ou nulle telle qu'elle a été décrite dans [3]. Une telle variété M peut toujours être vue comme espace homogène de son groupe d'isométries G, soit $M = G/K$ où le groupe K, stabilisateur d'un point de M fixé, est compact maximal par le théorème de Cartan. Lorsque M est un espace riemannien symétrique non compact, son groupe d'isométries G est un groupe de Lie semi-simple, et une décomposition d'Iwasawa $G = NAK$ de G permet d'identifier isométriquement $M = G/K$ au groupe résoluble $S = NA$. Rappelons que A est un groupe abélien, isomorphe à $\mathbb{R}^d$ si l'espace symétrique est de rang d, et N est un groupe nilpotent simplement connexe, distingué dans S, sur lequel l'action de A par automorphismes intérieurs est semi-simple. Les poids de cette représentation sont les racines positives de l'algèbre de Lie de G, et de leur disposition géométrique extrêmement rigide, nous retiendrons uniquement le fait qu'elles se situent dans un demi-espace ouvert. Ceci se traduit par l'existence d'un élément contractant de A sur N, à savoir un élément a tel que $a^k n a^{-k}$ converge vers l'identité lorsque k tend vers l'infini, pour tout n de N.

Il est remarquable que, de fait, toute variété riemannienne simplement connexe, homogène, à courbure sectionnelle négative ou nulle possède une structure similaire: il existe un groupe résoluble S agissant simplement transitivement sur M et ce groupe se décompose comme précédemment en produit semi-direct $S = N \rtimes A$. L'action de A sur N n'est plus nécessairement semi-simple (bien qu'elle n'en soit pas très éloignée, comme on le verra), et bien sûr, l'absence d'un groupe de rotations rend la géométrie des racines beaucoup plus libre.

Cependant, si la variété n'admet pas de facteur euclidien dans sa décomposition de De Rham, ces racines se situent encore dans un demi-espace ouvert de l'algèbre de Lie de A, et en conséquence, il existe encore un élément contractant. Hormis une liste de conditions structurelles détaillées dans [3], ces variétés sont encore mal connues, et l'on ne sait pas (sauf en rang supérieur ou égal à 2 et moyennant l'existence d'un quotient de volume fini ([3], *voir* aussi [5] dans un cadre non homogène) dans quelle mesure elles se réduisent aux seuls espaces symétriques.

Soit maintenant un Brownien sur un tel groupe résoluble $S = NA$. Nous montrons, généralisant ainsi l'étude de Malliavin [17] sur les espaces riemanniens symétriques (*cf.* aussi [22]), que sa composante sur A est un brownien sur $\mathbb{R}^d$ avec drift constant m non nul, et tend donc à l'infini dans une direction bien précise, tandis que sa composante nilpotente converge presque sûrement. Le Brownien est donc transient avec vitesse de fuite exponentielle, et ses directions de fuite à l'infini sont paramétrées par les seuls éléments de N. Ces directions apparaissent donc bien orthogonales aux directions contenues dans A, de courbure nulle. Du point de vue géométrique, c'est le comportement en coordonnées horosphériques que l'on décrit ainsi.

Ce résultat repose sur l'étude, dans l'algèbre de Lie de A, du drift m. Il n'est pas difficile de voir dans un premier temps que $-m$ est la somme des racines, et par conséquent est non nul. Dans un second temps, on verra que le produit scalaire de m avec toute racine est strictement négatif, ce qui signifie que m correspond dans A à un élément contractant. C'est cette propriété fondamentale de m qui assure la convergence de la composante nilpotente du Brownien. Signalons que le rôle des éléments contractants a été mis en lumière par Furstenberg lors de l'étude des marches aléatoires sur les groupes de Lie semi-simples ([11], [12]), et développé par Guivarc'h et Raugi [14] en vue de théorèmes de convergence analogues à ceux que nous obtenons ici.

La preuve que nous avons de ces résultats est donc assez technique et repose entièrement sur la structure de l'algèbre de Lie de S, muni du produit scalaire hérité de la métrique riemannienne de S. Nous regrettons de ne pas connaître de preuve plus géométrique de ces résultats, ce qui permettrait de sortir du cadre des variétés homogènes évoqué ici. Cependant, cet exemple permet peut-être de conjecturer que le comportement d'un mouvement brownien en courbure négative ou nulle (si l'on écarte les facteurs euclidiens) est similaire à son comportement en courbure strictement négative.

Je tiens à remercier P. Bougerol pour avoir maintes fois su répondre aux questions que je lui ai posées.

1. STRUCTURE D'UNE ALGÈBRE DE LIE RÉSOLUBLE À COURBURE NÉGATIVE : UN THÉORÈME SUR LA DISPOSITION DES RACINES

Cette première partie est purement algébrique : reprenant les résultats de [3], nous décrivons la structure de l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ d'un groupe résoluble portant une métrique riemannienne à courbure sectionnelle négative ou nulle. Nous rappelons d'une part la décomposition de $\mathfrak{s}$ en somme orthogonale de son algèbre dérivée $\mathfrak{n}=[\mathfrak{s},\mathfrak{s}]$ et d'une algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{a}$, et d'autre part la décomposition de $\mathfrak{n}$ en sous-espaces radiciels induite par l'action de $\mathfrak{a}$ sur $\mathfrak{n}$ par la représentation adjointe. Les formes linéaires – non nulles – sur $\mathfrak{a}$ qui trigonalisent cette action sont appelées les racines de $\mathfrak{s}$.

Le théorème que nous énonçons alors porte sur la disposition géométrique de ces racines, et a pour corollaire important le fait que la somme des racines ρ forme un angle aigu avec toute racine. On verra dans la deuxième partie, à caractère probabiliste, que ρ correspond dans $\mathfrak{a}$ à l'opposé du drift de la composante abélienne du brownien sur le groupe $S = NA$, et que cette propriété géométrique de ρ fait du drift un élément contractant. C'est de ce résultat que découle essentiellement le comportement asymptotique du Brownien.

La preuve de ce théorème se déroule en plusieurs étapes. Elle nécessite tout d'abord une description de l'action de $\mathfrak{a}$ sur $\mathfrak{n}$, et en particulier la manière dont elle diffère d'une action semi-simple. Ceci a été fait dans [3], conduisant à la notion d'opérateur quasi-normal. Un calcul de courbure conduit ensuite à la positivité d'une certaine expression algébrique qui, bien utilisée, donne une minoration du produit scalaire entre deux racines α et β en termes de normes de vecteurs appartenant aux sous-espaces radiciels associés à β, $\beta+\alpha$ et $\beta-\alpha$. C'est en sommant ce type d'inégalités que l'on obtient la positivité du produit scalaire entre α et la somme des racines appartenant à la α-chaîne de β.

Nous détaillerons le cas d'une action de $\mathfrak{a}$ uniquement semi-simple, car la preuve se simplifie notablement dans ce cadre, avant d'aborder le cas général.

1.1. Décomposition d'une algèbre de Lie résoluble à courbure négative

Notations. – Si S est un groupe de Lie résoluble simplement connexe muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche, nous notons $\mathfrak{s}$ son algèbre de Lie, et $\langle\,|\,\rangle$ le produit scalaire correspondant sur $\mathfrak{s} = T_e S$. La norme d'un vecteur tangent Z sera notée $|Z|$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ muni de ce produit scalaire sera dite à *courbure négative* si la courbure sectionnelle de la métrique riemannienne correspondante sur S est partout négative ou nulle.

Tout opérateur A sur $\mathfrak{s}$ admet un adjoint relativement à $\langle\,|\,\rangle$, noté ${}^tA$, et peut se décomposer en la somme d'un opérateur symétrique appelé *partie réelle* de A: $re(A) = 1/2\,(A + {}^tA)$, et d'un opérateur antisymétrique appelé *partie imaginaire* de A : $i(A) = 1/2\,(A - {}^tA)$.

Lorsqu'un opérateur est normal, sa partie réelle et sa partie imaginaire commutent, de sorte que l'opérateur $re(A)\,i(A)$ est antisymétrique. Généralisant cette notion, on dira qu'un opérateur est *quasi normal* si pour tout Z de $\mathfrak{s}$, $|re(A)Z|^2+2\langle re(A)Z\,|\,i(A)Z\rangle \geqq 0$. L'étude d'un opérateur quasi normal est rendue difficile par le fait que son adjoint ne l'est pas nécessairement. En particulier, un opérateur quasi normal n'est en général pas semi-simple.

Les opérateurs que nous étudierons sur $\mathfrak{s}$ sont les dérivations internes: $\operatorname{ad} X(Y)=[X, Y]$, si X et Y sont deux vecteurs de $\mathfrak{s}$. Elles envoient $\mathfrak{s}$ dans son algèbre de Lie dérivée $\mathfrak{n}=[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$, nilpotente dès que $\mathfrak{s}$ est résoluble. Les vecteurs de $\mathfrak{n}$ seront usuellement dénotés X, Y, ... tandis que les vecteurs du supplémentaire orthogonal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{s}$ seront désignés par les lettres H, ou K. Pour un tel vecteur H, on abrègera l'écriture $re(\operatorname{ad} H)$ en h et celle de $i(\operatorname{ad} H)$ en $i(H)$. L'hypothèse de courbure négative implique en particulier que pour tout H de $\mathfrak{a}$, la dérivation ad H est un opérateur quasi normal, et c'est ce fait qui différencie l'étude des variétés homogènes à courbure négative ou nulle de celle des espaces riemanniens symétriques, pour lesquels l'action de $\mathfrak{a}$ est semi-simple.

1.1.1. Le premier résultat majeur de [3] montre que le supplémentaire orthogonal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{n}$ est en fait une algèbre de Lie abélienne. On retrouve ainsi la décomposition en coordonnées d'Iwasawa d'un espace riemannien symétrique:

$$\mathfrak{s}=\mathfrak{n}\oplus\mathfrak{a}.$$

1.1.2. De manière classique, l'action d'une algèbre de Lie abélienne sur le complexifié $\mathfrak{n}^{\mathbb{C}}$ d'un espace $\mathfrak{n}$ induit une décomposition de celui-ci en sous-espaces de poids:

$$\mathfrak{n}^{\mathbb{C}}=\oplus_\lambda \mathfrak{n}_\lambda^{\mathbb{C}}$$

où, si λ est une forme linéaire complexe sur $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}_\lambda^{\mathbb{C}}$ désigne le sous-espace des vecteurs de $\mathfrak{n}^{\mathbb{C}}$ annulés par une puissance de $\operatorname{ad} H-\lambda(H)$ pour tout H de $\mathfrak{a}$.

1.1.3. Deux tels sous espaces ne sont pas nécessairement orthogonaux (pour le produit scalaire étendu à $\mathfrak{n}^{\mathbb{C}}$), mais la quasi normalité des opérateurs ad H permet de les classifier grâce à la relation d'équivalence suivante: deux poids $\lambda=\mu+i\nu$ et $\lambda'=\mu'+i\nu'$ sont dits *équivalents* si $\operatorname{Ker}\mu=\operatorname{Ker}\mu' \subset \operatorname{Ker}\nu-\nu'$. Les sous-espaces $\mathfrak{n}_\lambda^{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{n}_{\lambda'}^{\mathbb{C}}$ sont alors orthogonaux dès que λ et λ' ne sont pas équivalents, et en particulier dès que leurs parties réelles ne sont pas colinéaires.

1.1.4. On appellera ici *racine* toute forme linéaire non nulle sur $\mathfrak{a}$ intervenant comme partie réelle d'un poids λ, et on notera leur ensemble Δ. A une telle racine α correspond le sous-espace radiciel $\mathfrak{n}_\alpha$ de $\mathfrak{n}$:

$$\mathfrak{n}_\alpha = \bigoplus_{\lambda,\ \mathrm{re}\,\lambda=\alpha} (\mathfrak{n}_\lambda^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{n}_{\bar{\lambda}}^{\mathbb{C}}) \cap \mathfrak{n}.$$

On obtient ainsi la décomposition de $\mathfrak{n}$ suivante :

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_0 \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{n}_\alpha$$

où le sous-espace $\mathfrak{n}_0$ correspondant aux poids imaginaires purs est orthogonal à $\mathfrak{n}_\alpha$ pour tout α, et $\mathfrak{n}_\alpha$ et $\mathfrak{n}_\beta$ sont orthogonaux si α et β ne sont pas colinéaires.

La dimension de $\mathfrak{n}_\alpha$ sera appelée *multiplicité de la racine* α et dénotée n_α.

1.1.5. Lorsque la variété riemannienne S n'admet pas de facteur euclidien dans sa décomposition de De Rham, le facteur $\mathfrak{n}_0$ est réduit au seul vecteur nul [3], et les racines se situent toutes dans un demi espace ouvert du dual de $\mathfrak{a}$: il existe un vecteur H vérifiant $\alpha(H) < 0$ pour tout α de A. Ceci implique en particulier que si α et $c\alpha$ sont deux racines, alors le réel c est strictement positif. On fera cette hypothèse dans toute la suite de ce papier.

1.1.6. Notons enfin que l'identité de Jacobi implique $[\mathfrak{n}_\alpha, \mathfrak{n}_\beta] \subset \mathfrak{n}_{\alpha+\beta}$ et par conséquent, si X_α est un vecteur de $\mathfrak{n}_\alpha$, la dérivation $\mathrm{ad}\, X_\alpha$ envoie $\mathfrak{n}_\beta$ dans $\mathfrak{n}_{\alpha+\beta}$ tandis que son adjoint envoie $\mathfrak{n}_\beta$ dans le sous-espace $\bigoplus_{c>0} \mathfrak{n}_{c\beta-\alpha}$.

1.2. La disposition géométrique des racines

Dans le cadre d'un groupe de Lie semi-simple, les racines engendrées par deux racines quelconques α et β sont disposées suivant une configuration géométrique extrêmement rigide, à savoir, dans le cadre irréductible, les diagrammes A_2, B_2 et G_2. En particulier, si l'on considère la α-chaîne de β, c'est-à-dire l'ensemble des racines qui s'écrivent $\beta + n\alpha$ pour un entier n, on vérifie que le produit scalaire de α avec la somme des racines appartenant à la α-chaîne de β est positif ou nul, et nul dans le cas d'une chaîne complète ($\beta - \alpha$ non racine).

Par ailleurs, les sous-espaces $\mathfrak{n}_\alpha$ sont en général (algèbres de Lie complexes) de dimension 1 et $\mathfrak{n}_{\beta+k\alpha}$ est engendré par $(\mathrm{ad}\, X_\alpha)^k\, X_\beta$ si X_α et X_β

engendrent respectivement $\mathfrak{n}_\alpha$ et $\mathfrak{n}_\beta$. Ainsi, le plus grand entier $n(\alpha, \beta)$ vérifiant $\beta + n\alpha$ est racine et $\beta + (n+1)\alpha$ ne l'est plus peut aussi être défini comme le plus grand entier $k = k(\alpha, \beta)$ vérifiant $(\operatorname{ad} X_\alpha)^k X_\beta \neq 0$ et $(\operatorname{ad} X_\alpha)^{k+1} X_\beta = 0$.

Dans le cadre de variétés résolubles homogènes, les sous espaces $\mathfrak{n}_\alpha$ ne sont plus nécessairement unidimensionnels et $[\mathfrak{n}_\alpha, \mathfrak{n}_\beta]$ peut être strictement inclus dans $\mathfrak{n}_{\alpha+\beta}$, ou même réduit à $\{0\}$. Ceci nous conduit à redéfinir pour tout couple de racines α et β non colinéaires l'entier $k(\alpha, \beta)$ de la manière suivante: si X_α et X_β sont deux vecteurs non nuls de $\mathfrak{n}_\alpha$ et $\mathfrak{n}_\beta$ respectivement, on appelle $k(X_\alpha, X_\beta)$ le plus grand entier k vérifiant

$$(\operatorname{ad} X_\alpha)^k X_\beta \neq 0 \qquad \text{et} \qquad (\operatorname{ad} X_\alpha)^{k+1} X_\beta = 0,$$

et l'on pose:

$$k(\alpha, \beta) = \min_{X_\alpha \in \mathfrak{n}_\alpha,\, X_\beta \in \mathfrak{n}_\beta} k(X_\alpha, X_\beta).$$

Cet entier mesure ainsi le degré minimal de commutativité entre $\mathfrak{n}_\alpha$ et $\mathfrak{n}_\beta$. De plus, si $n(\alpha, \beta)$ désigne maintenant l'entier n pour lequel $\beta + p\alpha \in \Delta$ si $0 \leqq p \leqq n$ et $\beta + (n+1)\alpha \notin \Delta$, il est facile de voir que l'on a:

$$n(\alpha, \beta) \geqq k(X_\alpha, X_\beta) \geqq k(\alpha, \beta).$$

Signalons que l'existence d'un vecteur de $\mathfrak{n}_\alpha$ qui commute avec un vecteur de $\mathfrak{n}_\beta$ ($k(\alpha, \beta) = 0$) implique la positivité du produit scalaire $\langle \alpha \mid \beta \rangle$ ([3], p. 339). Le théorème que nous énonçons maintenant généralise cette propriété à toute valeur de $k(\alpha, \beta)$.

THÉORÈME 1. — *Soit α et β deux racines non colinéaires d'une algèbre de Lie résoluble à courbure négative ou nulle sans facteur euclidien. Soit $k(\alpha, \beta)$ le nombre qui vient de leur être associé. Alors*:

$$\langle \alpha \mid \sum_{k=0}^{k(\alpha, \beta)} \beta + k\alpha \rangle \geqq 0.$$

COROLLAIRE 1. — *Soit ρ la demi-somme des racines comptées avec leur multiplicité. Alors*:

$$\langle \alpha \mid \rho \rangle > 0 \quad \textit{pour toute racine } \alpha.$$

Preuve du corollaire. — Soit donc α une racine fixée de $\mathfrak{s}$. L'ensemble Δ des racines peut être partitionné en α-chaînes connexes, soit $\Delta = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_N$ où Δ_0 désigne l'ensemble des racines colinéaires à α, et Δ_i, $i = 1 \ldots N$, les classes d'équivalence de la relation $\simeq$:

$$\beta \simeq \beta' \quad \text{si} \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad \beta' = \beta + k\alpha,$$
$$\text{avec} \quad \beta + p\alpha \in \Delta \quad \text{si} \quad 0 \leqq p \leqq k \; (k \geqq 0), \qquad k \leqq p \leqq 0 \; (k \leqq 0).$$

Rappelons que n_γ désigne la dimension de $\mathfrak{n}_\gamma$.

Puisque

$$\langle \alpha | 2\rho \rangle = \sum_{i=0}^{N} \langle \alpha | \sum_{\gamma \in \Delta_i} n_\gamma \gamma \rangle,$$

où

$$\langle \alpha | \sum_{\gamma \in \Delta_0} n_\gamma \gamma \rangle = |\alpha|^2 \sum_{c>0} c n_{c\alpha} \quad \text{est strictement positif,}$$

il nous suffit de montrer que $\langle \alpha | \sum_{\gamma \in \Delta_i} n_\gamma \gamma \rangle$ est positif pour tout i.

Soit donc un indice i fixé et $\Delta_i = \{\beta, \beta+\alpha, \ldots, \beta+K\alpha\}$ pour une racine β. On se donne une base $\mathscr{B}_0 = \{X_j^0, j=1\ldots n_\beta\}$ de $\mathfrak{n}_\beta$, adaptée au drapeau constitué par les noyaux des itérés de $\operatorname{ad} X_{\alpha \,|\, \mathfrak{n}_\beta}$, et l'on construit par récurrence sur k une base $\mathscr{B}_k = \{X_j^k, j=1\ldots n_{\beta+k\alpha}\}$ de $\mathfrak{n}_{\beta+k\alpha}$, adaptée au drapeau associé à $\operatorname{ad} X_{\alpha \,|\, \mathfrak{n}_{\beta+k\alpha}}$, en complétant la partie libre $ad X_\alpha(\mathscr{B}_{k-1})$ privée éventuellement de ses vecteurs nuls.

Nous notons maintenant I l'ensemble des couples d'indices (k,j) tels que X_j^k n'est pas l'image d'un vecteur de $\mathscr{B}_{k-1}$ par $\operatorname{ad} X_\alpha$.

L'expression $\langle \alpha \,\Big|\, \sum_{\gamma \in \Delta_i} n_\gamma \gamma \rangle$ s'écrit encore $\langle \alpha \,\Big|\, \sum_{k=0}^{K} n_{\beta+k\alpha} \beta + k\alpha \rangle$ soit :

$$\sum_{(k,j) \in I} \langle \alpha \,\Big|\, \sum_{p=0}^{k(X_\alpha, X_j^k)} \beta + k\alpha + p\alpha \rangle.$$

Mais chaque terme de cette somme est du type $\langle \alpha \,\Big|\, \sum_{p=0}^{k(X_\alpha, X_\gamma)} \gamma + p\alpha \rangle$, clairement positif si $\langle \alpha | \gamma \rangle$ est positif. Si l'on suppose maintenant que $\langle \alpha | \gamma \rangle$ est négatif, la positivité de ce terme découle alors du théorème 1 et de la remarque suivante : la fonction de K

$$\langle \alpha \,\Big|\, \sum_{p=0}^{K} \gamma + p\alpha \rangle = (K+1)\left(\langle \alpha | \gamma \rangle + \frac{K}{2} |\alpha|^2\right)$$

est croissante à partir de l'instant $K = k(\alpha, \gamma)$ où elle est positive.

Ceci termine la preuve du corollaire.

Nous allons maintenant aborder la preuve du théorème 1.

1.3. L'action de l'algèbre abélienne $\mathfrak{a}$ sur les sous-espaces radiciels $\mathfrak{n}_\alpha$.

1.3.1. *Décomposition des dérivations* ad H, H $\in \mathfrak{s}$.

Bien que $\mathfrak{n}_\alpha$ soit stable par ad H, il ne l'est pas par son adjoint ^{t}ad H, qui lui, conserve le sous espace $\sum_{c>0} \mathfrak{n}_{c\alpha}$. Cette raison a conduit Azencott et Wilson à considérer p représentants $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des racines (toute racine est colinéaire à un α_j), et à introduire le sous-espace:

$$\mathfrak{n}_j = \sum_{c>0} \mathfrak{n}_{c\alpha_j}.$$

Sur $\mathfrak{n}_j$, ad H se décompose de la manière suivante:

$$\mathrm{adH} = \alpha_j(\mathrm{H})\,\mathrm{E} + \mathrm{J}(\mathrm{H})$$

où E est un opérateur fixe presque normal, laissant stable chaque $\mathfrak{n}_j$ ainsi que son adjoint, et dont la partie réelle e restreinte à $\mathfrak{n}_j$ est inversible sur $\mathfrak{n}_j$ ([3], p. 344), et j(H) un opérateur antisymétrique, commutant avec E et e (p. 342). On obtient ainsi:

$$h = \alpha_j(\mathrm{H})\,e \quad \text{sur } \mathfrak{n}_j.$$

1.3.2. *Les propriétés de* adH

(*a*) Dérivation: bien que adH soit une dérivation, son adjoint n'en est pas nécessairement une, non plus que sa partie réelle h. Cependant, dans [3], on trouve les relations suivantes:

$$\mathrm{E}\,[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta]/c = [\mathrm{EX}_\alpha, \mathrm{X}_\beta]/a = [\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{EX}_\beta]/b$$
$$[e\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta]/a = [\mathrm{X}_\alpha, e\mathrm{X}_\beta]/b$$

si α et β sont deux racines non colinéaires avec $\alpha = a\alpha_i$, $\beta = b\alpha_j$, $\alpha + \beta = c\alpha_k$ et si X_α et X_β sont deux vecteurs de $\mathfrak{n}_\alpha$ et $\mathfrak{n}_\beta$ respectivement.

(*b*) Quasi-normalité: on sait, et on le reverra lors des calculs de courbure, que l'opérateur adH n'est en général pas normal, mais seulement quasi-normal. Il est cependant possible de décomposer chaque sous-espace $\mathfrak{n}_j$ en somme directe orthogonale de deux sous-espaces $\mathfrak{n}_j^0$ et $\mathfrak{n}_j^1$ stables par adH, ^{t}adH et h pour tout H de $\mathfrak{s}$ et tels que ([3], p. 344):

(i) $[\mathfrak{n}_j^0, \mathfrak{n}_\beta] = \{0\}$ pour toute racine β non colinéaire à α_j;

(ii) la restriction de adH à $\mathfrak{n}_j^1$ est un opérateur normal, pour tout H.

Ainsi, le défaut de normalité de adH n'apparaît que sur des espaces qui commutent avec une grande partie de $\mathfrak{n}$. Par contre, sur les espaces $\mathfrak{n}_j^1$, on retrouve le caractère semi-simple de l'action de $\mathfrak{s}$ sur $\mathfrak{n}$ des espaces riemanniens symétriques, et plus précisément, une diagonalisation commune des adH et ^{t}adH pour tous les H de $\mathfrak{s}$ permet d'écrire:

$$h=\alpha(\mathrm{H})\,\mathrm{Id} \quad \text{sur } \mathfrak{n}_\alpha \cap \mathfrak{n}_j^1.$$

1.3.3. *Un lemme*

Les deux sous-espaces $\mathfrak{n}^0=\oplus\,\mathfrak{n}_j^0$ et $\mathfrak{n}^1=\oplus\,\mathfrak{n}_j^1$ ne sont en général pas des algèbres de Lie. Cependant le lemme qui suit met en évidence une propriété de $\mathfrak{n}_1$.

LEMME. — *Soient* X *et* Y *deux vecteurs de* $\mathfrak{n}_j$ *et* $\mathfrak{n}_k$ *respectivement, où* α_j *et* α_k *sont deux racines non colinéaires. Alors*:

$${}^t\mathrm{adX}\,\mathrm{Y}\in\mathfrak{n}^1.$$

Preuve du lemme . — Par linéarité, on peut supposer que $\mathrm{X}=\mathrm{X}_\alpha$ appartient à $\mathfrak{n}_\alpha$ et $\mathrm{Y}=\mathrm{X}_\beta$ appartient à $\mathfrak{n}_\beta$. On décompose ${}^t\mathrm{adX}_\alpha\,\mathrm{X}_\beta$ suivant $\bigoplus_{c>0}\mathfrak{n}_{c\beta-\alpha}$:

$${}^t\mathrm{adX}_\alpha\,\mathrm{X}_\beta=\sum \mathrm{X}_c.$$

Soit, pour chaque valeur de c, un représentant α_{j_c} de $c\beta-\alpha$. Observons que les racines $c\beta-\alpha$ ne peuvent être colinéaires deux à deux, et par conséquent, les α_{j_c} sont tous distincts. De plus, α n'est colinéaire avec aucun des α_{j_c}. Fixons maintenant une valeur de c, et donnons nous un vecteur quelconque X de $\mathfrak{n}_{j_c}^0$. Ce vecteur X commute donc avec X_α et par conséquent:

$$\langle {}^t\mathrm{adX}_\alpha\,\mathrm{X}_\beta \,|\, \mathrm{X}\rangle=\langle \mathrm{X}_\beta \,|\, [\mathrm{X}_\alpha,\mathrm{X}]\rangle=0.$$

Par ailleurs,

$$\langle {}^t\mathrm{adX}_\alpha\,\mathrm{X}_\beta \,|\, \mathrm{X}\rangle=\langle \textstyle\sum \mathrm{X}_d \,|\, \mathrm{X}\rangle=\langle \mathrm{X}_c \,|\, \mathrm{X}\rangle.$$

Ainsi, X_c étant orthogonal à $\mathfrak{n}_{j_c}^0$, appartient à $\mathfrak{n}_{j_c}^1$ ce qui termine la preuve du lemme.

1.4 Calculs de courbure

1.4.1. Connexion: la connexion de Levi-Cevitta ∇ sur le groupe de Lie S muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche induit sur $\mathfrak{s}=\mathrm{T}_e\mathrm{S}$, pour tout X de $\mathfrak{s}$ un opérateur antisymétrique, dénoté ∇_X, déterminé par :

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y] - \frac{1}{2}{}^t\mathrm{ad}X\,Y - \frac{1}{2}{}^t\mathrm{ad}Y\,X.$$

Observons que lorsque X appartient à $\mathfrak{n}$ et H est un vecteur de $\mathfrak{a} = \mathfrak{n}^\perp$, l'expression précédente se simplifie en :

$$\nabla_X H = -hX,$$
$$\nabla_H X = i(H)X.$$

1.4.2. Courbure : si $R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$ est le tenseur de courbure associé à ∇, l'hypothèse de courbure sectionnelle négative ou nulle se traduit par :

$$K(X, Y) = \langle R(X, Y)X \mid Y \rangle \geqq 0, \quad \text{pour tout X et tout Y de } \mathfrak{s}.$$

Cette hypothèse sera utilisée ici de la manière suivante :

$$K(X+H, Y) = K(X, Y) + 2\langle R(X, Y)H \mid Y \rangle + K(H, Y) \geqq 0$$

pour tout X de $\mathfrak{n}$, tout Y de $\mathfrak{n}$ et tout H de $\mathfrak{a}$.

Un calcul utilisant systématiquement les relations de 1.3.2 donne :

(*a*) $K(X, Y) = \langle {}^t\mathrm{ad}XX \mid {}^t\mathrm{ad}YY \rangle$

$$+ \frac{1}{2}|[X, Y]|^2 - \frac{1}{2}|{}^t\mathrm{ad}XY|^2 - \frac{1}{2}|{}^t\mathrm{ad}YX|^2$$
$$+ \frac{1}{4}|[X, Y] + {}^t\mathrm{ad}XY - {}^t\mathrm{ad}YX|^2,$$

(*b*) $2\langle R(X, Y)H \mid Y \rangle = \langle hY \mid [X, Y] + {}^t\mathrm{ad}XY - {}^t\mathrm{ad}YX \rangle$

$$+ 2\langle Y \mid h[X, Y] - [hX, Y] - [X, hY] \rangle$$

(*c*) $K(Y, H) = |hY|^2 + 2\langle hY \mid i(H)Y \rangle$.

Dans la somme de ces trois expressions, qui est donc positive, on peut mettre en évidence trois types de termes :

– un *terme principal*, symétrique en X et en Y :

$$S(X, Y) = \langle {}^t\mathrm{ad}XX \mid {}^t\mathrm{ad}YY \rangle + \frac{1}{2}|[X, Y]|^2 - \frac{1}{2}|{}^t\mathrm{ad}XY|^2 - \frac{1}{2}|{}^t\mathrm{ad}YX|^2;$$

– un *terme complémentaire* :

$$A(X, Y, H) = \frac{1}{4}|[X, Y] + {}^t\mathrm{ad}XY - {}^t\mathrm{ad}YX + 2hY|^2;$$

– *un terme résiduel* :

$$B(X, Y, H) = 2\langle Y \mid h[X, Y] - [hX, Y] - [X, hY] \rangle + 2\langle hY \mid i(H)Y \rangle.$$

1.5. Preuve du théorème dans le cas d'une action de $\mathfrak{a}$ uniquement semi-simple

Nous nous plaçons ici dans un cadre semi-simple: nous supposons que pour tout j, $\mathfrak{n}_j^0$ est réduit à $\{0\}$ (*cf.* 1.3.2 (*b*)).

1.5.1. Nous allons tout d'abord montrer que la positivité de $K(X+H, Y)$ pour tout X, Y, H implique la positivité du terme symétrique $S(X_\alpha, X_\beta)$, si X_α et X_β sont deux vecteurs de $\mathfrak{n}_\alpha$ et $\mathfrak{n}_\beta$ respectivement.

On sait donc que pour tout H de $\mathfrak{a}$, la dérivation adH est un opérateur normal. Alors, les sous-espaces $\mathfrak{n}_\alpha$ sont orthogonaux et $h=\alpha(H)\,\mathrm{Id}$ sur $\mathfrak{n}_\alpha$ [1.3.2(*b*)]. En particulier, h est une dérivation de $\mathfrak{n}$. Par ailleurs, h et $i(H)$ commutent, de sorte que l'opérateur $i(H)h$ est antisymétrique. Ainsi, le terme résiduel $B(X, Y, H)$ est nul pour tout X, Y et H.

Étudions maintenant le terme complémentaire $A(X, Y, H)$, lorsque $X=X_\alpha$, $Y=X_\beta+Z$, et H est un vecteur quelconque vérifiant $\beta(H)=0$.

On obtient:

$$A(X, Y, H)=\frac{1}{4}|L(X_\beta)+L(Z)+2hZ|^2,$$

où l'on a posé

$$L(Z)=[X_\alpha, Z]+{}^t\mathrm{ad}X_\alpha Z-{}^t\mathrm{ad}Z X_\alpha. \quad (hX_\beta=\beta(H)X_\beta=0).$$

Si l'on prend maintenant

$$Z=-\frac{1}{2\alpha(H)}([X_\alpha, X_\beta]-{}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_\beta-{}^t\mathrm{ad}X_\beta X_\alpha)$$

appartenant à

$$\mathfrak{n}_{\beta+\alpha}\oplus\mathfrak{n}_{\beta-\alpha}\oplus\mathfrak{n}_{\alpha-\beta},$$

on voit aisément que $2hZ=-L(X_\beta)$, puisque $\beta(H)$ est nul. Ainsi, ce terme se réduit à $|L(Z)|^2$, et peut être rendu aussi petit que voulu en faisant tendre Z vers 0, c'est-à-dire $\alpha(H)$ vers l'infini.

Il ne reste donc plus dans l'expression $K(X+H, Y)$ que le terme principal $S(X_\alpha, Y)$ qui lorsque Z tend vers 0 tend vers $S(X_\alpha, X_\beta)$. Nous obtenons ainsi:

$$S(X_\alpha, X_\beta)=\langle {}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_\alpha \mid {}^t\mathrm{ad}X_\beta X_\beta\rangle + \frac{1}{2}|[X_\alpha, X_\beta]|^2-\frac{1}{2}|{}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_\beta|^2-\frac{1}{2}|{}^t\mathrm{ad}X_\beta X_\alpha|^2\geqq 0.$$

1.5.2. Interprétation de cette inégalité en terme de produit scalaire. Remarquons que cette inégalité implique en particulier :

$$\langle {}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_\alpha \mid {}^t\mathrm{ad}X_\beta X_\beta \rangle \geqq -\frac{1}{2}\,|[X_\alpha, X_\beta]|^2 + \frac{1}{2}\,|{}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_\beta|^2.$$

Or, de l'orthogonalité des $\mathfrak{n}_\alpha$, il résulte que ${}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_\alpha$ est un vecteur de $\mathfrak{a}$, et puisque $\langle {}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_\alpha \mid H \rangle = \langle X_\alpha \mid [X_\alpha, H] \rangle = -\alpha(H)\,|X_\alpha|^2$ pour tout H de $\mathfrak{a}$, on peut écrire ${}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_\alpha = -|X_\alpha|^2 H_\alpha$, si H_α est le vecteur de $\mathfrak{a}$ dual de α pour le produit scalaire $\langle\,|\,\rangle$.

Nous obtenons ainsi :

$$\langle \alpha \mid \beta \rangle = \langle H_\alpha \mid H_\beta \rangle \geqq \frac{1}{2\,|X_\alpha|^2}\left(\frac{-|[X_\alpha, X_\beta]|^2 + |{}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_\beta|^2}{|X_\beta|^2}\right).$$

Utilisons cette inégalité avec $\beta + k\alpha$ à la place de β, et $(\mathrm{ad}X_\alpha)^k X_\beta = X_{\beta+k\alpha}$ à la place de X_β.

Nous avons ainsi pour tout $k \leqq k(X_\alpha, X_\beta)$:

$$\langle \alpha \mid \beta + k\alpha \rangle \geqq \frac{1}{2\,|X_\alpha|^2}\left(\frac{-|X_{\beta+(k+1)\alpha}|^2 + |{}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_{\beta+k\alpha}|^2}{|X_{\beta+k\alpha}|^2}\right).$$

Mais, de l'inégalité :

$$\langle {}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_{\beta+k\alpha} \mid X_{\beta+(k-1)\alpha} \rangle = |X_{\beta+k\alpha}|^2 \leqq |{}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_{\beta+k\alpha}|\,|X_{\beta+(k-1)\alpha}|$$

il résulte, en posant $c_k = |X_{\beta+k\alpha}|^2$, l'inégalité pour tout $k \geqq 1$:

$$\langle \alpha \mid \beta + k\alpha \rangle \geqq \frac{1}{2\,|X_\alpha|^2}\left(-\frac{c_{k+1}}{c_k} + \frac{c_k}{c_{k-1}}\right).$$

Il ne reste plus qu'à sommer ces inégalités pour k allant de 0 à $K = k(X_\alpha, X_\beta)$ en remarquant que par définition c_{K+1} est nul, pour obtenir :

$$\langle \alpha \mid \sum_{k=0}^{k(X_\alpha, X_\beta)} \beta + k\alpha \rangle \geqq \frac{|{}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_{\beta+K\alpha}|^2}{2\,|X_\alpha|^2\,|X_\beta|^2} \geqq 0$$

et ceci termine la preuve du théorème dans le cas semi-simple, car $k(\alpha, \beta) = k(X_\alpha, X_\beta)$ pour au moins un couple (X_α, X_β).

1.6. Preuve du théorème dans le cas général

1.6.1. *Réduction du problème*

(*a*) On se donne une racine α et α_j le représentant de $\alpha : \alpha = a\alpha_j$, $a > 0$. Il nous faut tout d'abord remarquer que l'existence d'un vecteur de $\mathfrak{n}_j$ qui commute avec tout espace radiciel $\mathfrak{n}_\beta$, $\beta \in \Delta$, donne immédiatement la positivité de $\langle \alpha_j | \beta \rangle$ (et donc celle de $\langle \alpha | \beta \rangle$) pour toute racine β ([3], p. 339). Le théorème est alors clair dans ce cas et nous pouvons donc supposer à l'inverse que $\mathfrak{n}_j^0 = \{ 0 \}$.

(*b*) Dans ce cas, nous avons [*cf.* 1.1.5 (*b*)] que l'opérateur E intervenant dans la décomposition de adH, $H \in \mathfrak{a}$, est un opérateur normal sur $\mathfrak{n}_j$. En particulier, les sous espaces $\mathfrak{n}_{c\alpha_j}$ de $\mathfrak{n}_j$ sont orthogonaux et $\mathfrak{n}_\alpha$ devient un espace stable simultanément sous E et ^{t}E sur lequel $e = re(\mathrm{E}) = a\,\mathrm{Id}$. De plus, une diagonalisation de E sur le complexifié de $\mathfrak{n}_\alpha$ permet de décomposer $\mathfrak{n}_\alpha$ en sous espaces orthogonaux $\mathfrak{n}_\alpha^b$ sur lesquels $i(\mathrm{E}) = b\mathrm{J}$ pour un réel b où J est la matrice canonique de $\mathfrak{n}_\alpha^b$ représentant la multiplication par i ($\mathrm{J}^2 = -\mathrm{Id}$).

(*c*) Soit maintenant β une autre racine de représentant α_i ($\beta = b\,\alpha_i\, b > 0$), non colinéaire à α, et X_β un vecteur quelconque de $\mathfrak{n}_\beta$. Nous allons montrer que la plus petite valeur de $k(X_\alpha, X_\beta)$ (*cf.* 1.2) lorsque X_α décrit $\mathfrak{n}_\alpha$ est obtenue par des vecteurs X_α qui appartiennent en fait aux sous espaces $\mathfrak{n}_\alpha^b$. Par conséquent, le degré minimal de commutativité $k(\alpha, \beta)$ entre $\mathfrak{n}_\alpha$ et $\mathfrak{n}_\beta$ est atteint pour un couple (X_α, X_β) vérifiant $i(\mathrm{E})X_\alpha = b\,\mathrm{J}X_\alpha$ pour un réel b. La preuve de ce fait impliquera également l'égalité $k(X_\alpha, X_\beta) = k(\mathrm{J}X_\alpha, X_\beta)$.

Soit donc un vecteur X_α de $\mathfrak{n}_\alpha$ et $X_\alpha = \sum_b X_b$ sa décomposition sur $\oplus\, \mathfrak{n}_\alpha^b$.

Si l'on note k l'entier $k(X_\alpha, X_\beta)$ et X_j le vecteur $(\mathrm{ad}\,X_\alpha)^j X_\beta$, nous avons :

$$[X_\alpha, X_k] = \textstyle\sum_b [X_b, X_k] = 0.$$

Par ailleurs, de la relation de commutation 1.3.2(*a*), il découle, en notant c le coefficient de proportionalité entre $\beta + (k+1)\alpha$ et son représentant :

$$\mathrm{E}[X_\alpha, X_k] = \frac{c}{a}[\mathrm{E}X_\alpha, X_k] = c[X_\alpha, X_k] + \frac{c}{a}[i(\mathrm{E})X_\alpha, X_k].$$

On obtient donc $[i(\mathrm{E})X_\alpha, X_k] = 0$ et par récurrence immédiate sur n:

$$0 = [i(\mathrm{E})^n X_\alpha, X_k] = \sum_b b^n [\mathrm{J}^n X_b, X_k] \quad \text{pour tout } n.$$

Mais $\mathrm{J}^2 = -\mathrm{Id}$, d'où :

$$\sum_b (-b^2)^p [X_b, X_k] = 0 = \sum_b b(-b^2)^p [\mathrm{J}X_b, X_k] \quad \text{pour tout } p,$$

ce qui implique la nullité de $[X_b, X_k]$ et celle de $[\mathrm{J}X_b, X_k]$ pour tout X_b intervenant dans la décomposition de X_α.

En faisant opérer E de la même façon sur $(\mathrm{ad}X_b)^{k-j}[X_\alpha, X_j]$, on obtient de proche en proche la nullité de $(\mathrm{ad}X_b)^k X_\beta$, ainsi que celle de $(\mathrm{ad}\mathrm{J}X_b)^k X_\beta$, et par conséquent :

$$k(X_b, X_\beta) = k(JX_b, X_\beta) \leqq k(X_\alpha, X_\beta).$$

1.6.2. *Étude de* $K(X_\alpha, Y+H)$

Nous allons maintenant reprendre l'étude de ce terme de courbure lorsque :

(i) X_α est un vecteur de $\mathfrak{n}_\alpha$ pour lequel $i(E)X_\alpha = bJX_\alpha$,

(ii) Y est la somme d'un vecteur X appartenant à $\mathfrak{n}_l$ pour une racine α_l fixée ($X = \sum_c X_c, X_c \in \mathfrak{n}_{c\alpha_l}$) et d'un vecteur Z à déterminer tendant vers 0,

(iii) H est un vecteur de $\mathfrak{a}$ choisi de telle sorte que $\alpha_l(H) = 0$ et $\alpha(H)$ tend vers l'infini.

Rappelons les relations $h = \alpha_k(H)e$ sur $\mathfrak{n}_k$ et $e = c\mathrm{Id}$ sur $\mathfrak{n}_\gamma \cap \mathfrak{n}_k^1$ où $\gamma = c\alpha_k$.

Reprenons l'expression de $K(X_\alpha, Y+H)$ obtenue en 1.4.2.

(*a*) *Terme principal.* — Ce terme $S(X_\alpha, Y)$ tend vers $S(X_\alpha, X)$ puisque Y tend vers X.

(*b*) *Terme complémentaire.* — Comme dans le cas semi-simple, écrivons le sous la forme $\frac{1}{4}|L(Y) + 2hY|^2$ où l'on a posé

$$L(Y) = [X_\alpha, Y] + {}^t\mathrm{ad}X_\alpha Y - {}^t\mathrm{ad}Y X_\alpha,$$

soit encore :

$$\frac{1}{4}|L(X) + L(Z) + 2hZ|^2 \quad \text{puisque } 2hX = \alpha_l(H)eX = 0.$$

Pour rechercher la valeur de Z qui annule $2hZ + L(X)$, on observe tout d'abord que $L(X) = \sum_c [X_\alpha, X_c] + {}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_c - {}^t\mathrm{ad}X_c X_\alpha$ d'où :

$$L(X) \in \sum_c \mathfrak{n}_{c\alpha_l+\alpha} \oplus \sum_{c,c'} \mathfrak{n}^1_{cc'\alpha_l-\alpha} \oplus \sum_{c,c'} \mathfrak{n}^1_{c'\alpha-c\alpha_l}$$

(*cf.* 1.1.6 et lemme 1.3.3).

Notons que tous les espaces radiciels intervenant dans cette décomposition sont orthogonaux, soit par non colinéarité des racines correspondantes, soit à cause des propriétés des $\mathfrak{n}_j^1$.

Première composante de Z. — Notons b_c le coefficient de proportionalité entre $\alpha + c\alpha_l$ et son représentant α_{k_c}. On a : $b_c\alpha_{k_c}(H) = (\alpha + c\alpha_l)(H) = \alpha(H)$ et par conséquent, la première composante Z_1 de Z pour laquelle

$2hZ_1=-[X_\alpha, X]$ s'obtient en posant :

$$Z_1=\frac{-1}{2\alpha(H)}\sum_c b_c e^{-1}[X_\alpha, X_c].$$

Deuxième composante de Z. — Une décomposition de ${}^t\mathrm{ad}X_\alpha X$: ${}^t\mathrm{ad}X_\alpha X=\sum_{c,c'} X_{c,c'}$ suivant $\sum_{c,c'} \mathfrak{n}^1_{cc'\alpha_l-\alpha}$ montre que

$$h({}^t\mathrm{ad}X_\alpha X)=\sum_{c,c'}(cc'\alpha_l-\alpha)(H)\,X_{c,c'}=-\alpha(H)\sum X_{c,c'},$$

et par conséquent, la deuxième composante Z_2 de Z pour laquelle $2hZ_2=-{}^t\mathrm{ad}\,X_\alpha X$ est :

$$Z_2=\frac{1}{2\alpha(H)}{}^t\mathrm{ad}X_\alpha X.$$

Troisième composante. — De même, posons

$${}^t\mathrm{ad}XX_\alpha=\sum_{c,c'} Y_{c,c'}\in\sum_{c,c'}\mathfrak{n}^1_{c'\alpha-c\alpha_l},$$

la valeur de Z_3 pour laquelle $2hZ_3={}^t\mathrm{ad}XX_\alpha$ est obtenue par :

$$Z_3=\frac{1}{2\alpha(H)}\sum_{c,c'} Y_{c,c'}/c'.$$

En conclusion de cette étude, le vecteur $Z=Z_1+Z_2+Z_3$ fait du terme complémentaire $|L(Z)|^2$ un terme qui tend vers 0 dès que l'on fait tendre Z vers 0, c'est-à-dire $\alpha(H)$ vers l'infini.

(*c*) *Terme résiduel.* — Ce terme, qui s'annulait dans le cas semi-simple, nécessite maintenant une étude détaillée. Commençons tout d'abord par l'expression :

$$\begin{aligned}2\langle Y\,|\,h[X_\alpha, Y]-[hX_\alpha, Y]-[X_\alpha, hY]\rangle\\ &=2\langle X\,|\,h[X_\alpha, X]-[hX_\alpha, X]-[X_\alpha, hX]\rangle\\ &+2\langle Z\,|\,h[X_\alpha, X]-[hX_\alpha, X]-[X_\alpha, hX]\rangle\\ &+2\langle X\,|\,h[X_\alpha, Z]-[hX_\alpha, Z]-[X_\alpha, hZ]\rangle\\ &+2\langle Z\,|\,h[X_\alpha, Z]-[hX_\alpha, Z]-[X_\alpha, hZ]\rangle\end{aligned}$$

Observons tout d'abord que le premier terme s'annule par orthogonalité de $\mathfrak{n}_l$ avec $\sum_{c,c'}\mathfrak{n}_{c'(\alpha+c\alpha_l)}\oplus\sum_c\mathfrak{n}_{\alpha+c\alpha_l}\oplus\sum_{c,c'}\mathfrak{n}_{\alpha+c'c\alpha_l}$, tandis que le quatrième tend vers 0 lorsque $\alpha(H)$ tend vers l'infini, car il est quadratique en Z et linéaire en H.

Le troisième terme se réduit quant à lui à $-2\langle X\,|\,[X_\alpha, hZ]+[hX_\alpha, Z]\rangle$ puisque h est nul sur $\mathfrak{n}_l$, soit encore à $-\langle {}^t\mathrm{ad}X_\alpha X\,|\,2hZ+2\alpha(H)Z\rangle$. Maintenant, la seule composante de Z donnant lieu à un vecteur non orthogonal à ${}^t\mathrm{ad}X_\alpha X$ est Z_2 dont l'image par $2h$ est $-{}^t\mathrm{ad}X_\alpha X=-2\alpha(H)Z_2$. Il en résulte la nullité de ce terme.

Enfin, le deuxième terme s'écrit $2\langle Z\,|\,h[X_\alpha, X]-[hX_\alpha, X_\beta]\rangle$ puisque hX est nul, soit à $\langle 2hZ\,|\,[X_\alpha, X]\rangle-\langle 2\alpha(H)Z\,|\,[X_\alpha, X]\rangle$. Mais, la seule composante de Z non orthogonale à $[X_\alpha, X]$ est Z_1, et par conséquent, il reste :

$$-|[X_\alpha, X]|^2+\sum_c b_c\langle e^{-1}[X_\alpha, X_c]\,|\,[X_\alpha, X_c]\rangle.$$

Dans le terme résiduel, intervient également l'expression $2\langle hY\,|\,i(H)Y\rangle$. Puisque $hY=hZ$ par nullité de hX, ce terme devient $2\langle hZ\,|\,i(H)Y\rangle$, et à cause de l'orthogonalité entre $\mathfrak{n}_l$ et Z, vaut $2\langle hZ\,|\,i(H)Z\rangle$ soit encore :

$$2\langle hZ_1\,|\,i(H)Z_1\rangle+2\langle hZ_2\,|\,i(H)Z_2\rangle+2\langle hZ_3\,|\,i(H)Z_3\rangle.$$

Mais Z_2 et Z_3 appartiennent à $\mathfrak{n}^1$ sur lequel h et $i(H)$ commutent. L'opérateur $hi(H)$ est alors antisymétrique, et il reste donc $2\langle hZ_1\,|\,i(H)Z_1\rangle$, soit :

$$\frac{1}{2\alpha(H)^2}\sum_c b_c^2\langle he^{-1}[X_\alpha, X_c]\,|\,i(H)e^{-1}[X_\alpha, X_c]\rangle.$$

Mais $e^{-1}[X_\alpha, X_c]$ appartient à $\mathfrak{n}_{k_c}$ sur lequel $h=\alpha_{k_c}(H)e$ et $i(H)=\alpha_{k_c}(H)i(E)+J(H)$ où l'opérateur antisymétrique $J(H)$ commute avec e (1.3.1).

Comme par ailleurs, on a $b_c\alpha_{k_c}(H)=\alpha(H)$, cette expression devient :

$$\frac{1}{2}\sum_c\langle [X_\alpha, X_c]\,|\,i(E)e^{-1}[X_\alpha, X_c]\rangle$$

et, puisque $i(E)e^{-1}=\mathrm{Id}-{}^tEe^{-1}$, vaut encore :

$$\frac{1}{2}\sum_c|[X_\alpha, X_c]|^2-\frac{1}{2}\sum_c\langle E[X_\alpha, X_c]\,|\,e^{-1}[X_\alpha, X_c]\rangle.$$

Enfin, des relations

$$\begin{aligned}E[X_\alpha, X_c]&=b_c/a\,[EX_\alpha, X_c]\\&=b_c[X_\alpha, X_c]+b_c/a\,[i(E)X_\alpha, X_c]\\&=b_c[X_\alpha, X_c]+bb_c/a\,[JX_\alpha, X_c]\qquad (i(E)X_\alpha=bJX_\alpha),\end{aligned}$$

il résulte que le terme $2\langle hZ\,|\,i(\mathrm{H})Z\rangle$ vaut finalement

$$\frac{1}{2}|[X_\alpha, X]|^2 - \frac{1}{2}\sum_c b_c \langle [X_\alpha, X_c]\,|\,e^{-1}[X_\alpha, X_c]\rangle$$
$$-\frac{1}{2}\sum_c bb_c \langle [X_\alpha, X_c]\,|\,e^{-1}[JX_\alpha, X_c]\rangle.$$

En sommant au terme principal $S(X_\alpha, X)$ les corrections apportées par le terme résiduel, nous venons ainsi de montrer que si X_α est un vecteur de $\mathfrak{n}_\alpha$ tel que $i(\mathrm{E}) = b\,JX_\alpha$, et $X = \Sigma X_c$ est un vecteur de $\mathfrak{n}_l$, alors l'expression suivante est positive :

$$\langle {}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_\alpha\,|\,{}^t\mathrm{ad}XX\rangle - \frac{1}{2}|{}^t\mathrm{ad}X_\alpha X|^2 - \frac{1}{2}|{}^t\mathrm{ad}XX_\alpha|^2$$
$$+\frac{1}{2}\sum_c b_c\langle [X_\alpha, X_c]\,|\,e^{-1}[X_\alpha, X_c]\rangle$$
$$-\frac{1}{2}\sum_c bb_c\langle [X_\alpha, X_c]\,|\,e^{-1}[JX_\alpha, X_c]\rangle.$$

Utilisons cette expression avec $Y_\alpha = JX_\alpha$ à la place de X_α et sommons ces deux inégalités. Nous obtenons, puisque $JY_\alpha = -bX_\alpha$, *l'inégalité* (1.6.2) :

$$\langle {}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_\alpha + {}^t\mathrm{ad}Y_\alpha Y_\alpha\,|\,{}^t\mathrm{ad}XX\rangle$$
$$\geqq \frac{1}{2}|{}^t\mathrm{ad}X_\alpha X|^2 - \frac{1}{2}\sum_c b_c\langle [X_\alpha, X_c]\,|\,e^{-1}[X_\alpha, X_c]\rangle$$
$$+\frac{1}{2}|{}^t\mathrm{ad}Y_\alpha X|^2 - \frac{1}{2}\sum_c b_c\langle [Y_\alpha, X_c]\,|\,e^{-1}[Y_\alpha, X_c]\rangle$$

où b_c est le coefficient de proportionalité entre $\alpha + c\alpha_l$ et son représentant.

1.6.3. *Interprétation de cette inégalité en terme de produit scalaire.*

L'étude dans un cadre semi-simple avait montré que le signe du produit scalaire $\langle \alpha\,|\,\beta\rangle$ s'obtenait via l'expression $\langle {}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_\alpha\,|\,{}^t\mathrm{ad}X_\beta X_\beta\rangle$. Ici, la seule orthogonalité des $\mathfrak{n}_j$ (et non plus des $\mathfrak{n}_\alpha$) montre que si X est un vecteur de $\mathfrak{n}_l$ ${}^t\mathrm{ad}XX$ est un vecteur de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}_l$ et sa projection orthogonale p_X sur $\mathfrak{a}$ s'obtient grâce au calcul suivant :

$$\text{pour tout H de } \mathfrak{a},\quad \langle {}^t\mathrm{ad}XX\,|\,\mathrm{H}\rangle = \langle X\,|\,[X, \mathrm{H}]\rangle$$
$$= -\langle X\,|\,hX\rangle$$
$$= -\alpha_l(\mathrm{H})\langle X\,|\,eX\rangle.$$

Si H_l est le vecteur de $\mathfrak{a}$ dual de α_l pour $\langle\,|\,\rangle$, on a $p_X = -\langle X\,|\,eX\rangle \mathrm{H}_l$. De même $p_{X_\alpha} = -|X_\alpha|^2\,\mathrm{H}_\alpha$ et $p_{Y_\alpha} = -|Y_\alpha|^2\,\mathrm{H}_\alpha$ car $e = a\mathrm{Id}$ sur $\mathfrak{n}_\alpha$.

Par conséquent:

$$\langle {}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_\alpha + {}^t\mathrm{ad}Y_\alpha Y_\alpha \,|\, {}^t\mathrm{ad}XX \rangle = \langle p_{X_\alpha} + p_{Y_\alpha} \,|\, p_X \rangle$$
$$= \langle X \,|\, eX \rangle (|X_\alpha|^2 + |Y_\alpha|^2) \langle \alpha \,|\, \alpha_l \rangle.$$

Nous noterons dans la suite A le nombre $|X_\alpha|^2 + |Y_\alpha|^2$.

Soit maintenant β une autre racine, non colinéaire à α. Nous notons b_k le coefficient de proportionalité entre $\beta + k\alpha$ et son représentant α_k. Lorsque X_β est un vecteur de $\mathfrak{n}_\beta$, l'inégalité (1.6.2) assure:

$$\mathrm{A} \langle \alpha \,|\, \beta \rangle = \mathrm{A} \langle \alpha \,|\, b_0 \alpha_0 \rangle \geqq \frac{1}{\langle X_\beta \,|\, e X_\beta \rangle}$$
$$\times \left(\frac{1}{2} b_0 \,|\, {}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_\beta |^2 - \frac{1}{2} b_0 b_1 \langle [X_\alpha, X_\beta] \,|\, e^{-1} [X_\alpha, X_\beta] \rangle \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} b_0 \,|\, {}^t\mathrm{ad}\, Y_\alpha X_\beta |^2 - \frac{1}{2} b_0 b_1 \langle [Y_\alpha, X_\beta] \,|\, e^{-1} [Y_\alpha, X_\beta] \rangle \right).$$

Dans la mesure où X_α et Y_α jouent un rôle identique, avec, rappelons le l'égalité $k(X_\alpha, X_\beta) = k(Y_\alpha, X_\beta)$, nous allons supposer que Y_α est nul.

Le vecteur $[X_\alpha, X_\beta]$ appartient à $\mathfrak{n}_{\alpha+\beta} \subset \mathfrak{n}_1$ ($\mathfrak{n}_1 \equiv \mathfrak{n}_{\alpha_1}$).

Soit $[X_\alpha, X_\beta] = [X_\alpha, X_\beta]^0 + [X_\alpha, X_\beta]^1$ sa décomposition sur $\mathfrak{n}_1^0 \oplus \mathfrak{n}_1^1$. Alors:

$$e^{-1} [X_\alpha, X_\beta] = e^{-1} [X_\alpha, X_\beta]^0 + \frac{1}{b_1} [X_\alpha, X_\beta]^1 \in \mathfrak{n}_1^0 + \mathfrak{n}_{\alpha+\beta}^1,$$

et si X_1 désigne le vecteur $b_1 e^{-1} [X_\alpha, X_\beta]$, il est alors clair que l'on a:

$$[X_\alpha, X_1] = [X_\alpha, [X_\alpha, X_\beta]^1] = [X_\alpha, [X_\alpha, X_\beta]]$$

puisque $\mathfrak{n}_\alpha$ commute avec $\mathfrak{n}_1^0$.

Si l'on définit par récurrence sur k le vecteur X_k par $X_k = b_k e^{-1} [X_\alpha, X_{k-1}]$ ($X_k \in \mathfrak{n}_k$) on a de même:

$$[X_\alpha, X_k] = (\mathrm{ad}X_\alpha)^{k+1} X_\beta \in \mathfrak{n}_{\beta + k\alpha},$$

et en particulier, le premier indice k pour lequel $[X_\alpha, X_k]$ est nul est exactement égal à $k(X_\alpha, X_\beta)$.

De plus, si l'on décompose X_k sur $\oplus\, \mathfrak{n}_{c\alpha_k}$: $X_k = \sum_c X_c$, on voit que seul le terme $[X_\alpha, X_{b_k}]$ est non nul. Il résulte, en utilisant l'inégalité (1.6.2) avec X_k l'inégalité à l'ordre k:

$$\mathrm{A} \langle \alpha \,|\, \beta + k\alpha \rangle = \mathrm{A} \langle \alpha \,|\, b_k \alpha_k \rangle \geqq \frac{1}{2 \langle X_k \,|\, e X_k \rangle}$$
$$\times (b_k \,|\, {}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_k |^2 - b_k b_{k+1} \langle [X_\alpha, X_k] \,|\, e^{-1} [X_\alpha, X_k] \rangle).$$

Sommant ces inégalités pour k allant de 0 à $K = k(X_\alpha, X_\beta)$, il reste à voir, pour montrer la positivité de $\left\langle \alpha \,\middle|\, \sum_{k=0}^{K} \beta + k\alpha \right\rangle$ que pour tout k :

$$\frac{b_{k+1} \,|\, {}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_{k+1} \,|^2}{\langle X_{k+1} \,|\, e X_{k+1} \rangle} - \frac{b_k b_{k+1} \langle [X_\alpha, X_k] \,|\, e^{-1} [X_\alpha, X_k] \rangle}{\langle X_k \,|\, e X_k \rangle} \geqq 0.$$

Mais d'une part,

$$b_{k+1}^2 \langle [X_\alpha, X_k] \,|\, e^{-1} [X_\alpha, X_k] \rangle = \langle X_{k+1} \,|\, e X_{k+1} \rangle,$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}
b_{k+1}^2 \langle [X_\alpha, X_k] \,|\, e^{-1} [X_\alpha, X_k] \rangle^2 & \\
&= \langle X_k \,|\, {}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_{k+1} \rangle^2 \\
&= \langle (X_k)^1 \,|\, ({}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_{k+1})^1 \rangle^2 \quad (Y)^1 \text{ est la composante de } Y \text{ sur } \mathfrak{n}_k^1) \\
&\leqq |(X_k)^1|^2 \,|({}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_{k+1})^1|^2 \\
&= \frac{1}{b_k} \langle (X_k)^1 \,|\, e (X_k)^1 \rangle \,|({}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_{k+1})^1|^2 \\
&\leqq \frac{1}{b_k} \langle X_k \,|\, e X_k \rangle \,|{}^t\mathrm{ad}X_\alpha X_{k+1}|^2.
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du théorème 1 dans le cas général.

2. COMPORTEMENT DU MOUVEMENT BROWNIEN SUR UN GROUPE DE LIE RÉSOLUBLE A COURBURE NÉGATIVE OU NULLE

2.1. Le cadre géométrique

2.1.1. Soit M une variété riemannienne simplement connexe, homogène sous l'action de son groupe d'isométries I(M). Si l'on suppose la courbure sectionnelle partout négative ou nulle, il existe un sous-groupe résoluble S fermé de I(M) agissant simplement transitivement sur M. Ainsi, le transfert à S de la métrique riemannienne sur M par l'application $s \to s.p$, où p est un point fixé de M, fait de S un groupe de Lie muni d'une métrique invariante par translations à gauche. En particulier, le volume riemannien pour cette métrique est donné par la mesure de Haar à gauche de S, notée ici ds.

On notera encore $\mathfrak{s}$ l'algèbre de Lie de S et exp l'application exponentielle de $\mathfrak{s}$ dans S (pour tout X de $\mathfrak{s} = T_e S$, $t \to \exp tX$ est l'unique semi-groupe à un paramètre ayant X comme vecteur tangent à l'origine). Signalons ici que les sous-groupes à un paramètre de S ne sont en général pas des géodésiques, et par conséquent l'application exponentielle « au sens groupe de Lie » ne coïncide pas avec l'application exponentielle « au sens riemannien » notée Exp (pour tout X de $\mathfrak{s}$, $t \rightarrow \operatorname{Exp} t\mathrm{X}$ est l'unique géodésique ayant X comme vecteur tangent à l'origine).

2.1.2. Nous savons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ est somme directe d'une algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{a}$ et d'une algèbre nilpotente $\mathfrak{n}$, algèbre dérivée de $\mathfrak{s}$. Soient $\mathrm{A}=\exp(\mathfrak{a})$ et $\mathrm{N}=\exp(\mathfrak{n})$ les sous-groupes (fermés) de S d'algèbre de Lie respective $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{n}$. On déduit alors une décomposition de S en produit semi-direct S = NA, où le groupe nilpotent N est distingué dans S, et le groupe abélien A opère sur N par automorphismes intérieurs: $\sigma_a(n)=ana^{-1}$.

La représentation adjointe de A sur $\mathfrak{n}$ s'obtient alors en différentiant cette action: pour tout a dans A, $\mathrm{Ad}a=d\sigma_{a\,|\,e}$ est un automorphisme de $\mathfrak{n}$ qui s'identifie à l'exponentielle de la dérivation ad H (restreinte à $\mathfrak{n}$) lorsque $a=\exp \mathrm{H}$, $\mathrm{H}\in\mathfrak{a}$.

2.1.3. Une telle décomposition de S amène une décomposition de la mesure de Haar sur S et de manière classique, on a:

$$\begin{aligned} ds &= da\, dn \qquad \text{si} \quad s=an \,(\text{décomposition } \mathrm{S}=\mathrm{AN}),\\ ds &= \Delta(a)^{-1}\, dn\, da \qquad \text{si} \quad s=na \,(\text{décomposition } \mathrm{S}=\mathrm{NA}) \end{aligned}$$

où da et dn sont respectivement les mesures de Haar sur A et N, et $\Delta(a)$ est la fonction modulaire:

$$\Delta(a)=\det \mathrm{Ad}a=e^{\operatorname{tr} \mathrm{adH}} \qquad \text{si} \quad a=\exp \mathrm{H}.$$

Le calcul de la trace de adH sur $\mathfrak{n}$ se fait en faisant intervenir les valeurs propres de adH (plus précisément leur partie réelle) et donne immédiatement (*cf.* 1.1.3 et seq.)

$$\operatorname{tr} \mathrm{adH}=2\rho(\mathrm{H}),$$

si ρ est la demi-somme des racines comptées avec leur multiplicité.

2.1.4. Les sous-groupes A et N sont simplement connexes, et en conséquence, l'application exp induit un difféomorphisme global de $\mathfrak{a}$ sur A et de $\mathfrak{n}$ sur N. On obtient ainsi une carte globale de S:

$$\begin{gathered} \varphi: \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a} \rightarrow \mathrm{S}=\mathrm{NA},\\ (\mathrm{X}, \mathrm{H}) \rightarrow \exp \mathrm{X} \exp \mathrm{H}. \end{gathered}$$

Nous avons préféré la décomposition de S : S = NA à l'autre décomposition possible S = NA car dans cette écriture, *les facteurs* N *et* A *sont* *transverses*: en tout point $s=na$ de S. les sous-variétés Na et nA sont orthogonales. En effet, la translation à gauche par $s^{-1}=a^{-1}n^{-1}$ les transporte respectivement en $a^{-1}\mathrm{N}a=\mathrm{N}$ et $a^{-1}\mathrm{A}=\mathrm{A}$, et l'orthogonalité de A et de N en e résulte de l'orthogonalité de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{n}$ prouvée par [3] (*cf.* 1.1.1). On en déduit que, dans la carte φ, les sous-espaces $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{a}$, identifiés en tout point (X, H) de $\mathfrak{n}\oplus\mathfrak{a}$ à $\mathrm{T}_{(\mathrm{X},\mathrm{H})}\mathfrak{n}$ et $\mathrm{T}_{(\mathrm{X},\mathrm{H})}\mathfrak{a}$ restent orthogonaux pour la métrique calculée en $s=\exp\mathrm{X}\exp\mathrm{H}$.

Notons dH et dX l'image par φ des mesures de Haar da et dn. Alors, dH est la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{a}\simeq\mathbb{R}^d$ et la mesure de Haar à gauche s'écrit dans ces coordonnées

$$ds=e^{-2\rho(\mathrm{H})}\,d\mathrm{H}\,d\mathrm{X}.$$

2.2. Le Laplacien sur S = NA

Soit donc maintenant Δ_{L} l'opérateur de Laplace Beltrami associé à la métrique riemannienne sur S. Rappelons que dans un système de coordonnées $(x_1\ldots x_n)$, Δ_{L} s'écrit $\sum_{i,j}|g|^{-1}\partial_i|g|g^{ij}\partial_j$, où $|g|$ est la racine carrée du déterminant de la métrique g, les termes g^{ij} sont les coefficients de la matrice inverse de g, et $\partial_i=\partial/\partial x_i$.

Pour identifier g dans la carte φ, observons tout d'abord que l'élément de volume $dv(\mathrm{X},\mathrm{H})=e^{-2\rho(\mathrm{H})}d\mathrm{X}\,d\mathrm{H}$ donne $|g|=e^{-2\rho(\mathrm{H})}$.

Par ailleurs, de l'orthogonalité de $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{a}$ en (X, H), il résulte que g^{ij} est nul si ∂_i appartient à $\mathfrak{a}$ et ∂_j appartient à $\mathfrak{n}$. En particulier, le Laplacien se scinde en deux opérateurs différentiels $\Delta_{\mathfrak{a}}$ et $\Delta_{\mathfrak{n}}$ où dans chacun, n'interviennent que des différentiations dans $\mathfrak{a}$ ou dans $\mathfrak{n}$ (décomposition en « skew-product », *cf.* [23]).

Enfin, observons que l'action d'une translation à gauche par $s=\exp\mathrm{X}\exp\mathrm{H}$ se traduit dans la carte φ, en ce qui concerne la composante sur $\mathfrak{a}$, par une translation de H. Par conséquent, si $\{\partial_i, i=1\ldots d\}$ est une base orthonormée de $\mathfrak{a}\simeq\mathrm{T}_{(0,0)}\mathfrak{a}$, elle reste orthonormée en (X, H).

Nous venons ainsi de montrer que la partie sur $\mathfrak{a}$ du Laplacien s'écrit :

$$\Delta_{\mathfrak{a}}=\sum_i e^{2\rho(\mathrm{H})}\partial_i e^{-2\rho(\mathrm{H})}\partial_i$$

soit encore, si l'on note H_ρ le vecteur de $\mathfrak{a}$ dual de ρ pour le produit scalaire, $\nabla=(\partial_1,\ldots,\partial_d)$ le gradient sur $\mathbb{R}^d$ et $\Delta=\sum_i\partial_i^2$ le laplacien usuel sur $\mathbb{R}^d$:

$$\Delta_\alpha = \Delta - 2\langle H_\rho | \nabla \rangle.$$

2.3. Mouvement brownien sur NA

Nous notons ici $p_t(x, y)$ le noyau de la chaleur sur S, soit la solution élémentaire de l'équation :

$$\left(\partial/\partial t - \frac{1}{2}\Delta_L\right) p_t = 0,$$
$$\lim_{y \to x} p_t(x, y) = \delta_x.$$

On obtient ainsi une diffusion sur S à temps de vie infini, appelée mouvement brownien sur le groupe de Lie S, en considérant le processus de Markov fort dont la probabilité de transition à l'instant t, $P_t(x, dy)$, a pour densité $p_t(x, y)$ relativement au volume riemannien.

On notera $(B_t)_{t \geq 0}$ cette diffusion, réalisée sur l'espace canonique des trajectoires $\Omega := S^{[0, \infty]}$, $\mathscr{F}_t$ la tribu engendrée par $(B_s)_{0 \leqq s \leqq t}$, $\mathbb{P}_x$ la loi de $(B_t)_{t \geqq 0}$ sachant $B_0 = x$, *et* Θ_t le décalage de t sur les trajectoires.

Enfin, l'accroissement $B_0^{-1} B_t$ sera noté W_t.

Un événement E sera dit réalisé presque sûrement si $\mathbb{P}_x(E) = 1$ pour tout x de S.

L'invariance du Laplacien sous les isométries se traduit par une invariance du noyau par les translations à gauche :

$$p_t(sx, sy) = p_t(x, y) \quad \text{pour tout } s \text{ de S}$$

et en conséquence, le mouvement brownien apparaît comme un processus à accroissements indépendants sur S :

$$B_{t+h} = B_t W_h \circ \Theta_t, \qquad \mathbb{P}_x - \text{p. s.}$$

où, pour tout x de S, et tous t et h réels strictement positifs, la variable $W_h \circ \Theta_t = B_t^{-1} B_{t+h}$ est indépendante de $\mathscr{F}_t$. Les accroissements sont également équidistribués : lorsque h est fixé, la suite $(W_h \circ \Theta_t)_{t > 0}$ est stationnaire.

On notera N_t et A_t les composantes de B_t dans la décomposition $S = NA$; $\eta_t = \operatorname{Log} N_t$ et $\alpha_t = \operatorname{Log} A_t$ les processus correspondants dans les algèbres de Lie $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{a}$; N_t' et A_t' les composantes de W_t.

2.4. Composante abélienne du Brownien

La projection canonique $\pi : S \rightarrow S/N = A$ est un homomorphisme, et par conséquent $A_t = \pi(B_t)$ est encore un processus à accroissements indépendants. Ainsi, dans $\mathfrak{a} \cong \mathbb{R}^d$, α_t s'identifie à un processus gaussien et plus précisément, puisque son générateur est l'opérateur $\Delta_\mathfrak{a}$ exhibé en 2.2, à un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^d$ avec drift constant H_ρ. En particulier, la loi des grands nombres donne :

$$\alpha_t/t \quad \textit{converge p.s. vers} \; -2\,H_\rho \qquad \textit{si} \quad t \; \textit{tend vers} \; +\infty.$$

On en déduit que α_t est asymptotiquement équivalent à $-2\,t\,H_\rho$ et tend donc à l'infini dans une direction bien précise. Revenant sur S, on voit ainsi que le brownien est *transient avec vitesse de fuite exponentielle.*

2.5. Composante nilpotente du Brownien

Les techniques de démonstration qui suivent sont dues à Raugi [20] en temps discret et ont été reprises en temps continu par E. Damek et A. Hulanicki [6]. Ces auteurs étudient de manière générale des processus pour lesquels le drift de la composante abélienne peut ne contracter qu'une partie de N, c'est-à-dire, comme on le verra, que ce drift peut annuler certaines racines. Ils montrent alors la convergence presque sûre de la composante nilpotente *contractée.*

Or, la propriété fondamentale du mouvement brownien, que nous avons montrée dans la première partie, est précisément que le drift contracte N en entier, d'où la convergence presque sûre de toute la composante nilpotente. Dans cette situation, les techniques se simplifient, et nous allons en reprendre les différents points pour la convenance du lecteur.

2.5.1. Observons tout d'abord que la relation $B_{t+h} = B_t\, W_h \circ \Theta_t$ donne :

$$N_{t+h} A_{t+h} = N_t A_t N'_h \circ \Theta_t A'_h \circ \Theta_t, \qquad \mathbb{P}_x - \text{p. s.}$$

soit encore :

$$N_t^{-1} N_{t+h} = A_t N'_h \circ \Theta_t A_t^{-1}$$

ce qui, lu dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ de N, implique :

$$\operatorname{Log}(N_t^{-1} N_{t+h}) = \operatorname{Ad} A_t \operatorname{Log}(N'_h \circ \Theta_t), \qquad \mathbb{P}_x - \text{p. s.}$$

Ainsi, « l'accroissement » de N_t entre t et $t+h$ fait intervenir l'action de la composante abélienne sur $\mathfrak{n}$. Celle-ci est décrite dans le lemme qui suit :

2.5.2. LEMME 1. — *Pour toute norme* $\| \;\; \|$ *sur* $\mathfrak{n}$, *la limite de* $\| \operatorname{Ad} A_t \|^{1/t}$ *existe p. s., et est égale à un nombre constant strictement inférieur à* 1 *p. s., indépendant de la norme choisie.*

L'existence de sa limite et sa constance provient du théorème ergodique appliqué à la suite sous-multiplicative $\| \operatorname{Ad} A_t \|$.

Écrivons maintenant

$$\operatorname{Ad} A_t = \exp \operatorname{ad} \alpha_t = \exp(-2t \operatorname{ad} H_\rho) \exp \operatorname{ad} H_t$$

avec

$$\lim_{t \to 0} \| \operatorname{ad} H_t \| / t = 0 \text{ p. s.}$$

On en déduit que la limite de $\| \operatorname{Ad} A_t \|^{1/t}$ est inférieure presque sûrement au rayon spectral r de l'opérateur $\exp - 2 \operatorname{ad} H_\rho$. Mais, r est indépendant de la norme choisie et est égal à la plus grande valeur propre en module de cet opérateur. On obtient par conséquent :

$$r = \max_\lambda | e^{-2\lambda(H_\rho)} |.$$

où λ décrit l'ensemble des poids (complexes) de la représentation adjointe de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}$ (*cf.* 1.1.2), soit encore :

$$r = \max_{\alpha \in \Delta} e^{-2 \langle \alpha | \rho \rangle}$$

où α varie dans l'ensemble Δ des racines (*cf.* 1.1.4). Ce nombre r est donc strictement inférieur à 1 en vertu du corollaire 1 (section 1.2).

Ce lemme sera utilisé de la manière suivante : pour presque toute trajectoire ω, il existe un nombre $a = a(\omega)$ strictement inférieur à 1 tel que l'on ait, à une constante multiplicative près :

$$\| \operatorname{Ad} A_t \| \leqq a^t.$$

2.5.3. D'après le théorème de Doob, le processus N_t converge presque sûrement si pour toute suite (t_n), la suite de variables aléatoires N_{t_n} converge presque sûrement vers une variable indépendante de la suite choisie. De plus, comme remarqué dans [6], on peut supposer que les incréments $h_n = t_{n+1} - t_n$ sont minorés par une constante α strictement positive de telle sorte que l'on ait $t_n \geqq \alpha n + \beta$. Par ailleurs, quitte à rajouter des points dans la suite (t_n), on peut également majorer les h_n par un nombre H.

Maintenant, l'existence de moments de tous ordres pour un mouvement brownien sur un groupe de Lie [13] donne l'existence d'une constante C telle que pour tout $0<h\leqq H$ on ait $\mathbb{E}(\|\operatorname{Log} N'_h\|)\leqq C$ et par stationnarité:

$$\mathbb{E}(\|\operatorname{Log} N'_h \circ \Theta_t\|)\leqq C \quad \text{pour tout } t.$$

On en déduit la majoration:

$$\mathbb{P}(\|\operatorname{Log} N'_{h_n} \circ \Theta_{t_n}\|\geqq e^{ct} n)\leqq C\, e^{-ct_n} \quad \text{pour tout nombre positif } c.$$

La somme de ces probabilités converge, par les hypothèses faites sur la suite (t_n) et le lemme de Borel Cantelli affirme donc:

$$\limsup_{t_n \to \infty} \|\operatorname{Log} N'_{h_n} \circ \Theta_{t_n}\|^{1/t_n}\leqq 1.$$

L'expression de l'accroissement de N_t donnée en 2.5.1 implique ainsi:

$$\limsup_{t_n \to \infty} \|\operatorname{Log} N_{t_n}^{-1} N_{t_{n+1}}\|^{1/t_n}\leqq r<1.$$

2.5.4. *Convergence de la composante nilpotente*

Notons $X * Y$ le produit sur $\mathfrak{n}$ défini par $\exp X * Y=\exp X \exp Y$ (il est donné plus précisément par la formule de Campbell Hausdorff), et choisissons comme dans [9, Annexe] une norme sur $\mathfrak{n}$ vérifiant de plus:

$$\|X_1 * \ldots * X_n\|\leqq Q(\|X_1\|+\ldots+\|X_n\|)$$

où Q est un polynôme sans terme constant et indépendant du nombre n.

Notons encore Z_p « l'accroissement » $\operatorname{Log}(N_{t_p}^{-1} N_{t_{p+1}})$. Alors, $\|Z_p\|\leqq a^p$ et l'on en déduit que la suite $\operatorname{Log} N_{t_n}=Z_1 * \ldots * Z_n$ est *bornée* dans $\mathfrak{n}$. De plus, la suite $\log N_{t_n}^{-1} N_{t_{n+p}}=Z_n * \ldots * Z_{n+p}$ est majorée en norme – essentiellement – par $Q(a^n/(1-a))$ et tend donc vers 0 lorsque n tend vers l'infini, uniformément en p. Ceci entraîne la convergence presque sûre de la suite N_{t_n}.

Par ailleurs, la limite de N_{t_n} ne dépend pas de la suite choisie, puisque si (s_n) est une autre suite, que l'on peut choisir telle que $s_n\geqq t_n$ pour tout n, les arguments précédents montrent que $N_{t_n}^{-1} N_{s_n}$ tend vers 0 presque sûrement.

Nous pouvons donc énoncer le:

THÉORÈME 2. – *Soit* M *une variété riemannienne simplement connexe, à courbure sectionnelle partout négative ou nulle, homogène sous l'action de son groupe d'isométries. On suppose que* M *n'admet pas de facteurs euclidiens dans sa décomposition de De Rham.*

Soit S *un groupe d'isométries agissant simplement transitivement sur* M, *et* $S = NA$ *sa décomposition en produit semi-direct entre un groupe abélien* A *isométrique à* $\mathbb{R}^d$ *et un groupe nilpotent* N *simplement connexe distingué dans* S.

Soit $B_t = N_t A_t$ *le mouvement brownien sur* M *lu dans* S. *Alors*:

(i) A_t *est l'exponentielle sur* A *d'un mouvement brownien sur* $\mathbb{R}^d$ *avec drift constant* m *non nul, et ce drift correspond dans* A *à un élément contractant sur* N.

(ii) *le processus* N_t *converge presque sûrement.*

Remarques. — 1. Ce théorème admet une interprétation géométrique: pour tout point p de M, la courbe $\gamma(t) = \exp(tm).p$, contenue dans le sous-espace plat totalement géodésique $A.p$, est une géodésique de M. Elle est *régulière* au sens de [24] ($A.p$ est l'unique sous-espace plat maximal la contenant) ce qui découle du fait que $m = -2H_\rho$ n'annule aucune racine (*cf.* [24]). Pour tout t, l'orbite de $\gamma(t)$ sous N, soit $\mathcal{H}_t = N.\gamma(t)$ apparaît alors comme la composante transverse à $A.p$ de l'horosphère passant par $\gamma(t)$ et centrée en $\gamma(-\infty)$. C'est le sous-groupe $h(t) = \exp tm$ qui effectue le transfert entre les différents $\mathcal{H}^s$ et l'action contractante de m se traduit ainsi par une contraction exponentielle des $\mathcal{H}_t$ lorsque t va vers $-\infty$, avec dilatation dans l'autre sens, comme en situation hyperbolique (*cf.* aussi [15] pour les espaces symétriques).

Le théorème ci-dessus indique donc le comportement du mouvement brownien en coordonnées horosphériques: partant de p, les trajectoires se rapprochent de la sous-variété $N\gamma = \bigcup_t \mathcal{H}_t$. orthogonale à $A.p$, leur position sur $\mathcal{H}_t$ converge, et elles sortent ainsi de M par le «cercle à l'infini» $\mathcal{H}_\infty = N\gamma(+\infty)$.

2. On note N_∞ la variable limite de N_t lorsque t tend vers $+\infty$. Ce type de résultat, ainsi que les arguments de période développée en [11], [2], [20] et repris en [6] en temps continu permettent de résoudre le problème de Dirichlet à l'infini: toute fonction harmonique bornée sur M se prolonge à l'infini, et l'on obtient la représentation intégrale

$$f(p) = \mathbb{E}_p(\tilde{f}(N_\infty)) = \int_{\mathcal{H}_\infty} \tilde{f}(\theta)\, d\nu_p(\theta)$$

où la mesure harmonique à l'infini partant de p, ν_p, apparaît ainsi comme la loi de la variable limite N_∞ sous $\mathbb{P}_p$. Cette représentation commute avec l'action de S sur le bord $\mathcal{H}_\infty$, action qui lorsque celui-ci est identifié à N, n'est autre que celle de S sur N vu comme espace homogène S/A. On obtient ainsi $f(s.p) = \mathbb{E}_p(\tilde{f}(s.N_\infty))$.

3. La topologie de Martin sur ce bord fera l'objet d'un prochain article.

RÉFÉRENCES

[1] R. AZENCOTT, Behaviour of Diffusion Semi Group at Infinity, *Bull. Soc. Math. France*, vol. **102**, 1974, p. 193-240.

[2] R. AZENCOTT, Espaces de Poisson des groupes localement compacts, *Lect. Notes*, n° **148**, Springer-Verlag, 1970.

[3] R. AZENCOTT et E. WILSON, On Homogeneous Manifolds with Negative Curvature, Part I, *T.A.M.S.*, vol. **215**, 1976, p. 323-362.

[4] R. AZENCOTT et E. WILSON, On Homogeneous Manifolds with Negative Curvature, Part II, *Mémoire A.M.S.*, n° **178**, 1978.

[5] W. BALLMAN, Non Positively Curved Manifolds of Higher Rank, *Ann. Maths*, vol. **122**, 1985, p. 597-609.

[6] E. DAMEK et A. HULANICKI, *Boundaries for Leftinvariant Subelliptic Operators on Semidirect Products of Nilpotent and Abelian groups*, Université de Varsovie, 1989 (prepublication).

[7] A. DEBIARD, B. GAVEAU et E. MAZET, Théorèmes de comparaison en géométrie riemannienne, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **278**, 1974, p. 723 et 795 et *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **281**, 1975, p. 455.

[8] L. ELIE, Fonctions harmoniques positives sur le groupe affine, *Lect. Notes*, n° **706**, Springer-Verlag, 1978.

[9] L. ELIE, Comportement asymptotique du noyau potentiel sur les groupes de Lie, *Ann. E.N.S.*, vol. **15**, 1982, p. 257-364.

[10] L. ELIE et A. RAUGI, Fonctions harmoniques sur certains groupes résolubles, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **280**, 1975, p. 377-379.

[11] H. FURSTENBERG, A Poisson Formula for Semi-Simple Lie Groups, *Ann. Math.*, vol. **77**, 1963, p. 335-386.

[12] H. FURSTENBERG, Non Commuting Random Products, *T.A.M.S.*, vol. **108**, 1963, p. 377-428.

[13] L. GÅRDING, Vecteurs analytiques dans les représentations des groupes de Lie, *Bull. Soc. Math. France*, vol. **88**, 1960, p. 73-93.

[14] Y. GUIVARC'H et A. RAUGI, Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence, *Zeit. Wahr.*, vol. **69**, 1985, p. 187-242.

[15] F. I. KARPALEVITCH, The Geometry of Geodesics and the Eigenfunctions of the Laplace-Beltrami Operator on Symmetric Spaces, *Trudy Moskow Math. Obsc.*, vol. **14**, 1965, p. 48-185; *Trans. Moscow Math. Soc. A.M.S.*, MR **37** # 6876, 1967, p. 51-199.

[16] Y. KIFER, Brownian Motion and Positive Harmonic Functions on Complete Manifolds of Non Positive Curvature, *Pitman Res. Notes Math.*, vol. **150**, 1986, p. 187-232.

[17] M. P. MALLIAVIN et P. MALLIAVIN, Factorisation et lois limites de la diffusion horizontale au-dessus d'un espace riemannien symétrique, *Lect. Notes*, n° **404**, 1974, p. 164-217.

[18] P. MALLIAVIN, Stochastic Calculus of Variations and Hypoelliptic Operators, Kyoto conference 1976, Kinokyniya et Wiley Editors, 1978.

[19] J. J. PRAT, Convergence angulaire de la diffusion sur une variété simplement connexe à courbure négative, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **272**, 1971, p. 1586-1589 et *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **280**, 1975, p. 1539.

[20] A. RAUGI, Fonctions harmoniques sur les groupes localement compacts à base dénombrable, *Bull. Soc. Math. France*, Mem. **54**, 1977, p. 5-118.
[21] D. SULLIVAN, The Dirichlet Problem at Infinity for Negatively Curved Manifolds, *J. Diff. Geometry*, vol. **18**, 1983, p. 723-732.
[22] J. C. TAYLOR, Brownian Motion in Non-Compact Riemannian Symmetric Spaces, Asymptotic Behaviour in Iwasawa Coordinates, *Contemporary Math.*, vol. **73**, 1988.
[23] J. C. TAYLOR, *Brownian Motion in Non-Compact Riemannian Symmetric Spaces, Asymptotic Behaviour in Polar Coordinates*, MacGill University, Montréal, 1989 (prépublication).
[24] T. H. WOLTER, *The Geometry of Homogeneous Manifolds of Nonpositive Curvature*, Université de Zurich, 1989 (prépublication).

(*Manuscrit reçu le* 13 *mars* 1990;
corrigé le 10 *mai* 1990.)