ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MARC MALRIC

Filtrations browniennes et balayage

Annales de l'I. H. P., section B, tome 26, nº 4 (1990), p. 507-539
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1990__26_4_507_0>

© Gauthier-Villars, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 26, n° 4, 1990, p. 507-539. *Probabilités et Statistiques*

Filtrations browniennes et balayage

par

Marc MALRIC

Laboratoire de Probabilités
Université Pierre et Marie Curie
Tour 56, Couloir 56-66, 3[e] étage
4, Place Jussieu 75252 Paris cedex 05, France

RÉSUMÉ. — Si A est une matrice $n \times n$ à coefficients réels, et si $(X_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien n-dimensionnel, M. Yor a conjecturé que la filtration de $M_t^A = \int_0^t (AX_s, dX_s)$ $(t \geq 0)$ est celle d'un mouvement brownien k-dimensionnel, pour un certain k. J. Auerhan et D. Lépingle ont prouvé cette conjecture lorsque A est sous-normale. Dans ce travail, de nouveaux cas sont traités à l'aide du balayage des martingales continues, et il est montré que la conjecture est vraie pour $n \leq 3$.

ABSTRACT. — M. Yor has conjectured that if A is an $n \times n$ matrix with real-valued coefficients, and $(X_t, t \geq 0)$ is an n-dimensional Brownian motion, then the filtration of $M_t^A = \int_0^t (AX_s, dX_s)$ $(t \geq 0)$ is that of a k-dimensional Brownian motion, for some integer k. J. Auerhan and D. Lépingle have proved the conjecture to be true when A is subnormal. In his paper, martingale balayage is used to treat further cases, and the conjecture is shown to hold for $n \leq 3$.

Mots clés : mouvement brownien, balayage, filtration, valeurs propres
Classification A.M.S : Primary : 60 J 65, 60 J 55. Secondary : 60 H 05, 60 G 44

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE BIBLIOTHÈQUE

INTRODUCTION

A la base de ce travail, se trouve l'idée (bien vague!) qu'une filtration brownienne doit pouvoir se laisser enrichir par la filtration naturelle de certains processus associés sans perdre son caractère brownien.

L'exemple sur lequel cette idée repose est bien connu :
la filtration de $|B|$, mouvement Brownien réfléchi, enrichie par celle de $\mathrm{sgn}(B)$ donne la filtration de B.

De là à envisager la situation en dimension supérieure ou égale à 2, et à enrichir la filtration des valeurs absolues des composantes du mouvement brownien n-dimensionnel[(1)] X par la filtration des signes des produits 2 à 2 des composantes de X, il n'y a qu'un pas.

Franchir ce pas demande la construction d'un *MB(n)* qui engendre la filtration enrichie.

Mais alors, pourquoi ne pas travailler directement sur les trajectoires du *MB(n)* initial X ?

Cette idée, qui me paraissait assez naturelle, n'est pas très classique. Aussi convient-il de commencer simplement en dimension 2.

Dans ce cas, le mouvement brownien recherché est plus facilement accessible : on construit d'abord un processus générateur, qui se révèle être un *MB*(2), transformé du *MB*(2) initial par balayage.

Rappelons, à ce propos, la formule de balayage d'Azéma – Yor des semi-martingales continues (voir, par exemple, [5]) :

Pour toute semi-martingale continue (Y_t) et tout processus prévisible borné (Z_t) on a :

$$Y_t Z_{g_t} = Y_0 Z_0 + \int_0^t Z_{g_s} dY_s \quad \text{où} \quad g_t = \sup\{s < t / Y_s = 0\}.$$

En particulier, si (Y_t) est une martingale locale continue, il en est de même de $(Y_t Z_{g_t})$.

Et voilà le secret de la transformation trajectoire par trajectoire d'une martingale continue : le balayage...

Ensuite, en dimension supérieure à 2, on balaie à nouveau et on procède par récurrence.

On obtient ainsi au paragraphe 1 du chapitre I que toutes les filtrations quadratiques entières, à savoir $\mathcal{F}(X^i X^j, 1 \leq i, j \leq n)$, sont browniennes de caractéristique n.

Dans les paragraphes suivants du chapitre I, on se sert des filtrations quadratiques entières comme «building blocks» afin de construire des filtrations browniennes plus élaborées : les filtrations quadratiques $(|X^i|)$-déterminantes.

(1) Nous écrirons par la suite, en abrégé *MB(n)*

Il est temps d'en venir à l'origine de ce travail, qui est l'étude des filtrations quadratiques browniennes de M. Yor [4] :

M. Yor [4] a étudié les martingales $M_{\cdot}^{A} = \int_{0}^{\cdot} (AX_s, dX_s)$ où X est un *MB(n)* et A une matrice carrée d'ordre n, et émet la conjecture que toute martingale M^A a une filtration propre brownienne.

J. Auerhan et D. Lépingle [1] montrent ensuite que la conjecture de M. Yor est vérifiée lorsque A est normale mais la complexité de l'expression de la caractéristique de $\mathcal{M}^A$ les font douter de la validité générale de la conjecture.

Dans le présent travail, les filtrations quadratiques permettent d'aborder la conjecture par le côté «général» de la matrice A et non par le côté particulier.

Ainsi, au chapitre II, on montre que la conjecture de M. Yor est vérifiée dès que les valeurs propres de $\tilde{A}A$ sont deux à deux distinctes. Dans la suite, on généralise en reprenant l'idée essentielle de J. Auerhan et D. Lépingle : la symétrisation.

On obtient ainsi la validité de la conjecture pour les dimensions 1, 2 et 3.

Au chapitre IV, l'étude des filtrations $\mathcal{M}^A$ est reprise en dimension 4. On constate ici la complexité croissante des cas particuliers. Néanmoins, toutes les filtrations $\mathcal{M}^A$, sauf peut-être une, sont browniennes.

La filtration isolée est étudiée, et ses générateurs précisés. C'est une filtration du type de celle du processus de l'aire de Lévy; est-elle brownienne ?

Au chapitre III, je reprends l'étude des filtrations quadratiques limitée jusque là aux filtrations quadratiques $(|X^i|)$-déterminantes. On obtient assez rapidement le résultat complet : toute filtration quadratique est brownienne.

En conclusion, je remercie très vivement M. Yor qui m'a permis par ses nombreux conseils, suggestions et critiques de réaliser ce travail. Je remercie aussi T. Jeulin et D. Lépingle pour le soin qu'ils ont bien voulu prendre à la lecture de mon manuscrit, et pour leurs remarques très précieuses.

I. FILTRATIONS QUADRATIQUES $(|X^i|)$-DÉTERMINANTES

1) Préliminaires et notations

Dans tout ce travail, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ désigne un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles, sur lequel est défini un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ $X = (X^i)_{1\leq i\leq n}$ issu de 0.

Soit Z un processus $\mathcal{F}$-mesurable à valeurs réelles ou vectorielles; on note $\mathcal{F}(Z)$ sa filtration naturelle, rendue complète et continue à droite. On notera $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ et pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $g_t^i = \sup\{s < t, X_s^i = 0\}$; pour tout $I \subset \mathbb{N}_n$, $g_t^I = \sup\{s < t, \prod_{i\in I} X_s^i = 0\} = \sup_{i\in I} g_t^i$.

DÉFINITION : *Soit $K \subset \mathbb{N}_n^2$; on appelle filtration quadratique associée à K la filtration $\mathcal{F}^X(2, K) = \mathcal{F}(X^i X^j; (i,j) \in K)$.*

En particulier si $K = \Delta_n$, diagonale de $\mathbb{N}_n^2$, $\mathcal{F}^X(2, \Delta_n)$ et la filtration des valeurs absolues $(|X^i|, i \leq n)$; si $K = \mathbb{N}_n^2$, on note $\mathcal{F}^X(2, n)$ la filtration quadratique entière.

2) Filtrations quadratiques entières

Rappelons qu'en dimension 1, $\mathcal{F}^X(2,1)$ est la filtration du *MB*(1) réfléchi $|X|$, qui est engendrée par $\int_0^{\cdot} \operatorname{sgn}(X_s) dX_s$, puis abordons le cas $n = 2$ par la remarque suivante :

$$\mathcal{F}^X(2,2) = \mathcal{F}(X^2, XY, Y^2) = \mathcal{F}(|X|, |Y|, \operatorname{sgn} XY) = \mathcal{F}(|X|, Y \operatorname{sgn} X).$$

On a alors le

LEMME 1.1 : *$\mathcal{F}(2,2) = \mathcal{F}({}^Y X, {}^X Y)$, avec, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:*

$$\begin{cases} {}^Y X_t = \operatorname{sgn}(Y_{g_t^X}) \cdot X_t \\ {}^X Y_t = \operatorname{sgn}(X_{g_t^Y}) \cdot Y_t \end{cases}.$$

De plus, $({}^Y X, {}^X Y)$ est un MB(2).

Preuve : On sait que P-p.s. X et Y n'ont pas de zéro commun (sauf 0!)

Ensuite, $g_\cdot^X = g_\cdot^{|X|}$, et $g_\cdot^Y = g_\cdot^{|Y|}$.

Ainsi, ${}^Y X_t = \begin{cases} |X_t| & \text{si } \operatorname{sgn}(X_\cdot Y_\cdot) = 1 \quad \text{au} \quad \mathcal{V}_*^+(g_t^{|X|}) \\ -|X_t| & \text{sinon} \end{cases}.$

où $\mathcal{V}_*^+(a)$ désigne le voisinage à droite de a, a exclu.
Donc, ${}^YX$ et ${}^XY$ sont $\mathcal{F}^X(2,2)$-adaptés.

Réciproquement, $|{}^XY| = |X|$, et $|{}^XY| = |Y|$ tandis que

$$\begin{cases} \operatorname{sgn}(X_tY_t) = \operatorname{sgn}({}^XY_t) & \text{si} \quad g_t^{|X|} < g_t^{|Y|} \\ \operatorname{sgn}(X_tY_t) = \operatorname{sgn}({}^YX_t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en conclut, puisque $g_\cdot^X = g_\cdot^{|X|} = g_\cdot^{{}^YX}$, et $g_\cdot^Y = g_\cdot^{|Y|} = g_\cdot^{{}^XY}$, que :

$$\mathcal{F}^X(2,2) \subset \mathcal{F}({}^YX, {}^XY)$$

d'où l'identité des deux filtrations.

Montrons enfin que $({}^YX, {}^XY)$ est un $BM(2)$.

C'est une conséquence de la formule de balayage d'Azéma-Yor : en effet, d'après cette formule, puisque $\operatorname{sgn}(Y_\cdot)$ est un processus prévisible, on a :

$$\begin{cases} {}^YX_t = \operatorname{sgn}(Y_{g_t^X})X_t = \displaystyle\int_0^t \operatorname{sgn}(Y_{g_s^X})dX_s \\ {}^XY_t = \operatorname{sgn}(X_{g_t^Y})Y_t = \displaystyle\int_0^t \operatorname{sgn}(X_{g_s^Y})dY_s \end{cases}.$$

Ainsi, ${}^XY_\cdot$ et ${}^YX_\cdot$ sont des martingales locales continues, et l'on a :

$$\langle {}^YX\rangle_t = \langle {}^XY\rangle_t = t, \langle {}^YX, {}^XY\rangle_t = 0.$$

Ceci permet de conclure par application du théorème de Lévy-Itô. □

Remarques : Le cas simple de la dimension 2 permet de dégager les méthodes intervenant dans cette question. On notera en particulier le traitement trajectoriel des problèmes de mesurabilité.

Il s'agit maintenant de généraliser l'emploi de ces méthodes au cas des dimensions supérieures, ce qui n'est pas immédiat.

C'est ainsi qu'on s'aperçoit rapidement de l'insuffisance du $BM(n)$ $({}^{X^{i+1}}X^i)_{i\in\mathbb{N}_n}$ (en convenant que $X^{n+1} = X^1$), mouvement brownien qui convenait en dimension 2.

Pour plus de commodité, nous posons $\mathbb{N}_N^0 = \{0\} \cup \mathbb{N}_N = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$, et nous rappelons que : $\forall K \subset \mathbb{N}_N$, $g_t^K = \bigvee_{i\in K} g_t^{X^i}$ *est le dernier zéro de* $\prod_{i\in K} X^i$ avant t.

Nous désignons par *séquence d'excursion de* X précédant t *toute suite finie aléatoire* $(n_r, t_r)_{r\in\mathbb{N}_N^0}$ *telle que :* $t_o = g_t^{\mathbb{N}_N}$, n_o *est l'unique entier non nul vérifiant* $X_{t_o}^{n_o} = 0$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}_{N-1}^{o}$, $t_{r+1} = g_{t_r}^{\mathbb{N}_n \setminus \{n_r\}}$, *$n_{r+1}$ est l'unique élément de $\mathbb{N}_n \setminus \{n_i\}$ vérifiant $X_{t_{r+1}}^{n_{r+1}} = 0$.* $X^{n_{r+1}}$ est donc la dernière des coordonnées X^j, avec $j \neq n_r$, à s'annuler avant l'instant t_r, et $t_{r+1} = g_{t_r}^{n_{r+1}}$.

On appelle support de la séquence, $I = \{n_i,\ i$ de 0 à $N\}$ *et longueur de la séquence,* card(I).

On définit enfin le transformé quadratique de X de la manière suivante : *c'est le processus noté :*

$$X^{(2,n)} = (X_i^{(2,n)}(t,\omega))_{i \in \mathbb{N}_n}, (t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$$

avec $X_i^{(2,n)}(t,\cdot) = \varepsilon_t^i X_t^i$
où $\varepsilon_t^i = \sum_{k \in \mathbb{N}_n \setminus \{i\}} 1_{\left[g_{g_t^i}^k > \bigvee_{j \in \mathbb{N}_n \setminus \{i,k\}} g_{g_t^i}^j\right]} \operatorname{sgn}(X_{g_t^i}^k)$
c'est-à-dire que ε_t^i est le signe à l'instant g_t^i de la dernière coordonnée X^k, $k \neq i$, qui s'annule avant l'instant g_t^i.
Pour simplifier les notations, on notera, au cours de la démonstration du théorème suivant, $\widetilde{X}$ au lieu de $X^{(2,n)}$.

THÉORÈME 1.2 : $X^{(2,n)}$ *est un* $BM(n)$ *dont la filtration propre est la filtration quadratique entière.*
Ainsi : $\mathcal{F}(X^{(2,n)}) = \mathcal{F}(2,n)$.

Preuve : (a) Soit $H_t^i = \sum_{k \in \mathbb{N}_n \setminus \{i\}} 1_{\left[g_t^k > \bigvee_{j \in \mathbb{N}_n \setminus \{i,k\}} g_t^j\right]} \operatorname{sgn}(X_t^k)$.
Alors $\widetilde{X}_t^i = H_{g_t^i}^i X_t^i$.
Comme H est un processus prévisible, on peut appliquer à nouveau la formule d'Azéma-Yor [5].
D'où : $\widetilde{X}_t^i = \int_0^t H_{g_s^i}^i dX_s^i$.

Ceci entraîne, d'après le Théorème de Lévy-Itô, que $\widetilde{X}$ est un $MB(n)$.

(b) On constate aisément que $\widetilde{X}$ est $\mathcal{F}^X(2,n)$-adapté, puisque :

$$\widetilde{X}_t^i = \begin{cases} |X_t^i| \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}_n \setminus \{i\}, g_{g_t^i}^k > \bigvee_{j \in \mathbb{N} \setminus \{i,k\}} g_{g_t^i}^j \text{ et } \operatorname{sgn}(X^i X^k) = 1 \\ \hfill \text{au } \mathcal{V}_*^+(g_t^i) \\ -|X_t^i| \quad \text{sinon} \end{cases}$$

et que les intervalles d'excursion des X^j coïncident avec ceux des $(X^j)^2$ ou des $|X^j|$.

(c) Pour la réciproque, on raisonne par récurrence.

On raisonne ω par ω, en se plaçant sur le sous-ensemble plein, soit Ω_0, de Ω où les composantes de X n'ont pas de zéro commun sauf 0, et où 0 est un zéro non isolé de chaque composante de X.

Considérons la proposition :

$(\mathcal{P}_p)$: «Pour toute séquence d'excursion $(n_r, t_r)_{0 \leq r \leq N}$ de longueur p la connaissance des $\operatorname{sgn}(X^{n_r} X^{n_{r+1}})_{t_r^+}$ pour tout $r \in [0, N-1]$ entraîne celle des $\operatorname{sgn}(X_t^j X_t^k)$ pour tous $(j,k) \in I^2$ où I désigne le support de la séquence d'excursion».

Il est clair que $(\mathcal{P}_2)$ est vraie. Supposons $(\mathcal{P}_p)$ vraie.
Soit $(n_r, t_r)_{0 \leq r \leq N}$ une séquence d'excursion de longueur $p+1$ telle que les informations contenues dans l'hypothèse de $(\mathcal{P}_{p+1})$ soient connues.

Quitte à minimiser l'information contenue dans la séquence, on se ramène au cas où $n_N \notin \{n_r, 0 \leq r \leq N-1\}$. (Il suffit d'arrêter la séquence lorsque la $(p+1)^e$ nouvelle coordonnée de X intervient pour la première fois).

Alors, $(n_r, t_r)_{0 \leq r \leq N-1}$ est une séquence de longueur p; ainsi, d'après $(\mathcal{P}_p)$, pour tous r et s de $\mathbb{N}_{n-1}^0$,

$$\operatorname{sgn}(X_t^{n_r} X_t^{n_s}) \text{ est connu;}$$

de plus, $\operatorname{sgn}(X^{n_N} X^{n_{N-1}})_{t_{n-1}^+}$ est connu.

Or, sur $]t_n, t]$, X^{n_N} ne s'annule pas. Par définition, $X^{n_{N-1}}$ ne s'annule pas sur $]t_{N-1}, t_{N-2}]$, donc $\operatorname{sgn}(X^{n_N} X^{n_{N-1}})_{t_{N-2}^+}$ est connu.

Par hypothèse, $\operatorname{sgn}(X^{n_{N-1}} X^{n_{N-2}})_{t_{N-2}^+}$ est connu.
On peut itérer ce raisonnement. On en déduit que $\operatorname{sgn}(X^{n_N} X^{n_0})_{t_0^+}$ est connu, c'est-à-dire que $\operatorname{sgn}(X^{n_N} X^{n_0})_t$ est connu.

Donc, par produits, on connaît : $\operatorname{sgn}(X^j X^k)t$ pour tous $(j,k) \in I^2$, I étant le support de la séquence de longueur $p+1$, ce qui établit la validité de $(\mathcal{P}_{p+1})$.

Il nous reste néanmoins à établir que tous les (i, g_t^i) peuvent être insérés dans une même séquence d'excursion de X avant t.

Raisonnons par l'absurde; s'il n'en était pas ainsi, soit

$$(n_0, t_0) \quad \text{tel que} \quad t_0 = g_t^{\mathbb{N}_n} \quad \text{et} \quad X_{t_0}^{n_0} = 0,$$

puis (n_{r+1}, t_{r+1}) tel que $t_{r+1} = g_{t_r}^{\mathbb{N}_n \setminus \{n_r\}}$ et $X_{t_{r+1}}^{n_{r+1}} = 0$.
On définirait ainsi une suite double infinie.
$(t_r)_{r \in \mathbb{N}}$ serait une suite de réels strictement décroissante minorée par 0; $\{n_r, r \in \mathbb{N}\}$ serait strictement contenue dans $\mathbb{N}_n$.

La suite (n_r) ne pouvant être constante à partir d'un certain rang (puisque $n_{r+1} n_r$ pour tout r) possèderait au moins deux valeurs d'adhérence n' et n''.

Alors, à l'instant $t_\infty = \lim \downarrow t_r$, $X^{n'}$ et $X^{n''}$ aurait un zéro commun.

Ceci exige : $t_\infty = 0$, ce qui est absurde, car, dans ce cas, toute composante de X non mise en œuvre par la séquence d'excursion admettrait 0 comme zéro isolé.

Soit donc $(n_r, t_r)_{r\in \mathbb{N}_N^0}$ une séquence d'excursion de longueur n. Elle contient tous les $(i, g_t^i)_{i\in \mathbb{N}_n}$.

Il est clair que, pour cette séquence, sous $\mathcal{F}_t(\widetilde{X})$, $(\mathcal{P}_n)$ est satisfaite. On en déduit que sous $\mathcal{F}_t(\widetilde{X})$, pour tous $(j,k) \in \mathbb{N}^n$ $\operatorname{sgn}(X^j X^k)_t$ est connu *i.e.* $\mathcal{F}^X(2,n) \subset \mathcal{F}(\widetilde{X})$, d'où le résultat. □

Le résultat suivant montre que l'information perdue dans $\mathcal{F}(X^{(2,n)})$ (relativement à l'information contenue dans $\mathcal{F}(X)$) est particulièrement «petit». De façon précise :

PROPOSITION 1.3 : *Toutes les filtrations quadratiques du MB(n) X sont strictement contenues dans la filtration propre de X, car :*

$$\forall t > 0, \quad \operatorname{sgn}(X_t^1) \text{ est indépendant de } \mathcal{F}_\infty(X^{(2,n)}).$$

De plus : $\forall s \geq t$, $\mathcal{F}_s(X) = \mathcal{F}_s(X^{(2,n)}) \vee \sigma(\operatorname{sgn} X_t^1)$.

Preuve :

• L'indépendance résulte immédiatement du fait que la transformation $X \to -X$ tranforme $\operatorname{sgn}(X_t^1)$ en son opposé et laisse $X^{(2,n)}$ invariant :

• Ensuite, il est clair que $\mathcal{F}_s(X^{(2,n)}) \vee \sigma(\operatorname{sgn}(X_t^1) \subset \mathcal{F}_s(X)$.

• Montrons l'inclusion inverse : on raisonne encore ici ω par ω; supposons connues les trajectoires de $X_\cdot^i X_\cdot^k(\omega)$ sur $[0,t]$, ainsi que $\operatorname{sgn}(X_t^1)$; soit $A_\omega = \{v \leq t : \forall u \in [v,t],\ X_u(\omega) \text{ est connu}\}$.
A_ω est un intervalle aléatoire inclus dans $[0,t]$.

Comme l'événement $\{X_t^1 = 0\}$ est négligeable, les tribus étant toutes complètes, on peut se placer sur l'événement contraire.

Dès lors, on constate facilement que $\mathcal{F}_s(X^{(2,n)}) \vee \sigma(\operatorname{sgn} X_t^1)$ détermine les signes et les valeurs absolues de toutes les composantes de X sur $[g_t^1, t]$, donc $t \in A$.

Soit $\alpha = \operatorname{Inf} A$. Par continuité des trajectoires browniennes, on déduit :

$$A = [\alpha, t].$$

Supposons $\alpha > 0$. Nécessairement, $X_\alpha^1 = 0$ (sinon le raisonnement précédent s'applique, et $g_\alpha^1 \in A$).

Mais alors, à un exemple négligeable près, $X_\alpha^2 \neq 0$.

Ceci est impossible puisque le même raisonnement conduit à $g_\alpha^2 \in A$. Ainsi, $A = [0,t]$. □

Pour les instants suivant t, on introduit de la même façon l'ensemble aléatoire :

$$B_\omega = \{v \in [t,s]; \forall u \in [t,v], X_u(\omega) \quad \text{est connu}\}$$

Alors, $t \in B$, et si $\beta = \sup B$, on a : $B = [t, \beta]$.

Par une démonstration par l'absurde analogue à celle du cas antérieur à t, on obtient $\beta = s$, d'où le résultat annoncé. $\square$

Terminons cette section par une première extension immédiate des résultats du théorème fondamental 1.2.

Pour cela, *lorsque I est une partie non vide de $\mathbb{N}_n$, on introduit le processus vectoriel $X_{(I)}$ ainsi défini :*
soit $k_1, k_2, \ldots, k_p$ la suite strictement croissante des éléments de I. Alors, $X_{(I)}$ est le $MB(p)$ de composantes $X^j_{(I)} = X^{k_j}$ $\forall j \in \mathbb{N}_p$. On appelle transformé quadratique de X relatif à I le processus à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, noté $X^{(2,I)}$, défini par ses composantes :

$$\begin{aligned} &\forall i \in \mathbb{N}_n \setminus I, && X_i^{(2,I)} = 0 \\ &\forall j \in \mathbb{N}_p, && X_{k_j}^{(2,I)} = (X_{(I)})_j^{(2,p)}. \end{aligned}$$

PROPOSITION 1.4 : *$X^{(2,I)}$ est un $MB(p)$, et $\mathcal{F}(X^{(2,I)}) = \mathcal{F}^X(2, I \times I)$.*

Preuve : C'est la traduction immédiate du théorème 1.2. $\square$

3) Filtrations quadratiques $(|X^i|)$-déterminantes

Il s'agit maintenant, à partir des filtrations quadratiques entières du paragraphe précédent, de construire des filtrations quadratiques plus générales.

Dans un premier temps, on va simplement mettre bout à bout de telles filtrations.

DÉFINITIONS : *Soit $\mathcal{J} = \{I_1, \ldots, I_p\}$ une partition de $\mathbb{N}_n$. On appelle filtration quadratique de X associée à la partition $\mathcal{J}$ la filtration :*

$$\mathcal{F}^X(2, \mathcal{J}) = \mathcal{F}^X\Big(2, \bigcup_{k=1}^{p} I_k^2\Big).$$

On appelle transformée quadratique de X relatifs à $\mathcal{J}$, le processus, noté $X^{(2,\mathcal{J})}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et défini par ses composantes de façon suivante :

$$X_i^{(2,\mathcal{J})} = X_i^{(2,I_{k(i)})}$$

où, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $k(i)$ désigne l'unique élément de $\mathbb{N}_p$ vérifiant $i \in I_{k(i)}$.

PROPOSITION 1.5 : *$X^{(2,\mathcal{J})}$ est un $MB(n)$, et $\mathcal{F}^x(2, \mathcal{J}) = \mathcal{F}(X^{(2,\mathcal{J})})$.*

Preuve :

- La première assertion est évidente.
- Pour démontrer la seconde, on note que :

$$\mathcal{F}(2,\mathcal{J}) = \bigvee_{k\in\mathbb{N}_p} \mathcal{F}^X(2,I_k^2) = \bigvee_{k\in\mathbb{N}_p} \mathcal{F}(X^{(2,I_k)} = \mathcal{F}(X^{(2,\mathcal{J})}). \qquad \square$$

Considérons maintenant une partie K de $\mathbb{N}_n^2$ telle que :

$$\mathcal{F}^X(2,\Delta_n) \subset \mathcal{F}^X(2,K),$$

c'est-à-dire telle que toutes les valeurs absolues des composantes de X soient $\mathcal{F}^X(2,K)$-adaptées.

On dira qu'une telle partie K est $(|X^i|)$-déterminante.

On dira aussi que la filtration $\mathcal{F}^X(2,K)$ est $(|X^i|)$-déterminante.

On va établir, en complétant par produit la famille des générateurs $(X^iX^j)_{(i,j)\in K}$, que $\mathcal{F}^X(2,K)$ est alors une filtration quadratique du type précédent, c'est-à-dire associée à une partition. Pour cela, introduisons la relation suivante dans $\mathbb{N}_n$:

Deux éléments i et j de $\mathbb{N}_n$ sont dits K-reliés si :

$$X^iX^j \quad \text{est} \quad \mathcal{F}^X(2,K)\text{-}adapté.$$

C'est évidemment une relation d'équivalence.

On appelle K-chaînes les classes d'équivalence de cette relation.

Soit $\mathcal{J}_K = \{I_1,\ldots,I_p\}$ la partition de $\mathbb{N}_n$ constituée par les K-chaînes.

On appelle transformé quadratique de X relatif à K le $MB(n)$ $X^{(2,\mathcal{J}_K)}$ qu'on notera désormais $X^{(2,K)}$.

THÉORÈME 1.6 : *Toute filtration quadratique $(|X^i|)$-déterminante est brownienne de caractéristique n, et $\mathcal{F}^X(2,K) = \mathcal{F}(X^{(2,K)})$.*

preuve : Pour tous $(i,j)\in K$, i et j sont K-reliés, donc

$$\mathcal{F}^X(2,K) \subset \bigvee_{k=1}^{p} \mathcal{F}(X^{(2,I_k)}).$$

Par ailleurs, pour tout $k\in\mathbb{N}_p$, pour tous $(i,j)\in I_k^2$, X^iX^j est $\mathcal{F}^X(2,K)$-adapté, donc : $\bigvee_{k=1}^{p} \mathcal{F}(X^{(2,I_k)}) \subset \mathcal{F}^X(2,K)$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{F}^X(2,K) = \mathcal{F}(X^{(2,K)}). \qquad \square$$

Remarque : Il est clair que $\mathcal{F}^X(2,K)$ est $(|X^i|)$-déterminante dès que K contient Δ_n, la diagonale de $\mathbb{N}_n^2$.

Cependant, cette condition n'est pas nécessaire puisque $\mathcal{F}(X^{(2,2)}) = \mathcal{F}^X(2, \{(1,1),(1,2)\})$.

Voici une façon remarquable d'engendrer les filtrations $(|X^i|)$-déterminantes :

THÉORÈME 1.7. *Soit $\mathcal{F}^X(2,K)$ une filtration quadratique $(|X^i|)$-déterminante. Alors,* $\mathcal{F}^X(2,K) = \mathcal{F}\left(\int_0^{\cdot} X_s^i dX_s^j ; (i,j) \text{ ou } (j,i) \in K\right)$.

Preuve : Notons X' le processus à valeurs vectorielles $\left(\int_0^{\cdot} X_s^i dX_s^j\right)_{(i,j) \text{ ou } (j,i) \in K}$. Pour tous $(i,j) \in K$, on a :

$$X_t^i X_t^j = \int_0^t X_s^i dX_s^j + \int_0^t X_s^j dX_s^i + \delta_{i,j} t$$

donc $X^i X^j$ est $\mathcal{F}(X')$-adapté, c'est-à-dire : $\mathcal{F}^X(2,K) \subset \mathcal{F}(X')$.

• Réciproquement, pour tous $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$ tels que (i,j) ou $(j,i) \in K$ comme $\mathcal{F}^X(2,K)$ est $(|X^i|)$-déterminante, $|X^i|$ et $|X^j|$ sont $\mathcal{F}^X(2,K)$-adaptés.

$$\begin{aligned}\text{Or} \quad X^i dX^j &= |X^i| \operatorname{sgn}(X^i) \operatorname{sgn}(X^j) \operatorname{sgn}(X^j) dX^j \\ &= |X^i| \operatorname{sgn}(X^i X^j)(d|X^j| - dL_\cdot^0(X^j)) \\ &= |X^i| \operatorname{sgn}(X^i X^j)(d|X^j| - \frac{1}{2} dL_\cdot^0(|X^j|)).\end{aligned}$$

Ainsi, $\int_0^{\cdot} X_s^i dX_s^j$ est $\mathcal{F}(X^{(2,K)})$-adapté, ce qui achève la démonstration. □

Tirons maintenant les conséquences de ce qui précède dans le cas des filtrations partiellement $(|X^i|)$-déterminantes :

On dit que $\mathcal{F}^X(2,K)$ est $(|X^i|)_{i \in I}$-déterminantes si :

$$\forall i \in I, \quad |X^i| \textit{ est } \mathcal{F}^X(2,K)\textit{-adapté.}$$

COROLLAIRE 1.8 : *Soit $\mathcal{F}^X(2,K)$ une filtration quadratique $(|X^i|)_{i \in I}$-déterminante. Alors, $\mathcal{F}(X^{(2,K \cap I^2)}) \subset \mathcal{F}^X(2,K)$.*

En particulier, pour tout (i,j) ou $(j,i) \in K \cap I^2$, $\int_0^{\cdot} X_s^i dX_s^j$ est $\mathcal{F}^X(2,K)$-adapté.

La preuve est immédiate. La proposition 1.5 se généralise en

PROPOSITION 1.9 : *Soit $\Delta_n \subset K_1 \subset K_2 \subset \mathbb{N}_n^2$. S'il existe deux éléments i et j de $\mathbb{N}_n$, K^2-reliés qui ne sont pas K_1-reliés, alors $\mathcal{F}(2,K_1) \not\subset \mathcal{F}^X(2,K_2)$.*

Preuve : Il suffit de transformer en leurs opposées toutes les composantes de X dont l'indice est contenu dans la K_1-chaîne contenant i. Alors, $X^{(2,K_1)}$ est laissé invariant, contrairement à $X^{(2,K_2)}$ puisque X^iX^j est transformé en $-X^iX^j$. □

Remarque : Soit K une partie $(|X^i|)$-déterminante de $\mathbb{N}_n^2$. Posons :

$$\begin{cases} X^{(2,K)^0} = X \\ X^{(2,K)^{n+1}} = (X^{(2,K)^n})^{(2,K)} \end{cases}$$

puis $\mathcal{F}^n(X,K) = \mathcal{F}(X^{(2,K)^n})$.

Alors, $(\mathcal{F}^n(X,K))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante de filtrations; $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}^n(X,K) = \mathcal{F}^\infty(X,K)$ est encore une filtration.

1^er cas : $K = \Delta_n$.

Quelle est la nature de la filtration asymptotique $\mathcal{F}^\infty(X,\Delta_n)$?

Le problème est bien connu particulièrement en dimension 1 et n'admet pas encore de solution.

Grossièrement, quelle est la perte d'information lorsqu'on passe de $\mathcal{F}^n(B)$ à $\mathcal{F}^{n+1}(B)$?

On ne perd pas la connaissance des zéros du $MB(1)$ β^n qui engendre $\mathcal{F}^n_\cdot$, mais on perd le signe de β^n sur chacune de ses excursions.

Donc, si l'on considère une énumération des zéros de β^n, on perd une variable uniformément distribuée sur $[0,1]$...

Ceci permet de supposer que peut-être $\mathcal{F}^\infty(B)$ est triviale. En conséquence, en dimension n, $\mathcal{F}^\infty(X,\Delta_n)$ serait triviale...

2^ème cas : $K = \mathbb{N}_n$.

Il est clair que $\mathcal{F}^\infty(X,\mathbb{N}^n) \supset \mathcal{F}(|X|)$.

Cette fois, la perte d'information entre $\mathcal{F}^m$ et $\mathcal{F}_1^{m+1}$ a été déterminée : on perd $\mathrm{sgn}((X^{(2,n)})_1^m)$, c'est-à-dire une v.a. de Bernoulli. A-t-on $\mathcal{F}^\infty(X,N_n) = \mathcal{F}(|X|)$?

4) Invariance par transformations orthogonales des filtrations quadratiques

Soit $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Il est bien connu que RX est un *MB(n)* équivalent à X (car $X = \widetilde{R}(RX)$).

PROPOSITION 1.10 : $\mathcal{F}^{RX}(2,\Delta_n) = \mathcal{F}^X(2,\Delta_n)$ *si et seulement si* R *laisse globalement invariante la réunion des axes de coordonnées.*

Preuve : La condition est clairement suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire.

Si la réunion des axes de coordonnées n'est pas globalement invariante, R n'est pas une matrice de permutation.
Posons $Y = RX$. En conséquence, on peut supposer que :

$$Y^1 = \sum_{i=1}^{n} R_{1i} X^i, \quad \text{avec} \quad R_{12} R_{13} \neq 0.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons : $\mathcal{F}(X^{(2,\Delta_n)}) = \mathcal{F}(Y^{(2,\Delta_n)})$; alors, $(Y^1)^2$ serait $\mathcal{F}(X^{(2n\Delta_n)})$-adapté.

$$\text{Or, } (Y^1)^2 = \left(\sum_{i \in \mathbb{N}_n \setminus \{2,3\}} R_{1i} X^i \right)^2 + 2R_{12} X^2 \sum_{i \in \mathbb{N}_n \setminus \{2,3\}} R_{1i} X^i$$
$$+ 2R_{13} X^3 \sum_{i \in \mathbb{N}_n \setminus \{2,3\}} R_{1i} X^i + R_{12}^2 (X^2)^2 + R_{13}^2 (X^3)^2 + 2R_{12} R_{13} X^2 X^3.$$

Donc, $\dfrac{1}{2} \dfrac{d}{dt} \langle (Y^1)^2, (Y^2)^2 \rangle = 2R_{12} X^2 \sum_{i \in \mathbb{N}_n \setminus \{2,3\}} R_{1i} X^i + 2R_{12}^2 (X^2)^2 +$ $2R_{12} R_{13} X^2 X^3$ est $\mathcal{F}(X^{(2,\Delta_n)})$-adapté.

On en déduit, en considérant le crochet de ce dernier processus avec $(X^3)^2$, que

$$X^2 X^3 \quad \text{est} \quad \mathcal{F}(X^{(2,\Delta_n)})\text{-adapté.}$$

Ceci est impossible, puisque la transformation $(X^1, X^2, \ldots, X^n) \to (X^1, -X^2, X^3, \ldots, X^n)$ laisse la filtration $\mathcal{F}^X(2, \Delta_n)$ invariante, tandis qu'elle transforme $X^2 X^3$ et son opposée. □

A l'inverse de ce résultat, on a la :

PROPOSITION 1.11 : *$\mathcal{F}(X^{(2,n)})$ est invariante par transformations orthogonales. De plus, c'est la seule filtration quadratique ($|X^i|$)-déterminante qui est invariante sous $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.*

Preuve : 1) Il suffit d'établir que $\mathcal{F}(RX^{(2,n)}) \subset \mathcal{F}(X^{(2,n)})$.
Mais cela est clair, car les composantes de RX sont des formes linéaires en les X^i, et leurs produits deux à deux des formes quadratiques.
Soit $\mathcal{F}^X(2, K)$ une filtration quadratique ($|X^i|$)-déterminante différente de $\mathcal{F}^X(2, n)$.
Soit (i, j) un couple non K-relié de $\mathbb{N}_n^2$.
Soit R la transformation ortogonale de $\mathbb{R}^n$ ainsi définie :

$$Re_i = \frac{e_i + e_j}{\sqrt{2}}, \; Re_j = \frac{-e_i + e_j}{\sqrt{2}}; \; \forall k \in \mathbb{N}_n \setminus \{i, j\}, \; Re_k = e_k.$$

Alors, $(X^j)^2 - (X^i)^2$ est $\mathcal{F}^X(2, K)$ adapté, mais n'est pas $\mathcal{F}^{RX}(2, K)$-adapté ce qui permet de conclure. □

Remarque : Enfin rappelons (cf. Théorème 1 de [2]) que la filtration naturelle *du carré de processus de Bessel de dimension n issu de* 0 :

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$$

est la filtration du *BM(1)* :

$$B_t = \int_0^t \frac{\sum_{i=1}^{n} X_s^i dX_s^i}{\left(\sum_{i=1}^{n} (X_s^i)^2\right)^{1/2}}, \; t \geq 0.$$

Cette filtration est évidemment *invariante sous* $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Dans le chapitre suivant, nous verrons intervenir simultanément les filtrations quadratiques de RX et les filtrations de carrés de Bessel associés à RX, $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

II. LES FILTRATIONS DES MARTINGALES BROWNIENNES DE M. YOR

1) Rappels

On note, comme dans [4], *pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M^A la martingale* $\int_0^{\cdot} (AX_s, dX_s)$, *et $\mathcal{M}^A$ sa filtration naturelle.*

(On notera $M_\cdot^A(X)$ et $\mathcal{M}_\cdot^A(X)$ s'il y a risque de confusion). *M. Yor a montré les résultats suivants :*

(i) M^A *domine* $\frac{d}{dt}\langle M^A \rangle = |AX|^2 = (\widetilde{A}AX, X)$

(ii) $M^{A+\widetilde{A}}$ *et* (AX, X) *sont des processus équivalents* (conséquence de la formule d'Itô). Ainsi, d'après (i) et (ii), M^A domine $M^{(\widetilde{A}A)}$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

(iii) pour toute $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}^A(RX) = \mathcal{M}^{\widetilde{R}AR}(X)$.

Preuve : En effet :

$$M^{\widetilde{R}AR}(X) = \int_0^{\cdot} (\widetilde{R}AR\, X_s, dX_s) = \int_0^{\cdot} (AY_s, dY_s)$$

où $Y = RX$ est un processus éqivalent à X. □

On a enfin le résultat fondamental :

(iv) *Lorsque A est symétrique, $\mathcal{M}^A$ est une filtration brownienne de caractéristique k, nombre des valeurs propres distinctes non nulles de A.*

Preuve : D'après (iii), on peut supposer A diagonale.
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes non nulles de A, et $E_1, \ldots, E_k$ les s.e.v. propres associés. On note $X_{(E_i)}$ la projection orthogonales de X sur E. Soit $(\mathcal{P}_p)$ la proposition : « M^A domine (A^pX, X) » $(\mathcal{P}_1)$ est vraie. Supposons $(\mathcal{P}_p)$ vraie.
Alors d'après (ii), M^A domine M^{A^p} ; de plus, d'après (i), M^A domine $\frac{d}{dt}\langle M^A, M^{A^p}\rangle = (AX, A^pX)$, *i.e.* M^A domine $(A^{p+1}X, X)$, ce que l'on voulait établir.

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, M^A domine $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^k \|X_{(E_i)}\|^2$.

On en déduit (Van der Monde) que M^A domine $|X_{(E_i)}|$, pour tout $i \in \mathbb{N}_k$. Réciproquement, pour tout $i \in \mathbb{N}_k$, le processus $\int_0^\cdot \sum_{j/X^j \in E_i} X_s^j dX_s^j$ est $\mathcal{F}(|X_{E_i}|)$-adapté, ce qu'il fallait établir. □

M. Yor a émis la conjoncture (cf. [4]) que toute $\mathcal{M}^A$ serait une filtration brownienne.

Les travaux *d'Auerhan-Lépingle* ([1]) ont montré que lorsque A est *normale* ou même sous-normale (*i.e.* la projection orthogonale de A sur Im $\widetilde{A}A$ est normale et commute avec $\widetilde{A}A$), *il en est ainsi.* On rappellera par la suite la démonstration de ce résultat.

Grâce à l'étude des filtrations quadratiques, on va pouvoir étendre largement la validité de la conjecture de M. Yor.

Nous allons maintenant définir les filtrations quadratiques $(|X^i|)$-déterminantes qui jouent un rôle essentiel dans cette question :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle filtration quadratique $(|X^i|)$-déterminante associée à A la filtration

$$\mathcal{F}(X^{(2,Ad)}) \quad \text{où} \quad X^{(2,Ad)} = X^{(2,K)}$$

avec $K = \{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2 / A_{ij}$ *ou* $A_{ji} \neq 0\} \cup \Delta_n$.

On notera quelquefois $\mathcal{F}\left(X^{(2,A,\Delta_n)}\right)$ au lieu de $\mathcal{F}\left(X^{(2,Ad)}\right)$ lorsque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque : $\mathcal{F}(X^{(2,Ad)}) = \mathcal{F}(X^iX^j; |A_{ij}| + |A_{ji}| + \delta_{ij} \neq 0)$.

2) Cas où les valeurs propres de $\widetilde{A}A$ sont deux à deux distinctes

(a) *Ker* $\widetilde{A}A = \{0\}$.

Commençons d'abord par la :

DÉFINITION : *$\mathcal{M}^A$ est $(|X^i|)$-déterminante (resp. $(|X^i|)_{i\in I}$-déterminante) si : $\mathcal{F}^X(2,\Delta_n) \subset \mathcal{M}^A$ (resp. $\mathcal{F}(|X^i|), i \in I) \subset \mathcal{M}^A$).*

THÉORÈME 2.1 : 1) *Lorsque $\mathcal{M}^A(X)$ est $(|X^i|)$-déterminante, $\mathcal{M}^A(X) = \mathcal{F}(X^{(2,Ad)})$.*

2) *Lorsque $\mathcal{M}^A(X)$ est $(|X^i|)_{i\in I}$-déterminante, $\mathcal{M}^A(X) \supset \mathcal{F}(X^{(2,A_I,\Delta_I)})$ et M^A domine M^{A_I}, où $A_I = P_I A P_I$, P_I désignant la projection orthogonale sur Vect$(e_i, i \in I)$, et $\mathcal{F}(X^{(2,A_I,\Delta_I)}) = \mathcal{F}(X^iX^j; \forall(i,j) \in I^2,\ |A_{ij}| + |A_{ji}| + \delta_{ij} \neq 0)$.*

Preuve : 1) $dM^A = \sum_i \Big(\sum_j a_{ij}X^j\Big)dX^i$, et M^A domine $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle M^A, X_i^2\rangle$

$= \sum_j a_{ij}X^iX^j$ donc aussi $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle \sum_j a_{ij}X^jX^i, X_j^2\rangle = a_{ij}X^iX^j$.

On en déduit aisément que $\mathcal{F}(X^{(2,Ad)}) \subset \mathcal{M}^A$.

Réciproquement, d'après le Théorème 1.7, $\mathcal{F}(X^{(2,Ad)})$ étant $(|X^i|)$-déterminante, les processus $\int_0^{\cdot} X_s^i dX_s^j$ lui sont adaptés dès que a_{ij} ou $a_{ji} \neq 0$.
Il en va donc de même de M^A. Ainsi, $\mathcal{M}^A \subset \mathcal{F}(X^{(2,Ad)})$.

2) Comme dans la première partie de 1), on montre que M^A domine X^iX^j, pour tous $(i,j) \in I^2$ tels que a_{ij} ou $a_{ji} \neq 0$, c'est-à-dire $\mathcal{M}^A \supset \mathcal{F}(X^{(2,Ad)})$.

Comme dans la deuxième partie de 1), on montre que :
pour tous $(i,j) \in I^2$ tels que a_{ij} ou $a_{ji} \neq 0$, les processus $\int_0^{\cdot} X_s^i dX_s^j$ et $\int_0^{\cdot} X_s^j dX_s^i$ sont $\mathcal{F}(X^{(2,Ad)})$-adaptés. (On utilise le corollaire 1.8 du Théorème 1.7). M^{A_i} est donc $\mathcal{F}(X^{(2,A_I,\Delta_I})$-adapté. □

Convention (C) *Grâce à* (iii), *on peut toujours supposer $\widetilde{A}A$ diagonale.* Nous supposerons désormais systématiquement (C) satisfaite sans nouvelle référence à (iii). On peut alors énoncer le :

THÉORÈME 2.2 : *Lorsque les valeurs propres de $\widetilde{A}A$ sont deux à deux distinctes et non nulles. $\mathcal{M}^A$ est une filtration brownienne de caractéristique n. Plus précisément, sous* (C), *$\mathcal{M}^A(X) = \mathcal{F}(X^{(2,Ad)})$.*

Preuve : Il suffit, d'après le Théorème 2.1, de montrer que $\mathcal{M}^A$ est $(|X^i|)$-déterminante, ce qui résulte immédiatement de (i), (ii) et la démonstration de (iv). □

Remarques : 1) Ce résultat n'est pas couvert par le cas des matrices normales ou sous-normales d'Auerhan-Lépingle, comme le montre l'exemple suivant dès la dimension deux.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^*)^3$.

On a $\widetilde{A}A = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 + c^2 \end{pmatrix}$ tandis que $A\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & bc \\ bc & c^2 \end{pmatrix}$; de plus : $\text{dét}(\widetilde{A}A - \lambda I) = (a^2 - \lambda)(b^2 + c^2 - \lambda) - a^2b^2 = \lambda^2 - \lambda(a^2 + b^2 + c^2) + a^2c^2$; enfin, le discriminant Δ de ce trinôme est :

$$\Delta = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 4a^2c^2 = b^4 + 2b^2(a^2 + c^2) + (a^2 - c^2)^2 > 0.$$

2) Parmi les matrices inversibles qui constituent un ouvert partout dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices A telle que $\widetilde{A}A$ possède n valeurs propres distinctes et non nulles constituent encore un ouvert partout dense.

Ceci permet de dire que le cas envisagé ici est général, alors que le cas des matrices normales ou sous-normales est particulier.

(b) *Ker* $\widetilde{A}A \neq \{0\}$.

Remarque : On a toujours : Ker $\widetilde{A}A$ = Ker A. En effet, $x \in$ Ker A implique : $x \in$ Ker $\widetilde{A}A$. Inversement, si $x \in$ Ker $\widetilde{A}A$ alors $|Ax|^2 = 0$, et donc : $x \in$ Ker A. En conséquence, comme on suppose $\widetilde{A}A$ diagonale (cf. (C)), A est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ B_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R}), B_0 \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R}) \quad \text{où} \quad r = \operatorname{codim} \operatorname{Ker} A.$$

Voici, dans le même ordre d'idées, un lemme de Géométrie très pratique :

LEMME 2.3 : *$\widetilde{A}A$ est diagonale si et seulement si les vecteurs colonnes de A constituent un système orthogonal.*

Dans ce cas, les carrés des normes de ces vecteurs colonnes sont les vecteurs propres de $\widetilde{A}A$.

Preuve : On utilise les relations : $(\widetilde{A}A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}$. □

Supposons désormais $\mathcal{M}^A(X)$ $(|X^i|)_{i\in\mathbb{N}_r}$-déterminante. Dans ces conditions, d'après le Théorème 2.1, $\mathcal{M}^A \supset \mathcal{F}(X_{(r)}^{(2,A_0,\Delta_r)})$ et M^A domine M^{A_0} où $X(r) = (X^i)_{i\in\mathbb{N}_r}$.

Montrons que $|B_0X_{(r)}|$ est $\mathcal{F}(X_{(r)}^{(2,A_0,\Delta_r)})$-adapté. En effet $|B_0X_{(r)}|^2 = \sum_{i=1}^{n-r} \left(\sum_{j=1}^{r} b_{ij}X_j\right)^2 = \sum_{i,j} b_{ij}^2X_j^2 + 2\sum_i \sum_{j<k} b_{ij}b_{ik}X^jX^k$. La première somme est clairement $\mathcal{F}(X^{(2,A_0,\Delta_r)})$-adaptée. La seconde peut s'écrire sous la forme : $2\sum_{j<k} X^jX^k \sum_i b_{ij}b_{ik}$.

Or d'après le lemme 2.3, sous l'hypothèse (C), on a :

$$\sum_{i=1}^{n-r} b_{ij} b_{ik} = -\sum_{i=1}^{r} a_{ij}^0 a_{ik}^0.$$

Ceci montre alors que lorsque $X^j X^k$ intervient dans l'écriture de $|B_0 X_{(r)}|$, $X^j X^k$ est $\mathcal{F}(X_{(r)}^{(2,A_0,\Delta_r)})$-adapté.

Par ailleurs, lorsque $B_0 \neq 0$, P-p.s. $X_{(r)}$ ne rencontre pas Ker B_0. Soit $(Y^1, \dots, Y^r)$ un *MB(r)* générateur de $\mathcal{F}(X_{(r)}^{(2,A_0,\Delta_r)})$. Posons

$$Y^{r+1} = \int_0^{\cdot} \frac{dM \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_0 & 0 \end{pmatrix}}{|B_0 X_{(r)}} \cdot \forall j \in \mathbb{N}_r, \langle Y^j, Y^{r+1} \rangle = 0$$

D'après le théorème de Lévy-Itô, $(Y^1, \dots, Y^{r+1})$ est un $MB(r+1)$ dès que $B_0 \neq 0$, et, par construction : $\mathcal{M}^A = \mathcal{F}(Y^1, \dots, Y^{r+1})$. D'où le :

THÉORÈME 2.4. *Lorsque $\tilde{A}A$ possède r valeurs propres distinctes non nulles et un noyau de dimension $n - r$, alors, $\mathcal{M}^A$ est une filtration brownienne de caractéristique : r si Ker $A \perp$ Im A, et $r + 1$ sinon.*

3) Utilisation systématique de la symétrisation

Il s'agit de *généraliser l'emploi de la symétrisation* qui s'est révélé *essentiel* dans *le travail d'Auerhan-Lépingle* ([1]). (Cas normal ou sous-normal).

Soit $(E_i)_{i \in \mathbb{N}_r}$ les s.e.v. propres associés aux valeurs propres non nulles de $\tilde{A}A$. Soit P_i la projection orthogonale sur E_i.

On a vu en (iv) que M^A domine $|P_i X|$ (puisque M^A domine $M^{\tilde{A}A}$).

En conséquence, M^A domine $\frac{d}{dt} \langle M^A, M^{P_i} \rangle = (AX, P_i X) = (P_i AX, X)$ $= (\tilde{A} P_i X, X)$.

On a aussi $\frac{d}{dt} \langle M^{\frac{1}{2}(P_i A + \tilde{A} P_i)}, M^{p_i} \rangle = \left(\frac{1}{2} (P_i A + \tilde{A} P_i) X, P_i X \right)$, c'est-à-dire que M^A domine $(AX, P_i X) + (P_i \tilde{A} P_i X, X)$.

Or, le premier terme est $\mathcal{M}^A$-adapté, donc M^A domine

$$(P_i \tilde{A} P_i X, X) = ((P_i A P_i X, X).$$

Ainsi, d'après (ii), M^A domine $M^{\frac{1}{2}(P_i A P_i + P_i \tilde{A} P_i)}$.

Posons $A_i = P_i A P_i$. On peut alors énoncer le :

THÉORÈME 2.5 : 1) *M^A domine $M^{S(A_i)}$ où $A_i = S(A_i) + T(A_i)$ avec $S(A_i) = \frac{1}{2}(A_i + \widetilde{A}_i)$ et $T(A_1) = \frac{1}{2}(A_i - \widetilde{A}_i)$.*

2) M^A domine $M^{P_{ij}}$ où P_{ij} désigne la projection orthogonale sur E_{ij}, $(E_{ij})_{j\in\mathbb{N}_{m_i}}$ étant les différents s.e.v. propres de $S(A_1)$ (de somme directe E_i).

Remarque : 0 n'est pas à exclure parmi les valeurs propres de $S(A_i)$ car les processus $\sum_{j;e_j\in E_i}\int_0^{\cdot} X^j dX^j$ et $\left(\sum_{k;e_k\in E_{ij}}\int_0^{\cdot} X^k dX^k\right)_{j/E_{ij}\neq \mathrm{Ker}\, S(A_i)}$ sont $\mathcal{M}^A$-adaptés (on a bien sûr supposé $S(A_i)$ diagonale, quitte à changer de base orthonormée dans E_i). Par différence, on connaît alors sous $\mathcal{M}^A$:

$$\sum_{j;e_j\in \mathrm{Ker}\, S(A_i)}\int_0^{\cdot} X^j dX^j.$$

On peut maintenant énoncer le deuxième résultat important dans l'étude de $\mathcal{M}^A$:

THÉORÈME 2.6 : *Lorsque, pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, les valeurs propres de $S(A_i)$ sont 2 à 2 distinctes, $\mathcal{M}^A$ est brownienne de caractéritique $\leq n$. plus précisément, la caractéristique est :*

$$\begin{array}{l} n \quad \textit{si} \quad \mathrm{Ker}\, A = \{0\} \\ s = \mathrm{codim\ Ker}\, A \quad \textit{si} \quad \mathrm{Ker}\, A \perp \mathrm{Im}\, A \\ s+1 \quad \textit{sinon, et} \quad \mathcal{M}^A = \mathcal{F}(X_{(s)}^{(2,A_0,\Delta_s)}) \vee \mathcal{F}(Y^{s+1}) \end{array}$$

où comme d'habitude $A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ B_0 & 0\end{pmatrix}$, *et* $Y^{s+1} = \int_0^{\cdot} \frac{dM^{B_0}}{|B_0 X_{(s)}|}$.

Preuve : Lorsque Ker $A = \{0\}$, on conclut d'après le Théorème 2.1, 1). Lorsque Ker $A \neq \{0\}$, la démonstration est identique à celle du théorème 2.4. □

Remarque : Le *cas* où *les valeurs propres* de $\widetilde{A}A$ sont 2 à 2 *distinctes sauf* peut être 0 est le *cas général.* Dans l'exception, celui où les valeurs propres de $S(A_i)$, pour tout $i \in \mathbb{N}_r$ sont toute d'ordre 1 est encore le cas *général.*

Dans la direction opposée, on rappelle maintenant le résultat d'Auerhan-Lépingle [1], Théorème 4. Enonçons tout d'abord la :

DÉFINITION : *Soit P_0 la projection sur* Im $\widetilde{A}A$.

On suppose comme d'habitude (C) *réalisée,* $A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ B_0 & 0\end{pmatrix}$.

$$A \text{ est dite sous-normale si } \begin{cases} A_0 \text{ est normale} \quad (\Leftrightarrow P_0 A \quad \text{normale}) \\ \widetilde{B}_0 B_0 \text{ et } A_0 \text{ commutent} \quad (\Leftrightarrow P_0 A \text{ et } \widetilde{A}A \\ \text{commutent}) \end{cases}$$

(Cela revient à dire : $P_0 A P_0$, $P\widetilde{A}P_0$ et $\widetilde{A}A$ commutent).

THÉORÈME 2.7. (Auerhan-Lépingle) : *Lorsque A est sous-normale, $\mathcal{M}^A$ est brownienne de caractéristique :*

r si A est symétrique, où r désigne le nombre des s.e.v. propres de A distincts de Ker A.

$s + 1$ sinon, où $\sum_{i=1}^{r} m_i$, m_i désignant le nombre de valeurs propres distinctes de la restriction de $S(A_0)$ à E_i.

(Les $(E_i)_{i \in \mathbb{N}_r}$ sont les s.e.v. propres distincts du noyau de $\widetilde{A}A$).

Preuve : Notons $S = S(A_0)$.

Montrons tout d'abord que, pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, $S(E_i) \subset E_i$: soit $x \in E_i$, $\widetilde{A}Ax = \lambda_i x$.

$$\begin{aligned}
\text{Alors,} \quad \widetilde{A}ASx &= (\widetilde{A}_0 A_0 + \widetilde{B}_0 B_0)\frac{1}{2}(A_0 + \widetilde{A}_0)x \\
&= \frac{1}{2}(A_0 \widetilde{A}_0 A_0 x + \widetilde{A}_0 \widetilde{A}_0 A_0 x) + \frac{1}{2}\widetilde{B}_0 B_0 (A_0 + \widetilde{A}_0)x \\
&= \frac{1}{2}(A_0 \widetilde{A}Ax + \widetilde{A}_0 \widetilde{A}Ax) - \frac{1}{2}(A_0 \widetilde{B}_0 B_0 x + \widetilde{A}_0 \widetilde{B}_0 B_0 x) \\
&\quad + \frac{1}{2}\widetilde{B}_0 B_0 (A_0 + \widetilde{A}_0)x \\
&= \lambda_i Sx - \frac{1}{2}\widetilde{B}_0 B_0 (A_0 + \widetilde{A}_0)x + \frac{1}{2}\widetilde{B}_0 B_0 (A_0 + \widetilde{A}_0)x \\
&= \lambda_i Sx.
\end{aligned}$$

On en déduit aisément que, pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, $S_{|\mathbb{E}_i} = S(A_i)$. Aussi, d'après le Théorème 2.5, $\mathcal{M}^A$ domine les $M^{P_{ij}}$.

Or, d'après (iv), $\mathcal{M}^{P_{ij}}$ est une filtration brownienne de dimension 1. Ainsi, $\mathcal{M}^A \supset \mathcal{F}(Y^{ij}; i \in \mathbb{N}_r, j \in \mathbb{N}_{m_i})$ où les Y^{ij} sont des $MB(1)$, indépendants, au nombre de s.

Soit $Y^{s+1} = \displaystyle\int_0^{\cdot} \frac{dM^A - dM^{S(A_0)}}{|A - SA_0 X|}$.

• Montrons que $|(A - S(A_0))X|$ est $\mathcal{F}(Y^{ij})$-adapté. Pour cela, on établit que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $A - Sx \perp Sx$.

En effet, $((A - S)x, Sx) = (Ax, Sx) - |Sx|^2$.

Or, $(Ax, Sx) = ({}^rA_0x, Sx) + ({}_rB_0x, Sx)$ où ${}^rA_0 = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et ${}_rB_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_0 & 0 \end{pmatrix}$. Mais ${}_rB_0x \in \text{Ker } \widetilde{A}A$, tandis que $Sx \in \text{Im } \widetilde{A}A \Rightarrow ({}_rB_0x, Sx) = 0$.

Ainsi, $(Ax, Sx) = ({}^rA_0x, Sx) = \left(\frac{1}{2} (A_0 + \widetilde{A}_0)A_0X_{(r)}, X_{(r)}\right)$ où $X_{(r)} = P_0X$

$$= \left(\frac{1}{2} (A_0A_0 + A_0\widetilde{A}_0)X_{(r)}, X_{(r)}\right)$$
$$= ({}^rA_0SX, X) = (SX, {}^rA_0X) = \left(\frac{1}{2} ({}^rA_0 + {}^rA_0)X, SX\right).$$

Ainsi, $(Ax, Sx) = |SX|^2$, d'où $((A - S)X, SX) = 0$, et donc :

$$|A - SX|^2 + |SX|^2 = |AX|^2.$$

Comme de plus $|AX|^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}_r} \lambda_i^2 |P_iX|^2$, on en déduit bien que $|(A - S)X|$ est $\mathcal{F}(Y^{ij})$-adapté.

Or, $dM^A = dM^s + \dfrac{dM^{A-S}}{|(A - S)X|} |(A - S)X| = dM^S + |(A - S)X| dY^{s+1}$.

D'où $\mathcal{M}^A = \mathcal{F}(Y^{ij}) \vee \mathcal{F}(Y^{s+1})$.

Tout ceci n'a d'intérêt que si $A - S \neq 0$, c'est-à-dire A n'est pas symétrique, auquel cas Y^{s+1} est un $MB(1)$ indépendant du *MB(s)*. □

Remarque : 1) Envisageons un cas particulier intéressant du résultat d'Auerhan-Lépingle, le cas où les valeurs propres de $\widetilde{A}A$ sont confondues *i.e.* $\widetilde{A}A = \lambda I$ $(\lambda > 0)$.

A est une matrice de similitude, et à l'évidence, $\mathcal{M}^A = \mathcal{M}^R$ où $R = \lambda^{-\frac{1}{n}} A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Quitte à changer de base orthonormée, on obtient la représentation canonique :

$$R = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & 0 \\ & R_{\theta_r} & & \\ & & \varepsilon_1 & \\ 0 & & & \varepsilon_{n-2r} \end{pmatrix}$$

où $R_{\theta_1} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$, les θ_i étant des éléments de $]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$ et $\varepsilon_i = \pm 1$.

On constate que R est symétrique si et seulement si $r = 0$, et que $s = \text{card}\{\cos(\theta_i),\ i \in \mathbb{N}_r\} + \alpha$,

$$\text{où} \quad \alpha = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 2r \\ 1 & \text{si} \quad n > 2r \quad \text{et tous les } \varepsilon_j \text{ sont égaux} \\ 2 & \text{si} \quad n > 2r \quad \text{et deux au moins des } \varepsilon_j \text{ sont distincts} \end{cases}$$

2) Entre le cas général où, pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, les valeurs propres de $S(A_i)$ sont toutes d'ordre 1, et le cas particulier où toutes les valeurs propres de $\widetilde{A}A$ sont confondues, prennent place bien d'autres cas particuliers, de plus en plus nombreux au fur et à mesure que n augmente.

Aussi, allons-nous tenter de donner une forme plus typique aux matrices des cas non encore traités.

PROPOSITION 2.8 : *On peut supposer sans nuire à la généralité :*

(a) $A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ B_0 & 0 \end{pmatrix}$, *$\widetilde{A}A$ diagonale*

(b) *pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, $S(A_i) = \frac{1}{2}\,(P_i A P_i + P_i \widetilde{A} P_i)$ diagonale*

(c) *pour tous $i \in \mathbb{N}_r$, et $j \in \mathbb{N}_{m_i}$, les blocs diagonaux A_{ij} associés aux s.e.v. propres E_{ij} de $S(A_i)$ sont tels que $\widetilde{A}_{ij}A_{ij}$ soit diagonale.*

Preuve : Il s'agit simplement d'effectuer des diagonalisations simultanées, en remarquant que dans un changement de base orthonormée les matrices symétriques (resp. antisymétrique) sont transformées en matrices symétriques (resp. antisymétriques). □

4) Le cas des dimensions inférieures ou égales à 3

THÉORÈME 2.9 : *En dimension $n = 1, 2$ ou 3, pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}^A$ est brownienne de caractéristique $\leq n$.*

Preuve : Le résultat est classique en dimension 1. Il est clair en dimension 2 car les valeurs propres de $\widetilde{A}A$ sont distinctes ou confondues. En dimension 3, mis à part le cas des valeurs propres 2 à 2 distinctes de chacune des $S(A_i)$ (le cas «très général»), et celui où les valeurs propres de $\widetilde{A}A$ sont confondues (le cas «très particulier»), on est ramené, en utilisant la proposition 2.8, à supposer :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -a & d \\ a & \lambda & e \\ b & c & \mu \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \widetilde{A}A \quad \text{est diagonale.}$$

$$\text{Donc d'après le lemme 2.3} \quad \begin{cases} 0 = \begin{pmatrix} \lambda \\ a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ \lambda \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow bc = 0 \\ \lambda^2 + a^2 + b^2 = \lambda^2 + a^2 + c^2 \Leftrightarrow |b| = |c| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b = c = 0$$

Puis, $\begin{pmatrix} \lambda \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \\ \mu \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow d = e = 0.$

Finalement, $A = \begin{pmatrix} \lambda & -a & 0 \\ a & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$. A est normale, donc : $\mathcal{M}^A$ est brownienne de caractéristique ≤ 3. □

CONCLUSION : *La conjecture de M. Yor est entièrement vérifiée en dimension 1, 2 ou 3.*

III. FILTRATIONS QUADRATIQUES GÉNÉRALES

1) Quelques filtrations remarquables

Le point de départ est la filtration $\mathcal{F}(X^1X^2)$ donnée en exemple par M. Yor dans [4]. Cette filtration apparaîtra d'ailleurs comme le cas singulier dans la suite. Rappelons le résultat connu :

LEMME 3.1 : $\mathcal{F}(X^1X^2) = \mathcal{F}\Big(\frac{|X^1 + X^2|}{\sqrt{2}}, \frac{|X^1 - X^2|}{\sqrt{2}}\Big)$.
On en déduit en particulier que $\mathcal{F}(X^1X^2)$ est une filtration brownienne de caractéristique 2.

Preuve : Posons $Y^1 = \frac{X^1 + X^2}{\sqrt{2}}$, $Y^2 = \frac{X^1 - X^2}{\sqrt{2}}$, (Y_1, Y_2) est un $MB(2)$. De plus, $(Y^1)^2 - (Y^2)^2 = 2X^1X^2$, et donc X^1X^2 est $\mathcal{F}(|Y^1|, |Y^2|)$-adapté. Réciproquement, comme $\frac{d}{dt}\langle X^1X^2\rangle = \frac{d}{dt}\langle \int_0^\cdot X_s^1 dX_s^2 + X_s^2 dX_s^1\rangle = X_1^2 + X_2^2$, $X_1^2 + X_2^2$ est $\mathcal{F}(X^1X^2)$-adapté.

Or $\begin{cases} Y_1^2 = \frac{1}{2}\,(X_1^2 + X_2^2) + X^1X^2 \\ Y_2^2 = \frac{1}{2}\,(X_1^2 + X_2^2) - X^1X^2 \end{cases}$.

Donc, Y_1^2 et Y_2^2 sont $\mathcal{F}(X^1X^2)$ adaptés, d'où le résultat. □

Le lemme suivant, qui initialement était une tentative de généralisation du lemme précédent, va révéler un comportement nettement différent dès la dimension 3.

LEMME 3.2 : *Dès que $n \geq 3$, on a : $\mathcal{F}(X^1X^2, X^1X^3, \ldots, X^1X^n) = \mathcal{F}(X^{(2,n)})$.*

Preuve : • Il est clair que $\mathcal{F}(X^1X^2, X^1X^3, \ldots, X^1X^n) \subset \mathcal{F}(X^{(2,n)})$.

• Réciproquement, pour tout $i \in [2, n-1]$;

$$\frac{d}{dt}\langle X^1X^i, X^1X^{i+1}\rangle = \frac{d}{dt}\langle \int_0^{\cdot} X_s^1 dX_s^i + X_s^i dX_s^1, \int_0^{\cdot} X_s^1 dX^{i+1} + X_s^{i+1} dX_s^1\rangle$$
$$= X^iX^{i+1}.$$

Ainsi, X^iX^{i+1} est-il $\mathcal{F}(X^1X^2, X^1X^3, \ldots, X^1X^n)$-adapté.

Comme $X^1X^i \cdot X^1X^{i+1} = X_1^2 \cdot X^iX^{i+1}$, on en déduit que X_1^2 est $\mathcal{F}(X^1X^2, X^1X^3, \ldots, X^1X^n)$-adapté, puis que pour tout $i \in [2, n]$, $|X^i|$ est aussi $\mathcal{F}(X^1X^2, \ldots, X^1X^n)$-adapté.

Donc, $K = \{(1,2), (1,3), \ldots, (1,n)\}$ est une partie de $\mathbb{N}_n^2$, $|X^i|$-déterminante. Il est immédiat maintenant que la relation d'équivalence dans $\mathbb{N}_n$ «être K-relié à» possède une unique K-chaîne, c'est-à-dire que : $\mathcal{F}(X^1X^2, \ldots, X^1X^n) = \mathcal{F}(X^{(2,n)})$. □

La différence entre la dimension 2 et les dimensions supérieures semble nette.

PROPOSITION 3.3 : $\mathcal{F}(X^1X^2) \neq \mathcal{F}(X^{(2,2)})$.

Preuve : En effet, sinon :

$$|X_t^i| = E(|X_t^i| \mid \mathcal{F}_\infty(X^1X^2)), \quad i = 1, 2.$$

Mais, en échangeant les rôles de X^1 et de X^2, on obtient :

$$P(X_t^1) \in A, X^1X_{s_j}^2 \in B_j, 1 \leq j \leq n)$$
$$= P(|X_t^2| \in A, X^1X_{s_j}^2 \in B_j, 1 \leq j \leq n).$$

Donc : $E(|X_t^1| \mid \mathcal{F}_\infty(X^1X^2)) = E(|X_t^2| \mid \mathcal{F}_\infty(X^1X^2))$ c'est-à-dire : $|X_t^1| = |X_t^2|$, P-p.s., ce qui est absurde. □

Remarque : On obtient le même résultat en utilisant la proposition 1.11. En effet $\mathcal{F}(X^{(2,n)}) = \mathcal{F}(Y^{(2,n)})$ où Y est le $MB(2) = R_{\frac{\pi}{4}}X = \left(\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}, \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}\right)$; de plus $\mathcal{F}(|Y^1|, |Y^2|) \subseteq \mathcal{F}(Y^{(2,n)})$.
D'où $\mathcal{F}(|Y^1|, |Y^2|) = \mathcal{F}(X^1X^2) \subseteq \mathcal{F}(X^{(2,n)})$. □

2) Filtrations quadratiques associées à des parties non $(|X^i|)$-déterminantes

Soit $K \subset \mathbb{N}_n^2$ une partie non $(|X^i|)$-déterminante, c'est-à-dire

$$\mathcal{F}(X^{(2,\Delta_n)}) \not\subseteq \mathcal{F}^X(2, k)$$

ou encore telle qu'il existe $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $|x^i|$ ne soit pas $\mathcal{F}^X(2,k)$-adapté.

Considérons :

$$\mathbb{N}'_n(K) = \{i \in \mathbb{N}_n : |X^i| \quad \text{est} \quad \mathcal{F}^X(2,K)\text{-adapté}\}$$

et $\mathbb{N}''_n(K) = \left\{ i \in \mathbb{N}_n \quad \begin{matrix} |X^i| \text{ n'est pas } \mathcal{F}^X(2,K)\text{-adapté et} \\ \exists j \in \mathbb{N}_n / X^i X^j \text{ est } \mathcal{F}^X(2,K)\text{-adapté} \end{matrix} \right\}.$

Lorsque $\mathbb{N}'_n(K) \neq \emptyset$, la relation dans $\mathbb{N}'_n(K)$:
i est K-relié à j, si X^iX^j est $\mathcal{F}^X(2,K)$-adapté *est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence s'appellent les K-chaînes de $\mathbb{N}_n$.* Lorsque $\mathbb{N}''_n(K) \neq \emptyset$, la relation dans $\mathbb{N}''_n(K)$:

i est K-encordé à j, si $i = j$ ou X^iX^j est $\mathcal{F}^X(2,K)$-adapté *est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence s'appellent les K-cordées de $\mathbb{N}_n$.*

On constate immédiatement que $\mathbb{N}'_n(K) \cap \mathbb{N}''_n(K) = \emptyset$.

Posons $K' = \mathbb{N}'_n(K)^2 \cap K$ et $K'' = \mathbb{N}''_n(K)^2 \cap K$.

Alors, (K', K'') est une partition de K, et $\mathcal{F}^X(2,K) = \mathcal{F}^X(2,K') \vee \mathcal{F}^X(2,K'')$ les deux filtrations $\mathcal{F}^X(2,K')$ et $\mathcal{F}^X(2,K'')$ étant indépendantes. D'après le chapitre I, $\mathcal{F}^X(2,K')$ est une filtration brownienne $(|X^i|)_{i\in\mathbb{N}(K)}$-déterminante, de caractéristique card$(\mathbb{N}'(K))$.

Etudions $\mathcal{F}^X(2,K'')$.

On va d'abord établir que *toute K-cordée s'il en existe est un ensemble à deux éléments.*

En effet, une K-cordée ne peut-être réduite à un singleton $\{i\}$, sinon $|X^i|$ serait $\mathcal{F}^X(2,K)$-adapté ce qui est exclu.

Une K-cordée ne peut contenir strictement plus de 2 éléments, sinon d'après le lemme 3.2, la valeur absolue de chaque composante de X d'indice un élément de la cordée serait $\mathcal{F}^X(2,K)$-adaptée, ce qui, encore une fois est exclu. D'où le résultat.

Ainsi $\mathbb{N}''_n(K) = \bigcup_{i=1}^{P} \{k'_i, K''_i\}$. *$\mathbb{N}''_n(K)$ est la réunion disjointe de ses pK-cordées des $\{k'_i, k''_i\}$.*

De plus, $\mathcal{F}^X(2,K'') = \bigvee_{i=1}^{p} \mathcal{F}^X(2, \{(k'_i, k''_i)\})$, les filtrations $\mathcal{F}^X(2, \{(k'_i, k''_i)\})$ étant indépendantes entre elles.

Appliquons enfin le lemme 3.1 :

$$\mathcal{F}^X(2,K'') = \bigvee_{i=1}^{p} \mathcal{F}\left(\frac{|X^{k'_i} + X^{k''_i}|}{\sqrt{2}}, \frac{|X^{k'_i} - X^{k''_i}|}{\sqrt{2}} \right)$$

les filtrations composantes étant cette fois indépendantes et browniennes de caractéristique 2.

$\mathcal{F}^X(2, K'')$ est donc une filtration brownienne de caractéristique card$(\mathbb{N}''_n(K))$. D'où le :

THÉORÈME 3.4. *Toute filtration quadratique $\mathcal{F}^X(2, K)$ est brownienne de caractéristique :*

$$c(K) = \text{card}(\mathbb{N}'_n(K)) + \text{card}(\mathbb{N}''_n(K)) = \text{card}(pr_1(K) \cup pr_2(K)).$$

Cette filtration est $(|X^i|)$-déterminante si et seulement si $\mathbb{N}''_n(K) = \emptyset$ où l'on étend la propriété «être $(|X^i|)$-déterminante» aux filtrations qui déterminent la valeur absolue des composantes de X dont l'indice est dans le support de K à savoir $pr_1\ (K) \cup pr_2(K)$.

Pour terminer ce chapitre, notons la généralisation de la proposition 1.11 :

PROPOSITION 3.5 : *$\mathcal{F}(X^{(2,n)})$ est la seule filtration quadratique qui soit invariante sous $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.*

IV. QUELQUES RÉSULTATS EN DIMENSION $n > 3$ DANS L'ÉTUDE DES MARTINGALES BROWNIENNES DE M. YOR

1) Un résultat d'ordre général

On rappelle que $(E_i)_{i \in \mathbb{N}_r}$ désigne la suite des s.e.v. propres de $\widetilde{A}A$ distincts de Ker $\widetilde{A}A$; $(E_{ij})_{j \in \mathbb{N}_{m_i}}$ désigne la suite des s.e.v. propres de $S(A_i)$, où $S(A_i) = \frac{1}{2}\ (P_iAP_i + P_i\widetilde{A}P_i)$, P_i étant la projection orthogonale sur E_i.

THÉORÈME 4.1 : *Lorsque tous les E_{ij} sont de dimension 1 sauf un qui est de dimension 2, $\mathcal{M}^A$ est brownienne. En particulier $\mathcal{M}^A$ est de caractéristique n lorsque Ker $A = \{0\}$.*

Preuve : On va montrer que $\mathcal{M}^A$ est $(|X^i|)_{i \in \mathbb{N}_{n-\dim \text{ Ker } A}}$-déterminante ce qui permettra de conclure grâce à la démonstration du Théorème 2.4. On suppose dim $E_{11} = 2$ et pour tous $(i, j) \neq (1, 1)$, dim $E_{ij} = 1$, alors $\mathcal{M}^A$ est $(|X^i|)_{i \geq 3}$-déterminante.

• Supposons qu'il existe i tel que $3 \leq i \leq n$-dim Ker A et $(a_{i1}, a_{i2}) \neq (0, 0)$.

Alors, M^A domine $\dfrac{1}{2}\ \dfrac{d}{dt}\langle M^A, X_i^2\rangle = \displaystyle\sum_{j=1}^{n-\dim \text{Ker } A} a_{ij}X^iX^j.$

D'où, en considérant son crochet avec $X_1^2+X_2^2$, M^A domine $a_{i1}X^iX^1+a_{i2}X^iX^2$ donc $|a_{i1}X^1+a_{i2}X^2|^2$.

En retranchant $(a_{i1}^2+a_{i2}^2)(X_1^2+X_2^2)$ qui est $\mathcal{M}^A$-adapté, on obtient que M^A domine aussi $|-a_{i2}X^1+a_{i1}X^2|^2$.

Ainsi, quitte à changer de base orthonormée, en remplaçant (e_1, e_2) par (e'_1, e'_2), avec $e'_1=(a_{i1}^2+a_{i2}^2)^{-1/2}(a_{i2}e_1+a_{i2}e_2)$

$$e'_2=(a_{i1}^2+a_{i2}^2)^{-1/2}(-a_{i2}e_1+a_{i1}e_1),$$

on obtient bien que $\mathcal{M}^A$ est $(|X'_i|)_{i\in\mathbb{N}_{n-\dim \operatorname{Ker} A}}$-déterminante.

• Supposons qu'il existe j tel que $3\leq j\leq n$-dim Ker A et $(a_{1j}, a_{2j})\neq(0,0)$. Alors,

M^A domine $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\langle M^A, X_1^2+X_2^2\rangle=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-\dim \operatorname{Ker} A}(a_{1k}X^1X^k+a_{2k}X^2X^k)$ ainsi que son crochet avec X_j^2 : c'est-à-dire, M^A domine $a_{1j}X^1X^j+a_{2j}X^2X^j$, donc M^A domine $|a_{1j}X^1+a_{2j}X^2|$.

Ceci permet de conclure comme dans le premier cas.

• Reste le cas :

$$A=\begin{pmatrix} x_1 & a & & & \\ -a & x_1 & & 0 & \\ & & & & 0 \\ & 0 & & A_1 & \\ & & B_0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $(Y^3,\dots,Y^r)=X^{(2,A_1,d)}_{(\{3,4,\dots,n\})}$ et on note Y^2 un $MB(1)$ générateur de $\mathcal{F}(X_1^2+X_2^2)$.

Lorsque a et B_0 sont tous deux nuls, on conclut immédiatement : $\mathcal{M}^A=\mathcal{F}(Y^2,\dots,Y^r)$. Sinon, soit $Y^1=\displaystyle\int_0^{\cdot}\frac{dM_s^{A'}}{|A'X_s|}$ avec

$$A'=\begin{pmatrix} 0 & -a & & & \\ a & 0 & & & \\ & & & & 0 \\ & 0 & & 0 & \\ & & B_0 & & 0 \end{pmatrix}$$

et on montre comme d'habitude que $|A'X|$ est $\mathcal{F}(Y^2,\dots,Y^r)$-adapté (c'est encore une conséquence immédiate du Lemme 2.3).

On a aussi le résultat très simple suivant :

PROPOSITION 4.2 : *Supposons $\mathcal{M}^A$ $|X^{i_0}|$-déterminante. S'il existe $j_0 \in \mathbb{N}_n$ tel que :*

$$\forall j \in \mathbb{N}_n \setminus \{i_0, j_0\}, \begin{cases} a_{i_0 j} = 0 \quad et \quad a_{i_0 j_0} \neq 0 \\ ou \\ a_{j i_0} = 0 \quad et \quad a_{j_0 i_0} \neq 0 \end{cases},$$

alors, $|X^{j_0}|$ est $\mathcal{M}^A$-adapté.

2) Etude de la dimension 4

On a déjà traité dans le chapitre II le cas « très général » où les valeurs propres de chacun des $S(A_i)$ sont toutes simples, et le cas très particulier où les valeurs propres de $\widetilde{A}A$ sont toutes confondues.

Envisageons maintenant les autres cas particuliers. On va constater non seulement que le nombre de ces cas augmente par rapport à la dimension trois, ce à quoi on pouvait s'attendre, mais surtout il va apparaître un cas particulier d'une nature nouvelle beaucoup moins immédiat...

• *Supposons d'abord que l'un des E_{ij} soit de dimension* 3, par exemple E_{11}, c'est-à-dire, d'après la Proposition 2.8 :

$$A = \begin{pmatrix} & & & d \\ & A_{11} & & e \\ & & & f \\ a & b & c & \mu \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \widetilde{A}A \text{ et } \widetilde{A}_{11}A_{11} \text{ diagonales.}$$

En utilisant le Lemme 2.3, on obtient :

$ab = bc = ca = 0$ (orthogonalité 2 à 2 des trois premiers vecteurs colonne) ce qui exige que deux au moins des trois réels a, b, c soient nuls. On peut supposer $a = b = 0$.

Mais alors, si Ker $A = \{0\}$, on déduit de la Proposition 4.2 que A est $(|X^i|)_{i \geq 3}$-déterminante.

Ceci permet d'appliquer le Théorème 4.1, on conclut que dans ce cas $\mathcal{M}^A$ est brownienne de caractéristique 4. Lorsque Ker $A \neq \{0\}$, $\mu = d = e = f = 0$.

On va montrer que A est sous-normale.

Notons $A_{11} = \begin{pmatrix} \lambda & -\alpha & -\beta \\ \alpha & \lambda & -\gamma \\ \beta & \gamma & \lambda \end{pmatrix}$.

Comme $\widetilde{A}_{11}A_{11}$ est diagonale, le Lemme 2.3 entraîne que $\beta\gamma = 0$.

Le même lemme appliqué aux normes des 3 premiers vecteurs colonne de A nécessite aussi :

$$\lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 = \lambda^2 + \alpha^2 + \gamma^2 = \lambda^2 + \gamma^2 + c^2.$$

D'où l'on déduit $\beta^2 = \gamma^2 = 0$ et $c^2 = \alpha^2$, c'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon\alpha & 0 \end{pmatrix}, \widetilde{A}_{11}A_{11} = A_{11}\widetilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} \lambda^2+\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

et $\widetilde{B}_0 B_0 A_{11} = A_{11}\widetilde{B}_0 B_0 = \begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2\lambda \end{pmatrix}$.

Donc, $\mathcal{M}^A$ est brownienne de caractéristique 2.

• *Supposons ensuite que seul E_{11} soit de dimension 2.*

Alors, tous les autres E_{ij} sont de dimension 1. On peut appliquer le Théorème 4.1 : $\mathcal{M}^A$ est brownienne.

• *Reste enfin le cas où deux E_{ij} distincts sont de dimension deux,*

c'est-à-dire : $A = \begin{pmatrix} \lambda & -a & \multicolumn{2}{c}{C_2} \\ a & \lambda & & \\ \multicolumn{2}{c}{C_1} & \mu & -b \\ & & b & \mu \end{pmatrix}$, $\widetilde{A}A$ étant diagonale.

D'après le Lemme 2.3, C_1 et C_2 sont des matrices de similitude et $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ -a & \lambda \end{pmatrix} C_2 + \widetilde{C}_1 \begin{pmatrix} \mu & -b \\ b & \mu \end{pmatrix} = 0.$ (1)

On constate aisément que :

$$\operatorname{sgn}(\text{dét } C_1) = \operatorname{sgn}(\text{dét } C_2).$$

Donc, C_1 et C_2 sont des matrices de similitudes de même signe.

Effectuons le changement de base orthonormée de matrice de passage $R = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}$ où R_1 et R_2 sont des matrices orthogonales à deux dimensions (Ce changement de base n'altère pas le caractère diagonal de $\widetilde{A}A$).

$$R A \widetilde{R} = \begin{pmatrix} R_1 \begin{pmatrix} \lambda & -a \\ a & \lambda \end{pmatrix} \widetilde{R}_1 & R_1 C_2 \widetilde{R}_2 \\ R_2 C_1 \widetilde{R}_1 & R_2 \begin{pmatrix} \mu & -b \\ b & \mu \end{pmatrix} \widetilde{R}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda' R_\alpha & R_1 C_2 \widetilde{R}_2 \\ R_2 C_1 \widetilde{R}_1 & \mu' R_\beta \end{pmatrix}$$

où R_θ désigne la matrice de la rotation vectorielle plane d'angle θ.
En choisissant convenablement les matrices orthogonales R_1 et R_2, on peut supposer $R_2 C_1 \widetilde{R}_1 = \xi R_\gamma$ et $R_1 C_2 \widetilde{R}_2 = \nu R_\gamma$.
C'est-à-dire que, quitte à changer de base orthonormée, on est ramené au cas où A est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda' R_\alpha & \nu R_\gamma \\ \xi R_\gamma & \mu' R_\beta \end{pmatrix};$$

la relation (1) devient alors :

$$\lambda'\nu R_{\gamma-\alpha} + \xi\mu' R_{\beta-\gamma} = 0$$

c'est-à-dire $\begin{cases} \lambda'\nu = \xi\mu' \\ 2\gamma \equiv \alpha+\beta+\pi \quad [2\pi] \end{cases}$ (1')

Afin d'étudier la filtration $\mathcal{M}^A$, nous allons employer la méthode utilisée par Strook et Yor dans [3] pour reconnaître la filtration du processus de l'aire de Lévy. (Dans notre contexte, c'est la filtration associée à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui n'est $(|X^i|)$-déterminante dans aucune base orthonormée de $\mathbb{R}^2$). Pour cela, on abandonne momentanément l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pour le remplacer par l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ de la réalisation canonique du *MB(n)*.

Soit $\mathcal{R}_t = \sigma(\{H, H \text{ v.a.r. } \mathcal{F}_t\text{-mesurable}/\forall\varphi \in [0,2\pi[,\ H = HoR_\varphi^{(2)}\})$ où $R_\varphi^{(2)} = \begin{pmatrix} R_\varphi & 0 \\ 0 & R_\varphi \end{pmatrix}$.

On vérifie aisément que les huit processus dont M^A est combinaison linéaire à savoir :

$$\int_0^1 X_s^1 dX_s^1 + X_s^2 dX_s^2, \int_0^\cdot X_s^3 dX_s^3 + X_s^4 dX_s^4,$$
$$\int_0^\cdot X_s^1 dX_s^2 - X_s^2 dX_s^2, \int_0^\cdot X_s^3 dX_s^4 + X_s^4 dX_s^3,$$

et $$\int_0^1 X_s^3 dX_s^4 + X_s^2 dX_s^2, \int_0^\cdot X_s^3 dX_s^2 + X_s^4 dX_s^1,$$
$$\int_0^\cdot X_s^1 dX_s^3 - X_s^2 dX_s^4, \int_0^\cdot X_s^1 dX_s^4 + X_s^2 dX_s^3,$$

sont tous $\mathcal{R}$-adaptés. (Nous notons l'ensemble de ces processus (H)). Il en est de même de M^A.

Posons :

$$m_t' = \frac{X_t^1 + iX_t^2}{|X_t^1 + iX_t^2|}$$

(on munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure canonique d'espace vectoriel complexe en identifiant $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}^2$).

Nous allons montrer, comme dans [3], que $m_t'(\forall t > 0)$ est indépendante de $\mathcal{R}_\infty$ et uniformément distribuée sur S_1.

Soient en effet H une v.a.r. bornée $\mathcal{R}_\infty$-mesurable et f une fonction borélienne bornée sur S_1. On a

$$\begin{aligned} E[f(m'_t)\cdot H] &= E[f(m'_t)H\circ R^{(2)}_\varphi] \\ &= E[f(e^{-i\varphi}m'_t\circ R^{(2)}_\varphi)H\circ R^{(2)}_\varphi] \\ &= E[f(e^{-i\varphi}m'_t)H] \end{aligned}$$

(puisque la mesure de Wiener est invariante par rotation)

$$\begin{aligned} &= E\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{-i\varphi}m'_t)d\varphi H\right] \quad \text{d'après Fubini} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{-i\varphi})d\varphi E[H], \quad \text{d'où le résultat.} \end{aligned}$$

• Réciproquement, montrons que $\mathcal{R}\subset\mathcal{M}^A$.
Soit $\rho^1=|X^1+iX^2|$, $\rho^2=|X^3+iX^4|$. On a vu ρ^1 et ρ^2 sont $\mathcal{M}^A$-adaptés.

$$\xi\nu\neq 0 \quad \text{et} \quad 2\gamma\not\equiv 0 \quad [\pi] \tag{2}$$

En effet :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle M^A, X_1^2+X_2^2\rangle = \nu[X^1X^3+X^2X^4]\cos\gamma+\nu[X^2X^3-X^1X^4]\sin\gamma$$
$$+\lambda'(X_3^2+X_4^2)\cos\alpha$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle M^A, X_3^2+X_4^2\rangle = \xi[X^1X^3+X^2X^4]\cos\gamma+\xi[X^2X^3-X^1X^4]\sin\gamma$$
$$+\mu'(X_3^2+X_4^2)\cos\beta$$

Donc, lorsque $\xi\nu\sin(2\gamma)\neq 0$, $X^1X^3+X^2X^3$ et $X^2X^3-X^1X^4$ sont $\mathcal{M}^A$-adaptés. Il en est de même de $X^1X^3+X^2X^4-i(X^2X^3-X^1X^4)=(X^1-iX^2)(X^3-iX^4)$ et de $\dfrac{X^3-iX^4}{X^1+iX^2}=\dfrac{(X^1-iX^2)(X^3+iX^4)}{(X^1)^2+(X^2)^2}$.

Ainsi, sous (2), $\mathcal{M}_t^A\subset\mathcal{R}_t\subset\mathcal{F}_t(X)\subset\mathcal{M}^A\vee\sigma(m_t^1)$.

Comme $\mathcal{R}_t$ est indépendante de $\sigma(m_t^1)$, on en déduit :

$$\mathcal{R}_t=\mathcal{M}_t^A, \forall t>0.$$

(en effet, il est élémentaire de montrer le résultat suivant : si $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ sont trois sous-tribus P-complètes de $\mathcal{F}$, telles que, d'une part : $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}\vee\mathcal{C}$, et d'autre part : $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ sont indépendantes, alors : $\mathcal{A}=\mathcal{B}$).

Ainsi, lorsque (2) est réalisée, $\mathcal{M}^A$ est identifiée, indépendamment des paramètres de A; il s'agit de $\mathcal{R}$.

• Le dernier cas à envisager est celui où (2) n'est pas réalisée; d'abord, si $\xi\nu = 0$, il est aisé grâce (1) de vérifier que $\xi = \nu = 0$ et dans ce cas $\mathcal{M}^A$ est brownienne.

Sinon, $2\gamma \equiv 0$ $[\pi]$. D'après (1'), on a aussi $\alpha + \beta \equiv 0$ $[\pi]$.

Ainsi, $A = \begin{pmatrix} \lambda' R_\alpha & \nu I \\ \xi I & \mu' R_{-\alpha+\pi} \end{pmatrix}$, ou $A = \begin{pmatrix} \lambda' R_\alpha & \nu J \\ \xi J & \mu' R_{-\alpha+\pi} \end{pmatrix}$, avec $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{Soit} \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda' \sin \alpha & \nu I & \\ \lambda' \sin \alpha & 0 & & \\ & & 0 & -\mu' \sin \alpha \\ \xi I & & & \\ & & \mu' \sin \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

On introduit comme d'habitude Y^1 et Y^2, deux $MB(1)$ indépendants engendrant respectivement

$\mathcal{F}(X_1^2 + X_2^2)$ et $\mathcal{F}(X_3^2 + X_4^2)$ et $Y^3 = \displaystyle\int_0^\cdot \frac{dM_s^{A'}}{|A'X_s|}$, $|A'X|$ étant $\mathcal{F}(Y^1, Y^2)$-adapté.

Ainsi, $\mathcal{M}^A$ est la filtration brownienne $\mathcal{F}(Y^1, Y^2, Y^3)$.

Dans le second cas, on procède au changement de base de matrice $R = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$, ce qui nous ramène au premier cas. D'où le :

THÉORÈME 4.3 : *En dimension 4, toutes les filtrations $\mathcal{M}^A$ sont browniennes de caractéristique ≤ 4, sauf peut-être la filtration commune aux matrices A qui, sous les hypothèses habituelles, sont de la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda' R_\alpha & C_2 \\ C_1 & \mu' R_\beta \end{pmatrix}, \quad A\widetilde{A} \quad \textit{diagonale.}$$

Dans ce cas, la filtration $\mathcal{M}^A$ est celle qu'on a appelé $\mathcal{R}$. Elle est engendrée par les huit processus (H).

Remarque : Il est clair que la multiplicité de $\mathcal{R}$ au sens de Davis et Varaiya [2] est ≥ 4.

Il est clair aussi que $\mathcal{R}$ n'est pas une filtration quadratique.

Si $\mathcal{R}$ est une filtration brownienne, elle est certainement du type de celle de l'aire de Lévy, c'est-à-dire associée aux processus de Bessel, mêlés à des intégrales stochastiques plus générales.

Mais, $\mathcal{R}$ est-elle vraiment brownienne ?

Conclusion : Si le présent article complète l'outillage probabiliste dans l'étude des filtrations $\mathcal{M}^A$, permettant ainsi d'obtenir de nouveaux résultats, il est loin de résoudre entièrement le problème. Aussi, me paraît-il intéressant de rapporter ici une suggestion de Th. Jeulin, qui propose de séparer plus systématiquement l'aspect algébrique du problème (par exemple, étudier l'ensemble des matrices B telles que M^B soit $\mathcal{M}^A$ adaptée) de son aspect probabiliste.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. AUERHAN et D. LÉPINGLE, Les filtrations de certaines martingales du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$, II. Séminaire de Probabilités XV, *Lect. Notes Math.* n°**850**, p. 311-327, Springer (1981).

[2] M.H.A DAVIS and P. VARAIYA, The multiplicity of an increasing family of σ-fields, *Ann. Prob*, **2** (1974), p. 958-963.

[3] D.W STROOCK and M. YOR, Some remarkable martingales. Séminaire de Probabilités XV, *Lect. Notes Math.* n°**850**, p. 590-603, Springer (1981).

[4] M. YOR, Les filtrations de certaines martingales du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$, Séminaire de Probabilités XIII, *Lect Notes Math* n°**721**, p. 427-440, Springer (1979).

[5a] J. AZÉMA et M. YOR, En guise d'Introduction à «Temps locaux». *Astérisque*, **52-53**, p. 3-16, Soc. Math. France (1978).

[5b] M. YOR, Sur le balayage des semi-martingales continues, Séminaire de Probabilités XIII, *Lect. Notes Math.* n°**721**, p. 453-471, Springer (1979).

(*Manuscrit reçu le* 18 *janvier* 1990;
révisé le 14 *février* 1990)