ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN-PIERRE ROTH

Reformulation et extension de certains théorèmes ergodiques

Annales de l'I. H. P., section B, tome 26, nº 3 (1990), p. 437-450
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1990__26_3_437_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 26 n° 3, 1990, p. 437-450 *Probabilités et Statistiques*

Reformulation et extension de certains théorèmes ergodiques

par

Jean-Pierre ROTH

Faculté des Sciences et Techniques
4, Rue des Frères Lumière
68093 Mulhouse Cedex, France

RÉSUMÉ. — On énonce un lemme maximal qui équivaut au lemme de Brunel et permet d'en simplifier la démonstration. On établit un théorème ergodique ponctuel généralisant le théorème de Dunford et Schwartz et on en déduit un théorème de décomposition pour les contractions positives de L^1.

ABSTRACT. — We state a maximal lemma which is equivalent to Brunel's lemma and which leads to a simple proof of it. We give a pointwise ergodic theorem which extends the Dunford-Schwartz's theorem. From it we deduce a decomposition result for positive contractions of L^1.

Mots clés : lemme maximal, théorème ergodique, convergence presque-partout
Classification A.M.S : 28 D 05, 47 A 35

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques - 0246-0203
Vol. 26/90/03/437 /14/\$ 3.40/

INTRODUCTION

Soit T une contraction positive sur $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ où μ est une mesure σ-finie. Une fonction intégrable f étant donnée on s'intéresse au comportement des moyennes $Q_n f = (1/n+1)(f + Tf + \ldots + T^n f)$.

Dans la section III on montre que, pour f positive, la suite $(Q_n f)_n$ converge μ-pp si et seulement si $\overline{\lim_{n\to\infty}} Q_n f < \infty$ μ-pp (*cf.* Théorème 7 et ses corollaires). Ce résultat redonne le théorème de Dunford et Schwartz ([6]) lorsque $T1 \leq 1$. On en déduit un théorème de décomposition en trois parties pour les contractions positives de L_1 (théorème 10).

Pour établir le résultat de convergence on utilise le théorème de Chacon-Ornstein dont l'ingrédient essentiel est le lemme de Brunel. Dans la section I on redémontre ce lemme de façon simple en introduisant un nouvel énoncé qui lui est équivalent (lemme 1).

Dans la section IV on donne l'exemple de toute une famille de contractions positives auxquelles s'applique le théorème de convergence.

La section V offre une démonstration concise du théorème ergodique stochastique de Krengel ([10] page 143). On y utilise de façon implicite la notion de «limites tronquées» que Ackoglu et Sucheston ont définie et exploitée dans le cadre plus général des espaces de Banach réticulés ([1], [2]).

Notations : Soit T une contraction positive de $L^1 = L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ où μ est une mesure σ-finie sur la tribu $\mathcal{A}$.

On note $Q_n = (1/n+1)(I + T + \ldots + T^n)$ et, pour toute fonction f de L^1, on pose $\overline{f} = \overline{\lim_{n\to\infty}} Q_n f$ et $\underline{f} = \underline{\lim_{n\to\infty}} Q_n f$.

Si E est une partie de Ω, on note $L^1(E)$ l'espace de toutes les fonctions de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ nulles sur $\Omega \setminus E$.

I. UNE FORME ÉQUIVALENTE DU LEMME DE BRUNEL

LEMME 1 : *Soient T une contraction positive de L^1, E une partie de Ω et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $L^1(E)$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$.*

On définit la suite $(h_n)_{n\geq 0}$ de fonctions de L^1 par

$$h_0 = f_0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, h_{n+1} = T(h_n) + f_{n+1}.$$

Si $E \subset \{x \in \Omega / \forall k, \exists n \geq k, h_k(x) + \ldots + h_n(x) > 0\}$ alors $\int_E \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right) d\mu \geq 0$.

Démonstration : On s'inspire très largement de la démonstration du lemme maximal de Hopf (*cf.* Garsia [9]).

Pour toute fonction g de L^1 on a $1_{[g>0]}T(g) \leq T(g^+)$, donc

$$\int_{[g>0]} T(g)d\mu \leq \int T(g^+)d\mu \leq \int g^+ d\mu = \int_{[g>0]} gd\mu,$$

c'est-à-dire $\int_{[g>0]} (I-T)gd\mu \geq 0.$

Cette inégalité n'est autre qu'une traduction de l'accrétivité de l'opérateur $(I-T)$ dans L^1 (cf. Bénilan [3]).

p étant un entier, soit $H_p = \sup_{0\leq n\leq p} (h_0 + \ldots + h_n)$. On introduit une partition finie $(E_{p,n})_{0\leq n\leq p}$ de $[H_p > 0]$ telle que, pour tout n compris entre 0 et p, on ait

$$E_{p,n} \subset \{x \in \Omega / H_p(x) > 0 \quad \text{et} \quad H_p(x) = h_0(x) + \ldots + h_n(x)\}$$

Pour $1 \leq n \leq p$, on a sur $E_{p,n}$

$$\begin{aligned}(I-T)(H_p^+) &\leq H_p - T(H_p) \leq h_0 + \ldots + h_n - T(h_0 + \ldots + h_{n-1}) \\ &= h_0 + \ldots + h_n - [(h_1 - f_1) + \ldots + (h_n - f_n)] = f_0 + \ldots + f_n.\end{aligned}$$

Pour $n = 0$, on a sur $E_{p,0}$

$$(I-T)(H_p^+) \leq H_p^+ = h_0 = f_0.$$

Donc, sur $[H_p > 0]$, on a $(I-T)(H_p^+) \leq g_p$, où l'on a posé

$$g_p = \sum_{n=0}^{p} 1_{E_{p,n}} \cdot (f_0 + \ldots + f_n) = \sum_{n=0}^{p} 1_{E\cap E_{p,n}} \cdot (f_0 + \ldots + f_n).$$

L'inégalité d'accrétivité appliquée à la fonction H_p^+ montre alors que

$$\int g_p d\mu = \int_{[H_p>0]} g_p d\mu \geq \int_{[H_p^+>0]} (I-T)(H_p^+)d\mu \geq 0.$$

Pour conclure il suffit de faire un passage à la limite quand $p \to \infty$. Or, d'après l'hypothèse sur E, la suite de fonctions $(g_p)_{p\geq 0}$ converge simplement vers $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$; en effet, pour $x \in E$ et $m \in \mathbb{N}$, il existe $q > m$ tel que

$$h_0(x) + \ldots + h_q(x) > [\sup_{0\leq i\leq m} (h_0(x) + \ldots + h_i(x))]^+.$$

Pour tout $p \geq q$, x est alors dans $[H_p > 0] \setminus \bigcup_{n=0}^{m} E_{p,n}$, donc $g_p(x) = f_0(x) + \ldots + f_n(x)$ pour un certain $n > m$.

De plus, la convergence de la suite $(g_p)_p$ vers $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est dominée par $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$, donc $\int \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \Big) d\mu \geq 0$.

Notations : Si E est une partie de Ω on note E^c son complémentaire et, pour toute fonction f de $L^1(\mu)$, on désigne par $I_E f$ le produit de f par la fonction indicatrice de E.

LEMME 2 (de Brunel [4]) : *Soient T une contraction positive de $L^1(\Omega)$, f une fonction de $L^1(\mu)$ et E une partie incluse dans*

$$\{x \in \Omega / \forall k \in \mathbb{N},\ \exists n \geq k,\ T^k f(x) + \ldots + T^n f(x) > 0\}$$

Alors $\int_E \Big(\sum_{n=0}^{\infty} (T I_{E^c})^n f \Big) d\mu \geq 0$.

Démonstration : Soient f et E comme dans l'énoncé.
On pose $h_n = T^n f - I_{E^c}(T I_{E^c})^n f$ et $f_n = I_E (T I_{E^c})^n f$.
D'une part on vérifie immédiatement que

$$h_0 = f_0 \quad \text{et} \quad \forall n, h_{n+1} = T h_n + f_{n+1},$$

d'autre part on établit par récurrence l'inégalité

$$\sum_{n=0}^{p} \int I_E (T I_{E^c})^n |f| d\mu + \int I_{E^c} (T I_{E^c})^p |f| d\mu \leq \int |f| d\mu,$$

ce qui montre que $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_1 \leq \|f\|_1 < \infty$.

Comme E est inclus dans $\{x \in \Omega / \forall k, \exists n \geq k, h_k(x) + \ldots + h_n(x) > 0\}$ car $h_n = T^n f$ sur E, le lemme 1 donne alors $\int \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \Big) d\mu \geq 0$.

Remarque : Inversement, en appliquant le lemme de Brunel à la contraction

$$(g_0, g_1, g_2, \ldots) \longmapsto (T g_0 + g_1, g_2, g_3, \ldots)$$

de $L^1(\mathbb{N} \times \Omega, \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{A}, \tau \otimes \mu)$ où τ est la mesure de dénombrement sur la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, on retrouve le lemme 1. Les deux énoncés sont donc équivalents.

Par un raisonnement classique de Brunel ([4]) on déduit aisément du lemme 2 le théorème de Chacon-Ornstein ([5]).

THÉORÈME 3 (de Chacon-Ornstein) : *Soient T une contraction positive de $L^1(\mu)$ et f et g des fonctions de $L^1(\mu)$, g étant positive.*

Alors la suite $\left(\frac{Q_n f}{Q_n g}\right)_n$ *converge μ-pp sur* $[\sup_n Q_n g > 0]$ *vers une limite finie.*

II. PROPRIÉTÉS D'INVARIANCE DE $\underline{f}$ ET $\overline{f}$

PROPOSITION 4 : *Soit f une fonction positive de L^1. Alors $\underline{f}$ est dans* L^1 *et* $T(\underline{f}) = \underline{f}$.

Démonstration : L'intégrabilité de $\underline{f}$ est une conséquence immédiate du lemme de Fatou. On pose $\psi = \inf_{n\geq p} \frac{1}{n+1} (f + \ldots + T^n f)$.

Pour tout $n \geq p$, on a

$$T(\psi_p) \leq \frac{1}{n+1} (Tf + \ldots + T^{n+1} f) \leq \frac{n+2}{n+1} \frac{1}{n+2} (f + \ldots + T^{n+1} f)$$
$$\leq \frac{p+2}{p+1} \frac{1}{n+2} (f + \ldots + T^{n+1} f)$$

Donc, pour tout p, $T(\psi_p) \leq \frac{p+2}{p+1} \psi_{p+1}$.

Lorsque p tend vers l'infini $(\psi_p)_p$ converge en croissant, donc dans L^1, vers $\underline{f}$. On a donc $T(\underline{f}) \leq \underline{f}$.

Par ailleurs, pour tout p, $\frac{1}{p+1} (f + \ldots + T^p f) - \psi_p$ est une fonction positive. Donc, T étant une contraction positive de L^1,

$$\int T\Big(\frac{1}{p+1} (f + \ldots + T^p f) - \psi_p\Big) d\mu \leq \int \Big(\frac{1}{p+1} (f + \ldots + T^p f) - \psi_p\Big) d\mu,$$

soit, après simplification,

$$\int \psi_p d\mu \leq \int T(\psi_p) d\mu + \frac{1}{p+1} \int f d\mu,$$

puis, par passage à la limite quand p tend vers l'infini,

$$\int \underline{f} d\mu \leq \int T\underline{f} d\mu.$$

On a donc établi $T\underline{f} = \underline{f}$.

DÉFINITION : Soit T une contraction positive de L^1. Une partie E de Ω est dite absorbante si Tf est dans $L^1(E)$ dès que f est dans $L^1(E)$.

Notation : $f \wedge g$ désigne l'enveloppe inférieure des fonctions f et g.

LEMME 5 : *Soient f et g deux fonctions positives de L^1. Alors*
(1) $T(\overline{f} \wedge g) \leq \overline{f}$,
(2) $\int T(\overline{f} \wedge g)d\mu = \int \overline{f} \wedge g d\mu$,
(3) $[\overline{f} = \infty]$ *est absorbant.*

Démonstration :
(1) Pour deux entiers p et q, $p \leq q$, on note

$$\phi_{p,q} = \sup_{p \leq n \leq q} \frac{1}{n+1} \left(f + \ldots + T^n f\right)$$

Pour tout n compris entre p et q, on a

$$T(\phi_{p,q}) \geq \frac{1}{n+1} \left(Tf + \ldots + T^{n+1}\right) \geq \frac{1}{n+1} \left(f + \ldots + T^n f\right) - \frac{f}{n+1},$$

d'où $T(\phi_{p,q}) \geq \phi_{p,q} - \dfrac{f}{p+1}$.

A partir de cette inégalité et de la propriété de contraction de T, on montre maintenant que $T(\phi_{p,q})$ ne peut être pas beaucoup plus grande que $\phi_{p,q}$. On pose $\theta_{p,q} = [T(\phi_{p,q}) - \phi_{p,q}]^+$.

$$\int \theta_{p,q} d\mu = \int [T(\phi_{p,q}) - \phi_{p,q}] d\mu + \int [\phi_{p,q} - T(\phi_{p,q})]^+ d\mu.$$

La première de ces deux intégrales est négative car T est une contraction et la seconde est majorée par $\dfrac{1}{p+1} \displaystyle\int f d\mu$ d'après l'inégalité ci-dessus.

$T(\phi_{p,q} \wedge g)$ est inférieure d'une part à Tg et d'autre part à $T(\phi_{p,q})$ elle-même plus petite que $\phi_{p,q} + \theta_{p,q}$, donc

$$T(\phi_{p,q} \wedge g) \leq (\phi_{p,q} \wedge Tg) + \theta_{p,q},$$

d'où

$$\int [T(\phi_{p,q} \wedge g) - (\phi_{p,q} \wedge Tg)]^+ d\mu \leq \int \theta_{p,q} d\mu \leq \frac{1}{p+1} \int f d\mu.$$

Lorsque q tend vers l'infini les fonctions $\phi_{p,q} \wedge g$ et $\phi_{p,q} \wedge Tg$ convergent en croissant, donc dans L^1, vers $\phi_p \wedge g$ et $\phi_p \wedge Tg$, où ϕ_p est la limite de $\phi_{p,q}$ lorsque q tend vers l'infini. On a donc,

$$\int [T(\phi_p \wedge g) - (\phi_p \wedge Tg)]^+ d\mu \leq \frac{1}{p+1} \int f d\mu.$$

Lorsque p tend vers l'infini les fonctions $\phi_p \wedge g$ et $\phi_p \wedge Tg$ convergent en décroissant vers $\overline{f} \wedge g$ et $\overline{f} \wedge Tg$. Ces convergences étant par ailleurs dominées par g et Tg, elles ont lieu dans L^1. On a donc

$$\int [T(\overline{f} \wedge g) - (\overline{f} \wedge Tg)]^+ d\mu = 0,$$

ce qui montre que $T(\overline{f} \wedge g) \leq \overline{f} \wedge Tg$ μ-pp.

(2) On vient de voir que $T(\phi_{p,q}) \geq \phi_{p,q} - \dfrac{f}{p+1}$.
Grâce à l'identité évidente $T(\phi_{p,q}) = T(\phi_{p,q} \wedge g) + T(\phi_{p,q} - (\phi_{p,q} \wedge g))$ on en déduit $\phi_{p,q} - \dfrac{f}{p+1} - T(\phi_{p,q} - (\phi_{p,q} \wedge g)) \leq T(\phi_{p,q} \wedge g)$.

En intégrant cette inégalité et en utilisant la propriété de contraction de T on a

$$\int \phi_{p,q} d\mu - \frac{1}{p+1} \int f d\mu - \int (\phi_{p,q} - (\phi_{p,q} \wedge g)) d\mu \leq \int T(\phi_{p,q} \wedge g) d\mu$$

d'où

$$-\frac{1}{p+1} \int f d\mu + \int (\phi_{p,q} \wedge g) d\mu \leq \int T(\phi_{p,q} \wedge g) d\mu.$$

En passant successivement à la limite quand q, puis p, tendent vers l'infini, on obtient

$$\int (\overline{f} \wedge g) d\mu \leq \int T(\overline{f} \wedge g) d\mu.$$

L'inégalité inverse est évidente.

(3) Soit g une fonction positive de L^1 nulle sur $[\overline{f} < \infty]$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on a, d'après le point 1, $Tg = T(g \wedge \varepsilon \overline{f}) \leq \varepsilon \overline{f}$, donc Tg est nulle sur $[\overline{f} < \infty]$, ce qui établit le fait que $[\overline{f} = \infty]$ soit absorbant.

Remarques : (1) Les résultats du lemme 5 vont être améliorés dans la section III.

(2) Si $\alpha = (\alpha_n)_{n>0}$ est une suite numérique positive, décroissante et tendant vers 0 et si l'on pose $\overline{f}^{\alpha} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \alpha_n(f + \ldots + T^n f)$, alors les conclusions du lemme 5 restent valables pour $\overline{f}^{\alpha}$.

III. UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME ERGODIQUE DE DUNFORD-SCHWARTZ

LEMME 6 : *Soit f une fonction positive de L^1. Alors la fonction $\overline{f}\cdot 1_{[\overline{f}<\infty]}$ est aussi dans L^1.*

Démonstration : Soient g positive intégrable, $\rho\ \in]0,1[$ et $H = \sup\limits_{n\geq 0} Q_n(f-\rho(\overline{f}\wedge g))$. D'après le lemme maximal de Hopf (*cf.* [9]) on a

$$\int_{[H>0]}(f-\rho(\overline{f}\wedge g))d\mu \geq 0.$$

donc

$$\rho\int_{[H>0]}\overline{f}\wedge g d\mu \leq \int_{[H>0]} f d\mu \leq \int f d\mu.$$

D'après le lemme 5, on a $T(\overline{f}\wedge g) \leq \overline{f}$. Il s'ensuit que, pour tout n, $T^n(\overline{f}\wedge g)\leq \overline{f}$ et donc $Q_n(\overline{f}\wedge g)\leq \overline{f}$.
De l'inégalité $Q_n(f-\rho(\overline{f}\wedge g)) \geq Q_n - \rho\overline{f}$ on déduit que, sur $[\overline{f}<\infty]$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} Q_n(f-\rho(\overline{f}\wedge g)) \geq (1-\rho)\overline{f}$.
Ceci montre que $[0<\overline{f}<\infty]$ est inclus dans $[H>0]$. On a donc

$$\rho\int_{[0<\overline{f}<\infty]}\overline{f}\wedge g d\mu \leq \int f d\mu.$$

Ceci étant vrai pour toute fonction g positive intégrable et tout ρ dans $]0,1[$, il s'ensuit que $\overline{f}\cdot 1_{[\overline{f}<\infty]}$ est intégrable et son intégrale est inférieure à $\int f d\mu$.

THÉORÈME 7 : *Soient T une contraction positive de $L^1(\mu)$ et f une fonction positive de $L^1(\mu)$. Alors, à un ensemble μ-négligeable près,*

$$\{x\in\Omega/\overline{\lim_{n\to\infty}} Q_n f(x)<\infty\} = \{x\in\Omega/\lim_{n\to\infty} Q_n f(x) \textit{ existe et est finie}\}.$$

Démonstration : D'après le lemme 6 la fonction $g = \overline{f}\cdot 1_{[\overline{f}<\infty]}$ est intégrable.
D'après le lemme 5 on a $Tg = T(g\wedge\overline{f})\leq\overline{f} = g$ sur $E=[\overline{f}<+\infty]$.
On montre alors, par récurrence sur n, que $T^{n+1}g\leq T^n g$ sur E :

$$T^{n+2}g = T(I_E T^{n+1}g) + T(I_{E^c}T^{n+1}g) \leq T(T^n g) + T(I_{E^c}T^{n+1}g),$$

or E^c est absorbant d'après le lemme 5, donc $T(I_{E^c}T^{n+1}g)$ est nulle sur E, d'où $T^{n+2}g \leq T^{n+1}g$ sur E.

Sur E la suite de fonctions $(T^n g)_{n\geq 0}$ est décroissante. Elle converge donc μ-pp sur E. Il en est alors de même pour la suite $(Q_n g)_{n\geq 0}$.

D'après le théorème de Chacon-Ornstein la suite $(Q_n f)_{n\geq 0}$ converge μ-pp sur $[0 < \overline{f} < \infty]$. Par ailleurs elle converge évidemment μ-pp vers 0 sur $[\overline{f} = 0]$. Le théorème 7 est donc démontré.

COROLLAIRE 8 : *Soit T une contraction positive de $L^1(\mu)$. S'il existe g strictement positive de $L^1(\mu)$ telle que $\overline{\lim}_{n\to\infty} Q_n g(x) < \infty$ μ-pp, alors pour toute fonction f de $L^1(\mu)$, la suite $(Q_n f)_{n\geq 0}$ converge μ-pp vers une fonction intégrable T-invariante.*

Démonstration : La convergence est une conséquence immédiate du théorème de Chacon-Ornstein et du théorème 7. Les propriétés de la limite résultent de la proposition 4.

COROLLAIRE 9 : *Soient T une contraction positive de $L^1(\mu)$ et f une fonction positive de $L^1(\mu)$. Alors*

(1) $\underline{f} = \overline{f} \cdot 1_{[\overline{f}=\infty]}$,

(2) *Les ensembles $[\overline{f} = \infty]$ et $[0 < \overline{f} < \infty]$ sont absorbants,*

(3) *pour toute fonction g positive, intégrable, nulle sur $[\overline{f} = 0]$ on a $\int Tg d\mu = \int g d\mu$.*

Démonstration :

(1) Il est clair d'après le théorème 7 que $\underline{f} = \overline{f}$ sur $[\overline{f} < \infty]$. Par ailleurs, comme $\underline{f}$ est T-invariante, on déduit du théorème de Chacon-Ornstein que $(Q_n f)_n$ converge μ-pp sur $[\underline{f} > 0]$. Ceci montre que $\underline{f} = 0$ sur $[\overline{f} = \infty]$.

(2) Ce qui concerne $[\overline{f} = \infty]$ a déjà été vu au lemme 5. Soit g une fonction intégrable, positive, nulle sur $[\underline{f} = 0]$. Pour tout n, $T(g \wedge n\underline{f}) \leq n\underline{f}$, donc $T(g \wedge n\underline{f})$ est nulle sur $[\underline{f} = 0]$. Comme la suite $(g \wedge n\underline{f})_{n\geq 0}$ converge vers g dans L^1, on en déduit que la fonction Tg est aussi nulle sur $[\underline{f} = 0]$. On a donc prouvé que $[\underline{f} > 0] = [0 < \overline{f} < \infty]$ est absorbant.

(3) Soit g une fonction intégrable, positive, nulle sur $[\overline{f} = 0]$. D'après le lemme 5, on a, pour tout n, $\int T(g \wedge n\overline{f})d\mu = \int (g \wedge n\overline{f})d\mu$.
Par passage à la limite quand n tend vers l'infini on obtient

$$\int Tg d\mu = \int g d\mu.$$

Tous les résultats que l'on vient de démontrer dans cette section permettent d'énoncer le théorème de décomposition suivant.

THÉORÈME 10 : *Soit T une contraction positive de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Il existe une unique partition (I, L, N) de Ω telle que, pour toute fonction* *strictement positive* ϕ *de* L^1, *on ait* μ-*pp* $\overline{\phi} = \infty$ *sur* I, $\overline{\phi} \in]0, \infty[$ *sur* L *et* $\overline{\phi} = 0$ *sur* N.

Cette décomposition vérifie les propriétés suivantes

(1) *I et L sont absorbants,*

(2) *L est le plus grand ensemble du type $[g > 0]$ avec g positive intégrable et T-invariante,*

(3) *Pour toute fonction intégrable f, $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n f$ existe μ-pp sur $L \cup N$ et est nulle sur N,*

(4) *Pour toute fonction positive intégrable f, $\underline{\lim}_{n\to\infty} Q_n f$ est nulle sur I,*

(5) *Pour toute fonction intégrable f, nulle sur N, $\int Tf d\mu = \int f d\mu$.*

Remarque : L n'est autre que la partie fortement conservative de la contraction T (*cf.* Krengel [10] pages 141-143). L'originalité de ce théorème tient essentiellement dans l'équivalence entre les deux caractérisations de L, d'une part la propriété (2), d'autre part $L = [0 < \overline{\phi} < \infty]$.

IV. EXEMPLE D'APPLICATION DU THÉORÈME DE CONVERGENCE

DÉFINITION : *On dira qu'une contraction positive T de L^1 appartient à la classe de Hopf si elle satisfait aux deux propriétés équivalentes suivantes (cf. corollaire 8) :*

(i) *il existe une fonction g strictement positive intégrable g telle que $\overline{\lim}_{n\to\infty} Q_n g < \infty$ μ-pp,*

(ii) *pour toute fonction intégrable f, $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n f$ existe et est finie μ-pp.*

Les contractions positives T de L^1 telles que $T1 \leq 1$ sont évidemment dans la classe de Hopf. Nous allons décrire une autre famille de contractions positives de L^1 qui sont aussi dans la classe de Hopf.

Soit τ la mesure de dénombrement sur la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de toutes les parties de $\mathbb{N}$. $L^1(\mathbb{N} \times \Omega, \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{A}, \tau \otimes \mu)$ s'identifie à l'espace des suites $(f_n)_{n\geq 0}$ de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$.

On note $\Omega_i = \{i\} \times \Omega$.

Soit $(T_{i,j})_{i,j\geq 0}$ une famille de contractions positives de $L^1(\Omega_j)$ dans $L^1(\Omega_i)$ qui contractent aussi la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Soit $(a_{i,j})_{i,j\geq 0}$ une famille de réels positifs telle que, pour tout j
$\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j} \leq 1$.

On construit alors sur $L^1(\mathbb{N} \times \Omega, \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{A}, \tau \otimes \mu)$ l'opérateur T par

$$T\Big((f_n)_{n\geq 0}\Big) = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_{n,j} T_{n,j} f_j\Big)_{n\geq 0}.$$

On vérifie facilement que T est une contraction positive de $L^1(\tau \otimes \mu)$, mais en général T ne contracte pas la norme $\|\cdot\|_\infty$. On a cependant le résultat suivant.

PROPOSITION 11 : *T est dans la classe de Hopf.*

Démonstration : Soit ψ une fonction strictement positive de $L^1(\mu)$ telle que $\psi \leq 1$. On considère alors l'élément

$$\phi = (\psi, 2^{-1}\psi, 2^{-2}\psi, \ldots)$$

de $L^1(\mathbb{N} \times \Omega, \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{A}, \tau \otimes \mu)$. On vérifie facilement par récurrence sur n que $T^n\phi \leq (\alpha_{n,0}, \alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \ldots)$ où $(\alpha_{n,p})_{p\geq 0}$ est une suite de réels positifs telle que $\sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{n,p} \leq 2$.

En particulier $T^n\phi$ et donc $Q_n\phi$ sont majorés par $(2, 2, 2, \ldots)$. T vérifiant la propriété (i) appartient à la classe de Hopf.

Pour illustrer la proposition 11 on va examiner le cas particulier simple suivant.

Soit R une contraction positive de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ telle que $R1 \leq 1$. On définit T, contraction positive de $L^1(\mathbb{N} \times \Omega, \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{A}, \tau \otimes \mu)$, par

$$T((f_0, f_1, f_2, \ldots)) = (Rf_0 + f_1, f_2, f_3, \ldots).$$

T ne contracte pas la norme $\|\cdot\|_\infty$ mais appartient cependant à la classe de Hopf.

En regardant ce qui se passe sur la partie $\Omega_0 = \{0\} \times \Omega$, on déduit de cet exemple le résultat suivant.

PROPOSITION 12 : *Soient R une contraction positive de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ telle que $R1 \leq 1$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $L^1(\mu)$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$. On définit par récurrence la suite $(h_n)_{n\geq 0}$ par*

$$h_0 = f_0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, h_{n+1} = R(h_n) + f_{n+1}.$$

Alors $\dfrac{1}{n+1}\,(h_0 + \ldots + h_n)$ converge μ-pp vers une fonction intégrable R-invariante.

V. THÉORÈME ERGODIQUE STOCHASTIQUE

On reprend les notations du théorème 10. On a vu que la suite $(Q_n\phi)_n$ converge μ-pp sur $L \cup N$ et que ses limites inférieure et supérieure valent respectivement 0 et ∞ μ-pp sur I. Le théorème ergodique stochastique de Krengel ([10] page 143) permet de préciser le comportement de cette suite sur I : elle converge en mesure vers 0. On va donner une démonstration courte de ce résultat en utilisant de façon implicite la notion de «limites tronquées» due à Ackoglu et Sucheston ([1],[2]).

THÉORÈME 13 (de Krengel) : *Soient T une contraction positive de L^1 et f une fonction intégrable positive.*

La suite $(Q_nf)_n$ converge en mesure vers $\underline{f}$.

Démonstration : On pose $f_n = Q_nf$.
Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ convergeant vers l'infini.
Soit g une fonction positive intégrable.
Pour toute fonction ψ positive dans $L^\infty(\mu)$ on a

$$\int (f_n \wedge g)\psi d\mu \leq \int g\psi d\mu,$$

d'où

$$L_g(\psi) = \lim_{\mathcal{U}} \int (f_n \wedge g)\psi d\mu \leq \int g\psi d\mu.$$

On déduit alors du théorème de Lebesgue-Nikodym l'existence d'une fonction positive $\widetilde{f}_g$ de $L^1(\mu)$, majorée par g, telle que

$$\forall \psi \in L^\infty(\mu), \quad L_g(\psi) = \int \widetilde{f}_g \psi d\mu.$$

La suite $(f_n \wedge g)_n$ converge donc faiblement vers $\widetilde{f}_g$ suivant $\mathcal{U}$.

La famille $\mathcal{F} = \{\widetilde{f}_g / g \text{ positive intégrable}\}$ est filtrante croissante dans $L^1(\mu)$. De plus

$$\int \widetilde{f}_g = \lim_{\mathcal{U}} \int (f_n \wedge g) d\mu \leq \lim_{\mathcal{U}} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

L'enveloppe supérieure essentielle de $\mathcal{F}$ est donc une fonction intégrable $\widetilde{f}$, limite d'une suite croissante de fonctions de $\mathcal{F}$.

On va montrer que $\widetilde{f}$ est T-sous-invariante.

$$T(f_n \wedge g) \leq Tf_n \wedge Tg = \Big(f_n + \frac{T^{n+1}f - f}{n+1}\Big) \wedge Tg \leq f_n \wedge Tg + \frac{|T^{n+1}f - f|}{n+1}.$$

Par passage à la limite faible suivant $\mathcal{U}$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$T(\widetilde{f}_g) \leq \widetilde{f}_{Tg} \leq \widetilde{f}, \quad \text{d'où} \quad T(\widetilde{f}) \leq \widetilde{f}.$$

On en déduit que $(Q_n \widetilde{f})_n$ converge μ-pp sur Ω.

Le théorème de Chacon-Ornstein montre alors que $(f_n)_n$ converge μ-pp, donc en mesure, vers $\underline{f} = \overline{f}$ sur $[\widetilde{f} > 0]$.

Par ailleurs, pour toute fonction positive intégrable g,

$$\lim_{\mathcal{U}} \int_{[\widetilde{f}=0]} f_n \wedge g d\mu = \int_{[\widetilde{f}=0]} \widetilde{f}_g d\mu = 0.$$

En appliquant cette propriété à $g = \varepsilon 1_A$ où $\varepsilon > 0$ et A est une partie intégrable incluse dans $[\widetilde{f} = 0]$ et en remarquant que

$$1_{[f_n \geq \varepsilon] \cap A} \leq \frac{1}{\varepsilon} (f_n \wedge g),$$

on obtient

$$\lim_{\mathcal{U}} \mu([f_n \geq \varepsilon] \cap A) = 0.$$

Sur $[\widetilde{f} = 0]$ la suite $(f_n)_n$ converge donc en mesure vers 0 suivant $\mathcal{U}$. Il s'ensuit en particulier que $\underline{f} = 0$ sur $[\widetilde{f} = 0]$.

Finalement $(f_n)_n$ converge en mesure vers $\underline{f}$ suivant $\mathcal{U}$. Ceci étant vrai pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ convergeant vers l'infini, le théorème est donc démontré.

On peut facilement montrer que, de plus, $\widetilde{f} = \underline{f}$.

REMARQUES FINALES

1) On peut étendre le résultat de convergence du corollaire 8 au cas de contractions complexes de $L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ en utilisant un théorème de Feyel ([7]) permettant de représenter de telles contractions complexes comme des contractions positives sur $L^1(\mathbb{U} \times \Omega, d\theta \otimes \mu)$ où $d\theta$ est la mesure de Lebesgue sur le cercle unité $\mathbb{U}$ du plan complexe.

2) Dans cet article, on s'est intéressé aux moyennes de Césaro relatives au semi-groupe discret $(T^n)_{n \geq 0}$. Il semble que toutes les méthodes et tous les résultats puissent être adaptés sans difficultés au cas des moyennes abéliennes $(\lambda V_\lambda)_{\lambda > 0}$ relatives à un semi-groupe fortement continu $(P_t)_{t \geq 0}$ de contractions positives de $L^1(\mu)$. On obtient ainsi une généralisation au cas où λV_λ ne contracte pas la norme de L^∞ d'un théorème ergodique de Feyel pour les familles résolvantes ([8]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.A. Akcoglu, L. Sucheston, On Ergodic Theory and Truncated Limits in Banach Lattices, Proceedings of the 1983 Oberwolfach Measure Theory Conference, *Lect. Notes Math.*, vol. **1089**, 241-262, 1984, Springer-Verlag, Berlin.

[2] M.A. Akcoglu, L. Sucheston, An Ergodic Theorem on Banach Lattices, *Israël J. Math.*, vol. **51**, 1985, 208-222.

[3] Ph. Benilan, Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications, 1972, Thèse Orsay.

[4] A. Brunel, Sur un lemme ergodique voisin du lemme de E. Hopf et sur une de ses applications, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **256**, 1963, 5481-5484.

[5] R.V. Chacon, D.S. Ornstein, A general ergodic theorem, *Illinois J.M.* t. **4**, 1960, 153-160.

[6] N. Dunford, J.T. Schwartz, Convergence almost everywhere of operator averages, *J. Rat. Mech. Anal.*, 1956, T. **5**, 129-178.

[7] D. Feyel, Espaces complètement réticulés de pseudo-noyaux. Applications aux résolvantes et aux semi-groupes complexes, Sém. Théorie du potentiel, Paris, N°3, *Lect. Notes Math.*, vol. **681**, 54-80, 1978, Springer-Verlag, Berlin.

[8] D. Feyel, Théorèmes de convergence presque sûre, existence de semigroupes, *Adv. Math.*, t. **34**, 1979, 154-162.

[9] A. Garsia, Topics in almost everywhere convergence, *Lect. Adv. Math.* **4**, 1970, Markham Publishing Company.

[10] U. Krengel, Ergodic theorems, *Studies Math.* **6**, de Gruyter, 1985.

(*Manuscrit reçu le* 4 *octobre* 1989.)