ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

X. FERNIQUE

Sur la régularité de certaines fonctions aléatoires d'Ornstein-Uhlenbeck

Annales de l'I. H. P., section B, tome 26, nº 3 (1990), p. 399-417

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1990__26_3_399_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 26 n° 3, 1990, p. 399-417 *Probabilités et Statistiques*

Sur la régularité de certaines fonctions aléatoires d'Ornstein-Uhlenbeck

par

X. FERNIQUE

Université Louis Pasteur, Département de Mathématique,
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France

RÉSUMÉ. — Dans ce travail, on se propose de préciser les conditions de régularité des fonctions aléatoires d'Ornstein-Uhlenbeck partant de l'origine quand elles sont définies par des opérateurs simultanément diagonalisables. On étudie en particulier le cas où X est une fonction aléatoire séparable sur $[0, T] \subset \mathbb{R}^+$ à valeurs dans un espace $l_p, p \in [2, \infty[$ vérifiant l'équation :

$$dX = -\Lambda X dt + \Sigma dW, X(0) = 0,$$

où Λ est un opérateur diagonal, Σ est un opérateur diagonal non négatif et W est un processus de Wiener à composantes indépendantes normalisées : les trajectoires de X dans l_p sont continues si et seulement si elles sont dans cet espace et l'intégrale $\int_{x>0} [x \log^+(\sup\{\lambda_k : \sigma_k^2 > \lambda_k x\})]^{p/2} \frac{dx}{x}$ est finie. En appendice et en liaison avec le résultat précédent, on étudie un problème de calcul des variations dans l_p.

ABSTRACT. — We precise the regularity of the Ornstein-Uhlenbeck functions starting of the origin and defined by diagonalisable operators. We characterise the regularity of the paths of l_p-valued separable solutions

Mots clés : Ornstein-Uhlenbeck functions, regularity of paths.
Classification A.M.S : 60 G 15, 60 B 11, 49 A 27.

of the diagonal Langevin equation $dX = -\Lambda X dt + \Sigma dW, X(0) = 0$, $X(t) \in l_p, t \in \mathbb{R}^+$, where p belongs to $[2, \infty[$, Λ is diagonal, Σ is diagonal non-negative and W is a Wiener process with independent and normalized components : the paths in l_p of such random function are continuous if and only if the integral $\int [x \log^+(\sup\{\lambda_k = \sigma_k^2 > \lambda_k x\})]^{p/2} \frac{dx}{x}$ is finite. In the appendix, we study a problem of variations in l_p associated with the previous result.

0. INTRODUCTION

0.1. Soient E un espace vectoriel topologique localement convexe lunisien et quasi-complet ; on note E' son dual topologique et F un sous-espace vectoriel de E' séparant les points de E ; K est un espace de Hilbert contenant F et $T = [0, T]$ est un intervalle borné fermé de $\mathbb{R}^+$; on pose $T' = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}; r = \{r(u), u \geq 0\}$ est un semi-groupe d'opérateurs (non nécessairement bornés) sur K dont le domaine contient F ; on suppose que pour tout $y \in F$, l'application : $u \to (\|r(u) \cdot y\|_K)^2$ de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable et Lebesgue-intégrable. A toutes ces données, nous associons sur $(T \times F)^2$ la fonction Γ définie par :

0.1.1 $$\Gamma(t, y; s, z) = \int_0^\infty \langle I_{\{u \leq t\}} r(t-u) y, I_{\{u \leq s\}} r(s-u) z \rangle_K du;$$

c'est une covariance puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(t_k, y_k; 1 \leq k \leq n) \in (T \times F)^n$, on a :

$$\sum \Gamma(t_k, y_k; t_m, y_m) = \int_0^\infty \left\| \sum I_{u \leq t_k} r(t_k - u) y_k \right\|_K^2 du \geq 0.$$

Une fonction aléatoire gaussienne centrée X sur T à valeurs dans E est dite d'Ornstein-Uhlenbeck partant de l'origine si elle a sur $T \times F$ cette covariance Γ.

On se propose d'étudier la régularité des trajectoires d'une telle fonction aléatoire X : on donnera des conditions suffisantes pour leur continuité dans le cas où le semi-groupe r peut être diagonalisé et on montrera que dans des situations suffisamment générales, ces conditions sont aussi nécessaires (Théorème 1.0). De plus, si E est un espace l_p, $p \geq 2$, on exprimera ces conditions nécessaires et suffisantes sous forme simple (Théorème 2.1) ;

Ces résultats, basés sur ceux de [2], ont été partiellement annoncés dans [3]; ils fournissent une solution complète à un problème introduit dans [4] et étudié précédemment dans [5]. En appendice, nous étudions les variations dans l_p des fonctions du type : $y \to \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\sum_{m \geq n} s_m y_m^2 \Big]^{1/2}$ où s_m est une suite positive.

0.2. Soit K_0 un espace de Hilbert contenant F, inclus algébriquement et topologiquement dans K de sorte que pour tout $y \in K_0$, $\|y\|_K \leq \|y\|_{K_0}$; *nous dirons que la situation est K_0-diagonalisable* si le semi-groupe r a dans K_0 un générateur infinitésimal autoadjoint au sens suivant : il existe un opérateur autoadjoint non nécessairement borné L sur K_0 tel que :

0.2.1 $$\forall u \geq 0, r(u) = \exp\{-uL\},$$

de sorte qu'en notant $\pi = \{\pi_{y,z}; y, z \in F\}$ la famille des mesures spectrales de L, on ait :

0.2.2 $$\forall y \in F, \forall t \in T, \|r(t)y\|_K^2 \leq \|r(t)y\|_{K_0}^2 = \int \exp\{-2\lambda t\}\pi_{y,y}(d\lambda).$$

Un cas particulier important sera celui des situations K-diagonalisables.

0.3. Dans toute la suite, *nous supposerons la situation K_0-diagonalisable.* On sait ([2],6.3.2) que l'existence des fonctions aléatoires d'Ornstein-Uhlenbeck X sur T à valeurs dans E partant de l'origine est déterminée par la condition :

0.3.1 l'application $y \to \int_0^T \|r(u)y\|_K^2 du$ est la covariance d'un vecteur aléatoire gaussien à valeurs dans E.

Les propriétés spectrales du semi-groupe autoadjoint r montrent qu'il suffit pour cela que, indépendamment de $a > 0$, la condition suivante soit vérifiée :

0.3.2 $$\int_{\lambda < -a} |\lambda|^{-1}\exp\{2|\lambda|T\}\pi_{y,y}(d\lambda), \quad \int_{\lambda > a} \lambda^{-1}\pi_{y,y}(d\lambda), \quad \int_{|\lambda| \leq a} \pi_{y,y}(d\lambda)$$

sont les covariances de vecteurs gaussiens G^-, G^+, G^0 à valeurs dans E.

On notera qu'alors ces trois covariances sont continues sur F muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de E.

Bien entendu, les propriétés 0.3.1 et 0.3.2 sont équivalentes si la situation est K-diagonalisable.

0.4. On a énoncé précédemment et sans hypothèse de diagonalisabilité ([2], théorèmes 6.3.5 et 6.3.8) des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour que les fonctions aléatoires d'Ornstein-Uhlenbeck

X sur T à valeurs dans E partant de l'origine aient des modifications à trajectoires continues ou bornées dans E; plus précisément :

THÉORÈME : *Soit* $T \in \mathbb{R}^+$; *on suppose la propriété 0.3.1 vérifiée. Dans ces conditions, supposons de plus que :*

0.4.1. *Il existe une modification* X' *de* X *ayant ses trajectoires continues (resp. bornées) sur* $[0, T]$, *dans* E.

Nous avons alors aussi :

0.4.2. *Il existe une partie compacte (resp. bornée)* C *de* E *telle que :*

$$\forall y \in F, \mathbf{E} \sup_{t \in [0,T] \cap \mathbb{Q}} \langle X(t), y \rangle \leq \sup_{x \in C} \langle x, y \rangle;$$

Inversement, si la propriété 0.4.2 est vérifiée, alors nous avons aussi :

0.4.3. X *a une modification* X' *ayant ses trajectoires continues (resp. localement bornées) sur* $[0, T[$.

Le théorème rappelé ci-dessus fournit un léger décalage temporel entre les conditions nécessaires et les conditions suffisantes de régularité. Dans le premier paragraphe de cet article et sous l'hypothèse de K-diagonalisabilité, nous allons montrer que ce décalage peut être éliminé.

I. LES CONDITIONS DE LA RÉGULARITÉ DANS LE CAS DIAGONALISABLE

1.0. *Nous supposons la condition 0.3.2 réalisée*; nous fixons un nombre $a > 0$ et nous décomposons le semi-groupe r suivant les parties $\Lambda^- = \{\lambda < -a\}$, $\Lambda^0 = \{|\lambda| \leq a\}$, $\Lambda^+ = \{\lambda > a\}$ du spectre; nous notons respectivement r^-, r^0, r^+, les semi-groupes définis définis par :

1.0.1 $\forall y, z \in F, \forall i \in J = \{-, 0, +\}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \langle r^i(t)y, z\rangle_{K_0} = \int_{\Lambda^i} \exp(-\lambda t)\ \pi_{y,z}(d\lambda)$,

et nous leur associons les covariances respectives :

$$\Gamma^i(t, y; s, z) = \int_0^\infty \langle I_{u \leq t} r^i(t-u)y, \quad I_{u \leq s} r^i(s-u)z\rangle_{K_0} du,$$

de sorte que les distances associées vérifient :

$$1.0.2 \quad (d^i(t, y; s, y))^2 = \int_{\Lambda^i} \Big\{ \frac{\exp(2\lambda s) - 1}{2\lambda} [\exp(-\lambda t) - \exp(-\lambda s)]^2 + \frac{1 - \exp(-2\lambda(t-s))}{2\lambda} \Big\} \pi_{y,y}(d\lambda),$$

$$1.0.3 \qquad (d_X(t, y; s, z))^2 \leq \sum_{i \in J} (d^i(t, y; s, z))^2,$$

avec l'égalité si $K = K_0$; ceci correspond donc à la construction de trois fonctions aléatoires d'Ornstein-Uhlenbeck X^-, X^0, X^+ partant de l'origine à valeurs dans E associées à l'espace de Hilbert K_0 et respectivement aux semi-groupes r^-, r^0, r^+ ; la forme de la condition 0.3.2 permet d'ailleurs de définir X^0 et X^+ sur $\mathbb{R}^+$ tout entier alors que X^- ne sera défini que sur $[0, T]$. Les propriétés de comparaison des fonctions aléatoires gausiennes ([2], corollaires 4.2.3) montrent que leur régularité implique celle de X et en fait lui est équivalente si $K = K_0$. Nous allons étudier successivement ces régularités, leur caractérisation fournira des conditions suffisantes pour la régularité de X et en fait la déterminera si $K = K_0$. On obtiendra :

THÉORÈME : *On suppose la situation K_0-diagonalisable; alors pour que X ait une modification à trajectoires continues dans E sur $[0, T]$, il suffit que la condition 0.3.2 soit vérifiée et que la fonction J_1 : $y \to \int_0^\infty \left[\int_{\lambda > \exp(x^2)} \lambda^{-1} \pi_{y,y}(d\lambda)\right]^{1/2} dx$ soit continue sur F pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de E, c'est-à-dire qu'il existe une partie compacte K de E telle que :*

$$\forall y \in F, \int_0^\infty \left[\int_{\lambda > \exp(x^2)} \lambda^{-1} \pi_{y,y}(d\lambda)\right]^{1/2} dx \leq \sup_{x \in K} \langle x, y \rangle.$$

Supposons de plus F dense pour la topologie forte de E', alors pour que X ait une modification à trajectoires bornées sur $[0, T]$, il suffit que la condition 0.3.2 soit vérifiée et que J_1 soit continue sur F pour la topologie forte, c'est-à-dire qu'il existe une partie bornée C de E telle que :

$$\forall y \in F, \int_0^\infty \left[\int_{\lambda > \exp(x^2)} \lambda^{-1} \pi_{y,y}(d\lambda)\right]^{1/2} dx \leq \sup_{x \in C} \langle x, y \rangle.$$

Inversement si la situation est K-diagonalisable et si X a presque toutes ses trajectoires continues dans E sur $[0, T]$ (resp. bornées sur $[0, T]$), alors la condition 0.3.2 est vérifiée et J_1 est continue sur F pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de E (resp. pour la topologie forte).

Dans la suite de ce paragraphe, nous prouverons en plusieurs étapes le théorème 1.0.

1.1. La régularité de X^0

Pour étudier cette régularité, nous utilisons le théroème 0.4 et les propriétés de comparaison gaussiennes; notons en effet w une fonction aléatoire de Wiener réelle normalisée usuelle; la relation 1.0.2 fournit pour tout $S \in \mathbb{R}^+$:

$$\forall y \in F, \forall t, s \in [0, S], d^2_{\langle X^0, y\rangle}(t, s) \leq d^2_w(t, s)(1 + a/2)S \exp(2aS)\pi_{y,y}([-a, +a]),$$

et donc :

$$\mathbf{E} \sup_{[0,S]\cap\mathbb{Q}} \langle X^0, y\rangle \leq C(a, S)\pi_{y,y}([-a, +a])^{1/2};$$

la propriété 0.3.2 montre que le dernier facteur du second membre est continu sur F pour la topologie de la convergence compacte de sorte que X^0 vérifie la propriété 0.4.2 sur $[0, S]$. Le théorème 0.4 montre donc que X^0 a une modification à trajectoires continues dans E sur $\mathbb{R}^+$.

1.2. La régularité de X^-

On peut tenter d'étudier X^- suivant le même schéma que X^0; il permettrait seulement d'établir la régularité de X^- sur $[0, S]$ pour $S < T$ et serait donc inefficace. Pour obtenir un résultat plus précis, nous utiliserons le lemme :

LEMME : *Soient (λ_n) une suite positive et (G_n) une suite d'éléments de E; soit de plus $T \in \mathbb{R}^+$. On suppose que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(\lambda_n T)G_n$ converge dans E. Dans ces conditions, la série de fonctions $\left\{t \to \sum_{n=1}^{\infty} \exp(\lambda_n t)G_n\right\}$ converge uniformément dans E sur $[0,T]$; de plus pour toute partie symétrique convexe et fermée B de E, on a en notant N_B la jauge de B :*

1.2.1.1 $$\sup_{t\in[0,T]} N_B\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \exp(\lambda_n t)G_n\right\} \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} N_B\left\{\sum_{n=1}^{m} \exp(\lambda_n T)G_n\right\}.$$

Démonstration : Pour tout couple croissant (m, n) d'entiers positifs et tout $t \in [0, T]$, la formule d'Abel montre que :

$$\sum_{k=n}^{m} \exp(\lambda_k t)G_k = \sum_{j=n}^{m} \left\{\sum_{k=n}^{j} \exp(\lambda_k t)G_k\right\}\alpha_{m,j}$$

où les $\alpha_{m,j}$ sont positifs et les sommes $\sum_{j=n}^{m} \alpha_{m,j}$ sont inférieures ou égales à 1; on en déduit avec les notations de l'énoncé du lemme :

1.2.1.1 $$\sup_{t\in[0,T]} N_B\left\{\sum_{k=n}^{m} \exp(\lambda_k t)G_k\right\} \leq \sup_{j=n}^{m} N_B\left\{\sum_{k=n}^{j} \exp(\lambda_k t)G_k\right\}.$$

Puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(\lambda_n T) G_n$ converge et que l'espace E est quasi-complet, il existe une partie symétrique convexe et compacte K de E telle que :

$$\sup_{n \in N} N_K \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \exp(\lambda_k T) G_k \Big\} \leq 1;$$

la propriété 1.2.1.2 montre donc que pour tout $t \in T$, toutes les sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} \exp(\lambda_k t) G_k$ appartiennent au compact K. La convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(\lambda_n T) G_n$ implique aussi que ses sommes partielles forment une suite de Cauchy dans E; pour tout voisinage symétrique convexe fermé V de l'origine dans E, il existe donc un entier positif n_0 tel que :

$$\forall m \geq n_0, \sum_{k=n_0}^{m} \exp(\lambda_k T) G_k \in V;$$

la formule 1.2.1.2 implique donc encore :

1.2.1.3 $$\forall m \geq n_0, \forall t \in [0, T], \sum_{k=n_0}^{m} \exp(\lambda_k t) G_k \in V;$$

pour tout t appartenant à $[0, T]$, la suite $\Big\{ \sum_{k=1}^{n} \exp(\lambda_k t) G_k, n \in \mathbb{N} \Big\}$ est alors une suite de Cauchy relativement compacte dans l'espace quasi-complet E, elle converge; de plus puisque V est fermé, la formule 1.2.1.3 implique :

$$\forall m \geq n_0, \forall t \in [0, T], \sum_{k=m}^{\infty} \exp(\lambda_k t) G_k \in 2V,$$

c'est donc la convergence uniforme. La propriété 1.2.1.1 résulte alors de la relation 1.2.1.2 et le lemme est démontré.

1.2.2 Nous étudions maintenant la régularité de X^- à partir du lemme 1.2.1 et en supposant pour commencer que le spectre Λ^- est porté par une suite décroissante $(-l_n, n \in \mathbb{N})$:

$$a \leq l_1 \leq l_2 \leq \ldots \leq l_n \leq \ldots,$$

de sorte que $I_{\lambda < -a} \pi_{y,z} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(y, z) \delta_{-l_n}$ où $\sum_{n=1}^{\infty} q_n(y, z) \frac{\exp(2 l_n T) - 1}{2 l_n}$ est la covariance de $X^-(T)$.

Pour tout $n \geq 1$, $q_n(y,z)$ est la covariance d'un vecteur gaussien G_n à valeurs dans E et il existe un processus de Wiener W_n à valeurs dans E de covariance $(s \wedge t)q_n(y,z)$; nous choisissons la suite (W_n) indépendante et nous lui associons les deux séries aléatoires :

$$\sum (2l_n)^{-1/2} \exp(l_n t) W_n(1), \sum (2l_n)^{-1/2} \exp(l_n t) \\ [W_n(1 - \exp(-2l_n t)) - W_n(1)].$$

Sous la condition 0.3.2, pour tout t appartenant à $[0,T]$, ces deux séries convergent presque sûrement dans E vers des sommes $Y(t)$ et $Z(t)$; le calcul montre que $Y + Z$ a même covariance et donc même loi que X^-. La fonction aléatoire Z est stationnaire et vérifie :

$$\forall y \in F, d^2_{\langle Z,y\rangle}(s,t) \leq |t-s| \sum_{n=1}^{\infty} q_n(y,y) \leq |t-s|/T\mathbf{E}\langle X^-(T), y\rangle^2;$$

le théorème 5.2.6 de [2] qui est le pendant du théorème 0.4 pour les fonctions aléatoires gaussiennes stationnaires montre alors que Z a une modification à trajectoires continues dans E. Le lemme 1.2.1 montre que Y a la même propriété sur $[0,T]$; il en est alors aussi de même pour $Y+Z$ et donc pour X^- ; plus précisément d'ailleurs, l'argumentation employée montre que pour toute partie symétrique convexe fermée B de E, on a :

1.2.2.1 $$\mathbf{E} \sup_{t \in [0,T] \cap \mathbf{Q}} N_B\{X^-(t)\} \leq C(T)\mathbf{E}N_B\{X(T)\}.$$

1.2.3 Nous étudions maintenant dans la généralité la régularité de X^-. Nous utilisons pour cela le spectre discret associé à la famille spectrale :

$$\pi' = \sum_{n=0}^{\infty} \pi\{]-n-1, -n]\}\delta_{-(n+1)},$$

et donc à une fonction aléatoire d'Ornstein-Uhlenbeck X' telle que :

1.2.3.1 $\forall y \in F, \mathbf{E}\langle X'(T), y\rangle^2 \leq \exp(T)\ \mathbf{E}\langle X^-(T), y\rangle^2,$

1.2.3.2 $\forall s,t \geq 0, d_{X^-}(t,y;s,y) \leq d_{X'}(t,y;s,y);$

nous pouvons alors appliquer à X' les résultats de l'alinéa précédent ; par ailleurs les inégalités 1.2.3.1 et 1.2.3.2 impliquent :

1.2.3.3 $$\forall s,t \in [0,T], \forall y,z \in F, d_{X^-}(t,y;s,z) \leq (1+\exp(T/2)) \\ d_{X^-(T)}(y,z) + d_{X'}(t,y;s,z).$$

La propriété 1.2.3.3 et la propriété 1.2.2.1 appliquée à X' montrent qu'il existe une partie symétrique convexe et compacte K de E telle que :

1.2.3.4
$$\mathbf{E} \sup_{t\in[0,T]\cap\mathbf{Q}} N_K\{X^-(t)\} \leq c[\mathbf{E}N_K\{X^-(T)\} + \mathbf{E} \sup_{t\in[0,T]\cap\mathbf{Q}} N_K\{X'(t)\}];$$

de même la propriété 1.2.3.2 et l'existence d'une modification de X' à trajectoires continues dans E sur $[0,T]$ montrent que pour tout y appartenant à E', la fonction aléatoire réelle : $t \to \langle X^-(t), y\rangle$ a une modification à trajectoires continues sur $[0,T]$. On sait ([2], théorème 4.2.1) que cette propriété jointe à la relation 1.2.3.4 suffit pour que X^- ait une modification à trajectoires continues dans E sur $[0,T]$. Pour résumer, nous pouvons donc énoncer le résultat partiel;

1.2.4 PROPOSITION : *On suppose la situation K_0-diagonalisable et la propriété 0.3.2 vérifiée; dans ces conditions, les fonctions aléatoires X^0 et X^- ont des modifications à trajectoires continues dans E sur* $[0,T]$.

1.3. La régularité de X^+

La proposition 1.2.4 montre que dans les conditions de notre étude, les singularités résultent de la seule contribution de Λ^+ et que nous pouvons supposer $a = 1$. Notre analyse utilisera le théorème 0.4 et la relation 1.0.4 (pour $i = +$) qui fournit pour tout y appartenant à F :

1.3.1
$$d^2_{\langle X^+,y\rangle}(s,t) = \int_{\Lambda^+} \left\{ \frac{\exp(2\lambda s) - 1}{2\lambda} [\exp(-\lambda t) - \exp(-\lambda s)]^2 + \frac{1 - \exp(-2\lambda(t-s))}{2\lambda} \right\} \pi_{y,y}(d\lambda).$$

Pour tout λ appartenant à Λ^+ et tout couple (s,t) de nombres positifs, l'intégrand $f(\lambda,s,t)$ du second membre ci-dessus peut s'encadrer sous la forme :

1.3.2
$$\frac{e-1}{2e} [\lambda^{-1} \wedge |t-s|] \leq f(\lambda,s,t) \leq 2[\lambda^{-1} \wedge |t-s|];$$

la fonction $[\lambda^{-1} \wedge |t-s|]$ étant une fonction croissante de $(t-s)$, les propriétés gaussiennes ([1]) montrent donc que pour tout y appartenant à F, on a :

1.3.3
$$cJ(y) \leq \mathbf{E} \sup_{t\in[0,T]\cap\mathbf{Q}} \langle X^+(t), y\rangle \leq CJ(y)$$

où c et C sont des constantes positives et finies et où $J(y)$ est défini par :

1.3.4 $$J(y) = \int_0^\infty \Big[\int_{\lambda>1} [\lambda^{-1} \wedge \exp(-x^2)]\pi_{y,y}(d\lambda)\Big]^{1/2} dx,$$

de sorte que sa grandeur est déterminée par celles des deux intégrales :

1.3.5 $$J_1(y) = \int_0^\infty \Big[\int_{\lambda>\exp(x^2)} \lambda^{-1}\pi_{y,y}(d\lambda)\Big]^{1/2} dx,$$

1.3.6 $$J_2(y) = \int_0^\infty \Big[\exp(-x^2)\pi_{y,y}\{]1, \exp(x^2)]\}\Big]^{1/2} dx.$$

Nous comparons J_1 et J_2. On a en majorant J_2 :

$$\begin{aligned}
J_2(y) &\leq \int_0^\infty \exp(-x^2/2)\Big[\sum_{k=0}^{x^2} \pi_{y,y}\{]e^k, e^{k+1}]\}\Big]^{1/2} dx \\
&\leq \int_0^\infty \exp(-x^2/2)\sum_{k=0}^{x^2} \Big[\pi_{y,y}\{]e^k, e^{k+1}]\}\Big]^{1/2} dx, \\
J_2(y) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \Big[\pi_{y,y}\{]e^k, e^{k+1}]\}\Big]^{1/2} \int_{\sqrt{k}}^\infty \exp(-x^2/2)dx \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \Big[\pi_{y,y}\{]e^k, e^{k+1}]\}\Big\{(\pi/2) \wedge \frac{e^{-k}}{k}\Big\}\Big]^{1/2};
\end{aligned}$$

on a aussi en minorant J_1 :

$$\begin{aligned}
J_1(y) &\geq \sum_{k=0}^{\infty} \Big[\pi_{y,y}\{]e^{k+1}, e^{k+2}]\}\Big]^{1/2} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})e^{-(k+2)/2} \\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\pi_{y,y}\{]e^k, e^{k+1}]\}\Big]^{1/2} \frac{e^{-k/2}}{2\sqrt{ek}};
\end{aligned}$$

en regroupant, on en déduit :

1.3.7 $$J_2(y) \leq 2\sqrt{e}J_1(y) + \sqrt{\frac{\pi e}{2}}\Big[\int_{\lambda\geq 1} \lambda^{-1}\pi_{y,y}(d\lambda)\Big]^{1/2},$$

où sous la condition 0.3.2, le second terme du second membre est une fonction continue de y pour la topologie de la convergence compacte.

L'ensemble de ces évaluations et le théorème 0.4 fournissent donc :

1.3.8 PROPOSITION : *On suppose la situation K_0-diagonalisable et la propriété 0.3.2 vérifiée; dans ces conditions, la fonction aléatoire X^+ a une modification à trajectoires continues dans E sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si J_1 est continue sur F pour la topologie de la convergence compacte. Supposons de plus F dense pour la topologie forte de E', alors X^+ a une modification à trajectoires localement bornées dans E sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si J_1 est continue sur F pour la topologie forte.*

Le théorème 1 résulte alors immédiatement des propositions 1.2.4 et 1.3.8 et de l'argumentation 1.0.

II. DES CRITÈRES EXPLICITES DE RÉGULARITÉ

2.0. Nous supposons dans ce paragraphe que E est un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ contenant sa base canonique; F est l'espace $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})_0$ de suites de nombres réels à support fini et X est la fonction d'Ornstein-Uhlenbeck partant de l'origine associée à l'équation différentielle :

2.0.1 $$dX = -\Lambda X dt + \Sigma dW,$$

où $\Lambda = (\lambda_n, n \in \mathbb{N})$ et $\Sigma = (\sigma_n, n \in \mathbb{N})$ sont des opérateurs diagonaux positifs et W est un processus de Wiener à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ normalisé par la l_2-norme. Dans ces conditions, la situation est K-diagonale, L est égal à Λ et à Λ^*, $r(u)$ est égal à $\exp(-u\Lambda)$ pour tout $u \geq 0$, la covariance Γ est définie par :

$$\Gamma(t, y; s, z) = \int_0^{s\wedge t} \Big[\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^2 y_n^2 \exp\{\lambda_n(2u - s - t)\}\Big] du$$

et les mesures spectrales sont définies par :

2.0.2 $$\pi_{y,y} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^2 y_n^2 \delta_{\lambda_n},$$

de sorte que X est à trajectoires dans E sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si (condition 0.3.2) :

2.0.3 $\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^2(\lambda_n^{-1} \wedge 1) y_n^2$ est la covariance d'un vecteur gaussien à valeurs dans E,

et ces trajectoires sont continues ou localement bornées suivant la mode de continuité dans F de J_1 définie par :

2.0.4 $$J_1(y) = \int_0^{\infty} \Big[\sum_{n=0}^{\infty} I_{\{\lambda_n > \exp(x^2)\}} \frac{\sigma_n^2 y_n^2}{\lambda_n}\Big]^{1/2} dx$$

En particulier, on peut énoncer un résultat général :

2.0.5 THÉORÈME : *On suppose que l'application :* $y = (y_n) \to |y| = (|y_n|)$ *est une application de* E' *dans* E' *continue pour la topologie de la convergence compacte; on suppose aussi que la condition 2.0.3 est vérifiée; alors pour que* X *ait une modification à trajectoires dans* E *continues sur* $\mathbb{R}^+$, *il suffit que* $\left(\sigma_n \left[\frac{\log^+ \lambda_n}{\lambda_n}\right]^{1/2}, n \in \mathbb{N}\right)$ *soit un élément de* E.
Ce théorème s'appliquera par exemple dans les l_p, $p \geq 1$; pour $p = 2$, il précise un résultat énoncé dans [5] sous des hypothèses supplémentaires de monotonie des coefficients.

Démonstration : elle résulte de la majoration :

$$\int_0^\infty \left[\sum_{n=0}^\infty \frac{\sigma_n^2 y_n^2}{\lambda_n} I_{\{\lambda_n > \exp(x^2)\}}\right]^{1/2} dx \leq \sum_{n=0}^\infty \sigma_n \left[\frac{\log^+ \lambda_n}{\lambda_n}\right]^{1/2} |y_n|.$$

2.1. La continuité de X dans l_p, $p \in [2, \infty[$

Nous énonçons maintenant le résultat le plus significatif de ce travail; il généralise un théorème présenté dans [3] et concernant le seul cas $p = 2$.

THÉORÈME : *On suppose* $p \in [2, \infty[$; *on suppose de plus la condition 2.0.3 vérifiée, alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) X *a une modification ayant ses trajectoires continues dans* l_p *sur* $\mathbb{R}^+$,

(ii) X *a une modification ayant ses trajectoires localement bornées dans* l_p *sur* $\mathbb{R}^+$,

(iii) *L'intégrale* $\int_0 \{\log^+(\lambda(x))\}^{p/2} x^{p/2-1} dx$ *où* $\lambda(x) = \sup\{\lambda_k : \sigma_k^2 > \lambda_k x\}$ *est convergente.*

Démonstration : il suffit de faire la preuve si tous les λ_k sont supérieurs à 1; nous procéderons en deux étapes, nous commençons par évaluer la borne supérieure de $J_1(y)$ sur la boule unité de l_q où q est conjugué de p.

(a) On pose pour tout i appartenant à $\mathbb{Z}$, $K_i = \{k \in \mathbb{N} : \sigma_k^2 > \lambda_k 2^{-i}\}$; la suite (K_i) est donc une suite croissante d'ensembles qui sont tous finis (condition 2.0.3); on pose aussi :

$$I_0 = \{i \in \mathbb{Z} : K_i \neq \emptyset\}, L(i) = \sup\{\lambda_k : k \in K_i\} \text{ si } i \in I_0, L(i) = 1 \text{ sinon,}$$
$$I_1 = \{i \in \mathbb{Z} : K_i - K_{i-1} \neq \emptyset\}, I_2 = \{i \in \mathbb{Z} : L(i-1) < L(i)\}.$$

Pour tout y appartenant à l_q, nous majorons $J_1(y)$; en découpant l'intervalle d'intégration suivant les $(\log L(i))^{1/2}$, on obtient :

$$J_1(y) \le \sum_{j\in\mathbf{Z}} \Big[\{(\log L(j))^{1/2} - (\log L(j-1))^{1/2}\}$$

$$\Big\{ \sum_{i\ge j, k\in\mathbf{N}} (\sigma_k^2 y_k^2)/\lambda_k I_{\{k\in K_i - K_{i-1}\}} \Big\}^{1/2}\Big],$$

et donc en posant $z_i = \Big[\sum_{k\in K_i - K_{i-1}} y_k^2 \Big]^{1/2}$,

$$J_1(y) \le \sum_{j\in\mathbf{Z}} \Big[\{(\log L(j))^{1/2} - (\log L(j-1))^{1/2}\} \sum_{i\ge j} 2^{(1-i)/2} z_i\Big],$$

2.1.0
$$j_1(y) \le \sum_{i\in I_1} 2^{(1-i)/2} z_i (\log L(i))^{1/2};$$

on remarque alors que, q étant inférieur ou égal à 2, la l_q-norme de z est inférieure ou égale à celle de y; utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit :

2.1.1
$$J_1(y) \le \Big\{ \sum_{i\in\mathbf{Z}} (2^{1-i} \log L(i))^{p/2} \Big\}^{1/p} \|y\|_q = M\|y\|_q.$$

Nous minorons maintenant la borne supérieure de $J_1(y)$ sur la boule unité de l_q. Fixons un nombre $\varepsilon \in]0,1[$; pour tout j appartenant à I_2, il existe un élément k_j de $K_j - K_{j-1}$ tel que

$$(\log L(j-1))^{1/2} + (1-\varepsilon)[(\log L(j))^{1/2}) - (\log L(j-1))^{1/2}] \le (\log \lambda_{k_j})^{1/2}$$
$$\le (\log L(j))^{1/2};$$

dans des conditions, pour tout x appartenant à l'intervalle :

$$[(\log L(j-1))^{1/2}, (\log L(j-1))^{1/2} + (1-\varepsilon)[(\log L(j))^{1/2} - (\log L(j-1))^{1/2}],$$

on aura :

$$\Big[\sum_{n=0}^{\infty} I_{\{\lambda_n > \exp(x^2)\}} \frac{\sigma_n^2 y_n^2}{\lambda_n}\Big]^{1/2} > \Big[\frac{\sigma_{k_j}^2 y_{k_j}^2}{\lambda_{k_j}}\Big]^{1/2} > 2^{-j/2}|y_{k_j}|.$$

Prenons alors une suite arbitraire $(z_j, j \in I_2)$ à support fini, en lui associant l'élément y de l_q défini par

$$y_k = 0 \quad \text{si} \quad k \notin \{k_j, j \in I_2\}, y_{k_j} = z_j,$$

on aura :

$$J_1(y) \geq \sum_{j\in I_2} (1-\varepsilon)2^{-j/2}[(\log L(j))^{1/2} - (\log L(j-1))^{1/2}]z_j;$$

en maximisant le second membre sur la boule unité de l_q (relativement à z et donc relativement à y), on en déduit pour tout $\varepsilon \in]0,1[$:

$$\sup_{\|y\|_q\leq 1} J_1(y) \geq (1-\varepsilon)\Big[\sum_{j\in\mathbf{Z}} \{2^{-j/2}[(\log L(j))^{1/2} - (\log L(j-1))^{1/2}]\}^p\Big]^{1/p}$$

et donc finalement :

2.1.2
$$\sup_{\|y\|_q\leq 1} J_1(y) \geq \Big[\sum_{j\in\mathbf{Z}} \{2^{-j/2}[(\log L(j))^{1/2} - (\log L(j-1))^{1/2}]\}^p\Big]^{1/p} = m.$$

Nous comparons enfin les seconds membres des relations 2.11 et 2.12; l'inégalité de Minkowski dans l_p fournit pour tout entier n :

$$\Big\{\sum_{i\leq n} (2^{-i}\log L(i))^{p/2}\Big\}^{1/p} \leq \Big[\sum_{i\leq n} \{2^{-i/2}[(\log L(i))^{1/2} - (\log L(i-1))^{1/2}]\}^p\Big]^{1/p} + \Big[\sum_{i\leq n} \{2^{-i}(\log L(i-1))\}^{p/2}\Big]^{1/p}$$

et donc :

2.1.3
$$m \leq M \leq 2(\sqrt{2}+1)m.$$

Finalement, nous évaluons M sous forme intégrale; on a immédiatement :

2.1.4
$$\int_{\mathbf{R}+} \{\log^+(\lambda(x))\}^{p/2} x^{p/2-1}dx \leq M^p \leq 2^p \int_{\mathbf{R}+} \{\log^+(\lambda(x))\}^{p/2} x^{p/2-1}dx.$$

(b) Nous procédons maintenant à la preuve : Supposons la propriété (ii) vérifiée, alors J_1 est continue pour la topologie forte de l_q et la relation 2.1.2 montre que m est fini; la relation 2.1.3 montre que M est aussi fini; la relation 2.1.4 implique alors la propriété (iii) est aussi vérifiée.

Supposons inversement que la propriété (iii) soit vérifiée; alors la relation 2.1.4 montre que M est fini; il existe alors une suite positive strictement croissante et divergente (a_i) telle que la somme de la série $\sum_{i\in\mathbf{Z}} [a_i 2^{1-i}\log L(i)]^{p/2}$ soit inférieure ou égale à $2M$; la relation 2.1.0 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz montrent que pour tout y appartenant à l_q,

$$J_1(y) \leq 2M\Big[\sum_{i\in\mathbf{Z}} \Big\{a_i^{-q} \sum_{k\in K_i-K_{i-1}} |y_k|^q\Big\}\Big]^{1/q},$$

de sorte que, les ensembles K_i étant finis, J est continue sur l_q pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de l_p et la propriété (i) est vérifiée; le théorème est donc démontré.

2.1.5 COROLLAIRE : *Supposons la suite (σ_k^2/λ_k) décroissante et $p \in [2, \infty[$. Pour que X ait une modification ayant toutes ses trajectoires continues dans l_p, il suffit que la condition 2.0.3 soit vérifiée et que de plus la suite $((k+1)^{-2/p} \cdot \log^+ \lambda_k, k \in \mathbb{N})$ soit bornée.*
L'intégrable figurant dans la propriété (iii) du théorème se majore alors en effet par :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (k+1) L^{p/2} \int_{\sigma_{k+1}^2/\lambda_{k+1}}^{\sigma_k^2/\lambda_k} x^{(p-2)/2} dx \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} 2 \frac{k+1}{p} \, [(\sigma_k^2/\lambda_k)^{p/2}$$

$$-(\sigma_{k+1}^2/\lambda_{k+1})^{p/2}] L^{p/2} \leq 2 \frac{L^{p/2}}{p} \sum_{k \in \mathbb{N}} (\sigma_k^2/\lambda_k)^{p/2} < \infty \text{ (condition 2.0.3).}$$

III. APPENDICE : SUR CERTAINS PROBLÈMES VARIATIONNELS

Dans [3] et dans le cas où $p = 2$, les éléments de preuve du théorème 2.1 étaient explicitement liés à la valeur d'un problème de calcul de variation dans l_2. Nous énonçons ici le résultat correspondant pour $p \geq 2$. Nous utiliserons pour cela les notations suivantes : q appartient à $]1, 2]$ et est l'exposant conjugué de p, B_q est la boule unité de l_q ; pour toute suite $(s_m, m \geq 1)$ non négative et tout x appartenant à $\mathbb{R}^+$, nous posons :

$h_s(x) = \sup\{m \geq 1 : s_m > x\}$ si cet ensemble n'est pas vide, $h_s(x) = 0$ sinon,

$$J_q(s) = \Big[\int_0^\infty h_s^p(x) x^{p/2-1} dx \Big]^{1/p}, M_q(s) = \sup_{y \in B_q} \Big(\sum_{n=1}^\infty \Big[\sum_{m \geq n} s_m y_m^2 \Big]^{1/2} \Big).$$

3.1 COROLLAIRE : *Soit $s = (s_m)$ une suite non négative; alors l'application : $y \to \Big(\sum_{n=1}^\infty \Big[\sum_{m \geq n} s_m y_m^2 \Big]^{1/2} \Big)$ est bornée dans B_q ou continue dans l_q si et seulement si $J_q(s)$ est finie. De plus il existe des constantes $c > 0$ et C finie telles que pour tout q appartenant à $]1, 2]$, on ait :*

$$c J_q(s) \leq M_q(s) \leq C J_q(s).$$

Démonstration : Pour tout y appartenant à l_q, posons :

$$\pi_{y,y} = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m^2 y_m^2 \delta_{\lambda(m)}, \quad \text{où } \lambda(m) = \exp(m^2) \text{ et } \sigma_m^2 = s_m \exp(m^2);$$

on a alors :

$$\int_0^\infty \Big[\int_{\lambda > \exp(x^2)} (1/\lambda)\pi_{y,y}(d\lambda)\Big]^{1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\sum_{m \geq n} s_m y_m^2\Big]^{1/2},$$

et la première partie de l'énoncé résulte directement du théorème 2.1, la preuve de ce théorème et ses inégalités fournissant l'encadrement annoncé.

3.2. En fait pour $p = q = 2$, on peut calculer explicitement la valeur exacte de $M_2(s)$; pour cela et pour toute suite non négative $s = (s_m, m \geq 1)$, nous noterons $t(s)$ la suite $(t_m = 1/s_m, m \geq 1)$ des inverses (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$) que nous prolongeons en posant $t_0 = 0$. Nous utiliserons dans la suite certaines règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}}^+$, en particulier : $\forall u \in \overline{\mathbb{R}}^+, \infty - u = \infty\,;\ \infty < \infty\,;\ \forall u \in \mathbb{R}^+,\ (u/\infty) = 0$.

THÉORÈME : (a) *Supposons la suite $t(s)$ convexe et strictement croissante; on a alors :*

3.2.1
$$M_2(s) = \Big[\sum_{t_m < \infty} \frac{1}{t_m - t_{m-1}}\Big]^{1/2}.$$

(b) *Dans le cas général, si $M_2(s)$ est fini alors $(n^2 s_n, n \geq 1)$ est bornée.*

(c) *Dans le cas général et si la suite $(n^2 s_n, n \geq 1)$ est bornée, alors il existe une suite s' supérieure ou égale à s telle que $t(s')$ soit convexe et strictement croissante et que de plus $M_2(s) = M_2(s')$.*

3.2.2 REMARQUE : Soit $s = (s_m, m \geq 1)$ une suite non-négative; le théorème exprime que pour déterminer $M_2(s)$, il suffit d'utiliser l'algorithme suivant :

Poser $s_0 = \infty$, poser $t = (1/s)$; construire le graphe de t, construire son enveloppe convexe qui est le graphe d'une suite t' ; calculer

$$\Big\{\Big[\sum_{t'_m < \infty} \frac{1}{t'_m - t'_{m-1}}\Big]^{1/2}\Big\}$$

La démonstration du théorème utilisera le lemme :

3.2.3 LEMME : *Soient $s = (s_m, m \geq 1)$ et $s' = (s'_m, m \geq 1)$ deux suites non-négatives; on suppose que $t' = t(s')$ est une suite convexe et strictement croissante; soit de plus $\{m(k), 0 \leq k \leq K\}$ une suite finie* *et strictement croissante d'entiers telle que* $m(0) = 0$ *et que pour tout* $k \in [1, K], t_{m(k)} = t'_{m(k)}$. *Dans ces conditions, on a aussi :*

$$M_2(s) \geq \Big\{ \sum_{k=1}^{K} \frac{[m(k) - m(k-1)]^2}{t_{m(k)} - t_{m(k-1)}} \Big\}^{1/2}.$$

Démonstration du lemme : il suffit de faire la preuve si $t_{m(K)}$ est fini. Nous fixons un nombre positif C et pour tout $k \in [1, K+1]$, nous posons $\rho_{m(k)} = C\dfrac{m(k) - m(k-1)}{t_{m(k)} - t_{m(k-1)}}$, nous posons aussi $\rho_{m(K+1)} = 0$. La convexité de t' et sa croissance montrent que $(\rho_{m(k)}, 1 \leq k \leq K)$ est positive et décroissante, nous pouvons donc poser
$\forall k \in [1, K], y_{m(k)} = [t_{m(k)}(\rho^2_{m(k)} - \rho^2_{m(k+1)})]^{1/2}; \forall m \notin \{m(k), k \in [1, K]\}$, $y_m = 0$.
Nous obtiendrons alors :

$$\sum_{k=1}^{K} y^2_{m(k)} = \sum_{k=1}^{K} C^2 \frac{[m(k) - m(k-1)]^2}{t_{m(k)} - t_{m(k-1)}},$$

de sorte qu'en posant :

$$C = \Big[\sum_{k=1}^{K} \frac{[m(k) - m(k-1)]^2}{t_{m(k)} - t_{m(k-1)}} \Big]^{-1/2},$$

$(y_m, m \geq 1)$ est un élément de B_2. Nous aurons alors pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$\sum_{m=n}^{\infty} s_m y^2_m = \sum_{m(k) \geq n} s_m(k) y^2_{m(k)} = \sum_{m(k) \geq n} s_{m(k)} t_{m(k)} [\rho^2_{m(k)} - \rho^2_{m(k-1)}]$$
$$= \rho^2_{m(k(n))}$$

où $k(n)$ est la borne inférieure de $\{k : m(k) \geq n\}$. On en déduit donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big[\sum_{m \geq n} s_m y^2_m \Big]^{1/2} = \sum_{k=1}^{K} \Big[\sum_{m(k-1) < n \leq m(k)} \rho_{m(k)} \Big]$$
$$= \sum_{k=1}^{K} [m(k) - m(k-1)] \rho_{m(k)};$$

Vus les choix des ρ et de C, cette dernière somme est égale au second membre de l'énoncé, c'est donc le résultat.

3.2.4 *Démonstration du théorème :* (a) Supposons la suite $t(s)$ convexe et strictement croissante, alors le lemme montre que $M_2(s)$ est supérieure ou égale au deuxième membre de 3.2.1. Inversement sous la même hypothèse, supposons de plus que la série du deuxième membre de 3.2.1 soit convergente; on a alors pour tout y appartenant à l_2 et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\sum_{m\geq n} s_m y_m^2\Big]^{1/2} \leq \Big\{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{t_n - t_{n-1}}\Big[\sum_{n\geq 1}(t_n - t_{n-1})\sum_{m\geq n} s_m y_m^2\Big]\Big\}^{1/2};$$

le dernier facteur ci-dessus s'écrit en permutant les sommations :

$$\sum_{m\geq 1} s_m y_m^2 \sum_{n=1}^{m}(t_n - t_{n-1}) = \sum_{m\geq 1} y_m^2;$$

on a donc :

$$[M_2(s)]^2 \leq \sum_{n\geq 1}\frac{1}{t_n - t_{n-1}},$$

de sorte que la première partie du théorème est démontrée.

(b) Dans le cas général, supposant $M_2(s)$ fini, à tout $n \geq 1$ nous pouvons associer le n$^{\text{ième}}$ élément y de la base canonique de l_2 ; $M_2(s)$ sera alors minoré par $\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\sum_{m\geq k} s_m y_m^2\Big]^{1/2} = n[s_n]^{1/2}$, d'où le résultat énoncé.

(c) Sous l'hypothèse indiquée, soit G le graphe de $t(s)$; alors son enveloppe convexe G' est le graphe d'une suite t' strictement croissante, convexe, inférieure ou égale à $t(s)$, telle que $t'_0 = 0$; posons pour tout $m \geq 1$, $s'_m = 1/t'_m$, alors t' est égal à $t(s')$, s' est supérieur ou égal à s et il existe une suite croissante $\{m(k), k \in \mathbb{N}\}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $m(0) = 0$ et que de plus :

$$\forall k \in \mathbb{N}, m(k+1) > m(k), t'_{m(k)} = t_{m(k)},\ t' \text{ affine sur } [m(k), m(k+1)[;$$

on a alors d'une part, puisque $s' \leq s$ et en appliquant à s' le résultat (a) :

$$[M_2(s)]^2 \leq [M_2(s')]^2 = \sum_{t'_m<\infty}\frac{1}{t'_m - t'_{m-1}} = \sum_{t_{m(k)}<\infty}\frac{[m(k) - m(k-1)]^2}{t_{m(k)} - t_{m(k-1)}};$$

on a aussi d'autre part, en appliquant à s le résultat du lemme :

$$[M_2(s)]^2 \geq \sum_{t_{m(k)}<\infty}\frac{[m(k) - m(k-1)]^2}{t_{m(k)} - t_{m(k-1)}},$$

d'où l'égalité et le dernier résultat du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] X. FERNIQUE, Régularité de fonctions aléatoires gaussiennes, *Lect. Notes Math.* **480**, Springer, 1975.

[2] X. FERNIQUE, Fonctions aléatoires à valeurs dans les espaces lunisiens, *Expositiones Math.*, à paraître

[3] X. FERNIQUE, la régularité des fonctions aléatoires d'Ornstein-Uhlenbeck à valeurs dans l_2 ; le cas diagonal, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **309**, Série I, p. 59-62, 1989.

[4] B. SCHMULAND, Regularity of l_2-valued Ornstein-Uhlenbeck stationnary processes, *C.R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Canada*, **10**, 2, 119-124, 1988.

[5] I. ISCOE, M.B. MARCUS, D McDONALD, M. TALAGRAND et J. ZINN, Continuity of l_2-valued Ornstein-Uhlkenbeck, *Ann. Prob*, à paraître.

(*Manuscrit reçu le* 12 *juin* 1989;
révisé le 12 *janvier* 1990)