ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

HENRI HEINICH

Médianes vectorielles

Annales de l'I. H. P., section B, tome 26, nº 3 (1990), p. 375-385

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1990__26_3_375_0>

© Gauthier-Villars, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I
LABORATOIRE
DE MATHÉMATIQUES
INSTITUT FOURIER

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 26 n° 3, 1990, p. 375-385 *Probabilités et Statistiques*

Médianes vectorielles

par

Henri HEINICH

INSA de Rouen, Département de Génie Mathématique
Place E. Blondel, 76131 Mont-Saint-Aignan Cedex, France

RÉSUMÉ. — Soit $X \in \mathbb{L}^1((\Omega, \mathcal{A}, P); \mathbb{E})$ où $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilité, $\mathbb{E}$ un espace de Banach réticulé à une norme continue. Une sous-tribu $\mathcal{B}$ étant donnée, nous montrons qu'il existe une variable - médiane conditionnelle - $Y_0 \in \mathbb{L}^1((\Omega, \mathcal{B}, P); \mathbb{E})$ telle que, $\forall\ Y \in \mathbb{L}^1((\Omega, \mathcal{B}, P); \mathbb{E})$ $E(|X - Y_0|) \leq E(|X - Y|)$.

Nous donnons quelques propriétés de ces médianes conditionnelles : par exemple leurs convergences lorsque $\mathcal{B}_n$ est une filtration ainsi que la consistance de leurs estimateurs.

ABSTRACT. — Let $X \in \mathbb{L}^1((\Omega, \mathcal{A}, P); \mathbb{E})$, where $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ is a probability space, $\mathbb{L}$ an order continous Banach lattice. Let $\mathcal{B}$ be a sub-field of $\mathcal{A}$; we show the existence of a conditional median $Y_0 \in \mathbb{L}^1((\Omega, \mathcal{B}, P); \mathbb{E})$ such that, for all $Y \in \mathbb{L}^1((\Omega, \mathcal{B}, P); \mathbb{E})$ $E(|X - Y_0|) \leq E(|X - Y|)$. We give some properties of these conditional medians and study, for instance, their convergence when $\mathcal{B}_n$ is a filtration, as well as the consistency of their estimation.

Classification A.M.S : 41 A 65 – 46 E 30 – 54 H 12 – 60 B 05 – 60 B 10

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques - 0246-0203
Vol. 26/90/03/375 /11/\$ 3.10/© Gauthier-Villars

0. INTRODUCTION

Lorsque $\mathbb{E}$ est un espace de Banach réticulé, nous nous proposons de résoudre le problème d'approximation suivant : si $X \in \mathbb{L}^1((\Omega, \mathcal{A}, P); \mathbb{E})$ et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$, existe-t-il une variable réalisant le minimum de $E(|X - Y|)$ pour $Y \in \mathbb{L}^1((\Omega, \mathcal{B}; \mathbb{E})$? Ce type de problème est essentiellement différent du cas classique dont l'archétype est la minimisation de $E(\|X - Y\|)$. Nous suivrons les notations traditionnelles [5] en écrivant $x^+ = x_\vee 0 \ldots$

Nous noterons $E(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire (v.a.) X éventuellement vectorielle.

I. MÉDIANES DANS LES ESPACES RÉTICULÉS

a) Existence des médianes

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel réticulé, nous nous intéressons à la propriété (1) Pour tout ensemble fini $(e_1, \ldots, e_n)$ de points de $\mathbb{E}$ il existe $m \in \mathbb{E}$ tel que $\sum_{i=1}^{n} |e_i - m| \leq \sum_{i=1}^{n} |e_i - x|$ pour tout $x \in \mathbb{E}$.

Une première extension naturelle est :
(2) Pour tout entier n et pour tout $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ formés respectivement par des points de $\mathbb{E}$ et des nombres positifs de somme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ il existe $m \in \mathbb{E}$ tel que : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i |e_i - m| \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |e_i - x|$, pour tout $x \in \mathbb{E}$.

Cette seconde propriété admet une version probabiliste :
(3) Pour tout v.a. X étagée définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à sa valeur dans $\mathbb{E}$, il existe $m \in \mathbb{E}$ tel que

$$E(|X - m|) \leq E(|X - e|), \quad \text{pour tout} \quad e \in \mathbb{E}.$$

Il s'agit, on le voit bien, d'une version vectorielle de la médiane d'une v.a. réelle X, et, par suite nous dirons que $\mathbb{E}$ vérifie la propriété de la médiane si l'assertion (3) est vérifiée.

THÉORÈME 1 : *Tout espace vectoriel réticulé archimédien possède la propriété de la médiane. De plus, la médiane d'une v.a. étagée appartient à l'espace vectoriel réticulé engendré par cette v.a.*

DÉMONSTRATION : Notons $\mathbb{F}$: $\mathbb{F}_X$ l'espace vectoriel réticulé engendré par la v.a. étagée X ; $\mathbb{F}_x$ celui engendré par $\mathbb{F}$ et $\{x\}$, $x \in \mathbb{E}$. $\mathbb{F}_x$ est de dimension finie donc Riesz – isomorphe à $\mathbb{R}^k$ avec son ordre canonique – [5] p.152. Or, pour $\mathbb{R}^k$ le théorème est vrai. En effet, si $Y = (Y_1, \ldots, Y_k)$ est une v.a. étagée à valeurs $\mathbb{R}^k$ et si m_i désigne une médiane de Y_i pour chaque i, alors en écrivant $m = (m_i)_{i=1\ldots k}$,

$$E(|Y - m|) \leq E(|Y - y|), \ y \in \mathbb{R}^k \quad \text{et} \quad m \in \mathbb{F}_Y.$$

Ainsi, avec l'isomorphisme d'ordre, pour tout $e \in \mathbb{E}$, nous avons l'existence de $m_e \in \mathbb{F}$ tel que :

$$E(|X - m_e|) \leq E(|X - x|) \quad \text{tout} \quad x \in \mathbb{F}_e$$

Le même isomorphisme montre qu'il existe $m \in \mathbb{F}_X$ avec :

$$E(|X - m|) \leq E(|X - m_e|) \qquad \text{ce qui achève notre preuve} \qquad \square$$

Nous pouvons étudier les propriétés de $\mathcal{M}(X)$, ensemble non vide des médianes de X.

b) Propriétés des médianes

– $\mathcal{M}(X)$ est convexe :
C'est une conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire :

$$|X - (\alpha m_1 + (1-\alpha)m_2)| \leq \alpha|X - m_1| + (1-\alpha)|X - m_2|.$$

Si m_1 et $m_2 \in \mathcal{M}(X)$ et $\alpha \in [0,1]$ alors $|X - (\alpha m_1 + (1-\alpha)m_2)| = \alpha|X - m_1| + (1-\alpha)|X - m_2|$

– Si $X \geq 0$ alors $\mathcal{M}(X) \subset \mathbb{F}_X^+ = (\mathbb{F}_X)^+$.

Par isomorphisme on est ramené à $\mathbb{R}^n$ avec l'ordre canonique où la propriété est évidente coordonnée par coordonnée.

L'isomorphisme montre aussi que : $m \in \mathcal{M}(X) \Rightarrow |m| \leq 2 \cdot E(|X|)$.

Cette propriété fondamentale, peut aussi s'établir directement, en écrivant $X = \sum e_i 1_{A_i}$ et $\alpha_i = P(A_i)$

$$\begin{aligned} \sum \alpha_i |e_i| \geq \sum \alpha_i |e_i - m| &\geq \sum \alpha_i \Big| |e_i| - |m| \Big| \\ &\geq \Big| |m| - \sum \alpha_i |e_i| \Big| \\ &\geq |m| - \sum \alpha_i |e_i| \end{aligned}$$

c) Médiane d'une v.a. vectorielle intégrable

Afin d'étendre la partie précédente, nous supposerons que $\mathbb{E}$ est un espace de Banach réticulé. Rappelons qu'un tel espace $\mathbb{E}$ est à norme continue pour l'ordre (n.c.o.), [4] si $(e_\alpha) \subset \mathbb{E}_+$ est une famille décroissante vers 0 alors $\|e_\alpha\|$ décroit vers 0. Nous pouvons ainsi définir la Banach réticulé $\mathbb{L}^1(\mathbb{E})$ des v.a. de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{E}$ et de norme intégrable.

THÉORÈME 2 : *Soit $X \in \mathbb{L}^1(\mathbb{E})$, $\mathbb{E}$ Banach réticulé à norme continue pour l'ordre, alors il existe $m \in \mathbb{E}$ tel que :*

$$E(|X - m|) \leq E(|X - e|) \quad tout \quad e \in \mathbb{E}.$$

DÉMONSTRATION : Soit (X_n) une suite v.a. étagées approchant X : $E(\|X - X_n\|) \to 0$, on peut supposer de plus que X_n converge p.s. vers X et que $e_0 = VE(|X_n|) \in \mathbb{E}$.

Soit $m_n \in \mathcal{M}(X_n)$, la suite $\{m_n\}$ est faiblement relativement compacte car elle est contenue dans l'intervalle d'ordre $[-2 \cdot e_0, 2 \cdot e_0]$.

Par sous-suite, nous pouvons supposer que m_n converge faiblement vers m et donc que $X_n - m_n$ converge faiblement p.s. vers $X - m$.

Montrons que $E(|X - m|) \leq \alpha$ où α est une valeur d'adhérence de $\{E(|X_n - m_n|)\}$.

Supposons que $E(|X_{n_i} - m_i|)$ converge faiblement vers α et soit $u \in (\mathbb{E}')_+$ alors $u(\alpha) = \underset{i}{\underline{\lim}}\, u\Big(E(|X_{n_i} - m_{n_i}|)\Big) \geq E\Big(\underset{i}{\underline{\lim}}(|X_{n_i} - m_i|)\Big)$.

Or, si Z_n et $|Z_n|$ converge faiblement vers Z et Z' respectivement, on a $|Z| \leq Z'$. Ceci permet d'écrire $u(\alpha) \geq E(u(|X - m|))$. D'où $E(|X - m|) \leq \alpha$. Achèvons notre preuve : soit $e \in E$, comme $E(|X_n - m_n|) \leq E(|X_n - e|)$ il en résulte pour α, valeur d'adhérence faible de la suite $E(|X_n - m_n|)$: $\alpha \leq E(|X - e|)$.

En définitive $E(|X - m|) \leq E(|X - e|)$: m est une médiane de X □

L'ensemble $\mathcal{M}(X)$ des médianes de X, $X \in \mathbb{L}^1(\mathbb{E})$, jouit encore des propriétés du cas X étagée.

II. MÉDIANES CONDITIONNELLES

a) Cas d'une tribu finie

Les partie précédentes demeurent lorsque l'on remplace la probabilité P par $P_B(\cdot) = \dfrac{P(\cdot \cap B)}{P(B)}$.

Ainsi, il existe $m \in \mathbb{E}$ tel que : $E(|X - m|1_B) \leq E(|X - e|1_B)$ pour tout $e \in \mathbb{E}$. De là nous définissons une médiane conditionnnelle, d'une v.a. vectorielle intégrable, par rapport à une sous-tribu $\mathcal{B}$ – engendrée par un nombre fini d'atomes $B_1, \ldots, B_n$ – comme étant une v.a. à valeurs dans $\mathbb{E}$, $\mathcal{B}$-mesurable, notée $m_{\mathcal{B}}(X)$ et telle que $E(|X - m_{\mathcal{B}}(X)|) \leq E(|X - Y|)$, Y $\mathcal{B}$-mesurable. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X)$ est l'ensemble des médianes conditionnelles de X par rapport à $\mathcal{B}$. On vérifie que $\sum_1^n m_i 1_{B_i} \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X)$ si m_i est une médiane de X par rapport à P_{B_i}. Il suffit, pour cela, de sommer par rapport aux i les inégalités :

$$E(|X - m_i|1_{B_i}) \leq E(|X - e_i|1_{B_i}), i = 1, \ldots, n.$$

b) Quelques propriétés

• L'inégalité $E(|X - m|1_B) \geq E(|X1_B - m_{\mathcal{B}}(X1_B)1_B|) = E(|X - m_{\mathcal{B}}(X1_B)|1_B)$ et celle obtenue en remplaçant B par B^C, puis en sommant, montrent que pour $B \in \mathcal{B}$:

$$\begin{cases} m_{\mathcal{B}}(X1_B)1_B \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X1_B) \\ m_{\mathcal{B}}(X)1_B \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X1_B) \end{cases} \quad \text{voir aussi} \quad [1-2], I-4$$

De plus si $m_{\mathcal{B}}(X1_B) \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X1_B)$ et $m_{\mathcal{B}}(X1_{B^C}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X1_{B^C})$
alors $m_{\mathcal{B}}(X1_B) + m_{\mathcal{B}}(X1_{B^C}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X)$
En effet en prenant l'espérance de l'inégalité :

$$|X - (m_{\mathcal{B}}(X1_B) + m_{\mathcal{B}}(X1_{B^C}))| \leq |X1_B - m_{\mathcal{B}}(X1_B)| + |X1_{B^C} - m_{\mathcal{B}}(X1_{B^C})|$$

on arrive à : $E(|X - (m_{\mathcal{B}}(X1_B) + m_{\mathcal{B}}(X1_{B^C}))|) \leq E(|X1_B - Y1_B|) + E(|X1_{B^C} - Y1_{B^C}|) = E(|X - Y|)$ si Y est $\mathcal{B}$-mesurable.

• Si $E^{\mathcal{B}}(X)$ désigne l'espérance conditionnelle de X par rapport à la sous-tribu finie $\mathcal{B}$ nous avons l'inégalité $|m_{\mathcal{B}}(X)| \leq 2 \cdot E^{\mathcal{B}}(|X|)$.

Cette inégalité fondamentale s'obtient en écrivant $m_{\mathcal{B}}(X) = \sum m_i 1_{B_i}$ – notation de II a) – or $|m_i| \leq 2 \cdot E_{P_{B_i}}(|X|) = \dfrac{2}{P(B_i)}$ d'où la relation cherchée.

c) Cas général

Soit $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par une filtration $(\mathcal{B}_n)$ croissante de sous-tribu finies de $\mathcal{A}$. Pour $X \in \mathbb{L}^1((\Omega, \mathcal{A}, P), \mathbb{E})$, $\mathbb{E}$ Banach réticulé n.c.o., notons plus simplement m_n une médiane conditionnelle de X par rapport à $\mathcal{B}_n$.

Nous pouvons, par sous-suite, supposer que $\bigvee_n E^{\mathcal{B}_n}|X| = Y \in \mathbb{L}^1(\mathbb{E})$ et donc avec I c) la suite $\{m_n\}$ est faiblement relativement compacte dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{E})$, car $\mathbb{L}^1(\mathbb{E})$ est lui-même n.c.o.. Ainsi, en prenant éventuellement une sous-suite, m_n converge faiblement vers m. Cette limite m est clairement $\mathcal{B}$-mesurable ; puis si $Y \in \mathbb{L}^1(\mathbb{E})$ et est $\mathcal{B}_p$-mesurable, alors

$$E(|X - m_n|) \leq E(|X - Y|) \quad \text{pour} \quad n \geq p$$

et, comme dans I c), on en déduit que $E(|X - m|) \leq E(|X - Y|)$.

Le passage à Y $\mathcal{B}$-mesurable n'offre pas de difficulté et montre que m est une médiane conditionnelle de X par rapport à $\mathcal{B}$ *i.e.* $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X)$ est non vide.

Enfin le cas d'une sous-tribu $\mathcal{B}$ quelconque se fait de manière similaire en prenant une famille filtrante croissante $(\mathcal{B}_i)$ et en utilisant le théorème d'Eberlein, énonçons :

THÉORÈME 3 : *Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et $X \in \mathbb{L}^1((\Omega, \mathcal{A}, P); \mathbb{E})$, alors l'ensemble $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X)$ des médianes conditionnelles de X par rapport à $\mathcal{B}$ est un convexe, non vide fermé réticulé, vérifiant :*
si $B \in \mathcal{B}$ et $m_{\mathcal{B}}(X1_B) \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X1_B), m_{\mathcal{B}}(X1_{B^c}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X1_{B^c})$ et $m_{\mathcal{B}}(X) \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X)$
alors

$$\begin{cases} m_{\mathcal{B}}(X1_B) \quad \text{et} \quad m_{\mathcal{B}}(X)1_B \quad \text{appartiennent à} \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X1_B) \\ m_{\mathcal{B}}(X1_{B^c}) + m_{\mathcal{B}}(X1_B) \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X) \end{cases}$$

$|m_{\mathcal{B}}(X)| \leq 2 \cdot E^{\mathcal{B}}(|X|)$.
De plus $m_{\mathcal{B}}(X) \geq 0$ si $X \geq 0$, et pour $Y \in \mathbb{L}^1(\mathcal{B}; \mathbb{E}), \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X + Y) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X) + Y$

DÉMONSTRATION : Il ne reste en fait qu'à établir la réticulation de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X)$. Si $\mathcal{C}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, notons $\mathbb{L}^1(\mathcal{C}; \mathbb{E})$ le sous-espace de $\mathbb{L}^1((\Omega, \mathcal{A}, P); \mathbb{E})$ formé par les variables $\mathcal{C}$-mesurables. Pour $e \in \mathbb{E}_+$ définissons l'ensemble, $\mathcal{M}^e_{\mathcal{B}}(X)$, des médianes conditionnelles à e près de X par rapport à $\mathcal{B}$: $\mathcal{M}^e_{\mathcal{B}}(X) = \{Y : Y \in \mathbb{L}^1(\mathcal{B}; \mathbb{E})$ et $E(|X - Y|) \leq e + E(|X - Z|)$ pour tout $Z \in \mathbb{L}^1(\mathcal{B}, \mathbb{E})\}$.

α- Etude du cas réel

Soit $m \in \mathcal{M}^\varepsilon_{\mathcal{B}}(X)$; supposons qu'il existe $Y \in \mathbb{L}^1(\mathcal{B})$ et $B \in \mathcal{B}$ tels que :

$$E(|X - m|1_B) > \varepsilon + E(|X1_B - Y|)$$

Les inégalités :

$$\begin{aligned} E(|X - m|) &= E(|X - m|1_B) + E(|X - m|1_{B^c}) \\ &> \varepsilon + E(|X - Y|1_B) + E(|X - m|1_{B^c}) \\ &> \varepsilon + E(|X - (Y \cdot 1_B + m \cdot 1_{B^c})|) \end{aligned}$$

sont en contradiction avec l'hypothèse $m \in \mathcal{M}^{\varepsilon}_{\mathcal{B}}(X)$. Ce qui permet de conclure : $m \in \mathcal{M}^{\varepsilon}_{\mathcal{B}}(X)$ et $B \in \mathcal{B} \Rightarrow m \cdot 1_B \in \mathcal{M}^{\varepsilon}_{\mathcal{B}}(X)$.

Si maintenant m_1 et $m_2 \in \mathcal{M}^{\varepsilon}_{\mathcal{B}}(X)$, posons $B = \{m_1 \geq m_2\}$.

Alors $|X - (m_1 \vee m_2)| = |X - m_1| \cdot 1_B + |X - m_2| \cdot 1_{B^C}$

D'où $E(|X - (m_1 \vee m_2)|) \leq E(|X - Y|) + 2 \cdot \varepsilon$

C'est-à-dire que $m_1 \vee m_2 \in \mathcal{M}^{2\varepsilon}_{\mathcal{B}}(X)$. Le même raisonnement s'adapte à $m_1 \wedge m_2$.

β- Cas vectoriel : X étagée, $\mathcal{B}$ finie

Coordonnée par coordonnée le cas précédent s'applique à $\mathbb{R}^n$ avec son ordre canonique et, par isomorphisme d'ordre, on en déduit que si m et m' appartiennent à $\mathcal{M}^{\varepsilon}_{\mathcal{B}}(X)$, alors $m \vee m'$ et $m \wedge m'$ appartiennent à $\mathcal{M}^{2e}_{\mathcal{B}}(X)$.

γ- Cas $X \in \mathbb{L}^1(\mathbb{E})$ et $\mathcal{B}$ tribu finie

Soit $(\mathcal{B}_n)$ une filtration croissante de sous-tribus finies telles que : $\vee \mathcal{B}_n = \sigma(X)$ et, si $X_n = E^{\mathcal{B}_n}(X)$, alors X_n converge p.s. et dans $\mathbb{L}^1(E)$ vers X et, qu'enfin, $E(|X_n - X|) \leq \varepsilon_n \cdot e_o$ où ε_n est une suite de réels décroissant vers 0, et $e_o \in \mathbb{E}_+$. Ces conditions s'obtiennent en prenant une sous-filtration adéquate de $(\mathcal{B}_n)$.

Soit, maintenant, m et $m' \in \mathcal{M}^{e}_{\mathcal{B}}(X)$.

Les inégalités : $E(|X - m|) \leq E(|X - X_n|) + E(|X - Y|) + e$
$$\leq 2 \cdot E(|X - X_n|) + E(|X_n - Y|) + e$$
valable pour $Y \in \mathbb{L}^1(\mathcal{B}; \mathbb{E})$, montrent que $m \in \mathcal{M}^{e+2\varepsilon_n e_o}_{\mathcal{B}}(X)$.

Notons $e_n = e + 2 \cdot \varepsilon_n e_o$, avec la partie β, on en déduit que $m \vee m'$ et $m \vee m' \in \mathcal{M}^{2e_n}_{\mathcal{B}}(X)$; en particulier $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X)$ est réticulé.

δ- Cas $X \in \mathbb{L}^1(\mathbb{E})$ et $\mathcal{B} = \vee \mathcal{B}_n$, $(\mathcal{B}_n)$ filtration croissante de tribus finies.

Soit $m \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X)$, en prenant comme au début de la partie γ, une sous-filtration adéquate, nous pouvons supposer, en notant $m_n = E^{\mathcal{B}_n}(m)$, $X_n = E^{\mathcal{B}_n}(X)$ qu'il existe $e_o \in \mathbb{E}_+$ et une suite de réels décroissant vers 0, tels que :
$$E(|m - m_n|) + E(|X - X_n|) \leq \varepsilon_n \cdot e_o.$$
Les inégalités :
$$E(|X_n - m_n|) \leq 2 \cdot E(|X_n - X|) + E(|X_n - Y|) + E(|m - m_n|)$$
$$\leq \varepsilon_n \cdot e_o + E(|X_n - Y|)$$
valables pour $Y \in \mathbb{L}^1(\mathcal{B}_n; \mathbb{E})$, montrent que $m_n \in \mathcal{M}^{\varepsilon_n e_o}_{\mathcal{B}_n}(X_n)$ pour tout n.

Et, par conséquent, si m et $m' \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X)$ alors $m_n \vee m'_n \in \mathcal{M}^{2\varepsilon_n e_o}_{\mathcal{B}_n}(X_n)$ c'est-à-dire que $E(|X_n - m_n \vee m'_n|) \leq 2 \cdot \varepsilon_n \cdot e_o + E(|X_n - E^{\mathcal{B}_n}(Y)|)$

$\forall Y \in \mathbb{L}^1(\mathbb{E})$. En faisant tendre n vers l'infini, on arrive à : $E(|X - m \vee m'|) \leq E(|X - Y|)$.

La même procédure s'applique à $m \wedge m'$ et achève notre preuve. □

d) Cas des variables Pettis intégrables

Nous allons montrer, par un exemple, la nécessité de prendre des variables Bochner intégrables pour définir les médianes conditionnelles. Le même phénomène se retrouver avec la notion d'espérance conditionnelle.

Prenons comme espace de probabilité le carré $[0, 1[^2$ avec sa tribu borélienne et sa mesure de Lebesgue. La variable $X(x, y) = (y^n \cdot e^{inx})$ est Pettis intégrable à valeurs dans ℓ^1 mais n'admet ni d'espérance conditionnelle ni de médiane conditionnelle par rapport à la sous-tribu $\mathcal{B}$ des évènements indépendants de «y».

III. CONVERGENCE DES MÉDIANES CONDITIONNELLES

(a) Commençons d'abord par un lemme qui permet d'approcher de manière monotone les v.a. Bochner intégrables et positives :

LEMME 4 : *Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{E}_+$, $\mathbb{E}$ Banach n.c.o., il existe une suite (X_n) de v.a. étagées croissant p.s. vers X.*

DÉMONSTRATION : Montrons d'abord cette propriété lorsque $0 \leq X \leq e_o$. Il existe une suite $\{Y_n\}$ de v.a. étagées positives convergeant fortement vers X et $0 \leq Y_n \leq e_o$. Avec le théorème d'Egoroff et en prenant une sous-suite adéquate, que nous noterons comme la suite initiale, nous voyons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$, avec $P(A) \geq 1 - \varepsilon$ et tel que pour tout entier p et tout $\omega \in A$, on ait, en notant $e_p(\omega) = \sum_{k \geq p} |Y_k(\omega) - X(\omega)|$, $\|e_p(\omega)\| \leq 1/p$, (*) $Y_n(\omega) \geq X(\omega) - e_p(\omega)$ si $n \geq p$.

Soit $(\mathcal{F}_p)$ une filtration croissante de sous-tribus finies telles que $A \in \mathcal{F}_1$ et $\vee \mathcal{F}_p = \sigma(X)$. Notons $\{A_i^k\}_{i \in I_k}$ les atomes de $\mathcal{F}_k$; posons $z_i^k = \wedge\{Y_n(\omega), n \geq k, \omega \in A_i^k\}$.

La suite de v.a. étagées $\{Z_k\}$ définies par $Z_k = \sum_{i \in I_k} z_i^k \cdot 1_{A_i^k}$ est monotone, croissante et $Z_k \leq X$.

La relation (*) permet d'écrire, pour $\omega \in A_i^k \cap A$:

$$Z_k(\omega) \geq X(\omega) - e_p(\omega) \quad \text{si} \quad k \geq p.$$

En faisant tendre p vers l'infini, nous voyons que, sur A, la suite (Z_k) converge vers X. Prenons maintenant une suite (ε_n) décroissant vers 0, notons ($A_n = A_{\varepsilon_n}$) une suite monotone liée par la procédure précédente et $X_n = Z_n \cdot 1_{A_n}$. La suite (X_n) satisfait aux conditions souhaitées. $\square$

REMARQUE : Une procédure similaire montre qu'une v.a. positive, à valeurs dans $\mathbb{E}$ et bornée pour l'ordre, est aussi limite d'une décroissante de v.a. étagées.

THÉORÈME 5 : – *Inégalité de Doob – Soit* $X \in \mathbb{L}^1(\mathcal{A}; \mathbb{E})$ *et* $(\mathcal{B}_n)$ *une filtration croissante de sous-tribu de* $\mathcal{A}$. *Pour chaque* n, *soit* m_n *l'inf des médianes conditionnelles de* X *par rapport à* $\mathcal{B}_n$ *et* $m^* = \operatorname{Sup} m_n$ *; alors* $m^* \in \mathbb{L}^1(\mathcal{A}; \mathbb{E})$ *et* $E(|m^*|) \leq 2 \cdot E(|X|)$.

DÉMONSTRATION : Cette inégalité, valable dans le cas réel – voir par exemple le lemme 17 de [1-2] –, s'adapte à $\mathbb{R}^n$ avec son ordre canonique et est donc valable pour toute v.a. X étagée à valeurs dans $\mathbb{E}$. Remarquons qu'il suffit d'établir le théorème pour des v.a. X positives.

Avec le lemme précédent soit (X_n) une suite de v.a. étagées croissant p.s. et dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{E})$ vers X. Comme $m_k(X_n) \leq m_k(X)$ on en déduit $m^*(X_n) \leq m^*(X)$. Par ailleurs nous avons déjà vu que pour une sous-suite, notée encore comme la suite initiale, $\{m_k(X_n)\}_n$, converge faiblement vers une médiane conditionnelle de X par rapport à $\mathcal{B}_k$. La suite $\{m_k(X_n)\}_n$ étant en outre croissante, on obtient sa convergence p.s. et dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{E})$ vers cette médiane.

Par conséquent $m_k(X) \leq \bigvee_{n \geq k} m_k(X_n) \leq \bigvee_{n \geq k} m^*(X_n)$ d'où : $m^*(X) \leq \lim_n m^*(X_n)$ et, par suite $E(m^*(X)) \leq \lim E(m^*(X_n) \leq \lim 2 \cdot E(X_n) = 2 \cdot E(X)$. $\square$

REMARQUES : Il est aussi possible de généraliser, en utilisant le lemme 4, certaines «inégalités maximales» de [1-2].

Il faut distinguer la notion de médiane (vectorielle) conditionnelle définie ici et celle de ψ-médiane conditionnelle (réelle) de l'article précité.

(b) Abordons maintenant la convergence des médianes conditionnelles liées à une filtration.

Soit $(\mathcal{B}_n)$ une filtration croissante de sous-tribu et $\mathcal{B} = \vee \mathcal{B}_n$. Notons T l'ensemble des temps d'arrêt bornés liés à cette filtration.

Pour $X \in \mathbb{L}^1(\mathbb{E})$ nous avons :

PROPOSITION 6 : *Si* $\tau \in T$ *et* $m_n \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}_n}(X)$ *pour tout* n*; alors* $m_\tau = \sum m_n \cdot 1_{\{\tau = n\}}$ *appartient à* $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_\tau}(X)$.

DÉMONSTRATION : II b) Montre que $m_\tau \cdot 1_{\{\tau=n\}} = m_n \cdot 1_{\{\tau=n\}} \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}_n}(X \cdot 1_{\{\tau=n\}})$ donc $E(|X - m_n| \cdot 1_{\{\tau=n\}}) \leq E(|X - Y_n| \cdot 1_{\{\tau=n\}})$ pour toute v.a. $Y_n \in \mathbb{L}^1(\mathcal{B}_n, \mathbb{E})$ En sommant en n, on arrive à $E(|X - m_\tau|) \leq E(|X - Y|)$ tout $Y \in \mathbb{L}^1(\mathcal{B}_\tau, \mathbb{E})$. $\square$

Supposons que X soit $\mathcal{B}$-mesurable, nous nous proposons de montrer que la suite (m_n) converge p.s. et dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{E})$ vers X. On obtiendrait le même résultat en remplaçant «$\mathcal{B}$-mesurable» par «$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X)$ est réduit à un seul point».

En reprenant la démonstration de II-c) nous voyons que $E(m_\tau)$ converge faiblement vers $E(X)$: $\{m_n\}$ est donc un amart faible [2].

Or $\{E^{\mathcal{B}_\tau}(X)(\omega)\}_{\tau \in T}$ converge p.s. donc, si $\mathbb{E}$ n.c.o., il existe Ω_0 avec $P(\Omega_0) = 1$ tel que si $\omega \in \Omega_0$, $\{m_n(\omega)\}$ est faiblement relativement séquentiellement compact et, par suite, $\{m_n\}$ converge faiblement p.s. [2].

De plus comme $E(|X - m_n|) \leq E(|X - X_n|) \leq \|X - X_n\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{E})}$ où $X_n = E^{\mathcal{B}_n}(X)$ nous en déduisons en utilisant le principe des sous-suite et la proprosition 7 de [1-1] que m_n converge fortement en probabilité.

L'inégalité $\|m_n\| \leq 2 \cdot \|E^{\mathcal{B}_n}(|X|)\|$ assure de l'équi-intégrabilité de la suite $(\|m_n\|)$ et de là $\{m_n\}$ est un amart fort et converge fortement vers X dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{E})$. Enfin $\{\|m_n - X_n\|\}$ est un potentiel réel et (m_n) converge fortement p.s.. Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant :

THÉORÈME 7 : *Soit $(\mathcal{B}_n)$ une filtration croissante, $\mathcal{B} = \vee \mathcal{B}_n$, $\mathbb{E}$ un espace de Banach réticulé, n.c.o.; $X \in \mathbb{L}^1(\mathcal{B}; \mathbb{E})$, et $m_n \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}_n}(X)$ pour tout n.*
Alors la suite (m_n) converge fortement p.s. et dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{E})$ vers X.

IV. CONSISTANCE DE L'ESTIMATION DE LA MÉDIANE

Classiquement l'estimation de la médiane d'une v.a. réelle X se fait à partir d'une suite (X_n) de v.a. indépendantes et de même loi que X, en prenant pour $m_n(\omega)$ une médiane de $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ relativement à la loi uniforme sur $1, \ldots, n$ [3]. Il est aisé de voir que si $\mathcal{S}_n$ désigne la tribu des évènements dépendants symétriquement de $X_1, \ldots, X_n$; alors $m_n \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}(X)$ et, de là, une preuve analogue à celle du théorème 5 – pour une filtration décroissante – permet d'obtenir la consistance de la suite d'estimateurs de la médiane, si du moins cette médiane est unique.

Rappelons aussi la démonstration de [1-2] assurant la convergence p.s..

THÉORÈME 8 : *Si X a une unique médiane, m, alors la suite (m_n) des estimateurs de cette médiane converge p.s. et dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{E})$ vers m.*

EXTENSION : Signalons, en conclusion, la possibilité de définir d'autres approximations. Suivant [4] on définit $\left(\sum_1^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ pour $x_i \in \mathbb{E}$, ce qui permet de résoudre de même le problème des p-médianes (et des p-médianes conditionnelles) : $\operatorname{Inf} \left(\sum_1^n |x_i - e|^p\right)^{1/p}, e \in \mathbb{E}$.

Le cas probabiliste donne le problème de la détermination d'une variable $Y_0 \in \mathbb{L}^p(\mathcal{B};\mathbb{E})$ telle que :

$$(E(|X - Y_0|^p))^{1/p} \leq (E(|X - Y|^p))^{1/p} \qquad \text{pour toute} \quad Y \in \mathbb{L}^p(\mathcal{B};\mathbb{E}).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1-1] B. BRU et H. HEINICH, Sur l'espérance des variables à valeurs dans les espaces de Banach réticulés, *Ann. I.H.P.*, vol. **XVI**,n° 3 1980. p. 192-210.

[1-2] B. BRU et H. HEINICH, Meilleurs approximations et médianes conditionnelles, *Ann. I.H.P.*, 1985 vol. **21** n° 3 p. 197-224.

[2] A. BRUNEL et L. SUCHESTON, Sur les amarts à valeurs vectorielles, *C.R. Acad. Sci. Paris* t. **283**, 1976 p. 1037-1040.

[3] E.L. LEHMANN Non Parametrics : Statistical Methods based on Ranks, Holden-Day, *Series in Probability and Statistics*, 1075

[4] J. LINDENSTRAUSS and L. TZAFRIRI, *Classical Banach Spaces II*, Springer-Velag.1979.

[5] W.A. LUXEMBURG and A.C. ZAANEN, *Riez Space*, Vol **1**, North-Holland Publishing Company, 1971.

(*Manuscrit reçu le* 22 *décembre* 1988;
corrigé le 16 *janvier* 1990)