

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

PIERRE BERNARD

DAVID NUALART

Régularité C^∞ des noyaux de Wiener d'une diffusion

Annales de l'I. H. P., section B, tome 26, n° 2 (1990), p. 287-297

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1990__26_2_287_0

© Gauthier-Villars, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Régularité C^∞ des noyaux de Wiener d'une diffusion

par

Pierre BERNARD et David NUALART

Département de Mathématiques appliquées, Université Blaise-Pascal,
63177 Aubières Cedex, France
Facultat de Matemàtiques, Universitat Barcelona, 08071 Barcelona, Spain

RÉSUMÉ. — Dans cet article, on introduit une classe de semi-martingales browniennes régulières sur $[0, T]$. On montre que, pour toute semi-martingale de cette classe, pour tout entier n , le noyau d'ordre n de la représentation en chaos de Wiener admet une version C^∞ dans l'ensemble: $\bar{\Delta}_n = \{0 \leq t \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t \leq T\}$. On montre ensuite que toute diffusion définie par une équation différentielle stochastique dont les coefficients sont C_b^∞ est dans cette classe et, donc, que ses noyaux de Wiener sont réguliers. La continuité de ces noyaux de Wiener d'une diffusion a déjà été établie par D. Nualart [4] en s'appuyant sur la formule de Stroock [5], et par Léandre et Meyer [3] par une méthode différente.

Mots clés : Semi-martingales, diffusions, noyaux de Wiener.

ABSTRACT. — In this paper, a class of regular Brownian semimartingales on $[0, T]$ is introduced. It is proved that, for any semimartingale in this class, the kernel of the n -th term of the Wiener Chaos decomposition has a C^∞ version on $\bar{\Delta}_n = \{0 \leq t \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t \leq T\}$. It is then proved that any diffusion process defined by a stochastic differential equation with C_b^∞ coefficients is in this class, and hence has regular Wiener kernels. The continuity of Wiener kernels of a diffusion was established by D. Nualart [4] using Stroock formula [5], and by Leandre and Meyer [3] using a different method.

Key words : Semimartingales, diffusions, Wiener kernels.

Classification A.M.S. : 60 H 07, 60 H 10.

1. NOTATIONS

Soit $W = (W(t), t \geq 0)$ un mouvement brownien d -dimensionnel défini sur l'espace de probabilité canonique $\Omega = C_0([0, T]; \mathbb{R}^d)$, P la mesure de Wiener, $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ la filtration naturelle associées.

A W on associe l'intégrale stochastique de Wiener-Ito, isométrie de $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ définie par

$$h = (h^1, \dots, h^d) \xrightarrow{W} \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}} h^i(t) dW_t^i.$$

Introduisant l'isométrie de $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ sur $L^2(T; dt \otimes d\mu) = L^2(T)$ où $T = \mathbb{R}_+ \times \{1, \dots, d\}$ et μ est la mesure de comptage sur $\{1, \dots, d\}$:

$$\begin{aligned} h &= (h^1, \dots, h^d) \rightarrow g \\ g(i, t) &= h^i(t) \end{aligned}$$

l'isométrie de Wiener-Ito agit de $L^2(T)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et les puissances tensorielles symétriques W^n de $L^2(T^n)$ dans le n -ième chaos de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Pour tout E espace de Hilbert réel séparable, tout réel p tel que $1 < p < \infty$, et tout réel s , on notera $\mathbb{D}_{p,s}(E)$ la fermeture de l'espace des polynômes cylindriques sur W à valeurs dans E pour la norme :

$$\|F\|_{p,s,E} = \|(I - L)^{s/2} F\|_{p,E}$$

où L est le générateur du semi-groupe d'Ornstein Uhlenbeck sur $L^2(\Omega; E)$. Soit $\mathbb{D}_{\infty}(E) = \bigcap_{p,s} \mathbb{D}_{p,s}(E)$. Si $E = \mathbb{R}$, on écrira simplement $\| \cdot \|_{p,s}$ et $\mathbb{D}_{p,s}$.

Notons $C_p^{\infty}((\mathbb{R}^d)^k)$ l'espace des fonctions de $(\mathbb{R}^d)^k$ dans \mathbb{R} , C^{∞} à croissance polynômiale ainsi que toutes leurs dérivées. On désignera par ∇ l'opérateur de dérivation stochastique, agissant sur les fonctionnelles de la forme $\varphi(W_{t_1}, \dots, W_{t_k})$ avec $\varphi \in C_p^{\infty}((\mathbb{R}^d)^k)$ de la façon suivante :

$$\nabla_s^j \varphi(W_{t_1}, \dots, W_{t_k}) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i^j}(W_{t_1}, \dots, W_{t_k}) \mathbf{1}_{[0, t_i]}(s)$$

pour tous s, t_1, \dots, t_k dans $[0, T]$, $1 \leq j \leq d$, $k \geq 1$.

∇ peut-être considéré comme un opérateur non borné de $L^2(\Omega; E)$ dans $L^2(\Omega; E \otimes H)$, fermable, et agissant continuellement de $\mathbb{D}_{p,s}(E)$ dans $\mathbb{D}_{p,s-1}(E \otimes H)$, où $H = L^2([0, T]; \mathbb{R}^d)$. Pour une étude détaillée de ces opérateurs, on peut voir [6] ou [2].

Rappelons que tout $F \in L^2(\Omega)$ admet une décomposition en chaos de Wiener de la forme :

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^d \int_{[0, T]^n} f_n((t_1, i_1), \dots, (t_n, i_n)) W^{i_1}(dt_1) \dots W^{i_n}(dt_n) \quad (1.1)$$

où $f_n \in L^2\{([0, T] \times \{1, \dots, d\})^n\}$ sont symétriques.

Notons \mathbb{H}_∞ la classe des processus $\varphi = \{\varphi_s; 0 \leq s \leq T\}$ continus, adaptés, tels que $\varphi_t \in \mathbb{D}_\infty$ pour tout $t \in [0, T]$ et $\sup_{0 \leq t \leq T} \|\varphi\|_{p, k} < \infty$ pour tout $p > 1, k \geq 0$. Rappelons que \mathbb{D}_∞ est une algèbre, dont le produit est continu (voir [6]).

1.1. Quelques propriétés de \mathbb{H}_∞

(i) Si $\varphi \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, et $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathbb{H}_\infty$, alors $\varphi(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathbb{H}_\infty$.

(ii) Si $\varphi \in \mathbb{H}_\infty$, alors $\int_0^\cdot \varphi_1 ds$ et $\int_0^\cdot \varphi_s dW_s^i, 1 \leq i \leq d$, sont aussi dans \mathbb{H}_∞ .

Démonstration. — (1) Il résulte immédiatement des propriétés de \mathbb{D}_∞ que $\varphi(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ est un processus continu et adapté, tel que

$$\varphi(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) = \varphi(\Phi(t)) \in \mathbb{D}_\infty, \quad \forall t \in [0, T].$$

D'autre part,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\varphi(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))\|_{p, k} < \infty.$$

Effectuons la preuve pour $k = 1$, c'est la même pour k quelconque :

$$\begin{aligned} \|\varphi(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))\|_{p, 1} &= (E[|\nabla[\varphi(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))]|_{\mathbb{H}}^p])^{1/p} \\ &= \left(E \left[\left| \sum_{i=1}^n \partial \varphi(\Phi(t)) \nabla \varphi_i(t) \right|_{\mathbb{H}}^p \right] \right)^{1/p} \\ &\leq C \sup_i (E(|\partial_i \varphi(\Phi(t))|^q))^{1/q} (E(|\nabla \varphi_i(t)|_{\mathbb{H}}^r))^{1/r} \end{aligned}$$

avec q, r positifs tels que $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}$.

Cette majoration implique que $\|\varphi(\Phi(t))\|_{p, 1}$ est borné uniformément en $t \in [0, T]$.

$$(2) \text{ Posons } \alpha_t = \int_0^t \varphi_s ds \text{ et } \beta_t = \int_0^t \varphi_s dW_s^i.$$

Ces processus sont continus adaptés, et α_t et β_t appartiennent à \mathbb{D}_∞ .

Le fait que $\sup_{0 \leq t \leq T} \|\alpha_t\|_{p, k} < \infty$ est immédiat.

Pour β_t , on doit calculer $\nabla^k \left[\int_0^t \varphi_s dW_s^i \right]$.

Pour $k=1$, $\nabla_{\theta} \left[\int_0^t \varphi_s dW_s^i \right] = \varphi_{\theta} + \int_0^t D_{\theta} \varphi_s dW_s^i$

Par récurrence, on obtient $\nabla_{\theta_1 \dots \theta_k}^k$ et la majoration s'obtient en utilisant l'inégalité de Burkholder. \square

Nous allons maintenant introduire une classe de semi-martingales par rapport à (\mathcal{F}_t) continues et vérifiant certaines propriétés de régularité.

2. UNE CLASSE DE SEMI-MARTINGALES RÉGULIÈRES

Désignons par \mathcal{S}_0 l'ensemble des semi-martingales continues de la forme :

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t \varphi_s^0 ds + \int_0^t \sum_{j=1}^d \varphi_s^j dW_s^j \quad (2.1)$$

vérifiant les deux propriétés suivantes :

- (i) Les processus φ^j , $0 \leq j \leq d$, appartiennent à \mathbb{H}_{∞} .
- (ii) Pour tout $j=1, \dots, d$, il existe une famille finie de processus de la classe $\mathbb{H}_{\infty} : H^{ij}, J^{ij}$, $1 \leq i \leq n$, tels que :

$$\nabla_s^j Z_t = \sum_{i=1}^n H_s^{ij} J_t^{ij} \quad (2.2)$$

pour tout $1 \leq j \leq d$ et tout $s \leq t$.

Rappelons que $\nabla_s^j Z_t = 0$ pour $s > t$.

Remarquons que les processus φ^j de (2.1) sont bien définis dès que Z est donné; on notera $\varphi_t^j = \delta_t^j Z$, $0 \leq j \leq d$. (On fera attention à ne pas confondre ce δ_t^j avec l'opérateur de divergence, parfois noté δ également, mais qui n'apparaît pas dans cet article.)

Pour comprendre l'intérêt de l'hypothèse (ii), il convient de se reporter au cas des diffusions (voir n° 3 plus loin).

Après \mathcal{S}_0 , nous allons définir par récurrence une suite \mathcal{S}_n de classes de semi-martingales de la façon suivante: pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{S}_n = \{ Z \in \mathcal{S}_{n-1} : \delta^j Z \in \mathcal{S}_{n-1} \text{ pour } 0 \leq j \leq d \text{ et il existe une décomposition du type (2.2) avec } H^{ij} \text{ et } J^{ij} \text{ dans } \mathcal{S}_{n-1} \text{ pour tout } i \text{ et } j \}$.

Enfin, on notera $\mathcal{S}_\infty = \bigcap_n \mathcal{S}_n$.

Observons que l'on a, pour tout entier n :

$$\mathcal{S}_\infty \subset \dots \subset \mathcal{S}_n \subset \mathcal{S}_{n-1} \subset \dots \subset \mathcal{S}_0 \subset \mathbb{H}_\infty.$$

LEMME 2.1. — *La classe \mathcal{S}_n est une algèbre pour tout n .*

Preuve. — Seule la stabilité par multiplication demande une preuve. Soient Y et $Z \in \mathcal{S}_n$. Appliquant la formule d'Ito, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \delta_t^j(YZ) &= Y \delta_t^j Z + Z \delta_t^j Y, \quad 1 \leq j \leq d \\ \delta_t^0(YZ) &= Y \delta_t^0 Z + Z \delta_t^0 Y + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d (\delta_t^j Y) (\delta_t^j Z) \end{aligned} \tag{2.3}$$

D'autre part :

$$\nabla_s^j(Y_t Z_t) = Y_t \nabla_s^j Z_t + \nabla_s^j Y_t \cdot Z_t \tag{2.4}$$

Nous allons montrer le lemme par récurrence sur n .

Pour $n=0$, on déduit que $\delta^j(YZ) \in \mathbb{H}_\infty$ pour $0 \leq j \leq d$ du fait que \mathbb{H}_∞ est une algèbre. Par (2.3), cela montre que la condition (i) est satisfaite pour YZ . Comme $\nabla_s^j Z_t$ et $\nabla_s^j Y_t$ sont décomposables suivant (2.2), on déduit de (2.4) que $\nabla_s^j(Y_t Z_t)$ est également décomposable :

$$\nabla_s^j(Y_t Z_t) = \sum_{i=1}^n H_s^{ij}(Z) (Y_t J_t^{ij}(Z)) + \sum_{i=1}^n H_s^{ij}(Y) (Z_t J_t^{ij}(Y)).$$

On conclue en utilisant le fait que \mathbb{H}_∞ est une algèbre.

Le même raisonnement permet alors de déduire que \mathcal{S}_n est une algèbre, pour $n \geq 1$, de l'hypothèse que \mathcal{S}_{n-1} en est une. \square

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le résultat fondamental concernant la régularité des noyaux de Wiener des semi-martingales de la classe \mathcal{S}_∞ .

THÉORÈME 2.2. — *Soit Z une semi-martingale de la classe \mathcal{S}_∞ . Pour tout $t \in [0, T]$ on désignera par $(f_n((t; (t_1, i_1), \dots, (t_n, i_n)); n \geq 0))$, la suite des noyaux de la représentation en chaos de Wiener de Z_t . Alors, f_n admet une version C^∞ dans le fermé*

$$\bar{\Delta}_n = \{ (t_1, \dots, t_n, t) : 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t \leq T \} \subset [0, T]^{n+1}.$$

Preuve. — Nous allons montrer que les f_n ont des versions qui sont C^∞ dans l'ouvert $\Delta_n = \{ 0 < t_1 < \dots < t_n < t \}$ et que toutes les dérivées partielles de f_n ont des extensions continues à Δ_n .

Par la formule de Stroock [5], les noyaux f_n s'expriment de la façon suivante :

$$f_n(t; (t_1, i_1), \dots, (t_n, i_n)) = \frac{1}{n!} E(\nabla_{t_1}^{i_1} \dots \nabla_{t_n}^{i_n} Z_t) \tag{2.5}$$

D'après la définition de \mathcal{S}_∞ , dans $\bar{\Delta}_n$, le gradient d'ordre n : $\nabla_{t_1}^{i_1} \dots \nabla_{t_n}^{i_n} Z_t$ s'écrit comme une combinaison linéaire finie de produits du type :

$$H_{t_1}^1 \dots H_{t_n}^n J_t \tag{2.6}$$

avec $H^1, \dots, H^n, J \in \mathcal{S}_M$, M pouvant être choisi arbitrairement grand. Cette propriété se montre par récurrence sur n .

Pour $n=1$, ceci découle immédiatement de l'appartenance de Z à \mathcal{S}_∞ . Supposons maintenant le résultat vrai pour les dérivées jusqu'à l'ordre n . Alors, pour $t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1} \leq t$, on a :

$$\nabla_{t_{n+1}}^{i_{n+1}} [H_{t_1}^1 \dots H_{t_n}^n J_t] = H_{t_1}^1 \dots H_{t_n}^n \nabla_{t_{n+1}}^{i_{n+1}} J_t$$

et la propriété sera vraie à l'ordre $n+1$, mais en changeant M en $M-1$.

Il suffit maintenant de prouver que, pour tout entier M , l'application $(t_1, \dots, t_n, t) \rightarrow E(H_{t_1}^1 \dots H_{t_n}^n J_t)$ est de classe C^M sur Δ_n , et que ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre M sont continues sur $\bar{\Delta}_n$.

Les processus H_t^i et J_t , $1 \leq i \leq n$, sont continus de $[0, T]$ dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p > 1$, puisqu'ils sont dans \mathbb{H}_∞ . Fixons $1 \leq i \leq n$. Par la décomposition des semi-martingales H_t^i , on obtient, pour $t_1 < \dots < t_n < t$:

$$\begin{aligned} E(H_{t_1}^1 \dots H_{t_n}^n J_t) &= E(H_{t_1}^1 \dots H_0^i \dots H_{t_n}^n J_t) \\ &+ \int_0^{t_i} E(H_{t_1}^1 \dots (\delta_s^0 H^i) \dots H_{t_n}^n J_t) ds \\ &+ \sum_{j=1}^d E(H_{t_1}^1 \dots \left(\int_0^t \delta_s^j H^i dW_s^j \right) \dots H_{t_n}^n J_t) \end{aligned}$$

Puis, utilisant, dans le dernier terme, le fait que l'adjoint de la divergence est le gradient, on peut mettre celui-ci sous la forme :

$$\sum_{j=1}^d \int_0^{t_i} E[(\delta_s^j H^i) \nabla_s^j (H_{t_1}^1 \dots H_{t_{i-1}}^{i-1} H_{t_{i+1}}^{i+1} \dots H_{t_n}^n J_t)] ds.$$

Ceci entraîne que la fonction $t_i \rightarrow E[H_{t_1}^1 \dots H_{t_n}^n J_t]$ est différentiable en $t_i \in (t_{i-1}, t_{i+1})$ avec une dérivée égale à

$$\frac{\partial}{\partial t_i} E[H_{t_1}^1 \dots H_{t_n}^n J_t] = E[H_{t_1}^1 \dots (\delta_{t_i}^0 H^i) \dots H_{t_n}^n J_t] + \sum_{j=1}^d E[H_{t_1}^1 \dots H_{t_{i-1}}^{i-1} (\delta_{t_{i-1}}^j (\delta_{t_i}^j H^i) \nabla_{t_i}^j (H_{t_{i+1}}^{i+1} \dots H_{t_n}^n J_t)). \quad (2.7)$$

On remarque que cette dérivée est une combinaison linéaire finie d'espérances mathématiques de produits de la forme (2.6) dont les facteurs appartiennent à \mathcal{S}_{M-1} . En effet, ceci résulte de la définition de \mathcal{S}_M et du fait que \mathcal{S}_M est une algèbre (lemme 2.1). La dérivée (2.7) est donc continue sur $\bar{\Delta}_n$.

Appliquant le même procédé à chacun des éléments de cette somme, nous montrons que cette fonction admet des dérivées partielles d'ordre k continues sur $\bar{\Delta}_n$ pour tout $k \leq M$, qui sont des combinaisons linéaires finies de termes de la forme

$$E[H_{t_1}^1 \dots H_{t_n}^n J_t],$$

avec $H^1, \dots, H^n, J \in \mathcal{S}_{M-k}$. On obtient ainsi l'existence de dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre M dans $\bar{\Delta}_n$ pour la fonction :

$$(t_1, \dots, t_n, t) \rightarrow E[H_{t_1}^1 \dots H_{t_n}^n J_t],$$

sous l'hypothèse que les semi-martingales $H^1 \dots H^n J$ sont dans \mathcal{S}_M . \square

Remarques. — 1. Sous les hypothèses du théorème 2, les noyaux f_n sont continus sur le fermé

$$\{(t_1, \dots, t_n, t) : t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t\} \subset [0, T]^{n+1}.$$

Cependant, les dérivées partielles de chaque noyau f_n , bien que continues sur le simplexe Δ_n , peuvent ne pas se raccorder lorsque l'on passe de Δ_n à un autre simplexe $\{t_{\sigma(1)} \leq \dots \leq t_{\sigma(n)} \leq t\}$ où σ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$.

2. Si l'on suppose que Z est dans \mathcal{S}_M , $M \geq 0$ donné, alors on obtient que pour tout $0 \leq n \leq M + 1$, le noyau f_n est de classe C^{M+1-n} dans $\bar{\Delta}_n$.

3. APPLICATION AUX DIFFUSIONS

Nous allons appliquer les résultats précédents à la solution d'un système d'équations différentielles stochastiques à coefficients réguliers.

Soient $b, \sigma_j, 1 \leq j \leq d$, des fonctions de $C_b^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ (i.e. C^∞ et dont toutes les dérivées sont bornées).

On considère la solution continue X_t de l'équation différentielle stochastique :

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma_j(X_s) dW_s^j + \int_0^t b(X_s) ds, \quad (3.1)$$

$x_0 \in \mathbb{R}^m$.

Soit Y_t la solution de l'équation différentielle stochastique matricielle

$$Y_t = I + \int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma_j'(X_s) Y_s dW_s^j + \int_0^t b'(X_s) Y_s ds \quad (3.2)$$

On sait que Y_t est la matrice jacobienne du flot $X_t(x)$ associé à (3.1). D'autre part, $Z_t = Y_t^{-1}$ est solution de :

$$Z_t = I - \int_0^t \sum_{j=1}^d Z_s \sigma_j'(X_s) dW_s^j - \int_0^t Z_s b'(X_s) ds - \frac{1}{2} \times \int_0^t Z_s \left(\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_k} \sigma_j^k \right)'(X_s) ds \quad (3.3)$$

En outre, nous savons [1] que les composantes des semi-martingales X_t, Y_t, Y_t^{-1} appartiennent à \mathbb{H}_∞ .

Nous allons construire par récurrence une nouvelle famille de semi-martingales continues associées à la diffusion X_t .

Définissons d'abord :

$$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(X) = \{ Z_t = \varphi(X_t, Y_t, Y_t^{-1}); \varphi \in C_p^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m^2} \times \mathbb{R}^{m^2}) \},$$

puis, pour $n \geq 1$,

$$\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_n(X) = \left\{ Z_t = \varphi \left(\int_0^t \sum_{j=1}^d R_j(s) dW_s^j, \int_0^t R_0(s) ds, Q_t \right) : \right. \\ \left. \varphi \in C_p^\infty(\mathbb{R}^{3N}), R_j^i, Q^i \in \mathcal{C}_{n-1} \text{ pour } 1 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq d \right\}$$

Posons enfin $\mathcal{C}_\infty = \bigcup_n \mathcal{C}_n$.

Observons que, puisque X_t, Y_t, Y_t^{-1} sont dans \mathbb{H}_∞ , par les propriétés de stabilité de \mathbb{H}_∞ , on a $\mathcal{C}_\infty \subset \mathbb{H}_\infty$, et par conséquent, pour tout n :

$$\mathcal{C}_0 \subset \dots \subset \mathcal{C}_{n-1} \subset \mathcal{C}_n \subset \dots \subset \mathcal{C}_\infty \subset \mathbb{H}_\infty.$$

Nous allons maintenant établir le lien avec la classe \mathcal{S}_∞ de la première partie, et pour cela montrer le résultat suivant :

LEMME 3.1. — Soit $Z \in \mathcal{C}_n$, $n \geq 0$ donné. Alors :

(a) $\delta^j Z \in \mathcal{C}_{n+1}$, pour tout $0 \leq j \leq d$.

(b) Pour tout $j = 1, \dots, d$, il existe une famille finie de processus de la classe $\mathcal{C}_{n+1} : H^{ij}, J^{ij} \ 1 \leq i \leq n$ tels que :

$$\nabla_s^j Z_t = \sum_{i=1}^n H_s^{ij} J_t^{ij} \quad \text{pour tout } 1 \leq j \leq d \quad \text{et} \quad 0 \leq s \leq t \quad (3.4)$$

Preuve. — Soit $Z \in \mathcal{C}_n$. Nous allons montrer (a) et (b) par récurrence sur n . Considérons d'abord le cas $n=0$. En appliquant la formule d'Ito à $Z_t = \varphi(X_t, Y_t, Y_t^{-1})$, on obtient que $\delta^j Z \in \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_1$ pour $0 \leq j \leq d$, ce qui vérifie (a).

Pour vérifier (b), il suffit de trouver une décomposition du type (3.4) pour les semi-martingales $X_t, Y_t^{\alpha\beta}, (Y_t^{-1})^{\alpha\beta}$. Or nous savons que :

$$\nabla_s^j X_t = Y_t Y_s^{-1} \sigma_j(X_s) \quad (s \leq t) \quad (3.5)$$

D'autre part, nous pouvons calculer $\nabla_s^j Y_t$ à partir de (3.2) :

$$\begin{aligned} \nabla_s^j Y_t = & \sigma'_j(X_s) Y_s + \int_s^t \sum_{k=1}^d \nabla_s^j [\sigma'_k(X_u)] Y_u dW_u^k \\ & + \int_s^t \nabla_s^j [b'(X_u)] Y_u du + \int_s^t \sum_{k=1}^d \sigma'_k(X_u) \nabla_s^j Y_u dW_u^k \\ & + \int_s^t b'(X_u) \nabla_s^j Y_u du \quad (3.6) \end{aligned}$$

Cette expression montre que $\nabla_s^j Y_t$ est solution d'une équation différentielle stochastique linéaire, et, en résolvant (3.6), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \nabla_s^j Y_t = & Y_t Y_s^{-1} \sigma'_j(X_s) Y_s + \int_s^t Y_t Y_u^{-1} \left(\sum_{k=1}^d \nabla_s^j [\sigma'_k(X_u)] \right) Y_u dW_u^k \\ & + \int_s^t Y_t Y_u^{-1} \nabla_s^j [b'(X_u)] Y_u du. \quad (3.7) \end{aligned}$$

L'expression (3.7) nous fournit une décomposition pour les composantes de $\nabla_s^j Y_t$ en somme finie de produits d'éléments de \mathcal{C}_1 .

En effet, $Y_t \in \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_1$, $\int_s^t Y_u^{-1} \nabla_s^j [b'(X_u)] Y_u du$ est une intégrale de termes de \mathcal{C}_0 puisque :

$$\nabla_s^j [b'(X_u)] = b''(X_u) \cdot \nabla_s^j X_u = b''(X_u) Y_u Y_s^{-1} \sigma_j(X_s),$$

et le terme d'intégrale stochastique se décompose de la même façon. Le même raisonnement s'applique à $\nabla_s^j Y_t^{-1}$.

Nous avons établi le résultat du lemme pour $n=0$.

Considérons maintenant le passage de n à $n+1$. Soit donc :

$$Z_t = \varphi \left(\int_0^t \sum_{j=1}^n R_j(s) dW_s^j, \int_0^t R_0(s) ds, Q_t \right)$$

avec $R_j^i, Q^i \in \mathcal{C}_{n-1}$ pour $1 \leq i \leq N$ et $0 \leq j \leq d$, et $\varphi \in C_p^\infty(\mathbb{R}^{3N})$. Par la formule d'Ito, on obtient :

$$\delta_t^j Z = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(M_t, A_t, Q_t) R_j^i(t) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \varphi}{\partial z_i}(M_t, A_t, Q_t) \delta_t^i Q^i$$

pour $1 \leq j \leq d$, où l'on a posé :

$$M_t = \int_0^t \sum_{j=1}^d R_j(s) dW_s^j, \quad A_t = \int_0^t R_0(s) ds \quad \text{et} \quad \varphi = \varphi(x, y, z)$$

De même :

$$\begin{aligned} \delta_t^0 Z &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(M_t, A_t, Q_t) R_0^i(t) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \varphi}{\partial z_i}(M_t, A_t, Q_t) \delta_t^i Q^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}(M_t, A_t, Q_t) \sum_{j=1}^d R_j^i(t) R_j^k(t) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^N \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial z_k}(M_t, A_t, Q_t) \sum_{j=1}^d (\delta_t^j Q^i) (\delta_t^j Q^k) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^N \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial z_k}(M_t, A_t, Q_t) \sum_{j=1}^d R_j^i(t) \delta_t^j Q^k. \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence et la définition des classes \mathcal{C}_∞ , on voit que $\delta_t^j Z \in C_{n+1}$ pour tout $0 \leq j \leq d$. (a) est donc établi. Pour (b), calculons :

$$\begin{aligned} \nabla_s^j Z_t &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(M_t, A_t, Q_t) \left\{ R_j^i(t) + \int_s^t \sum_{k=1}^d \nabla_s^j R_k^i(u) dW_u^k \right\} \\ &+ \sum_{i=1}^N \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(M_t, A_t, Q_t) \int_s^t \nabla_s^j R_0^i(u) du \\ &+ \sum_{i=1}^N \frac{\partial \varphi}{\partial z_i}(M_t, A_t, Q_t) \nabla_s^j Q^i. \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, les gradients $\nabla_s^j R_k^i(u)$, $\nabla_s^j R_0^i(u)$ et $\nabla_s^j Q^i$ admettent une décomposition du type (3.4) où les facteurs appartiennent à \mathcal{C}_n . L'expression précédente permet alors de conclure. \square

Nous obtenons ainsi le résultat suivant concernant les diffusions.

THÉORÈME 3.2. — *Pour toute fonction $\varphi \in C_p^\infty(\mathbb{R}^m)$, la semi-martingale $\varphi(X_t)$ est dans la classe \mathcal{S}_∞ et les noyaux $f_n(t; (t_1, i_1), \dots, (t_n, i_n))$ de la représentation en chaos de Wiener de $\varphi(X_t)$ ont des versions C^∞ dans $\bar{\Delta}_n$.*

Preuve. — Observons d'abord que $\mathcal{C}_0(X) \subset \mathcal{S}_\infty$.

Nous allons montrer par récurrence que $\mathcal{C}_\infty \subset \mathcal{S}_m$ pour tout $m \geq 0$. D'après le lemme 3.1, $\mathcal{C}_\infty \subset \mathcal{S}_0$. Supposant $\mathcal{C}_\infty \subset \mathcal{S}_m$ pour un certain $m \geq 0$, on déduit encore du même lemme que $\mathcal{C}_\infty \subset \mathcal{S}_{m+1}$. \square

Remarquons enfin que nous n'avons fait aucune hypothèse de non-dégénérescence de la diffusion.

RÉFÉRENCES

- [1] N. IKEDA et S. WATANABE, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland, 1981.
- [2] M. et P. KRÉE, Continuité de la divergence dans les espaces de Sobolev relatifs à l'espace de Wiener, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 296, série I, 1983, p. 833-836.
- [3] R. LÉANDRE et P. A. MEYER, Sur le développement en chaos d'une diffusion, *Séminaire de Probabilités, XXIII*, Springer-Verlag.
- [4] D. NUALART, Une remarque sur le développement en chaos d'une diffusion, *Séminaire de Probabilités, XXIII*, Springer-Verlag.
- [5] D. N. STROOCK, Homogeneous Chaos Revisited. *Séminaire de Probabilités XXI-1.7, Lect. Notes Math.*, Vol. **1247**, Springer-Verlag.
- [6] S. WATANABE, *Stochastic Differential Equations and Malliavin Calculus, Tata Institute of Fundamental Research*, Springer-Verlag, 1984.
- [7] J. M. BISMUT, Martingales, the Malliavin Calculus and Hypocoellipticity Under General Hormander's Conditions, *Z.W. Verw. Gebiete*, vol. **56**, 1981, p. 469-505.

(Manuscrit reçu le 4 septembre 1989)

(corrigé le 11 décembre 1989.)