

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

YVES GUIVARC'H

Sur une extension de la notion de loi semi-stable

Annales de l'I. H. P., section B, tome 26, n° 2 (1990), p. 261-285

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1990__26_2_261_0

© Gauthier-Villars, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur une extension de la notion de loi semi-stable

par

Yves GUIVARC'H

Laboratoire de Probabilités, Tour 56, 3^e étage, 4, place Jussieu,
75252 Paris Cedex 05, France

RÉSUMÉ. — On étudie les solutions d'une équation fonctionnelle à coefficients aléatoires introduite par B. Mandelbrot [5], équation qui généralise celle des lois semi-stables. On montre l'existence d'une famille de solutions analogues aux lois stables sur \mathbb{R}^+ d'indice inférieur à 1 et d'une loi particulière jouant un rôle analogue à celui de la loi de Gauss. On précise également la convergence vers ces lois limites d'un procédé itératif naturel.

ABSTRACT. — We study the solutions of a functional equation with random coefficients introduced by B. Mandelbrot [5]. This is an extension of semi-stable laws. We show the existence of a family of solutions analogous to the stable laws on \mathbb{R}^+ with index less than one and of a special law analogous to the gaussian law. We make precise the convergence of a natural iterative process towards these limiting laws.

Key words : Convolution, stable law, hyperbolic tail, attraction domain.

INTRODUCTION

Considérons la demi-droite positive $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty]$, une mesure de probabilité α sur \mathbb{R}^+ , un entier $c > 1$ et notons \star et \circ respectivement les convolutions additive et multiplicative sur \mathbb{R}^+ . L'équation (E) suivante

$$(E) \quad \nu = T\nu = (\alpha \circ \nu) \star^c$$

où ν est une probabilité a été introduite par Mandelbrot [5] pour préciser un modèle de turbulence défini par Kolmogorov et Yaglom. L'étude de cette équation se révèle délicate à cause de la présence des deux convolutions, et des interprétations probabilistes sont utiles. Désignons par A_1, \dots, A_c et X_1, \dots, X_c des variables aléatoires indépendantes de lois respectives α et ν . L'équation (E) s'écrit alors

$$(E') \quad \nu = \mathcal{L} \left(\sum_{j=1}^c A_j X_j \right)$$

On peut remarquer que si α est concentrée en un point, une solution ν de E est une loi semi-stable au sens de Paul Lévy [4] (voir aussi [1], p. 538), et que si ν est solution de (E) il en va de même pour $\nu \circ \delta_a$ pour $a > 0$.

Supposons pour un moment $c \mathbb{E}(A) = 1$. Dans ces conditions $I_1 = \{1, 2, \dots, c\}$ et $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^1$, et considérons des variables aléatoires

$(A(i))_{i \in I}$ indépendantes et de même loi α . Alors les variables aléatoires $(Y_n)_{n=0}^{\infty}$ définies par

$$Y_0 = 1 \quad \text{et} \quad Y_n = \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in I^n} \prod_{k=1}^n A(j_k, j_k)$$

forment une martingale et $\mathcal{L}(Y_n) = T^n(\delta_1)$. Toujours sous l'hypothèse $c \mathbb{E}(A) = 1$, envisageons deux cas

(1) $\mathbb{E}(A \log A) < 0$. Nous appellerons dans toute la suite de l'article *cas spécial* le cas $\mathbb{E}(A \log A) < 0$ et $c \mathbb{E}(A) = 1$. Sous cette condition, Kahane et Peyrière [2] montrent que $\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(\delta_1)$ existe et est non triviale (c'est-

à-dire non concentrée en un point). Nous appellerons désormais les solutions $\nu \circ \delta_a$, avec $a > 0$, les *solutions spéciales*. Dans [5] on demande le comportement à l'infini de ν , et nous montrerons que sous de larges conditions il existe deux réels positifs χ et C tels que $\lim_{t \rightarrow \infty} t^\chi \nu(t, +\infty) = C$,

c'est-à-dire que ν a une queue d'ordre χ (th. 1).

(2) $\mathbb{E}(A \log A) \geq 0$. Dans [2] on montre que $\delta_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(\delta_1)$ et dans [5]

on demande comment normaliser $T^n(\delta_1)$ pour que $\mathcal{L} \left(\frac{Y_n - b_n}{a_n} \right)$ ait une limite non triviale. Nous allons étudier cette question en discutant les points fixes de T et leurs bassins d'attraction.

L'idée de base de notre étude est de considérer le réel χ de $(0, 1)$ (s'il existe) tel que $c \mathbb{E}(A^\chi) = 1$ et $\mathbb{E}(A^\chi \log A) < 0$ et de chercher à se ramener

aux solutions spéciales du cas $cE(A)=1$ en remplaçant les A_j dans (E') par A_j^x , c'est-à-dire en remplaçant l'opérateur T par un certain opérateur T_x . Les solutions spéciales de E pour T_x fournissent alors des solutions pour T , que nous appellerons *solutions canoniques*. Le paragraphe II est consacré à cette construction. Les paragraphes III et IV sont consacrés au cas $cE(A)=1$ et $E(A \text{ Log } A) < 0$, qu'on appellera désormais le cas spécial. On y montre qu'alors les seules solutions v de (E) telles que

$\int (\text{Log } x)^+ v(dx) < \infty$ sont les solutions spéciales (th. 3) que si v est une

solution spéciale et v' une probabilité telle que $\int x v(dx) = \int x v'(dx)$ alors

$T^n(v') \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$ (th. 4) et que $\int x v'(dx) = +\infty$ implique $T^n(v') \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta_\infty$ (th. 5).

Enfin, les paragraphes V et VI considèrent d'abord le cas où il existe une solution canonique et montre que si la probabilité v' est telle que $\lim_{t \rightarrow \infty} t^x v'(t, \infty)$ existe, alors $T^n(v')$ tend vers une solution canonique (th. 7).

Le reste est consacré au cas sans solution canonique et aux diverses dégénérescences qui en résultent (th. 8 à 11).

Afin de décrire brièvement les résultats obtenus, dans le langage de la dynamique associée à l'itération de T , on peut se donner A avec, par exemple $cE(A) > 1$, un paramètre k et décrire le comportement des solutions de (E'), où l'on remplace A par kA et l'on fait décroître k . Pour k grand, il n'y a que deux solutions δ_0, δ_∞ , la seconde étant stable au sens dynamique. Pour k petit, il y a deux solutions stables δ_0 et δ_∞ , avec des bassins d'attraction que l'on précise, et une famille nouvelle de solutions instables J_k . Ceci vaut en particulier pour le cas $E(A \text{ Log } A) > 0$, $kcE(A)=1$ où la solution construite en [2] devient triviale. Lorsque k varie, le gain de stabilité de la solution δ_0 s'effectue de manière « douce » et s'accompagne de l'apparition de la famille J_k . D'autre part, si $E(A \text{ Log } A) < 0$ et $kcE(A)=1$, il y a apparition brusque d'une autre famille J'_1 . La famille J'_1 est celle construite en [2] et son instabilité est moins marquée que celle de J_k .

Les solutions de J_k , comme celles de J'_1 possèdent des queues dont l'exposant se calcule aisément. Enfin ces résultats permettent de répondre à diverses questions de [5] et de préciser certains résultats de [2]. Les lois de J'_1 apparaissent comme analogues des lois de Gauss tandis que celles de J_k sont analogues aux lois stables, portées par \mathbb{R}^+ , et d'indice inférieur à 1.

L'auteur remercie G. Letac pour de nombreuses remarques sur ce travail, en particulier pour un exemple explicite de couple (α, ν) satisfaisant E.

Exemple de couple (α, ν) solution de (E)

Rappelons d'abord que la loi gamma de paramètre a est concentrée sur $]0, \infty[$ de densité $\gamma_a(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x}$ ($a > 0$).

La loi β_{pq} est concentrée sur $]0, 1[$ de densité

$$\beta_{pq}(x) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} (1-x)^{p-1} x^{q-1}.$$

si l'on prend $\nu = \gamma_a$, on obtient

$$\mathcal{L}(AX) = \alpha \circ \nu = \gamma_{a/c} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(A^s) = \frac{\Gamma(s+a/c)\Gamma(a)}{\Gamma(s+a)\Gamma(a/c)}.$$

Cette formule est satisfaite si l'on prend $\alpha = \beta_{pq}$ avec $p = a/c$, $q = a - a/c$:

La loi β_{pq} a pour transformée de Mellin

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(s) &= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 x^{s+p-1} (1-x)^{q-1} dx \\ \tilde{\alpha}(s) &= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{\Gamma(s+p)\Gamma(q)}{\Gamma(s+p+q)} = \frac{\Gamma(p+q)\Gamma(s+p)}{\Gamma(p)\Gamma(s+p+q)} \end{aligned}$$

Ici $p+q = a$, $p = a/c$ et donc

$$\tilde{\alpha}(s) = \mathbb{E}(A^s).$$

Donc, prenant pour α une loi bêta et pour ν une loi gamma convenable on a bien un couple (α, ν) satisfaisant l'équation E. Cette solution n'est pas typique car α est concentrée sur $[0, 1]$.

I. UNE SOLUTION SPÉCIALE

1. Un théorème de H. Kesten

On esquisse ici une démonstration abrégée du résultat de H. Kesten [3] utilisé ensuite.

THÉORÈME. — Soit p une probabilité sur le groupe affine de la droite des transformations $g(x) = ax + b$.

On suppose que le support de p ne fixe aucun point de \mathbb{R} , que $a > 0$ ne varie pas dans une progression géométrique k^n ($n \in \mathbb{Z}$), que $b > 0$, et

$$\int \text{Log } a \, dp(g) < 0.$$

On suppose aussi qu'il existe $\lambda > 0$ avec $\int a^\lambda \, dp(g) = 1$,

$$\int b^\lambda \, dp(g) < +\infty, \quad \int a^\lambda \text{Log}^+ a \, dp(g) < +\infty.$$

Alors, il existe une unique probabilité μ sur \mathbb{R} , p -invariante ($p * \mu = \mu$) et on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\lambda \mu(t, \infty) = c > 0$$

Preuve. — La preuve sera esquissée sous l'hypothèse additionnelle b_1 borné. Les conditions d'indépendance et de moment des (a_k, b_k) assurent la convergence de la série de terme général $a_1 \dots a_k b_{k+1}$.

μ est ici la loi de $z = \sum_0^\infty a_1 \dots a_k b_{k+1} < +\infty$.

La variable $z = \sum_0^\infty a_1 \dots a_k b_{k+1}$ satisfait l'équation fonctionnelle $z = b_1 + a_1 z \circ \theta$ où θ est la translation canonique.

Donc $P\{z - b_1 > t\} = \int P\left(z > \frac{1}{a}\right) d\bar{p}(a)$ où \bar{p} est la première marginale de p .

Si l'on pose $F(t) = P\{z > t\}$, on a donc :

$$F - \bar{p} \circ F = P\{t < z \leq t + b_1\} = G(t).$$

Vu la condition $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 0$, on obtient F comme potentiel de G :

$$F(t) = \sum_0^\infty p^n \circ G(t)$$

Introduisant la probabilité $p_\lambda(da) = a^\lambda \bar{p}(da)$ et la fonction $G_\lambda(t) = t^\lambda G(t)$ on a :

$$t^\lambda F(t) = \sum_0^\infty p_\lambda^n \circ G_\lambda(t).$$

Pour obtenir la limite de $t^\lambda G(t)$, on applique le théorème de renouvellement à la marche multiplicative associée à P_λ .

Sa moyenne vaut ici :

$$\int_0^\infty \text{Log } a \, dp_\lambda(a) = \int_0^\infty a^\lambda \text{Log } a \, dp(a)$$

Par convexité, ce nombre est positif car :

$$\int_0^\infty a^\lambda \, dp_\lambda(a) = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \text{Log } a \, dp(a) < 0.$$

Il suffit donc de voir que G_λ est "Riemann-intégrable" ([1], p. 363).

On ne l'établira ici que sous l'hypothèse b_1 borné et on se contentera de l'intégrabilité. La régularité de G_λ découle de la définition de G et de la finitude de μ .

Alors $\int_0^\infty t^{\lambda-1} G(t) \, dt$ est finie en même temps que $\int_0^\infty t^{\lambda-1} dF(t)$.

Cette dernière intégrale est finie car z a des moments d'ordre inférieur à λ : si $\lambda' < \lambda \leq 1$

$$\mathbb{E}[z^{\lambda'}] \leq \mathbb{E}\left[\sum_0^\infty (a_1 \dots a_k b_{k+1})^{\lambda'}\right]$$

et

$$\mathbb{E}[(a_1 \dots a_k)^{\lambda'}] \leq \mathbb{E}(a^{\lambda'})^k, \quad (b_{k+1}^{\lambda'}) \leq \text{Cte.}$$

Ceci entraîne bien $\mathbb{E}(z^{\lambda'}) < +\infty$.

Si $1 \leq \lambda' < \lambda$, on a aussi :

$$\mathbb{E}(z^{\lambda'}) \leq \left[\sum_0^\infty \mathbb{E}(a_1 \dots a_k b_{k+1})^{\lambda'}\right]^{1/\lambda'} < +\infty$$

pour la même raison.

2. Comportement à l'infini des solutions spéciales

Dans le théorème suivant on se place dans le cas spécial.

Le théorème suivant répond à une conjecture de [5], présidant pour $v[t, \infty[$ un équivalent de la forme $\frac{C}{t^\chi}$ où χ est le nombre, supérieur à 1 (s'il existe) tel que $c \mathbb{E}(A^\chi) = 1$. Par convexité de $\mathbb{E}(A^t)$, si χ n'existe pas, $\mathbb{E}(A^t)$

est décroissante et v possède des moments de tous ordres tandis que A prend ses valeurs dans $[0, 1]$.

THÉORÈME 1. — *Supposons que α ne soit portée ni par $[0, 1]$ ni par une progression géométrique de la forme k^n ($n \in \mathbb{Z}$). Alors la limite de $t^\lambda v[t, \infty[$ existe et est positive.*

Preuve. — Posons $h(x) = x$; ainsi $h\varepsilon$ est la mesure $x\varepsilon(dx)$ et :

$$h(\varepsilon * \eta) = (h\varepsilon) * \eta + \varepsilon * (h\eta), \quad h(\varepsilon \circ \eta) = h\varepsilon \circ h\eta.$$

L'équation $Tv = v$ où v une solution spéciale devient alors, en multipliant par h :

$$hv = [ch\alpha \circ hv] * \beta \quad \text{avec} \quad \beta = (\alpha \circ v)^{*c-1}.$$

Dans l'équation précédente, on peut considérer hv comme l'inconnue et β comme donnée. Introduisons alors la probabilité p sur le groupe affine de \mathbb{R} [identifié à $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$] : $p = ch\alpha \otimes \beta$ et la convolution correspondante avec les mesures sur \mathbb{R} notée encore $*$:

$$(p * \lambda)(\varphi) = \int \varphi(g \cdot x) dp(g) d\lambda(x)$$

L'équation précédente s'écrit alors :

$$p * hv = hv$$

Notons que, v ayant des moments d'ordre inférieur à χ d'après [2]; hv est une mesure bornée. L'allure à l'infini des solutions d'équation de ce type a été précisée ci-dessus et il suffit donc de vérifier les hypothèses du théorème précédent avec $p = ch\alpha \otimes \beta$:

$$\int \text{Log } a(g) dp(g) = c \mathbb{E}(A \text{Log } A) < 0$$

$$\int a^\lambda(g) dp(g) = c \mathbb{E}(A^{\lambda+1}) = 1 \quad \text{pour} \quad \lambda = \chi - 1.$$

De plus β , comme α et v , a des moments d'ordre inférieur à χ et donc

$$\int b^\lambda(g) dp(g) < +\infty.$$

D'après le théorème cité on a donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\chi-1} (hv)[t, \infty[= C > 0.$$

Le passage de hv à v est permis d'après [1] [th. 2, p.283] et donne

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\chi v([t, \infty]) > 0.$$

Remarque. — Si α est portée par une progression géométrique k^n ($n \in \mathbb{Z}$), un terme périodique multiplicatif s'introduit dans le comportement de $\nu([t, \infty[)$, comme c'est déjà le cas dans la situation des lois semi-stables au sens de P. Lévy [4].

II. RELATION DE CONJUGAISON ET SOLUTIONS CANONIQUES

Pour un nombre $\theta > 0$, notons M_θ l'extension aux mesures de l'application $x \rightarrow x^\theta$ de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ . Soit σ_θ la loi stable d'indice θ portée par \mathbb{R}^+ ($0 < \theta < 1$), et dont la transformée de Laplace vaut $\hat{\sigma}_\theta(\lambda) = e^{-\lambda^\theta}$. Pour une probabilité ε , posons $J_\theta(\varepsilon) = \sigma_\theta \circ \varepsilon$ et notons T_θ la transformation analogue à T obtenue en remplaçant α par $M_\theta(\alpha)$, c'est-à-dire A par A^θ .

PROPOSITION 1. — *On a la relation de conjugaison: $TJ_\theta = J_\theta M_\theta^{-1} T_\theta M_\theta$.*

Preuve. — Soient X_i, Y_i des variables aléatoires indépendantes de lois $\varepsilon, \sigma_\theta$ ($1 \leq i \leq c$).

L'égalité à démontrer s'écrit alors

$$\mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^c A_i X_i Y_i\right) = \mathcal{L}\left[\left(\sum_{i=1}^c A_i^\theta X_i^\theta\right)^{1/\theta} Y_1\right].$$

Posant $A_i X_i = U_i$, elle se ramène alors à

$$\mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^c U_i Y_i\right) = \mathcal{L}\left[\left(\sum_{i=1}^c U_i^\theta\right)^{1/\theta} Y_1\right]$$

où les U_i sont des réels positifs. Cette dernière relation découle immédiatement de la stabilité du semi-groupe de convolution $(\sigma_\theta)^{*t}$.

Dans le cas général on a $c \mathbb{E}(A) \neq 1$ et si $\inf_{0 \leq \lambda \leq 1} c \mathbb{E}(A^\lambda) < 1$, il existe χ , avec $0 \leq \chi \leq 1$ et $c \mathbb{E}(A^\chi) = 1$, $\mathbb{E}(A^\chi \log A) < 0$ par convexité. Le cas $\inf_{0 \leq \lambda \leq 1} c \mathbb{E}(A^\lambda) = 1$ donne χ avec $0 < \chi \leq 1$ et $c \mathbb{E}(A^\chi) = 1$, $\mathbb{E}(A^\chi \log A) = 0$.

THÉORÈME 2. — *Supposons $\inf_{0 \leq \lambda \leq 1} c \mathbb{E}(A^\lambda) < 1$, soit χ le nombre précédemment défini, ν_1 la solution spéciale définie pour l'opérateur T_χ associé à $M_\chi(\alpha)$. Alors la mesure $\nu' = J_\chi M_\chi^{-1}(\nu_1)$ vérifie: $T \nu' = \nu'$.*

Preuve. — Il existe bien une solution spéciale pour T_x car si $B=A^x$, $c\mathbb{E}(B)=1$

$$\mathbb{E}(B \text{ Log } B) = \chi \mathbb{E}(A^x \text{ Log } A) < 0.$$

Alors : $T v' = T J_x (M_x^{-1} v_1) = J_x M_x^{-1} (v_1) = J_x M_x^{-1} v_1$ puisque $T_x v_1 = v_1$.

Remarque. — La famille de solutions de (E) qui vient d'être définie par homothétie sera dite canonique. Ces mesures admettent une densité comme σ_x et ont un comportement à l'infini « hyperbolique » d'indice χ :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\chi v'[t, \infty] = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\chi \left[\int x^{1/\chi} dv_1(x) \right] \sigma_x(t, \infty) > 0.$$

III. UNICITÉ DE LA SOLUTION DE (E)

[cas spécial $c\mathbb{E}(A)=1$, $\mathbb{E}(A \text{ Log } A) < 0$]

PROPOSITION 2. — Toute solution de (E) vérifiant

$$\int \text{Log}^+(x) dv(x) < +\infty \text{ a un moment d'ordre 1.}$$

Preuve. — Reprenons les notations du début avec $h(x)=x$ et q probabilité produit sur le groupe affine de composantes $h\alpha$ et $\beta=(\alpha \circ v)^{c-1}$. La mesure de Radon $h\nu=\mu$ satisfait alors l'équation d'invariance $q * \mu = \mu$.

Montrons d'abord l'existence d'une mesure de probabilité μ' vérifiant $q * \mu' = \mu'$.

Considérons la suite de variables aléatoires :

$$Z_n(\omega) = \sum_{k=0}^n a_1 \dots a_k b_{k+1}$$

où les (a_k, b_k) sont indépendantes et distribuées suivant la loi q .

On a : $\overline{\lim}_k (a_1 \dots a_k b_{k+1})^{1/k} < 1$ (p. p.) car $\frac{1}{k} \text{Log}(a_1 \dots a_k b_{k+1})$ converge

d'après le théorème ergodique et l'hypothèse $\int \text{Log}^+ b d\beta(b) < +\infty$ vers

un nombre au plus égal à $\int \text{Log } a d(h\alpha)(a) < 0$.

La variable $Z(\omega) = \lim_n Z_n(\omega)$ vérifie $Z(\omega) = a_1(\omega) Z(\theta\omega) + b_1(\omega)$ où θ est la translation naturelle sur l'espace produit. Sa loi μ' satisfait donc : $q * \mu' = \mu'$.

D'autre part la position à l'instant n de la trajectoire de la chaîne de Markov sur \mathbb{R}^+ de noyau de transition $Q(x, \cdot) = q * \delta_x$ est donnée par :

$$S_n \cdot x = a_n \dots a_1 x + a_n \dots a_2 b_1 + \dots + b_n$$

et

$$S_n \cdot x - a_n \dots a_1 x$$

a même loi que $Z_{n-1}(\omega)$.

On a donc la convergence uniforme sur les compacts de :

$$q^n * \delta_x(\varphi) = \int \varphi(S_n \cdot x) dP(\omega) = \int \varphi(Z_{n-1} + a_n \dots a_1 x) dP(\omega)$$

vers $\int \varphi(y) d\mu'(y)$ dès que φ est continue à support compact. Ceci prouve en particulier l'unicité de la probabilité Q -invariante.

De plus, sur un intervalle compact $I \subset]0, \infty[$, on peut réaliser, pour n assez grand :

$$q^n * \delta_x(\varphi) \geq 1/2 \mu'(\varphi) \quad (x \in I)$$

et l'égalité $\mu(\varphi) = \int q^n * \delta_x(\varphi) d\mu(x)$ donne alors

$$\mu(\varphi) \geq 1/2 \mu'(\varphi) \mu(I)$$

dès que φ est une fonction positive à support compact fixée. Ceci borne $\mu(I)$ indépendamment de I et montre que μ est une mesure bornée, avec à un coefficient près $\mu = \mu'$.

En particulier $h\nu$ est bornée, ce qui signifie que ν a un moment d'ordre 1.

DÉFINITION. — Pour un nombre $\lambda (0 < \lambda < 1)$ et deux probabilités ε, η sur \mathbb{R}^+ , on notera $d_\lambda(\varepsilon, \eta)$ la borne inférieure des intégrales $\int |x-y|^\lambda d\rho(x, y)$ où ρ est une probabilité sur \mathbb{R}^2 de projections ε, η . On notera $d_1 = d$.

Si ε et η ont des moments d'ordre λ , d_λ définit une distance qui a été étudiée par de nombreux auteurs [7]. Clairement $d_\lambda(\varepsilon, \eta)$ est la borne

inférieure des nombres $E|X - Y|^\lambda$ où X et Y sont variables aléatoires de lois ε et η .

Enfin la borne inférieure qui définit d_λ est atteinte [7] et de plus, si F et G désignent les fonctions de répartition de ε et η on a :

$$d(\varepsilon, \eta) = \int_0^\infty |F(x) - G(x)| dx$$

PROPOSITION 3. — Soient ε et η deux probabilités sur \mathbb{R}^+ . Alors

$$d_\lambda(T\varepsilon, T\eta) \leq c E(A^\lambda) d_\lambda(\varepsilon, \eta).$$

Si de plus

$$\int x d\varepsilon(x) = \int x d\eta(x) = 1 \quad \text{et} \quad d(T\varepsilon, T\eta) = d(\varepsilon, \eta)$$

on a a : $\varepsilon = \eta$.

Preuve. — On va utiliser l'interprétation probabiliste de la transformation T en notant X, X_1 (resp. Y, Y_1) des variables aléatoires de lois $\varepsilon, T\varepsilon$ (resp. $\eta, T\eta$).

Notant X'_i, Y'_i des copies indépendantes de X et Y ($1 \leq i \leq c$) on a :

$$X_1 = \sum_{i=1}^c A_i X'_i, \quad Y_1 = \sum_{i=1}^c A_i Y'_i$$

avec des notations naturelles.

Alors :

$$\begin{aligned} |X_1 - Y_1|^\lambda &\leq \sum_{i=1}^c |A_i|^\lambda |X'_i|^\lambda \\ E(|X_1 - Y_1|^\lambda) &\leq c E(A^\lambda) E(|X - Y|^\lambda) \end{aligned}$$

et

$$d_\lambda(T\varepsilon, T\eta) \leq c E(A^\lambda) d_\lambda(\varepsilon, \eta).$$

En particulier, puisque $c E(A) = 1$:

$$d(T\varepsilon, T\eta) = d(\varepsilon, \eta).$$

Inversement soient X et Y des variables aléatoires de lois ε et η vérifiant $d(T\varepsilon, T\eta) \leq d(\varepsilon, \eta)$, $E(X) = E(Y) = 1$, avec, ce qui est possible $E|X - Y| = d(\varepsilon, \eta)$. On choisit (X'_i, Y'_i) ($1 \leq i \leq c$) indépendantes et de même loi que (X, Y) .

Si avec probabilité positive, les variables aléatoires $A_i(X'_i - Y'_i)$ ne sont pas de même signe, on aura, avec la même probabilité :

$$|X_i - Y_i| < \sum_{i=1}^c A_i |X'_i - Y'_i|$$

et

$$d(T\varepsilon, T\eta) \leq \mathbb{E}(|X_1 - Y_1|) < \mathbb{E}(|X' - Y'|) = d(\varepsilon, \eta).$$

Il est donc nécessaire que :

$$\text{p. p.} \quad \prod_{i=1}^c A_i (X'_i - Y'_i) \geq 0$$

ou

$$\text{p. p.} \quad \prod_{i=1}^c A_i (X'_i - Y'_i) \leq 0$$

Comme cette variable est d'espérance 0, on a :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^c A_i (X'_i - Y'_i) &= 0 \\ \prod_{i=1}^c A_i |X'_i - Y'_i| &\geq 0 \\ [\mathbb{E}(A)] \mathbb{E}(|X - Y|)^c &= 0 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$X = Y, \quad \varepsilon = \eta.$$

THÉORÈME 3. — *Dans le cas spécial, l'équation (E) possède à homothétie près, une unique solution parmi les probabilités sur \mathbb{R}^+ qui intègrent la fonction $\text{Log}^+ x$.*

Preuve. — Soit v la solution construite dans l'introduction et v' une deuxième solution. On peut supposer, d'après la proposition 2 :

$$\int x dv(x) = \int x dv'(x) = 1.$$

On a ici $d(Tv, Tv') = d(v, v')$ car $Tv = v$; $Tv' = v$ et la proposition 3 donne $v = v'$.

IV. THÉORÈMES DE CONVERGENCE

[cas spécial]

1. Cas des probabilités ayant un moment d'ordre 1

THÉORÈME. — Soit ν' une probabilité ayant un moment d'ordre 1 et ν la solution spéciale de (E) ayant même moment que ν' . Alors on a :

$$\lim_n d(T^n \nu', \nu) = 0.$$

En particulier $T^n \nu'$ converge vaguement vers ν .

La preuve va découler de 3 lemmes.

LEMME 1. — Soient x_i des réels positifs ($1 \leq i \leq c$) et $\lambda \in [1, 2]$.

Alors :

$$\left(\sum_{i=1}^c x_i \right)^\lambda \leq \sum_{i=1}^c x_i^\lambda + \lambda \sum_{i < j} x_i x_j^{\lambda-1}$$

Preuve. — Le cas $c=2$ se ramène par homogénéité à $(1+u)^\lambda \leq 1+u^\lambda + \lambda u^{\lambda-1}$ et c'est alors une étude élémentaire. Le cas général se traite par récurrence sur c .

LEMME 2. — Soit μ_n une suite de probabilités telle qu'il existe $\lambda > 1$ et $K > 0$ avec $\int x^\lambda d\mu_n(x) \leq K$ et supposons que μ_n converge étroitement vers μ .

Soit μ' une loi de probabilité ayant un moment d'ordre λ .

Alors :

$$\lim_n d(\mu_n, \mu') = d(\mu, \mu').$$

Preuve. — On utilisera les fonctions de répartition $F'_n(x) = \mu_n[x, \infty]$, $F''(x) = \mu'[x, \infty]$.

La condition $\int x^\lambda dF'_n(x) \leq K$ implique : $F'_n(x) \leq \text{Inf}(1, K/x^\lambda)$. Ici $F'_n(x)$ converge vers la fonction de répartition F' de μ et $|F'_n - F''|$ est majorée par une fonction intégrable de x . On a donc par convergence dominée :

$$\lim_n \int |F'_n(x) - F''(x)| dx = \int |F'(x) - F''(x)| dx$$

ce qui donne

$$\lim_n d(\mu_n, \mu') = d(\mu, \mu').$$

LEMME 3. — Soit λ un nombre compris entre 1 et $\text{Inf}(2, \chi)$, μ une probabilité ayant un moment d'ordre λ . Alors les moments d'ordre λ de la suite $T^n \mu$ sont bornés par une constante.

Preuve. — Notons $X'_i [1 \leq i \leq c]$, X_1 des variables aléatoires de lois μ , et $T \mu$ respectivement, les premières variables étant indépendantes.

On a alors les notations du début

$$X_1 = \sum_{i=1}^c A_i X'_i$$

$$X_1^\lambda \leq \sum_{i=1}^c (A_i X'_i)^\lambda + \lambda \sum_{i < j} A_i X'_i (A_j X'_j)^{\lambda-1}$$

Ici $\lambda - 1 < 1$ et $\mathbb{E}(X'^{\lambda-1}) \leq \mathbb{E}(X')^{\lambda-1} < +\infty$.

On a donc, avec une certaine constante k : $\mathbb{E}(X^\lambda) \leq c \mathbb{E}(A^\lambda) \mathbb{E}(X^\lambda) + k$.

Si X_n est une variable aléatoire de loi $T^n \mu$ on a donc :

$$\mathbb{E}(X_n^\lambda) \leq \frac{k}{1-\rho} + \rho^n \mathbb{E}(X^\lambda) \leq K$$

où

$$\rho = c \mathbb{E}(A^\lambda) < 1$$

Preuve du théorème. — (a) On suppose d'abord que ν' a un moment d'ordre $\lambda > 1$.

On a $d(T^n \nu', \nu) \leq d(T^{n-1} \nu', \nu)$ puisque $T^n \nu' = T(T^{n-1} \nu')$. Posons alors

$$\gamma = \lim_n d(T^n \nu', \nu) = \inf_n d(T^n \nu', \nu)$$

La suite $T^n \nu$ a des moments d'ordre λ bornés [$1 < \lambda < \text{Inf}(2, \chi)$] d'après le lemme 3.

Pour toute sous-suite $T^{n_k} \nu'$ convergeant étroitement vers μ' on aura donc :

$$\gamma = \lim_n (T^{n_k} \nu', \nu) = d(\mu', \nu)$$

en vertu du lemme 2.

On a de même $\gamma = d(T \mu', \nu)$.

Donc $d(T \mu', T \nu) = d(\mu', \nu) = \gamma$.

Comme $\int x d\mu'(x) = \int x d\nu(x)$ on en conclut d'après la proposition 2 du paragraphe précédent : $\mu' = \nu$.

La suite $T^n \nu'$ converge donc vers ν .

(b) Si ν' a un moment d'ordre 1, elle est approchée, au sens de d , par des mesures ν'' à support compact avec $\int x d\nu''(x) = 1$

On a alors :

$$\begin{aligned} d(T^n \nu', \nu) &\leq d(T^n \nu', T^n \nu'') + d(T^n \nu'', \nu) \\ d(T^n \nu', \nu) &\leq d(\nu', \nu'') + d(T^n \nu'', \nu) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

2. Cas des probabilités sans moment d'ordre 1

On se placera dans une sous-classe notée P_1 . Une probabilité μ appartiendra à P_λ ($\lambda > 0$) s'il existe $C > 0$, $\theta < \lambda$, $a > 0$ avec $\mu[t, \infty] \geq \frac{C}{t^\theta}$ pour $t \geq a$.

Un exemple, qui servira de comparaison est donné par les lois stables σ_θ de transformée de Laplace $e^{-\lambda^\theta}$; alors $\sigma_\theta[t, \infty] \sim \frac{C}{t^\theta}$ avec $C^{-1} = \Gamma(1 - \theta)$ [1], p. 448.

On aura besoin de comparer des probabilités :

DÉFINITION. — On dira qu'une probabilité ε est stochastiquement inférieure à une autre η si l'on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon(t, \infty] \leq \eta(t, \infty].$$

On écrira alors $\varepsilon \ll \eta$.

Cette condition équivaut à l'existence de variables aléatoires X et Y de lois ε et η vérifiant $X \leq Y$.

Elle équivaut aussi à :

$$\int f(x) d\varepsilon(x) \leq \int f(x) d\eta(x)$$

pour toute fonction croissante f .

THÉORÈME 5. — Soit ν' une probabilité appartenant à P_1 . Alors $T^n \nu'$ converge vers δ_∞ étroitement.

La preuve découlera de 3 lemmes.

LEMME 4. — $T^n(\sigma_\theta)$ tend vers δ_∞ .

Preuve. — On utilise les notations du début et en particulier la formule :

$$T^n J_\theta = J_\theta M_\theta^{-1} T_\theta^n M_\theta.$$

Le calcul de $T^n(\sigma_\theta)$ se ramène donc à celui de $T_\theta^n(\delta_1)$.

Or si l'on pose $k = c \mathbb{E}(A^\theta) > 1$, on a, en considérant l'homothétie de rapport $k : (T_\theta)^n = k^n (S_\theta)^n$ où S_θ est définie à l'aide de la variable $B = \frac{A^\theta}{k}$.

On a bien :

$$c \mathbb{E}(B) = \frac{c \mathbb{E}(A^\theta)}{k} = 1,$$

$$\mathbb{E}[B \text{ Log } B] < 0 \quad \text{car } \mathbb{E}(A^\theta \text{ Log } A) < 0 \text{ et } k > 1.$$

On peut donc appliquer le théorème 3 à S_θ :

$(S_\theta)^n(\delta_1)$ converge vers une loi spéciale associée à B et puisque $k > 1$ $(T_\theta)^n(\delta_1)$ tend vers δ_∞ .

LEMME 5. — *La transformation T préserve les inégalités stochastiques.*

Preuve. — Soient donc ε et η avec $\varepsilon \ll \eta$ et f fonction croissante. Lorsque a, b, y sont fixés $f(ax + by)$ est encore fonction croissante de x :

$$\int f(ax + by) d\varepsilon(x) \leq \int f(ax + by) d\eta(x)$$

Par un argument analogue et une intégration en a et b :

$$T\varepsilon(f) \leq T\eta(f), \quad T\varepsilon \ll T\eta$$

LEMME 6. — *Soient X_n, Y_n deux suites de variables aléatoires. On suppose que $\mathbb{E}|X_n - Y_n|$ est bornée et que X_n converge vers $+\infty$ en loi. Alors Y_n converge vers $+\infty$ en loi.*

Preuve. — On note que :

$$t \mathbb{P}\{|X_n - Y_n| > t\} \leq \mathbb{E}|X_n - Y_n| \leq k$$

et que

$$\mathbb{P}\{Y_n \leq t\} \leq \mathbb{P}\{X_n \leq 2t\} + \mathbb{P}\{|X_n - Y_n| \geq t\}.$$

Donc pour $a \leq t$:

$$\mathbb{P}\{Y_n \leq a\} \leq \mathbb{P}\{Y_n \leq t\} \leq \frac{K}{t} + \mathbb{P}\{X_n \leq 2t\}.$$

D'où le résultat voulu par le choix successif de t et n .

Preuve du théorème. — On suppose donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Inf } t^\theta v'(t, \infty) > 0$ pour un certain θ . Une homothétie sur v' permet de supposer :

$$v'[t, \infty] \geq \sigma_\theta [t, \infty] \quad \text{pour } t \geq b$$

Soient Z et X' des variables aléatoires de lois σ_θ et v' respectivement.

Définissons la variable X comme étant égale à X' si $X' \geq b$ et égale à b si $X' < b$.

Alors la loi de X est stochastiquement supérieure à celle de Z car :

(a) Si $t > b$, $X' \geq t$ implique $X = X'$ donc $X \geq t$ et

$$P\{X \geq t\} \geq P\{X' \geq t\} \geq P\{Z \geq t\}.$$

(b) Si $t \leq b$: $P\{X \geq t\} = 1 \geq P\{Z \geq t\}$.

D'autre part $X - X'$ vaut 0 sauf si $X' < b$ auquel cas $X - X'$ est entre 0 et b : en particulier $E(|X - X'|) < b$.

Si η désigne la loi de X , on a alors :

$$\begin{aligned} d(T^n \eta, T^n v') &\leq d(\eta, v') \leq b \\ \sigma_\theta &\ll \eta, \quad T^n \sigma_\theta \ll T^n \eta. \end{aligned}$$

On en déduit que $T^n \eta$ converge vers δ_∞ comme $T^n \sigma_\theta$ et il en est de même de $T^n v'$ d'après le lemme 6.

Revenons à la situation générale.

Deux cas se présentent suivant l'existence ou la non-existence de $\chi < 1$ avec $c E(A^\chi) = 1$, $E(A^\chi \text{Log } A) < 0$.

Dans le premier cas, on va étudier l'unicité de la solution canonique de (E) et les problèmes de convergence correspondants.

Dans le second cas, hompris le cas spécial, on va montrer la non-existence de solutions de (E) autre que δ_0 et δ_∞ et étudier les problèmes de convergence correspondants; on a donc ici :

$$c E(A^\lambda) \geq 1 \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

V. THÉORÈMES LIMITES

[situation générale, premier cas]

Dans tout ce V on suppose donc qu'il existe $\chi < 1$ avec $c E(A^\chi) = 1$ et $E(A^\chi \text{Log } A) < 0$.

PROPOSITION 4. — Soit ν' une probabilité ayant un moment d'ordre supérieur à χ . Alors $T^n \nu'$ converge vers δ_0 .

Preuve. — Soit λ un nombre compris entre χ et 1 et vérifiant $c \mathbb{E}(A^\lambda) < 1$.

Si l'on écrit l'équation $T^{n+1} \nu' = T[T^n \nu']$ avec les notations probabilistes du début, on a, car $\lambda < 1$:

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^\lambda) \leq c \mathbb{E}(A^\lambda) \mathbb{E}(X_n^\lambda)$$

et donc

$$\lim_n \mathbb{E}(X_n^\lambda) = 0,$$

ce qui donne bien

$$\lim_n T^n \nu' = \delta_0.$$

PROPOSITION 5. — La seule solution de (E) possédant un moment d'ordre χ est δ_0 .

Preuve. — Notons que si ε et η sont deux probabilités portées par \mathbb{R}^+ et si $h(x) = x$, on a :

$$\text{si } 0 < \lambda < 1 : h^\lambda(\varepsilon * \eta) \leq (h^\lambda \varepsilon) * \eta + \varepsilon * h^\lambda \eta$$

l'égalité ne pouvant alors savoir lieu que si :

$$\varepsilon \text{ ou } \eta \text{ est égale à } \delta_0.$$

L'équation $T\nu = \nu$ donne donc ici :

$$h^\chi \nu \leq [(ch^\chi \alpha) \circ h^\chi \nu] * (\alpha \circ \nu)^{*(c-1)}$$

considérons alors la probabilité q sur le groupe affine de \mathbb{R} de composantes $ch^\chi \alpha$ et $(\alpha \circ \nu)^{c-1}$; l'inéquation s'écrit :

$$q * h^\chi \nu \geq h^\chi \nu.$$

Si ν admet un moment d'ordre χ , $h^\chi \nu$ est de masse finie et la conservation des masses implique l'égalité dans l'inéquation précédente.

Ceci s'écrit encore, avec $\varepsilon = \alpha \circ \nu$:

$$h^\chi(\varepsilon^{*c}) = ch^\chi \varepsilon * \varepsilon^{*c-1}$$

on a donc :

$$\alpha \circ \nu = \delta_0 \quad \text{et} \quad \nu = \delta_0.$$

THÉORÈME 6. — Si ν' est une probabilité de P_χ , où P_χ a été défini en IV.2, alors $T^n \nu'$ converge vers δ_∞ .

Preuve. — Les considérations du paragraphe précédent aboutissant au théorème 5 sont ici valables, la différence étant que θ désigne un nombre inférieur à χ et que l'on utilise d_θ au lieu de d dans la preuve du théorème.

THÉORÈME 7. — Soit v' une probabilité telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\chi v'[t, \infty] = C > 0$.

Alors $T^n v'$ converge vers une solution canonique de (E).

Preuve. — On reprend les arguments utilisés pour démontrer le théorème 5 et la proposition 3.

Soit v' une solution canonique correspondant à la même constante C que v . Prenant $t \geq 1$, on a :

$$t \cdot v[x, \infty] \geq v[x, \infty] \quad \text{pour } x \geq b.$$

On peut donc trouver $v'' \gg v$ avec $d_\lambda(v'', t \cdot v') < \infty$ avec $\chi < \lambda$ et $c E(A^\lambda) < 1$.

On a donc :

$$\lim_n d_\lambda [T^n v'', T^n \cdot v'] = 0$$

et

$$T^n v'' \gg T^n v = v.$$

Une valeur d'adhérence de $T^n v''$ ou $T^n [t \cdot v']$ sera donc stochastiquement supérieure à v et il en sera de même pour $T^n v'$, en faisant tendre t vers 1.

Prenant $t < 1$, on obtient l'inégalité contraire et toute valeur d'adhérence de $T^n v'$ coïncide donc avec v .

COROLLAIRE. — Toute solution v' de (E) telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\chi v'(t, \infty) = C > 0$ est une solution canonique.

Il n'y a pas de solution de (E) ayant un moment d'ordre χ , ni de solution dans P_χ .

VI. THÉORÈMES LIMITES

[cas $c E(A^\lambda) > 1$ ($0 \leq \lambda \leq 1$)]

On a donc ici $c E(A) > 1$.

THÉORÈME 8. — Si v' est une loi de probabilité différente de δ_0 , $T^n v'$ converge vers δ_∞ .

L'équation (E) n'a donc pas de solutions autres que δ_0, δ_∞ .

Preuve. — On distingue plusieurs cas :

(a) $\mathbb{E}(A \text{ Log } A) < 0$ et ν' à support compact.

On remplace A par $B = A/k$ avec $k = c \mathbb{E}(A) > 1$ et alors :

$$\mathbb{E}(B \text{ Log } B) = \frac{1}{k} [\mathbb{E}(A \text{ Log } A) - \mathbb{E}(A) \text{ Log } k] < 0.$$

Si alors S est la nouvelle transformation correspondant à B et ν une mesure invariante $[S\nu = \nu]$ de même espérance que ν' , on a d'après le théorème 4 :

$$\lim_n S^n \nu' = \nu = \lim_n \frac{1}{k^n} \cdot T^n \nu'.$$

Comme $k > 1$, on en conclut $\lim_n T^n \nu' = \delta_\infty$.

(b) $\mathbb{E}(A \text{ Log } A) < 0$ et ν' est stochastiquement supérieure à une mesure à support compact; par conservation des inégalités stochastiques on a :

$$\lim_n T^n \nu' = \delta_\infty$$

(c) $\mathbb{E}(A \text{ Log } A) \geq 0$ mais $c \mathbb{E}(A) > 1$.

Il est clair que l'on peut trouver une variable aléatoire $B \leq A$ avec $\mathbb{E}(B^\lambda) \leq \mathbb{E}(A^\lambda)$, $c \mathbb{E}(B^\lambda) > 1$ si $0 \leq \lambda \leq 1$ et $\mathbb{E}(B \text{ Log } B) < 0$.

Si l'on note S' la transformation correspondante, on aura clairement :

$$S'^n \nu' \ll T^n \nu'.$$

Comme d'après (b) :

$$\lim_n S'^n \nu' = \delta_\infty,$$

On a aussi :

$$\lim_n T^n \nu' = \delta_\infty.$$

VII. CAS $\mathbb{E}(A^\chi \text{ Log } A) = 0$, $c \mathbb{E}(A^\chi) = 1$ ($0 < \chi \leq 1$)

On dira qu'une probabilité ν a une queue régulière d'ordre λ si :

$$\nu([t, \infty[) = C t^{-\lambda} + O(t^{-\lambda-1}).$$

1. Cas $\chi < 1$

THÉORÈME 4. — *Il n'existe pas de solution E (différente de δ_0) ayant un moment d'ordre χ ou une queue d'ordre χ régulière.*

Preuve. — L'inégalité $\left(\sum_0^c u_i\right)^\chi \leq \sum_1^c u_i^\chi$ donne ici, si X est une variable aléatoires vérifiant (E')

$$X = \sum_{i=1}^c A_i X_i'$$

$$\mathbb{E}(X^\chi) \leq c \mathbb{E}(A^\chi) \mathbb{E}(X^\chi) = \mathbb{E}(X^\chi).$$

Cette égalité ne peut avoir que si $X_i' = 0$, c'est-à-dire $X = 0$.

Utilisons la relation de conjugaison du début, avec $\theta = \chi$:

$$TJ_\theta = J_\theta M_\theta^{-1} T_\theta M_\theta$$

en l'appliquant à la mesure δ_1 .

On a aussi :

$$T^n J_\theta = J_\theta M_\theta^{-1} (T_\theta)^n M_\theta$$

$M_\chi \delta_1 = \delta_1$, $\lim_n T_\chi^n(\delta_1) = \delta_0$ d'après [2] car $c \mathbb{E}(A^\chi) = 1$, $\mathbb{E}(A^\chi \text{Log } A^\chi) = 0$. On obtient :

$$\lim_n T^n \sigma_\chi = \delta_0.$$

Si v est solution de (E) avec une queue régulière vérifiant :

$$v([t, \infty)) = \frac{C}{t^\chi} + O\left(\frac{1}{t^{\chi+1}}\right).$$

On aura :

$$d(v, \sigma_\chi) = \int_0^\infty |v[t, \infty) - \sigma_\chi[t, \infty)]| dt < +\infty$$

et donc :

$$d_\chi(v, \sigma_\chi) < +\infty$$

comme :

$$d_\chi(T_\chi^n, T_\chi^n \sigma_\chi) \leq d_\chi(v, \sigma_\chi)$$

et que $T^n \sigma_\chi$ converge vaguement vers δ_0 , on en conclut :

$$d_\chi(v, \delta_0) \leq d_\chi(v, \sigma_\chi) < +\infty.$$

Ceci signifie que ν a un moment d'ordre χ , ce qui exclu.

On peut observer que si une mesure ρ est stochastiquement inférieure à σ_χ , on a aussi :

$$\lim_n T^n \rho = \delta_0.$$

2. Cas $\chi = 1$

THÉORÈME 10. — Soit ν une mesure de probabilité ayant un moment d'ordre 1. Alors :

$$\lim_n T^n \nu = \delta_0.$$

Il n'y a pas de solution de (E) avec une queue régulière d'ordre 1.

Preuve. — (a) Supposons d'abord ν à support contenu dans $[0, b]$; alors $\nu \ll \delta_b$ et $T^n \nu \ll T^n \delta_b$, $\lim_n T^n \nu \ll \lim_n T^n \delta_b = \delta_0$.

Si ν n'est pas à support compact mais admet un moment d'ordre 1, elle peut être approchée d'aussi près que l'on veut par des mesures à support compact, au sens de d .

Si ν' est une telle approximation, on a :

$$d(T^n \nu, T^n \nu') \leq d(\nu, \nu')$$

d'où l'on déduit aisément que :

$$\lim_n T^n \nu = \delta_0.$$

(b) Soit $\theta < 1$ et écrivons la relation de conjugaison sous la forme :

$$T_{1/\theta} J_\theta = J_\theta M_\theta^{-1} T M_\theta$$

où $T_{1/\theta}$ correspond à la variable $B = A^{1/\theta}$ qui vérifie encore $c \mathbb{E}(B^\theta) = 1$, $\mathbb{E}[B^\theta \text{Log } B] = 0$.

D'après le théorème précédent, l'équation (E) correspondant à $T_{1/\theta}$ n'aura donc pas de solution avec queue régulière d'ordre θ .

$$M_\theta^{-1} \nu(t, \infty) = \frac{C}{t^\theta} + O\left(\frac{1}{t^{2/\theta}}\right).$$

Si de plus $T\nu = \nu$, on déduit :

$$T_{1/\theta} J_\theta (M_\theta^{-1} \nu) = J_\theta (M_\theta^{-1} \nu)$$

et $J_\theta(M_\theta^{-1} v)$ est donc solution de l'équation (E) correspondant à $T_{1/\theta}$. Comme σ_θ et $M_\theta^{-1} v$ ont des queues régulières d'ordre θ , il en est de même de leur convolution multiplicative $J_\theta[M_\theta^{-1} v]$.

Il y a donc contradiction au théorème précédent.

3. Théorème de convergence

THÉORÈME 11. — Soit v une probabilité de P_χ [cf. IV, 2°]. Alors $\lim_n T^n v = \delta_\infty$.

Preuve. — On procède comme au théorème 5, par comparaison avec :

$$v = \sigma_\theta \quad \text{si } \theta < 1.$$

COROLLAIRE. — L'équation (E) n'a pas de solution (non triviale) dans P_χ , ni de solution ayant un moment d'ordre χ ni de solution ayant une queue régulière d'ordre χ .

Ceci découle des 3 théorèmes précédents.

VIII. REMARQUES FINALES

On donne ici divers éléments de réponse aux questions de [5] et [6]. On a vu que la solution spéciale ($c \mathbb{E}|A| = 1$, $\mathbb{E}(A \log A) < 0$) avait bien une queue, donc était de type hyperbolique au sens de [5].

D'autre part, on a obtenu l'existence d'une solution non triviale si $c \mathbb{E}(A) = 1$, $\mathbb{E}(A \log A) > 0$.

Enfin le problème de normaliser $T^n(\delta_1)$ ne peut avoir de solution au sens strict de [5] car on a vu que la convergence de $T^n v'$ vers une solution de (E) ne pouvait avoir lieu, en dehors du cas spécial, que si v' n'est pas à support compact (par exemple a une queue). Nous proposons une autre formulation.

Dans le schéma des Y_n , introduisons un $Y_0 = U$ initial dont la loi a une queue convenable, et précisons la construction de la manière qui suit.

On note par A un alphabet à r lettres et l'on prendra ici pour simplifier $r=2$, $A = \{a, b\}$.

Soit Γ l'arbre, avec racine, homogène à r branches; Γ est donc l'ensemble des mots construits sur A .

On considère l'espace produit $\Omega = (\mathbb{R}^+)^{\Gamma}$ et l'on note $W_{\gamma}(\omega)$ les composantes de $\omega \in \Omega$ ($\gamma \in \Gamma$).

Un semi-groupe libre $(\theta^{\gamma})_{\gamma \in \Gamma}$ de translation est alors défini sur Ω par la formule

$$W_{\gamma}[\theta^{\eta}(\omega)] = W_{\eta\gamma}(\omega).$$

Chaque sommet γ de Γ définit un chemin unique joignant la racine à γ et l'on note $P_{\gamma}(\omega)$ le produit des $W_{\eta}(\omega)$ lorsque η décrit ce chemin; on a en particulier :

$$Y_n(\omega) = \sum_{|\gamma|=n} P_{\gamma}(\omega) U \circ \theta^{\gamma}(\omega)$$

où $|\gamma|$ désigne la longueur du mot γ .

On a donc la relation :

$$Y_{n+1} = W_a Y_n \circ \theta^a + W_b Y_n \circ \theta^b$$

et le cas $U = 1$ correspond à la construction de B. Mandelbrot.

Note sur épreuves. — Depuis l'achèvement de ce travail, Th. Liggett a aimablement attiré notre attention sur son travail commun avec R. Durrett, travail consacré à la même équation [Fixed points of the smoothing transformation, *Z. Wahr.*, 64, 1983, p. 275-301]. Leur étude est motivée par la nature des mesures invariantes pour certains systèmes infinis de particules et se place dans un cadre plus général. Leurs méthodes présentent des points communs avec celles utilisées ici et ils obtiennent des résultats définitifs concernant l'existence et l'unicité des solutions sans les restrictions de caractère technique ici utilisées. Cependant, en plus de l'étude à l'infini des solutions faite ici, les techniques plus élémentaires utilisées ici nous ont paru garder un intérêt.

RÉFÉRENCES

- [1] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory*, 2, Wiley, 1971.
- [2] J.-P. KAHANE et J. PEYRIÈRE, Sur certaines martingales de Benoît Mandelbrot, *Adv. Math.*, vol. 22, 1976, p. 131-145.
- [3] H. KESTEN, Random difference equations and renewal theory for products of random matrices, *Acta Math.*, vol. 131, 1973, p. 208-248.
- [4] P. LÉVY, *Calcul des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1925.
- [5] B. MANDELBROT, Multiplications aléatoires et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire, *C.R. Acad. Sci., Paris*, vol. 278, série A, 1974, p. 289-292.

- [6] B. MANDELBROT, Multiplications aléatoires et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire: quelques extensions, *C.R. Acad. Sci. Paris*, vol. **278**, série A, 1974, p. 355-358.
- [7] G. ROYER, Distance de Fortet-Mourier et fonctions Log-concaves, *Annales Scientifiques de Clermont-Ferrand*, n° 78, 1984.

(Manuscrit reçu le 9 janvier 1989)

(corrigé le 13 novembre 1989.)