

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ABDELKADER MOKKADEM

## **Propriétés de mélange des processus autorégressifs polynomiaux**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 26, n° 2 (1990), p. 219-260

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1990\\_\\_26\\_2\\_219\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1990__26_2_219_0)

© Gauthier-Villars, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# Propriétés de mélange des processus autorégressifs polynomiaux

par

**Abdelkader MOKKADEM**

U.A. C.N.R.S. 743, Statistique Appliquée, Mathématiques, Bât. n° 425,  
Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France

**RÉSUMÉ.** — On étudie le mélange et l'ergodicité d'une chaîne de Markov  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant une relation de récurrence  $Z_{n+1} = \varphi(Z_n, e_n)$ , où  $\varphi$  est une application polynômiale et  $(e_n)$  est une suite de variables aléatoires i. i. d. dans  $\mathbb{R}^m$ . On obtient des conditions suffisantes simples pour que la chaîne  $(Z_n)$  soit Harris récurrente, géométriquement ergodique et géométriquement absolument régulière. Au préalable on établit un théorème de continuité de l'image d'une mesure par une application polynômiale. Les résultats s'appliquent aux processus ARMA et aux processus bilinéaires.

*Mots clés :* Processus autorégressifs, processus stationnaires markoviens, Harris récurrence, ergodicité géométrique, régularité absolue géométrique, processus ARMA, processus bilinéaires.

**ABSTRACT.** — We study the mixing and the ergodicity of Markov chain  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfying an equation  $Z_{n+1} = \varphi(Z_n, e_n)$ , where  $\varphi$  is a polynomial application and  $(e_n)$  is a sequence of i. i. d. random variables in  $\mathbb{R}^m$ . We obtain simple sufficient conditions for the chain  $(Z_n)$  to be Harris recurrent, geometrically ergodic and geometrically absolutely regular. To obtain this result, we first prove a continuity theorem for the image of a measure by a polynomial application. The results apply to the ARMA processes and the bilinear processes.

Classification A.M.S. : 60 G 10, 60 G 99, 60 J 27, 62 M 10.

## 1. INTRODUCTION

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  un processus stationnaire en loi, à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . Notons  $\alpha_k$  la tribu engendrée par  $\{X_k, X_{k-1}, X_{k-2}, \dots\}$  et  $\alpha^k$  celle engendrée par  $\{X_k, X_{k+1}, X_{k+2}, \dots\}$ . Pour obtenir des résultats asymptotiques sur le processus  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  on est souvent amenés à supposer que les tribus  $\alpha_0$  et  $\alpha^k$  sont asymptotiquement indépendantes quand  $k$  devient grand.

Les hypothèses de mélange sont un des moyens de modéliser cette indépendance asymptotique. De nombreuses notions de mélange ont été introduites. Citons, sans être exhaustif, les mélanges définis à partir des coefficients suivants.

Le coefficient de mélange fort (M. Rosenblatt [31]):

$$\alpha_k = \sup \{ |P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B)|, A \in \alpha_0, B \in \alpha^k \}.$$

Le coefficient de mélange uniforme (I. A. Ibragimov et Y. V. Linnik [13]):

$$\varphi_k = \sup \{ |P(B|A) - P(B)|, A \in \alpha_0, B \in \alpha^k \}.$$

Le coefficient de régularité absolue (appelé par Y. A. Davydov [5] coefficient de régularité complète):

$$\beta_k = E \sup \{ |P(B|\alpha_0) - P(B)|, B \in \alpha^k \}.$$

Le coefficient de  $\rho$ -mélange [13]:

$$\rho_k = \sup |E(\eta \cdot v)|,$$

le sup étant pris sur les variables aléatoires  $\eta$  et  $v$  vérifiant:  $\eta$  est  $\alpha_0$ -mesurable,  $v$  est  $\alpha^k$ -mesurable,  $E \eta = E v = 0$  et  $E \eta^2 = E v^2 = 1$ .

Le coefficient de  $\psi$ -mélange (J. R. Blum, D. L. Hanson et L. H. Koopmans [3])

$$\psi_k = \sup \left\{ \left| \frac{P(A \cap B)}{P(A) \cdot P(B)} - 1 \right|, A \in \alpha_0, B \in \alpha^k \right\}.$$

Le processus  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  sera dit fortement mélangeant (resp. uniformément mélangeant, absolument régulier,  $\psi$ -mélangeant,  $\rho$ -mélangeant) si la suite  $\alpha_k$  (resp.  $\varphi_k, \beta_k, \psi_k, \rho_k$ ) converge vers zéro.

Notons qu'à partir des définitions, on peut obtenir les inégalités:

$$\alpha_k \leq \beta_k \leq \varphi_k \leq \psi_k; \quad \rho_k \leq 2 \varphi_k^{1/2};$$

de sorte que, par exemple, le mélange uniforme ou la régularité absolue implique le mélange fort.

Sous des hypothèses sur la vitesse de convergence des coefficients de mélange, de nombreux résultats asymptotiques sur le processus  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

ont été obtenus. On peut consulter, à titre d'exemples [10], [13], [33], [34] et [40].

Cependant, il n'est pas toujours simple de donner des conditions suffisantes pour qu'un processus soit mélangeant, ni d'avoir la vitesse de convergence du coefficient de mélange. Une première approche de ce problème concerne les processus linéaires. I. A. Ibragimov et Y. Rozanov [14] font une étude systématique du mélange des processus linéaires gaussiens. Pour le cas linéaire non gaussien et unidimensionnel, V. V. Gorodetski [9] et C. S. Withers [39] établissent des conditions suffisantes de mélange fort, T. D. Pham et L. T. Tran [26] montrent que ces conditions impliquent en fait la régularité absolue de  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et cela sans que  $X_n$  soit unidimensionnel.

La deuxième approche est une approche markovienne. On suppose que  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un processus stationnaire markovien. Un tel processus est construit à partir d'une chaîne de Markov homogène  $(X'_n)_{n \geq 0}$  qui possède une loi de probabilité invariante  $\pi$ . La loi de  $X_n$  est alors  $\pi$  et la loi de  $(X_{n_1}, \dots, X_{n_k})$  est donnée par la propriété de Markov (*voir* M. Rosenblatt [30]). La chaîne  $(X'_n)_{n \geq 0}$  est dite fortement mélangeante (resp. uniformément mélangeante, absolument régulière,  $\psi$ -mélangeante,  $\rho$ -mélangeante) si le processus  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est fortement mélangeant (resp. uniformément mélangeant, absolument régulier,  $\psi$ -mélangeant,  $\rho$ -mélangeant). Des conditions sur la chaîne  $(X'_n)_{n \geq 0}$  donnent alors des propriétés de mélange de  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Le premier résultat de ce type est le suivant (J. L. Doob [8]): si une chaîne de Markov est Doeblin-récurrente alors elle est uniformément mélangeante et son coefficient de mélange uniforme converge vers zéro géométriquement. Dans [5], Y. A. Davydov fait le lien entre la récurrence au sens de Harris et la régularité absolue. Le mélange fort et d'autres types de mélange sont étudiés par M. Rosenblatt [30].

Dans le présent article, nous abordons le problème de la manière suivante.

On suppose que le processus stationnaire en loi  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  admet une représentation markovienne polynômiale. Nous entendons par là que :

(i) il existe une suite de variables aléatoires i. i. d.  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  à valeurs dans une variété algébrique  $V$  (*voir* A 5) et un processus stationnaire en loi  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  à valeurs dans une variété algébrique  $W$  tels que  $e_n$  et  $\{Z_{n-1}, Z_{n-2}, \dots\}$  soient indépendants;

(ii) il existe un entier  $k$ , une application polynômiale (A 18)  $\varphi$  de  $W \times W$  dans  $W$  et une application mesurable  $\psi$  de  $W^{2k+1}$  dans  $\mathbb{R}^d$  tels que :

$$(1.1) \quad Z_n = \varphi(Z_{n-1}, e_n)$$

$$(1.2) \quad X_n = \psi(Z_{n-k}, Z_{n-k+1}, \dots, Z_{n+k})$$

Il est clair que  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un processus stationnaire markovien et sa probabilité de transition  $P(z, \cdot)$  est la loi de probabilité de  $\varphi(z, e_n)$ . Comme exemples de processus admettant une représentation markovienne, citons les processus ARMA (H. Akaike [1]) et les processus bilinéaires (T. D. Pham [27]). Observons que si le coefficient de mélange de  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  converge vers zéro, le coefficient de mélange correspondant pour  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  converge aussi vers zéro et cela avec la même vitesse; de sorte que l'étude du mélange de  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  se ramène à celle du mélange de  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Ce travail est donc consacré à l'étude des processus stationnaires en loi et satisfaisant une équation du type (1.1).

Nous montrons dans la section 4 que, sous des conditions simples sur la loi de probabilité de  $e_n$  et sur l'application  $\varphi$ , le processus  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est absolument régulier avec un coefficient de régularité absolue qui tend vers zéro géométriquement.

Ce type de résultat correspond bien sûr, à des résultats pour la chaîne de Markov définie par l'équation (1.1) où  $(e_n)$  est une suite i. i. d.; sous les conditions énoncées dans la section 4, nous montrons que cette chaîne de Markov est Harris récurrente positive et géométriquement ergodique et que sa probabilité invariante est équivalente à une mesure de Lebesgue sur l'espace des états accessibles à partir d'un point d'attraction T.

Comme application immédiate, on obtient par exemple, pour les processus bilinéaires dans  $\mathbb{R}$ , le résultat suivant. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  un processus bilinéaire d'ordre  $p, q, P, Q$  [27] d'équation.

$$(1.3) \quad X_n = \sum_{j=1}^p a_j X_{n-j} + e_n + \sum_{j=1}^q b_j e_{n-j} + \sum_{k=1}^Q \sum_{j=0}^P b_{kj} X_{n-j-k} e_{n-k}.$$

Soit :

$$(1.4) \quad Z_n = AZ_{n-1} + BZ_{n-1} e_n + C e_n + D e_n^2 + F$$

sa représentation markovienne [27]. Supposons que :

- (a)  $e_n$  admet une densité de probabilité dans  $\mathbb{R}$ .
- (b)  $\exists s > 0$  tel que :  $E|e_n|^{2s} < \infty$  et  $E\|A + B e_n\|^s < 1$ .

Alors le processus bilinéaire  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  d'équation (1.3) est absolument régulier et son coefficient de régularité absolue tend vers zéro géométriquement.

Notre plan de travail est le suivant.

Dans la section 2, nous établissons un critère de mélange géométrique pour une chaîne de Markov dont l'espace des états est un sous-espace

d'un espace topologique séparable et dénombrable à l'infini. Ce critère portera en particulier sur les probabilités de transition  $P^k(z, \cdot)$ ; mais ces probabilités pour le processus  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  défini par l'équation (1.1), apparaissent comme des probabilités images de la loi de  $(e_1, \dots, e_k)$  par des applications polynômiales.

Cela nous conduit à étudier dans la section 3, l'image d'une mesure par une application polynômiale. Nous montrons en particulier le résultat suivant.

Soit  $\psi(z, x)$  une application de classe  $C^1$  de  $M \times V$  dans  $W$  où  $M$  et  $W$  sont des variétés algébriques (A 5) contenues respectivement dans  $\mathbb{R}^{n_1}$  et  $\mathbb{R}^{n_2}$ ,  $V$  est une variété algébrique lisse (A 13) contenue dans  $\mathbb{R}^{n_3}$ ; on suppose que  $\psi$  est polynômiale en  $x$ .

Soit  $\theta$  une mesure positive régulière sur  $V$  absolument continue par rapport à une mesure lebesguienne sur  $V$  (voir J. Dieudonné [7]) et  $\theta_z$  son image dans  $W$  par l'application  $\psi(z, \cdot)$ .

Alors, si  $z_0$  est tel que l'image de  $V$  par  $\psi(z_0, \cdot)$  contienne un ouvert non vide dans la partie régulière de  $W$ , on a :

$$(1.5) \quad \liminf_{z \rightarrow z_0} \theta_z(A) \geq \theta_{z_0}(A) \quad \text{pour tout borélien } A \text{ de } W;$$

de plus, si  $\theta$  est une mesure finie, alors :

$$(1.5') \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \theta_z(A) = \theta_{z_0}(A) \quad \text{pour tout borélien } A \text{ de } W.$$

Ce résultat est une extension du théorème de continuité de la translation où  $\psi$  est de la forme  $\psi(z, x) = z + x$ .

Les outils utilisés dans la démonstration sont le théorème de Sard (J. Dieudonné [7]), le théorème de la fibre localement triviale (A 26) et le théorème de résolution des singularités (A 27).

Indépendamment du présent article, ce résultat de continuité de  $\theta_z$  possède un intérêt en soi.

Dans la section 4, nous déterminerons, sous certaines conditions, l'espace des états du processus  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  défini par l'équation (1.1); cela nous permet alors d'établir des conditions suffisantes simples pour que ce processus soit géométriquement absolument régulier. En plus des résultats de la section 3, l'outil utilisé dans la section 4 est le théorème ergodique. Pour illustrer ces résultats, nous traitons à la fin de la section 4, l'exemple du modèle affine en l'état.

La section 5 est consacrée à deux exemples courants de processus (ARMA vectoriel et bilinéaire) et à des exemples d'espaces d'état. La condition que nous obtenons pour les processus ARMA est nettement

moins restrictive que celle que nous avons obtenue dans [18] et [19]: la loi de probabilité du bruit  $e_n$  qui intervient dans l'équation (1.1) ne sera pas nécessairement absolument continue dans  $\mathbb{R}^m$  puisque notre hypothèse sera que  $e_n$  est à valeurs dans une variété algébrique qui peut être distincte de  $\mathbb{R}^m$  et donc de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^m$ .

Enfin pour la commodité du lecteur, nous avons regroupé dans un appendice, les notions et résultats de géométrie algébrique réelle que nous utilisons; les références notées (A *i*) renvoient donc à cet appendice.

## 2. UN CRITÈRE DE MÉLANGE GÉOMÉTRIQUE

Pour les différentes notions sur les chaînes de Markov que nous utilisons dans cette partie, on pourra se reporter à [24], [25], [29] et [35].

Soit  $(Z_n)_{n \geq 0}$ , une chaîne de Markov à valeurs dans un sous-espace  $S$  d'un espace topologique  $M$  séparable et dénombrable à l'infini.  $M$  est muni d'une mesure positive  $\mu$ ,  $\sigma$ -finie, non triviale, finie sur tout compact et telle que :

$$(2.1) \quad \mu(S) > 0.$$

Notons  $\mu_S$  la restriction de  $\mu$  à  $S$ .

Le théorème qui suit donne un critère d'ergodicité géométrique (voir E. Nummelin et P. Tuominen [24] pour la définition) et de régularité absolue géométrique de la chaîne de Markov  $(Z_n)_{n \geq 0}$ .

Quand  $(Z_n)_{n \geq 0}$  admet une probabilité stationnaire, on notera encore  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , le processus stationnaire markovien construit avec cette probabilité stationnaire et la probabilité de transition (voir M. Rosenblatt [30]).

**THÉORÈME 2.1.** — *Soit  $P(z, \cdot)$  la probabilité de transition de  $(Z_n)_{n \geq 0}$ . Si les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

(H1) *Pour tout compact  $K$  de  $M$  et tout borélien  $A$  dans  $S$  de  $\mu$ -mesure nulle, il existe un entier  $n_0$  tel que :*

$$P^{n_0}(z, A) = 0 \quad \text{pour tout } z \text{ dans } K \cap S.$$

(H2) *Pour tout compact  $K$  de  $M$  et tout borélien  $A$  dans  $S$  de  $\mu$ -mesure non nulle, il existe un entier  $n_1$  tel que :*

$$\inf_{z \in K \cap S} P^{n_1}(z, A) > 0.$$

(H3) Il existe une fonction  $g$  positive sur  $S$ , un compact  $K$  de  $M$  et des nombres réels  $A > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $0 < \rho < 1$  tels que :

- (i)  $\mu(K \cap S) > 0$ ;
- (ii)  $E(g(Z_{n+1}) | Z_n = z) \leq \rho g(z) - \varepsilon$  si  $z \notin K \cap S$ ;
- (iii)  $E(g(Z_{n+1}) | Z_n = z) \leq A$  si  $z \in K \cap S$ .

(H4) Il existe une fonction  $h$  positive sur  $S$ , un compact  $K'$  de  $M$  et un nombre réel  $B > 0$  tels que :

- (i)  $\mu(K' \cap S) > 0$ ;
- (ii)  $E(h(Z_{n+1}) | Z_n = z) \leq h(z) - 1$  si  $z \notin K' \cap S$ ;
- (iii)  $E(h(Z_{n+1}) | Z_n = z) \leq B$  si  $z \in K' \cap S$ ,

alors

1. la chaîne  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est Harris récurrente positive, géométriquement ergodique et sa probabilité invariante  $\pi$  est équivalente à  $\mu_S$ ;

2. le processus markovien  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est géométriquement absolument régulier et

$$E(g(Z_n)) = \int g(z) \pi(dz) < \infty.$$

*Démonstration.* — La démonstration est composée de plusieurs résultats partiels indépendants et intéressants en soi.

**(a) Sous l'hypothèse (H2),  
la chaîne  $(Z_n)_{n \geq 0}$  est  $\mu_S$ -irréductible et apériodique**

L'irréductibilité est évidente; supposons qu'il y a une période  $d > 1$ ; il existe alors des sous-ensembles non vide de  $S$ ,  $C_1, C_2, \dots, C_d$  tels que (S. Orey [25]):

$$(2.2) \quad P(z, C_{i+1}) = 1 \quad \text{si } z \in C_i \text{ et } 1 \leq i \leq d-1$$

$$(2.3) \quad P(z, C_1) = 1 \quad \text{si } z \in C_d$$

$$(2.4) \quad \mu_S(S - \cup C_i) = 0$$

Un des ensembles  $C_i$  est de  $\mu_S$ -mesure non nulle; par exemple  $C_1$ .

Prenons  $a \in C_1, b \in C_2$  et  $K = \{a, b\}$ .

D'après l'hypothèse (H2), il existe un entier  $n_1$  tel que :

$$(2.5) \quad P^{n_1}(a, C_1) > 0 \quad \text{et} \quad P^{n_1}(b, C_1) > 0.$$

Mais, puisque la chaîne est de période  $d$ , on a alors :

$$(2.6) \quad n_1 = m_1 d \quad \text{et} \quad n_1 = m'_1 d + d - 1 \quad \text{avec } d > 1;$$



ce qui est impossible car  $n_1$  ne peut pas avoir deux restes différents dans sa division euclidienne par  $d$ .

**(b) Sous (H 2) et (H 4)  
la chaîne est récurrente positive**

$(Z_n)_{n \geq 0}$  étant  $\mu_S$ -irréductible, il existe une mesure sur  $S$  excessive (subinvariant en anglais),  $\sigma$ -finie, non triviale, qu'on notera  $\pi$  et qui domine  $\mu_S$  (N. Jain et B. Jamison [15]).

Soit  $K$  un compact de  $M$ ; on a alors :

$$(2.7) \quad \mu_S(K) > 0 \Rightarrow 0 < \pi(K \cap S) < \infty.$$

En effet,  $\pi(K \cap S) > 0$  est évident puisque  $\pi$  domine  $\mu_S$ ; d'autre part  $\pi$  et  $\mu_S$  étant  $\sigma$ -finies, on peut trouver un borélien  $A$  de  $S$  tel que :

$$(2.8) \quad \mu_S(A) > 0 \quad \text{et} \quad \pi(A) < \infty.$$

On applique l'hypothèse (H 2) à  $K$  et  $A$  :

$$(2.9) \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \text{tel que } b = \inf_{K \cap S} P^{n_1}(z, A) > 0;$$

on a alors :

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \pi(A) &\geq \int \pi(dz) P^{n_1}(z, A) \\ &\geq \pi(K \cap S) \cdot b \end{aligned}$$

et donc

$$(2.11) \quad \pi(K \cap S) \leq b^{-1} \pi(A) < \infty.$$

L'implication (2.7) nous permet d'utiliser la classe  $\mathcal{K}$ , des ensembles de la forme  $K \cap S$ , avec  $K$  compact de  $M$  et  $\mu(K \cap S) > 0$ , dans le critère d'ergodicité de R. L. Tweedie [35]. L'hypothèse (H 4) implique alors, que la chaîne  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est récurrente positive.

Notons encore  $\pi$  sa probabilité invariante.

**(c) Sous (H 1), si la chaîne est  $\mu_S$ -irréductible  
et récurrente positive, alors  $\pi \sim \mu_S$**

Il suffit de montrer que  $\mu_S$  domine  $\pi$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  et  $A$  tel que  $\mu_S(A) = 0$ .

Prenons un compact  $K$  de  $M$  tel que :

$$(2.12) \quad \pi(S - K) < \varepsilon;$$

(il en existe puisque  $M$  est dénombrable à l'infini et  $\pi$  est une probabilité).

D'après l'hypothèse (H 1), il existe un entier  $n_0$ , tel que :

$$(2.13) \quad P^{n_0}(z, A) = 0 \quad \text{pour tout } z \in K \cap S;$$

mais :

$$(2.14) \quad \pi(A) = \int_{S-K} \pi(dz) P^{n_0}(z, A) + \int_{K \cap S} \pi(dz) P^{n_0}(z, A)$$

et donc :

$$(2.15) \quad \pi(A) \leq \pi(S-K) < \varepsilon$$

$\varepsilon$  étant arbitraire, on conclut que  $\pi(A) = 0$ .

**(d) Sous les hypothèses du (c)  
la chaîne est Harris récurrente positive**

En utilisant les théorèmes 2.3 et 2.5 du chapitre 3 de D. Revuz [29] et le fait que la chaîne  $(Z_n)$  est récurrente positive, on peut vérifier sans difficulté que la chaîne est Harris récurrente positive sur un ensemble absorbant dont le complémentaire  $N$  est de  $\mu_S$ -mesure nulle. On a par conséquent, pour tout borélien  $A$  tel que  $\mu_S(A) > 0$

$$(2.16) \quad F(z, A) = 1 \quad \text{pour } z \in S - N;$$

où

$$(2.17) \quad F(z, A) = P\left(z, \bigcup_{n=1}^{\infty} (Z_n \in A)\right).$$

Il nous faut montrer que  $F(z, A) = 1$  pour  $z \in N$ ; soit donc  $z \in N$ ; pour le compact  $\{z\}$ , il existe un entier  $n_0$  tel que :

$$(2.18) \quad P^{n_0}(z, N) = 0.$$

On a :

$$(2.19) \quad F(z, A) \geq P^{n_0}(z, A) + \int_{S-A} P^{n_0}(z, dy) F(y, A);$$

la mesure  $P^{n_0}(z, dy)$  est nulle sur  $N$  et pour  $y \notin N$  on a  $F(y, A) = 1$ ; par conséquent :

$$(2.20) \quad F(z, A) \geq P^{n_0}(z, A) + \int_{S-A} P^{n_0}(z, dy) = 1.$$

La chaîne est donc Harris récurrente.

**(e) Sous (H 2), si  $\pi \sim \mu_S$  alors les ensembles de la classe  $\mathcal{K}$  [voir (b)] sont des petits ensembles au sens de E. Nummelin et P. Tuominen [24]**

Il suffit d'écrire la définition; un borélien  $B$  de  $\pi$ -mesure non nulle est un petit ensemble si pour tout borélien  $A$  de  $\pi$ -mesure non nulle, il existe un entier  $j$  tel que  $\inf_{x \in B} \sum_{i=1}^j P^n(x, A) > 0$ .

**(f) Sous (H 1), (H 2) et (H 3) si la chaîne est récurrente positive alors les conclusions du théorème 2. 1 sont vérifiées**

La chaîne étant  $\mu_S$ -irréductible, apériodique et Harris-récurrente, on peut appliquer le critère d'ergodicité géométrique de E. Nummelin et P. Tuominen [24]; l'hypothèse (H 3) permet alors de conclure que la chaîne  $(Z_n)_{n \geq 0}$  est géométriquement ergodique.

On utilise maintenant les résultats de R. L. Tweedie [36] pour conclure que pour le processus  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ,

$$(2.21) \quad E(g(Z_n)) < \infty.$$

Enfin, E. Nummelin et P. Tuominen montrent également qu'il existe  $\xi < 1$  tel que :

$$(2.22) \quad \int \pi(dz) \|P^n(z, \cdot) - \pi\| = O(\xi^n)$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme en variation; mais d'après Y. A. Davydov [5], le coefficient de régularité absolue de  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est :

$$(2.23) \quad \beta(n) = \int v(dz) \|P^n(z, \cdot) - v\|$$

où  $v$  est la loi de probabilité de  $Z_n$ ; dans notre cas  $v = \pi$  et on conclut donc que  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est géométriquement absolument régulier.

Le théorème est démontré.  $\square$

Dans les hypothèses (H 1) et (H 2) du théorème 1, les probabilités  $P^n(z, \cdot)$  interviennent; on constate par itération que pour le processus  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  vérifiant (1), les lois  $P^n(z, \cdot)$  sont les images de la loi de probabilité de  $(e_1, \dots, e_n)$  par des applications polynômiales paramétrées par  $z$ . L'étude de ces lois images fait l'objet de la section qui suit.

### 3. IMAGE D'UNE MESURE PAR UNE APPLICATION POLYNÔMIALE

En général, l'image de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^p$  par une application polynômiale est un ensemble semi-algébrique  $D$  de dimension plus petite que  $p$  [théorème de Tarski-Seidenberg (A 22)]; par conséquent la mesure de  $D$  dans  $\mathbb{R}^p$  est souvent nulle et donc on ne peut pas toujours utiliser la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^p$ , comme mesure de référence.

On est ainsi amené à munir  $D$  d'une mesure lebesgienne (J. Dieudonné [7]).

La forme la plus générale du problème qui nous intéresse serait donc la suivante : étant donnée une application polynômiale  $\varphi$  d'un ensemble semi-algébrique  $D_1$  dans un autre  $D_2$ , quelles sont les propriétés de l'image par  $\varphi$  d'une mesure  $\theta$  sur  $D_1$  absolument continue par rapport à une mesure lebesgienne ?

Cependant, si  $V$  et  $W$  désignent les fermetures pour la topologie de Zariski (A 3) de  $D_1$  et  $D_2$ , on a :

$$\dim V = \dim D_1 \quad \text{et} \quad \dim W = \dim D_2,$$

de plus  $\varphi$  est aussi définie sur  $V$  et l'image de  $V$  par continuité est contenue dans  $W$ ; on ne perd donc rien à la généralité en prenant des ensembles algébriques à la place d'ensembles semi-algébriques.

D'autre part un ensemble algébrique est réunion finie de variétés algébriques; l'image de  $\theta$  par  $\varphi$  peut donc être étudiée en regardant l'image de  $\theta$  par la restriction de  $\varphi$  à chaque variété. Pour ne pas alourdir le texte de la présente section, nous supposerons donc que  $\theta$  est une mesure définie sur une variété algébrique.

Enfin, les variétés algébriques ont l'avantage sur les ensembles semi-algébriques de posséder la propriété de stationnarité des suites croissantes (A 10) et nous serons amenés justement à étudier dans la section 4 une suite d'applications polynômiales dont les images constituent une suite croissante d'ensembles semi-algébriques contenus dans  $\mathbb{R}^p$ ; une telle suite n'a pas de propriété de stationnarité; par contre si ces ensembles semi-algébriques sont irréductibles, la suite de leurs fermetures pour la topologie de Zariski sera stationnaire, c'est-à-dire constante, à partir d'un certain rang.

Nos hypothèses de travail dans cette section seront les suivantes :

- (3.1)  $M, V, W$  sont des variétés algébriques de dimensions respectives  $n, m, p$  et contenues respectivement dans des variétés algébriques lisses (A 13),  $M', N', W'$ .

(3.2)  $V$  est lisse.

(3.3)  $\varphi(z, x)$  est une application de classe  $C^1$  de  $M' \times V'$  dans  $W'$ , polynômiale en  $x$  et vérifiant  $\varphi(M \times V) \subset W$ .

(3.4) Chaque variété algébrique  $X$  est munie d'une mesure régulière  $\mu_X$  obtenue en munissant le lieu régulier  $R_X$  de  $X$  (A 12) d'une mesure lebesguienne convenable [7]; cette mesure est prolongée par zéro au lieu singulier  $\Sigma_X$  de  $X$ . Une telle mesure est construite dans [17].

(3.5)  $\theta$  est une mesure positive régulière sur  $V$ , absolument continue par rapport à  $\mu_V$  et sa densité a pour ensemble de positivité  $E$ . L'ensemble de positivité d'une fonction  $f$  mesurable désignant l'ensemble  $\{f > 0\}$ .

(3.6) Pour  $z \in M$ , la mesure image dans  $W$  de  $\theta$  par l'application  $\varphi_z = \varphi(z, \cdot)$  est notée  $\theta_z$ . (Noter que  $\theta_z$  peut prendre des valeurs infinies.)

Notre premier résultat est un théorème d'absolue continuité de  $\theta_z$  pour  $z$  fixé; pour simplifier l'écriture nous omettrons provisoirement l'indice  $z$ ; on suppose donc que  $\varphi$  est une application de  $V$  dans  $W$  et l'image de  $\theta$  est notée  $\theta'$ .

**THÉORÈME 3.1.** — *Si  $\varphi$  est une application dominante (A 23) de  $V$  dans  $W$ , alors  $\theta'$  est absolument continue par rapport à  $\mu_W$  et sa densité a pour ensemble de positivité  $\varphi(E)$ .*

*Démonstration.* — Notons que  $m \geq p$  car  $\varphi$  est dominante (A 23).

Soit  $\Sigma_W$  le lieu singulier de  $W$ ; le lieu régulier  $R_W = W - \Sigma_W$  est une variété analytique (A 12). On se ramène à  $R_W$  de la manière suivante. Tout d'abord par construction de  $\mu_W$  on a :

$$(3.7) \quad \mu_W(\Sigma_W) = 0;$$

d'autre part  $\varphi^{-1}(\Sigma_W)$  est un fermé de Zariski dans  $V$  et :

$$(3.8) \quad \dim \varphi^{-1}(\Sigma_W) < \dim V,$$

car sinon on aurait  $V = \varphi^{-1}(\Sigma_W)$  (A 9) et  $\varphi$  ne serait pas dominante; on a par conséquent :

$$(3.9) \quad \mu_V(\varphi^{-1}(\Sigma_W)) = 0$$

et donc :

$$(3.10) \quad \theta(\varphi^{-1}(\Sigma_W)) = \theta'(\Sigma_W) = 0.$$

Au vu de (3.7), (3.9) et (3.10) on peut restreindre  $\varphi$  à  $V_1 = V - \varphi^{-1}(\Sigma_W)$ ;  $V_1$  est un ouvert de Zariski et donc en particulier une sous-variété analytique ouverte de  $V$ .

Soit :

$$(3.11) \quad G = \{x \in V_1, \text{rg } d\varphi_x < p\},$$

G est un fermé de Zariski dans  $V_1$ , de dimension strictement inférieure à  $m$  car  $\varphi$  est dominante; on a donc

$$(3.12) \quad \mu_V(G) = 0;$$

d'autre part, le théorème de Sard (J. Dieudonné [7]) donne :

$$(3.13) \quad \mu_W(\varphi(G)) = 0$$

et donc puisque  $\varphi$  est dominante :

$$(3.14) \quad \mu_W(\varphi(V) - \varphi(V_1 - G)) = 0.$$

Soit maintenant  $x \in V_1 - G$ ; c'est un point régulier de  $\varphi$ ; par conséquent il existe des voisinages ouverts  $U$  et  $U'$  respectivement de  $x$  et  $\varphi(x)$ , un ouvert  $U''$  de  $\mathbb{R}^{m-p}$  et un difféomorphisme  $\psi$  de  $U$  sur  $U' \times U''$  tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$(3.15) \quad \begin{array}{ccc} & \varphi & \\ & \longrightarrow & \\ U & & U' \\ \psi \searrow & & \nearrow \text{proj.} \\ & U' \times U'' & \end{array}$$

où  $\text{proj}$  désigne la projection (M. Q. Pham [28]).

En procédant ainsi pour chaque  $x$  dans  $V_1 - G$ , on obtient un recouvrement ouvert de  $V_1 - G$ ; comme  $V_1 - G$  est une variété analytique, par paracompacité on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable (F. Warner [37]) que nous noterons  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , de sorte que chaque  $U_i$  vérifie (3.15). Nous noterons  $\varphi_i$  la restriction de  $\varphi$  à  $U_i$ .

Pour établir notre résultat, il suffit de montrer que si  $A$  est un borélien de  $W$  alors :

$$(3.16) \quad \theta'(A) = 0 \Leftrightarrow \mu_W(A \cap \varphi(E)) = 0.$$

On a :

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \theta'(A) = 0 &\Leftrightarrow \theta(\varphi^{-1}(A)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \theta(\varphi^{-1}(A) \cap U_i) = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \mu_V(\varphi^{-1}(A) \cap U_i \cap E) = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

[la deuxième équivalence provient de (3.9) et (3.12), la troisième des hypothèses sur  $\theta$ ].

Mais :

$$(3.18) \quad \varphi^{-1}(A) \cap U_i \cap E = \varphi_i^{-1}(A \cap \varphi(E_i)) \quad \text{où } E_i = E \cap U_i,$$

et donc (3.17) devient :

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \theta'(A) = 0 &\Leftrightarrow \mu_V(\varphi_i^{-1}(A \cap \varphi(E_i))) = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \mu_W \otimes \mu(\text{Proj}^{-1}(A \cap \varphi(E_i))) = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

où  $\mu$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^{m-p}$ ; on obtient alors :

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \theta'(A) = 0 &\Leftrightarrow \mu_w(A \cap \varphi(E_i)) = 0, & \forall i \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \mu_w(A \cap \varphi(E)) = 0 \end{aligned}$$

car d'après (3.14),  $\mu_w(\varphi(E)) = \mu_w\left\{ \bigcup_i \varphi(E_i) \right\}$ .

Le théorème est ainsi démontré.

*Remarque 3.1.* — L'hypothèse  $\varphi$  polynômiale sert à montrer (3.9) et (3.12); le théorème est donc encore vrai si  $V$  et  $W$  sont des variétés  $C^\infty$ ,  $\varphi$  est  $C^\infty$  et l'ensemble  $G$ , des points critiques de  $\varphi$  est de  $\theta$ -mesure nulle. Plus précisément, si on note  $\theta_1$  (resp.  $\theta_2$ ) la restriction de  $\theta$  à  $V-G$  (resp.  $G$ ). alors la mesure image de  $\theta$  est  $\theta' = \theta'_1 + \theta'_2$  où  $\theta'_1$  (resp.  $\theta'_2$ ) est la mesure image de  $\theta_1$  (resp.  $\theta_2$ );  $\theta'_2$  étant nulle en dehors de  $\varphi(G)$ , est singulière en vertu du théorème de Sard [ $\theta'_2$  est une mesure nulle si et seulement si  $\theta(G) = 0$ ];  $\theta'_1$  est absolument continue et son ensemble de positivité est  $\varphi(E-G)$  [ $\theta'_1$  est une mesure nulle si et seulement si  $\theta(E-G) = 0$ ].

Nous revenons maintenant au cadre que nous avons défini au début de cette section. Pour continuer nous avons besoin du lemme suivant.

**LEMME 3.1.** — *On suppose que  $m = p$ . Soit  $z_0$  un point de  $M$  et  $(z_n)$  une suite de points de  $M$  convergeant vers  $z_0$ ; alors il existe une sous-suite  $(z'_n)$  possédant la propriété suivante;*

(3.21) *pour tout point régulier  $x_0$  de  $\varphi_{z_0}$  et tout voisinage  $U$  de  $x_0$  dans  $V$ , il existe des voisinages ouverts  $U_0 \subset U$  de  $x_0$ ,  $U'_0$  de  $y_0 = \varphi_{z_0}(x_0)$  dans  $W$  et un entier  $N$  tels que pour tout  $n \geq N$ ,  $\varphi_{z'_n}$  soit un difféomorphisme de  $U_0$  sur un ouvert de  $W$  contenant  $U'_0$ .*

*Démonstration.* — La difficulté provient du fait que  $z_0$  peut être un point singulier de  $M$ . Pour résoudre cette difficulté nous utilisons le théorème de résolution des singularités de Hironaka (A 27).

Il existe donc une variété analytique réelle  $\hat{M}$  de même dimension que  $M$  et une application analytique propre et surjective  $l$  de  $\hat{M}$  sur  $M$ .

Notons  $B = l^{-1}(z_0)$  la fibre au-dessus de  $z_0$ ;  $B$  est compacte puisque  $l$  est propre.

Définissons l'application  $\psi(\hat{z}, x)$  de  $\hat{M} \times V$  dans  $\hat{M} \times W$  par :

$$(3.22) \quad \psi(\hat{z}, x) = (\hat{z}, \varphi(l(\hat{z}), x));$$

soit  $\hat{z}_0$  un point de  $B$ , comme  $\hat{M}$  est lisse et  $y_0$  est un point régulier de  $W$  par hypothèse, il s'ensuit que  $(\hat{z}_0, y_0)$  est un point régulier de  $\hat{M} \times W$  (A 14); on peut alors vérifier facilement, par le critère du jacobien que  $(\hat{z}_0, x_0)$  est un point régulier de  $\psi$ ; en effet ce jacobien est de la forme

suivante :

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & D_{\hat{z}} \varphi (l(\cdot, \cdot))_{(\hat{z}_0, x_0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ & & & 0 & (D_x \varphi_{z_0})_{x_0} \end{vmatrix}$$

comme par hypothèse  $\det(D_x \varphi_{z_0})_{x_0} \neq 0$ , on voit donc que  $J \neq 0$ . Il existe donc un voisinage ouvert  $U_0 \subset U$  de  $x_0$ , un voisinage ouvert  $\hat{M}'_0$  de  $\hat{z}_0$  dans  $\hat{M}$  et un voisinage ouvert  $L_0$  de  $(\hat{z}_0, y_0)$  dans  $\hat{M} \times W$  tels que  $\psi$  soit un difféomorphisme de  $\hat{M}'_0 \times U_0$  sur  $L_0$ .  $L_0$  contient un ouvert de la forme  $\hat{M}'_0 \times U'_0$  où  $\hat{M}'_0$  et  $U'_0$  sont des ouverts contenant respectivement  $\hat{z}_0$  et  $y_0$ .

Soit  $z \in \hat{M}'_0$ ; il est clair que l'ensemble

(3.23) 
$$U'_z = \{ y \in W; (\hat{z}, y) \in L_0 \}$$

est un ouvert et que  $\varphi_{l(\hat{z})}$  est un difféomorphisme de  $U_0$  sur  $U'_z$ ; d'autre part si  $\hat{z} \in \hat{M}'_0$ , alors  $U'_z$  contient  $U'_0$ . Nous avons donc montré que :

(3.24) il existe des voisinages ouverts  $U_0 \subset U$ ,  $\hat{M}'_0$  et  $U'_0$  respectivement de  $x_0$  dans  $V$ , de  $\hat{z}_0$  dans  $\hat{M}$  et de  $y_0$  dans  $W$  tels que pour tout  $\hat{z} \in \hat{M}'_0$ ,  $\varphi_{l(\hat{z})}$  soit un difféomorphisme de  $U_0$  sur un ouvert de  $W$  contenant  $U'_0$ .

Soit maintenant une suite  $z_n$  convergeant vers  $z_0$  dans  $M$ ; on peut supposer que la suite  $z_n$  est dans un compact  $K$ . Choisissons maintenant une suite  $\hat{z}_n$  dans  $\hat{M}$  telle que :

(3.25) 
$$l(\hat{z}_n) = z_n,$$

comme  $l^{-1}(K)$  est compact ( $l$  est propre), on peut extraire une sous-suite  $\hat{z}'_n$  telle que  $\hat{z}'_n$  soit convergente; soit  $\hat{z}_0$  sa limite.  $\hat{z}_0$  est dans  $B$  par continuité; on lui applique le résultat précédent (3.24) et on garde les mêmes notations. A partir d'un rang  $N$ ,  $\hat{z}'_n \in \hat{M}'_0$  et donc  $\varphi_{l(\hat{z}'_n)} = \varphi_{z'_n}$  est un difféomorphisme de  $U_0$  sur un ouvert de  $W$  contenant  $U'_0$ ; ce qui termine la démonstration.

Nous établissons maintenant le premier résultat de semi-continuité.

LEMME 3.2. — On suppose que  $m = p$ . Soit  $(z_n)$  une suite de points de  $M$  de limite  $z_0$ ; si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (i)  $\varphi_{z_0}$  est dominante;
- (ii) la suite  $(z_n)$  possède la propriété (3.21);

alors pour tout borélien  $A$  de  $W$  :

$$\liminf \theta_{z_n}(A) \geq \theta_{z_0}(A).$$



*Démonstration.* — (a) Soit  $x_0 \in V$ , un point régulier de  $\varphi_{z_0}$ ; le point  $y_0 = \varphi_{z_0}(x_0)$  est un point régulier de  $W$  et par continuité pour  $z$  voisin de  $z_0$ ,  $y = \varphi_z(x_0)$  est aussi un point régulier de  $W$ . D'autre part, toujours par continuité, pour  $z$  voisin de  $z_0$  on a :

$$\text{rg}(\mathbf{D}_x \varphi_z)_{x_0} = p$$

et donc, dans un voisinage de  $z_0$ ,  $\varphi_z$  est dominante et d'après le théorème 3.1,  $\theta_z$  admet une densité que nous noterons  $f_z$ . Nous nous placerons constamment dans ce voisinage dans toute la suite de la démonstration.

(b) Soit  $S$  la fermeture de Zariski de l'ensemble des valeurs singulières de  $\varphi_{z_0}$ ; d'après le théorème de Sard algébrique (A 24) :

$$(3.26) \quad \dim S < p \quad \text{et} \quad \mu_W(S) = 0.$$

On peut donc se limiter dans la démonstration aux boréliens contenus dans l'espace  $W_1 = W - S$  qui est un ouvert de Zariski lisse dans  $W$ .

Maintenant, d'après le théorème de la fibre localement triviale (A 26), il existe un fermé de Zariski  $Z$ , de dimension strictement plus petite que  $p$  et tel que tout point  $y_0$  de  $W_1 - Z$  possède un voisinage sur lequel les fibres de  $\varphi_{z_0}$  sont de cardinal constant fini et égal à :  $\text{card } \varphi_{z_0}^{-1}(y_0)$ .

Comme  $\mu_W(Z) = 0$ , on se place donc dans  $W_2 = W_1 - Z$  qui est encore lisse. Soit maintenant :

$$(3.27) \quad H = \{y \in W_2, \text{card } \varphi_{z_0}^{-1}(y) = 0\};$$

par définition de  $\theta_{z_0}$  on a :

$$(3.28) \quad \theta_{z_0}(H) = 0;$$

encore une fois on peut donc se limiter aux boréliens contenus dans  $W_2 - H$  qui est un ouvert de  $W_2$  par application du théorème de la fibre localement triviale (et par conséquent une variété analytique).

(c) Soit  $y \in W_2 - H$  et  $s = \text{card } \varphi_{z_0}^{-1}(y)$ ; notons  $x_1, \dots, x_s$  les points de  $\varphi_{z_0}^{-1}(y)$ . Ce sont des points réguliers de  $\varphi_{z_0}$  grâce à notre construction de  $W_2$ . On peut donc trouver des ouverts disjoints  $U_1, \dots, U_s$  voisinages respectifs de  $x_1, \dots, x_s$  dans  $V$  de sorte que  $\varphi_{z_0}$  soit un difféomorphisme de  $U_j$  sur un voisinage  $U'_j$  de  $y$  et que :

$$(3.29) \quad \varphi_{z_0}^{-1} \left( \bigcap_{j=1}^s U'_j \right) \subset \bigcup_{j=1}^s U_j;$$

on prendra de plus des  $U_j$  relativement compacts.

Maintenant en utilisant deux fois la propriété (3.21) on peut choisir les  $U_j$  de telle façon qu'il existe un voisinage ouvert  $U'_0$  de  $y$  et un entier  $N$

tels que :

(3.30) pour  $n > N$ ,  $\varphi_{z_n}$  est un difféomorphisme de  $U_j$  sur un ouvert contenant  $U'_0$

et  $\varphi_{z_n}$  est régulière sur  $\bar{U}_j$  pour tout  $j = 1, \dots, s$ ;

(3.31)  $\varphi_{z_0}$  est un difféomorphisme de  $U_j$  sur un ouvert contenant  $U'_0$  et  $\varphi_{z_0}$  est régulière sur  $\bar{U}_j$  pour tout  $j = 1, \dots, s$ ;

$$(3.32) \quad \varphi_{z_0}^{-1}(U'_0) \subset \bigcup_{j=1}^s U_j.$$

(d) Soit maintenant  $A$  un borélien contenu dans l'ouvert  $U'_0$  construit dans (c); nous allons montrer que :

$$(3.33) \quad \liminf \theta_{z_n}(A) \geq \theta_{z_0}(A).$$

Notons  $\varphi_{z_n, j}$  la restriction de  $\varphi_{z_n}$  à  $U_j, j = 1, \dots, s$ .

D'après la construction faite en (c) on a :

$$(3.34) \quad \varphi_{z_0}^{-1}(A) = \bigcup_{j=1}^s \varphi_{z_0, j}^{-1}(A)$$

et

$$(3.35) \quad \varphi_{z_n}^{-1}(A) \supset \bigcup_{j=1}^s \varphi_{z_n, j}^{-1}(A);$$

donc

$$(3.36) \quad \theta_{z_0}(A) = \sum_{j=1}^s \theta(\varphi_{z_0, j}^{-1}(A))$$

et

$$(3.37) \quad \theta_{z_n}(A) \geq \sum_{j=1}^s \theta(\varphi_{z_n, j}^{-1}(A));$$

ce qui donne :

$$(3.38) \quad \theta_{z_0}(A) = \sum_{j=1}^s \int_A h(y) f(\varphi_{z_0, j}^{-1}(y)) |J^{-1}(\varphi_{z_0, j})| d\mu_W$$

et

$$(3.39) \quad \theta_{z_n}(A) \geq \sum_{j=1}^s \int_A h(y) f(\varphi_{z_n, j}^{-1}(y)) |J^{-1}(\varphi_{z_n, j})| d\mu_W$$

où  $J$  est le jacobien,  $f$  la densité de  $\theta$  et  $h$  une fonction positive qui ne dépend que des mesures lebesguiennes choisies sur  $V$  et  $W$  (plus exactement sur  $V$  et la partie régulière de  $W$ ).

Notons sur  $U'_0$ :

$$(3.40) \quad g_{z_n}(y) = \sum_{j=1}^s h(y) f(\varphi_{z_n, j}^{-1}(y)) |J^{-1}(\varphi_{z_n, j})|;$$

comme en fait les relations (3.38) et (3.39) sont vraies pour tout borélien  $A$  contenu dans  $U'_0$ , on a :

$$(3.41) \quad f_{z_0} = g_{z_0} \quad \text{et} \quad f_{z_n} \geq g_{z_n} \quad \text{p. p. sur } U'_0;$$

où  $f_{z_n}$  est la densité de  $\theta_{z_n}$ . Pour montrer (3.32) il nous suffira donc de montrer que :

$$(3.42) \quad \lim_n \int_A g_{z_n}(y) d\mu_W = \int_A g_{z_0}(y) d\mu_W;$$

pour cela soit  $\varepsilon > 0$ ; l'espace des fonctions continues sur  $\bigcup_j U_j$  étant dense dans l'espace des fonctions absolument intégrables pour  $\mu_V$  sur  $\bigcup_j U_j$ , on peut trouver une fonction positive continue  $\tilde{f}$  sur  $\bigcup_j U_j$  telle que :

$$(3.43) \quad \int_{\bigcup_j U_j} |\tilde{f} - f| d\mu_V < \varepsilon.$$

On a alors :

$$(3.44) \quad \left| \int_A g_{z_n}(y) d\mu_W - \int_A g_{z_0}(y) d\mu_W \right| \\ \leq \sum_{j=1}^s \int_A |f(\varphi_{z_n, j}^{-1}(y)) - \tilde{f}(\varphi_{z_n, j}^{-1}(y))| \cdot |J^{-1}| h(y) d\mu_W \\ + \sum_{j=1}^s \int_A |\tilde{f}(\varphi_{z_0, j}^{-1}(y)) - f(\varphi_{z_0, j}^{-1}(y))| \cdot |J^{-1}| h(y) d\mu_W \\ + \sum_{j=1}^s \left| \int_A \tilde{f}(\varphi_{z_n, j}^{-1}(y)) |J^{-1}| \right. \\ \left. \times h(y) d\mu_W - \int_A \tilde{f}(\varphi_{z_0, j}^{-1}(y)) |J^{-1}| h(y) d\mu_W \right|$$

les deux premières sommes à droite de (3.44) se ramènent par changement de variable à des intégrales sur  $V$  et sont majorées chacune par  $\varepsilon$  grâce à

(3.43); la troisième somme converge vers zéro par le théorème de convergence dominée utilisé avec la mesure  $h(y) d\mu_w$ . En effet,  $\tilde{f}$  est bornée sur  $\bigcup_{j=1}^s U_j$  et  $\tilde{f}(\varphi_{z_n, j}^{-1}(y)) \leq \sup \tilde{f}$ ; d'autre part d'après (3.30) et (3.31) on voit que si  $z_n$  est dans un voisinage compact de  $z_0$ ,  $|J|$  est minoré par une constante strictement positive et par conséquent  $|J^{-1}|$  est majoré; ce qui permet de conclure la démonstration de (3.33).

(e) Pour passer maintenant à un borélien quelconque  $A$  de  $W_2 - H$ , on commence par recouvrir  $W_2 - H$  par des ouverts  $U'_0$  construit en chaque point  $y \in W_2 - H$  comme cela a été fait en (c). Comme  $W_2 - H$  est une variété analytique, on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable qu'on notera  $(U'_{0k})_{k \in \mathbb{N}}$ . Tout borélien  $A$  de  $W_2 - H$  peut s'écrire comme réunion disjointe de boréliens

$$(3.45) \quad A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

où  $A_k \subset U'_{0k}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ; la relation (3.33) valable pour chaque  $A_k$  permet alors de conclure que

$$(3.46) \quad \liminf \theta_{z_n}(A) \geq \theta_{z_0}(A),$$

ce qui termine la démonstration du lemme 3.2.

Nous allons maintenant établir le théorème de semi-continuité que nous avons annoncé. Nous restons toujours sous les hypothèses introduites en début de section. On a :

**THÉORÈME 3.2.** — *Soit  $z_0 \in M$  tel que  $\varphi_{z_0}$  soit dominante; alors pour tout borélien  $A$  dans  $W$  on a :*

$$(3.47) \quad \liminf_{z \rightarrow z_0} \theta_z(A) \geq \theta_{z_0}(A);$$

*de plus si  $\theta$  est une mesure finie, alors :*

$$(3.48) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \theta_z(A) = \theta_{z_0}(A).$$

*Démonstration.* — Pour  $m=p$ , (3.47) est une conséquence des lemmes 3.1 et 3.2. En effet, soit :

$$(3.49) \quad \gamma = \liminf_{z \rightarrow z_0} \theta_z(A);$$

il existe une suite  $(z_n)$  convergente vers  $z_0$  telle que :

$$(3.50) \quad \lim \theta_{z_n}(A) = \gamma;$$

on utilise le lemme 3.1, pour extraire une sous-suite  $(z'_n)$  possédant la propriété (3.21); d'après le lemme 3.2 on a :

$$(3.51) \quad \liminf \theta_{z'_n}(A) \geq \theta_{z_0}(A)$$

ce qui en vertu de (3.50) donne

$$(3.52) \quad \liminf_{z \rightarrow z_0} \theta_z(A) = \gamma \geq \theta_{z_0}(A)$$

Supposons maintenant que  $m > p$ . Soit  $F_1, F_2, \dots, F_k$  des polynômes engendrant l'idéal de la variété  $V$ ; soit  $\varphi_{z_0}^1, \varphi_{z_0}^2, \dots, \varphi_{z_0}^{p'}$  les composantes de l'application polynômiale  $\varphi_{z_0}$ . Si  $x = (x_1, \dots, x_{m'})$  est un point régulier de  $\varphi_{z_0}$  dans  $V$ , alors la matrice jacobienne :

$$J_{\varphi_{z_0}}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \varphi_{z_0}^1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_{z_0}^{p'}}{\partial x_1}(x) \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_{m'}}(x) & & \frac{\partial F_k}{\partial x_{m'}}(x) & \frac{\partial \varphi_{z_0}^1}{\partial x_{m'}}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_{z_0}^{p'}}{\partial x_{m'}}(x) \end{pmatrix}$$

est de rang  $m' - m + p$  (A 21); elle a donc  $m' - m + p$  lignes indépendantes. Soient  $i_1, i_2, \dots, i_{m-p}$  les indices des autres lignes; posons :

$$(3.53) \quad \psi(z, x) = (\varphi(z, x), x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{m-p}})$$

et

$$(3.54) \quad \psi_z(x) = (\varphi_z(x), x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{m-p}})$$

$\psi_{z_0}$  est une application polynômiale de  $V$  dans  $W \times \mathbb{R}^{m-p}$  et  $W \times \mathbb{R}^{m-p}$  est une variété algébrique de dimension  $m$  (A 14).

Comme  $\varphi_{z_0}(x)$  est un point régulier de  $W$ , il s'ensuit que  $\psi_{z_0}(x) = (\varphi_{z_0}(x), x_{i_1}, \dots, x_{i_{m-p}})$  est un point régulier de  $W \times \mathbb{R}^{m-p}$ .

D'autre part la matrice jacobienne de  $\psi_{z_0}$  est de la forme :

$$J_{\psi_{z_0}}(x) = \begin{pmatrix} & & & 0 & & \\ & & & & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \\ J_{\varphi_{z_0}} & & & & & 1 \\ & & & & 0 & & 1 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

où les 1 apparaissent sur les lignes  $i_1, i_2, \dots, i_{m-p}$ . Par conséquent :

$$(3.55) \quad \text{rg } \psi_{z_0}(x) = m'$$

ce qui signifie que  $x$  est un point régulier de  $\psi_{z_0}$  (A 21) et l'application  $\psi_{z_0}$  est par conséquent dominante. Si on note maintenant  $\theta'_z$  l'image de  $\theta$  par  $\psi_z$ , on a en vertu de (3.52) :

$$(3.56) \quad \liminf \theta'_z(A') \geq \theta'_{z_0}(A')$$

pour tout borélien  $A'$  dans  $W \times \mathbb{R}^{m-p}$ .

Mais il est clair que  $\theta_z$  est une marginale de  $\theta'_z$  et en particulier pour tout borélien  $A$  dans  $W$  on a :

$$(3.57) \quad \theta_z(A) = \theta'_z(A \times \mathbb{R}^{m-p})$$

ce qui donne par (3.56) :

$$\liminf \theta_z(A) \geq \theta_{z_0}(A);$$

ce qui achève la démonstration de (3.47).

Pour démontrer (3.48), posons  $\theta(V) = c$ ; il est clair que  $\theta_z(W) = c$  pour tout  $z \in M$ . Soit  $A$  un borélien de  $W$  et  $A'$  son complémentaire dans  $W$  (3.47) donne :

$$(3.58) \quad \liminf_{z \rightarrow z_0} \theta_z(A') \geq \theta_{z_0}(A')$$

d'où

$$(3.59) \quad \liminf_{z \rightarrow z_0} (c - \theta_z(A)) \geq c - \theta_{z_0}(A)$$

et donc

$$(3.60) \quad \limsup_{z \rightarrow z_0} \theta_z(A) \leq \theta_{z_0}(A)$$

ce qui combiné à (3.47) donne (3.48).

Le théorème 3.2 est donc démontré.  $\square$

*Remarque 3.2.* — Dans la pratique, on a une application  $\varphi(z, x)$  définie sur  $\mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}^{m'}$  et on s'intéresse à un voisinage de  $z_0$ . On regarde alors la fermeture de Zariski  $W$  de  $\varphi_{z_0}(\mathbb{R}^{m'})$  [ou  $\varphi_{z_0}(V)$ ,  $V$  variété dans  $\mathbb{R}^{m'}$ ]; si  $z_0$  possède dans une sous-variété de  $\mathbb{R}^{n'}$  un voisinage ouvert  $M$  tel que  $\varphi_z(\mathbb{R}^{m'}) \subset W$  pour tout  $z \in M$ , alors on peut obtenir des résultats de semi-continuité (ou de continuité) quand  $z$  reste dans  $M$ . Si ce n'est pas le cas, la situation peut être pathologique comme le montre l'exemple simple suivant :  $\varphi$  est une application de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par :

$$(3.61) \quad \varphi(z, X, Y) = (X, X^2 + z)$$

les ensembles  $\varphi_z(\mathbb{R}^2)$  sont des variétés algébriques et constituent une famille de paraboles translatées l'une de l'autre.

*Remarque 3.3.* — L'hypothèse  $\varphi_{z_0}$  dominante est importante.

*Exemple :* soit  $\varphi$  l'application polynômiale de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$(3.62) \quad \varphi(z_1, z_2, x) = (z_1^2 + z_2^2 - 1)x + 1;$$

l'image de  $\varphi_z$  est  $\mathbb{R}$  quand  $z = (z_1, z_2)$  n'est pas sur le cercle d'équation  $z_1^2 + z_2^2 - 1 = 0$  et elle est réduite au point (1) sinon; il est clair qu'on n'a pas de continuité de l'image d'une mesure aux points  $z$  du cercle unité.

Cet exemple suggère la question suivante : l'ensemble des points  $z_0$  où  $\theta_{z_0}$  ne vérifie pas (3.47) est-il de  $\mu_M$ -mesure nulle dans le cas où  $\varphi$  est polynômiale en  $z$  et  $x$ ? La réponse est positive.

**PROPOSITION 3.1.** — *Si  $\varphi$  est une application polynômiale de  $M \times V$  dans  $W$  et s'il existe  $z_0 \in M$  tel que  $\varphi_{z_0}$  soit dominante, alors l'ensemble des  $z$  pour lesquels  $\varphi_z$  n'est pas dominante est contenu dans un ensemble algébrique de dimension strictement inférieure à la dimension de  $M$ .*

*Preuve.* — Elle est simple. Soit  $z$  tel que :

$$(3.63) \quad \text{rg}(\text{D}\varphi_z)_x < p \quad \text{pour tout } x \in V;$$

comme  $\varphi$  est polynômiale, cela signifie que  $z$  annule pour chaque  $x \in V$  des polynômes  $J_{1,x}, \dots, J_{s,x}$ . Considérons l'ensemble des zéros dans  $M$  de ces polynômes indexés par  $x$ ; on obtient un ensemble algébrique  $M_1$  dans  $M$ . Si  $\dim M_1 = \dim M$  on aurait alors  $M_1 = M$  et donc pour tout  $z$  et tout  $x$  :

$$(3.63) \quad \text{rg}(\text{D}\varphi_z)_x < p;$$

cela est impossible puisque  $\varphi_{z_0}$  est dominant; on a par conséquent :

$$(3.64) \quad \dim M_1 < \dim M$$

ce qui conclut la démonstration.

## 4. LE PROCESSUS AUTORÉGRESSIF POLYNÔMIAL

### 4.1. Le modèle et les hypothèses

On considère la chaîne de Markov définie par la relation de récurrence :

$$(4.1) \quad Z_{n+1} = \varphi(Z_n, e_{n+1})$$

où  $Z_n$  (resp.  $e_n$ ) est à valeurs dans une variété algébrique lisse  $M$  (resp.  $V$ ),  $\varphi$  est une application polynômiale de  $M \times V$  dans  $M$  et  $(e_n)_{n \geq 0}$  est une suite de variables aléatoires i. i. d. On supposera dans toute la suite que la loi de probabilité de  $e_n$  est absolument continue par rapport à une mesure lebesguienne  $\mu_V$  sur  $V$  et on notera  $E$  l'ensemble de positivité de sa densité  $f$ ; rappelons que  $E = \{f > 0\}$  et qu'il est défini à un ensemble de  $\mu_V$ -mesure nulle près.

On complète la suite  $(e_n)$  en une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, indexées par  $\mathbb{Z}$ ,  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Notons  $\varphi_e$  l'application polynômiale  $\varphi(\cdot, e)$  de  $M$  dans  $M$  et  $S$  le semi-groupe d'applications polynômiales engendré par les applications  $\varphi_e$ ,  $e \in E$ ; l'orbite d'un point  $x$  de  $M$  par l'action de  $S$  sera notée  $Sx$  ( $Sx$  est évidemment un ensemble absorbant).

Nous ferons les hypothèses suivantes.

( $\mathcal{H} 1$ ) il existe un point  $T$  de  $M$ , tel que  $T$  soit dans l'adhérence de toute orbite  $Sx$ ,  $x \in M$ , et que  $T$  soit un point fixe pour une application  $\varphi_a$ ,  $a \in E$ .  $T$  est dit point d'attraction de la chaîne.

( $\mathcal{H} 2$ ) il existe un nombre réel positif  $s$  tel que la suite

$$R_k(x) = \varphi_{e_n} \circ \varphi_{e_{n-1}} \circ \dots \circ \varphi_{e_{n-k}}(x)$$

converge en moyenne d'ordre  $s$  vers une limite indépendante de  $x$ .

En plus de ces deux hypothèses, nous utiliserons aussi l'hypothèse (H 3) du théorème 2. 1.

L'hypothèse ( $\mathcal{H} 1$ ) est vérifiée quand il existe un élément  $a$  de  $E$  et un entier  $k$ , tel que  $\varphi_a^k$  soit lipschitzienne de rapport strictement inférieure à un;  $T$  est alors le point fixe de  $\varphi_a$ .

L'hypothèse ( $\mathcal{H} 2$ ) a une conséquence immédiate. Notons  $\tilde{Z}_n$  la limite de  $\varphi_{e_n} \circ \dots \circ \varphi_{e_{n-k}}(T)$ ; le processus  $(\tilde{Z}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un processus stationnaire en loi et markovien de même probabilité de transition que la chaîne  $(Z_n)$ ; la loi de probabilité  $\pi$  de  $\tilde{Z}_n$  est donc une probabilité invariante pour la chaîne  $(Z_n)$ ; comme la limite dans ( $\mathcal{H} 2$ ) est indépendante de  $x$ , la chaîne  $(Z_n)$  est récurrente positive. En fait nous n'avons besoin pour établir nos résultats que de la convergence de  $R_k(T)$  et de la récurrence positive; mais cela est souvent vérifié avec des hypothèses de moment [(H 3) et (H 4) du théorème 2. 1] qui impliquent également ( $\mathcal{H} 2$ ).

Dans la suite le processus  $(\tilde{Z}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  sera noté simplement  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Notre objectif est de prouver la régularité absolue géométrique du processus  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ; cela correspond dans ce travail à la récurrence Harris et l'ergodicité géométrique de la chaîne  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .



Posons tout d'abord la

DÉFINITION 4.1. — L'espace vectoriel engendré par l'orbite  $ST$  de  $T$ , est appelé espace euclidien du processus  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Nous introduisons maintenant un autre espace.

#### 4.2. La variété algébrique des états du processus

On définit les applications polynômiales  $\varphi^k$  de  $M \times V^k$  dans  $M$  par

$$(4.2) \quad \varphi^k(z, e_1, \dots, e_k) = \varphi_{e_k} \circ \dots \circ \varphi_{e_1}(z).$$

Soit

$$(4.3) \quad D_k = \varphi^k(T, E^k)$$

( $E$  est l'ensemble de positivité de la densité de  $e_n$ ); comme  $T$  est un point fixe de  $\varphi_a$ , il s'ensuit que la suite  $D_k$  est une suite croissante d'ensembles; notons que  $ST = \bigcup_k D_k$ . Il est facile de voir que ( $\mathcal{H} 2$ ) implique que le

processus  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , est à valeurs dans l'adhérence de  $ST$ , c'est-à-dire

$$(4.4) \quad \pi(\overline{ST}) = 1$$

Soit maintenant,  $W_k$  la fermeture de Zariski de  $\varphi^k(T, V^k)$  [ $W_k$  est aussi la fermeture de Zariski de  $D_k$  car  $\mu_V(E) > 0$ ]; comme  $V_k$  est irréductible (A 14), il en est de même de  $W_k$ . Puisque la suite  $D_k$  est croissante, il en est de même de la suite  $W_k$  qui est par conséquent stationnaire; il existe donc un entier  $k_0$  et une variété algébrique  $W$ , tels que

$$(4.5) \quad W = W_k \quad \text{pour tout } k \geq k_0.$$

La variété  $W$  est appelée variété algébrique des états du processus  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Il est clair que le processus est à valeurs dans  $W$  i. e.

$$(4.6) \quad \pi(W) = 1$$

et que

$$(4.7) \quad T \in D_1 \subset W.$$

Comme on le constatera dans la suite la dimension de  $W$  est égale à celle de l'espace des états du processus; au sens où cet espace des états est de mesure non nulle dans la partie régulière de  $W$  (et sa fermeture de Zariski est  $W$ ).

Il nous a paru, par conséquent, intéressant de donner un critère pour trouver la dimension de  $W$ .

PROPOSITION 4.1. — Si  $W_k = W_{k+1}$  alors  $W_k = W$ .

*Démonstration.* — Notons  $H_k = \varphi^k(T, V^k)$  ( $W_k$  est la fermeture de Zariski de  $H_k$ ); on a alors :

$$(4.8) \quad \begin{aligned} H_{k+2} &= \varphi(H_{k+1}, V) \\ &\subset \varphi(W_{k+1}, V) \end{aligned}$$

et comme par hypothèse  $W_k = W_{k+1}$ , on obtient :

$$(4.9) \quad H_{k+2} \subset \varphi(W_k, V),$$

mais par continuité de  $\varphi$  pour la topologie de Zariski,  $\varphi(W_k, V)$  est contenu dans la fermeture de Zariski de  $\varphi(H_k, V)$  et comme

$$\varphi(H_k, V) = H_{k+1}$$

on obtient :

$$(4.10) \quad H_{k+2} \subset W_{k+1}$$

et par conséquent

$$(4.11) \quad W_{k+2} \subset W_{k+1};$$

la suite  $(W_n)$  est donc constante à partir de  $n=k$ .  $\square$

Cette proposition et le critère du jacobien (A21) donnent un algorithme simple pour déterminer la dimension de  $W$ ; dans le cas où  $V = \mathbb{R}^m$ , si on note  $J_k(e_1, \dots, e_k)$  le jacobien de  $\varphi^k(T, \cdot)$  et  $n_k$  la taille du plus grand mineur de  $J_k$  qui n'est pas identiquement nul, alors la dimension de  $W$  est le premier  $n_k$  pour lequel  $n_k = n_{k+1}$ . Dans le cas où  $V \neq \mathbb{R}^m$ , on utilise (A21), ou alors, ce qui revient au même, on prend un ouvert  $V_1$  de  $V$  difféomorphe à un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^m$  par une application analytique  $\varphi_1$  (ce qui est toujours possible puisque  $V$  est une variété analytique de dim  $m$ ). On note  $\psi^k$  l'application de  $U^k$  dans  $M$  définie par :

$$\psi^k(x_1, \dots, x_k) = \varphi^k(T, \varphi_1(x_1), \dots, \varphi_1(x_k));$$

soit  $n_k$  la taille du plus grand mineur du jacobien de  $\psi^k$ , qui n'est pas identiquement nulle sur  $U^k$ , alors la dimension de  $W$  est le premier  $n_k$  pour lequel  $n_k = n_{k+1}$ .

Remarquons aussi, que si la dimension de l'espace euclidien est  $r$  alors en vertu de la proposition 4.1,  $W_r = W$ ; il est donc inutile de regarder  $\varphi^k$  pour  $k > r$ .

Enfin notons aussi que la suite  $H_k = \varphi^k(T, V^k)$  est une suite croissante d'ensembles semi-algébriques et n'est pas nécessairement stationnaire.

### 4.3. L'espace des états du processus

Dans cette partie on va montrer que  $\pi(\text{ST}) = 1$ .

On a tout d'abord, le lemme suivant.

LEMME 4.1. — *Sous les hypothèses (H 1) et (H 2), on a  $\pi(\text{ST}) > 0$ .*

*Preuve.* — (a) Il est facile de voir en utilisant la définition des ensembles  $D_k$  que pour tout entier  $q$  :

$$(4.12) \quad \varphi^q(\text{ST}, V^q) \subset W$$

et donc par continuité pour la topologie de Zariski :

$$(4.13) \quad \varphi^q(W, V^q) \subset W.$$

(b) A partir d'un certain rang  $r_0$ ,  $\varphi^r(T, \cdot)$  est dominante; par continuité  $\varphi^r(T', \cdot)$  est encore dominante pour  $T'$  dans un voisinage  $W_1$  de  $T$ , ( $W_1 \subset W$ ).

D'autre part il est clair que :

$$(4.14) \quad P^r(T, \text{ST}) = 1$$

et donc en vertu du théorème 3.2

$$(4.15) \quad P^r(T', \text{ST}) > 0$$

pour  $T'$  dans un voisinage  $W_2 \subset W_1$ ; ce qui signifie, d'après le théorème 3.1 [et parce que  $\varphi^r(T', \cdot)$  est dominante], que :

$$(4.16) \quad \mu_W(\varphi^r(T', E^r) \cap \text{ST}) > 0.$$

Soit maintenant,  $K$  un compact de  $W$ , tel que  $\pi(K) > 0$  [cela est possible puisque  $\pi(W) = 1$ ].

En vertu de l'hypothèse (H 1), tout  $z_i$  dans  $K$  est contenu dans un ouvert  $U_i$  tel que  $\varphi^{q_i}(z, E^{q_i}) \cap W_2 \neq \emptyset$  pour un certain entier  $q_i$  et pour tout  $z$  dans  $U_i$ ; de (4.16) on déduit que  $\mu_W(\varphi^{q_i+r}(z, E^{q_i+r}) \cap \text{ST}) > 0$  pour tout  $z$  dans  $U_i$ ; en vertu du théorème 3.1 et parce que  $\text{ST}$  est absorbant on obtient

$$(4.17) \quad P^{q'+r}(z, \text{ST}) > 0 \quad \text{pour tout } z \text{ dans } U_i \text{ et } q' \geq q_i.$$

$K$  étant compact, on extrait de la famille  $U_i$ , un recouvrement fini et on obtient ainsi un entier  $q$  tel que

$$(4.18) \quad P^{q+r}(z, \text{ST}) > 0 \quad \text{pour tout } z \text{ dans } K.$$

On a maintenant

$$(4.19) \quad \begin{aligned} \pi(\text{ST}) &= \int \pi(dz) P^{q+r}(z, \text{ST}) \\ &\geq \int_K \pi(dz) P^{q+r}(z, \text{ST}) \end{aligned}$$

ce qui est strictement positif en vertu de (4.18); le lemme est donc démontré.

On peut maintenant établir le

THÉORÈME 4.1. — *Sous les hypothèses (H 1) et (H 2), on a  $\pi(\text{ST}) = 1$ .*

*Démonstration.* — Notons  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  l'espace de probabilité sur lequel sont définis  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  étant i. i. d., le processus  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est ergodique en tant que fonction de  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  (voir Y. Rozanov [41]; dans son ouvrage Y. Rozanov utilise le terme métriquement transitif pour désigner l'ergodicité).

Le processus  $(Z'_n) = (Z_{-n})$  qui est fonction de  $\varepsilon_n = (e_{-n})$  est également ergodique.

Soit maintenant :

$$(4.20) \quad R_n = \mathbf{1}_{\text{ST}}(Z'_n);$$

le processus  $(R_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est encore ergodique et on a :

$$(4.21) \quad q = P(R_n = 1) = P(Z_{-n} \in \text{ST})$$

et

$$(4.22) \quad q = E |R_n| = ER_n$$

d'après le lemme 4.1 on a :

$$(4.23) \quad q > 0;$$

et par le théorème ergodique :

$$(4.24) \quad \lim \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{j=N} R_{-n+j} = q \quad \text{p. s.}$$

Soit  $\Omega_1$ , l'ensemble des  $\omega$  où la convergence (4.24) a lieu et  $\Omega_2$  l'ensemble des  $\omega$  tels que :

$$(4.25) \quad Z_n(\omega) = \varphi(Z_{n-1}(\omega), e_n(\omega)), \quad \forall n \in \mathbb{Z};$$

il est clair que :

$$(4.26) \quad P(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 1;$$

puisque pour tout  $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ , (4.24) est vrai et que  $q$  est non nul, alors pour tout  $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ , il existe un entier  $j_0$  tel que  $R_{-n+j_0}(\omega) = 1$  et donc :

$$(4.27) \quad Z'_{-n+j_0}(\omega) \in \text{ST}$$

c'est-à-dire

$$(4.28) \quad Z_{n-j_0}(\omega) \in \text{ST}$$

ce qui signifie qu'il existe un entier  $k$  tel que

$$(4.29) \quad Z_{n-j_0}(\omega) \in \phi^k(\mathbb{T}, E^k)$$

mais d'après (4.25) on a :

$$(4.30) \quad Z_n(\omega) = \phi^{j_0}(Z_{n-j_0}(\omega), e_{n-j_0+1}(\omega), \dots, e_n(\omega))$$

ce qui prouve que

$$(4.31) \quad Z_n(\omega) \in \text{ST} \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2.$$

On conclut avec (4.26).

#### 4.4. Mélange géométrique du processus

Nous allons montrer maintenant, que sous l'hypothèse (H3) du théorème 2.1,  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est géométriquement absolument régulier; il nous faudra pour cela vérifier que les hypothèses (H1) et (H2) du même théorème sont satisfaites [la chaîne est déjà récurrente positive grâce à (A1)].

**THÉORÈME 4.2.** — *Sous les hypothèses (A1), (A2) et (H3), l'équation (4.1) définit sur ST une chaîne de Markov Harris récurrente positive, géométriquement ergodique et de probabilité invariante  $\pi$  équivalente à la restriction d'une mesure lebesguienne  $\mu_W$  sur ST; le processus  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est géométriquement absolument régulier et  $E(g(Z_n)) < \infty$ .*

*Démonstration.* — L'espace des états de la chaîne  $(Z_n)$  est ST et on munit W d'une mesure lebesguienne  $\mu_W$ .

Soit K un compact de W.

1. Prenons un borélien A contenu dans ST et de  $\mu_W$ -mesure nulle; en opérant comme dans la démonstration du lemme 4.1, on peut trouver un entier  $q$  tel que  $\phi^q(z, \cdot)$  soit dominante pour tout  $z$  dans K. Le théorème 3.1 dit alors que la mesure  $P^q(z, \cdot)$  est dominée par  $\mu_W$  et donc :

$$(4.32) \quad P^q(z, A) = 0 \quad \text{pour tout } z \text{ dans K.}$$

L'hypothèse (H1) du théorème 2.1 est ainsi vérifiée.

2. Soit maintenant un borélien  $A$  contenu dans  $ST$  et tel que :

$$(4.33) \quad \mu_W(A) > 0$$

il existe un entier  $k$  tel que :

$$(4.34) \quad \mu_W(A \cap D_k) > 0 \quad \text{et} \quad \varphi^k(T, \cdot) \text{ est dominante.}$$

En procédant pour  $A$ , comme on a fait pour  $ST$  dans le lemme 4.1, on peut trouver un entier  $q$  tel que

$$(4.35) \quad P^q(z, A) > 0 \quad \text{et} \quad \varphi^q(z, \cdot) \text{ est dominante pour tout } z \in K.$$

Le théorème 3.2 donne alors :

$$(4.36) \quad \inf_{z \in K} P^q(z, A) > 0$$

et donc (H2) est vérifiée.

Sous une hypothèse plus forte sur  $E$ , on peut obtenir la récurrence Harris sur  $W$ .

**COROLLAIRE 4.1.** — *Sous les hypothèses du théorème 4.2, si  $E$  est ouvert, alors la chaîne  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est Harris récurrente positive et géométriquement ergodique sur  $W$ .*

*Preuve.* — Il suffit de montrer que dans  $W$ , la chaîne entre presque sûrement dans  $ST$ . Soit  $G_k$  l'ensemble des points critiques de  $\varphi^k(T, \cdot)$  et  $U_k = \varphi^k(T, E^k - G_k)$ ;  $U_k$  est un ouvert de  $W$  et d'après le théorème de Sard  $\mu_W(\varphi^k(T, G_k)) = 0$ ; donc  $\pi(G_k) = 0$  et on en déduit alors que  $\pi(U) = 1$  où  $U = \bigcup U_k$  est un ouvert de  $W$  contenu dans  $ST$ . Mais d'après ( $\mathcal{H}$  2), la suite  $P^k(x, \cdot)$  converge vers  $\pi$  et donc  $\liminf_k P^k(x, U) \geq \pi(U) = 1$ ; ce qui permet de conclure.

Nous traitons tout de suite un exemple important.

*Exemple du modèle affine en l'état.*

Il s'agit du modèle (4.1) où  $\varphi$  est affine en  $Z_n$ ; on suppose que  $M = \mathbb{R}^p$  et que  $V$  contient 0 (on suppose toujours que la loi de  $e_n$  est dominée par  $\mu_V$ ); le modèle peut se réécrire

$$(4.37) \quad Z_{n+1} = (A + B(e_{n+1}))Z_n + C(e_{n+1}) + D$$

où  $A$  et  $B$  sont des matrices,  $B$  est polynômiale en  $e_{n+1}$  et  $B(0) = 0$ ;  $C$  et  $D$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^p$ ,  $C$  est polynômiale en  $e_{n+1}$  et  $C(0) = 0$ .

Nous ferons les hypothèses suivantes.

( $\mathcal{H}'$  1) Les valeurs propres de  $A$  sont en valeur absolue strictement inférieures à 1.

( $\mathcal{H}' 2$ ) La série de terme général

$$u_m = \prod_{j=0}^m (A + B(e_{n+1-j})) L(e_{n-m})$$

[où  $L(e) = C(e) + D$ ] converge p. s. et la suite

$$v_k = \prod_{j=0}^k (A + B(e_{n+1-j})) z$$

converge vers 0 p. s. pour tout  $z$  dans  $\mathbb{R}^p$ .

L'hypothèse ( $\mathcal{H}' 1$ ) implique ( $\mathcal{H} 1$ ) avec  $T = (I - A)^{-1} D$  (où  $I$  est la matrice identité) car  $\lim_k \varphi_0^k(z) = T$  pour tout  $z$  dans  $\mathbb{R}^p$  et  $\varphi_0(T) = T$  (on a considéré ici que  $E$  contient 0, ce qui est possible puisque  $E$  est défini à un ensemble de  $\mu_\nu$ -mesure nulle près).

L'hypothèse ( $\mathcal{H} 2$ ) est satisfaite grâce à ( $\mathcal{H}' 2$ ) et le processus stationnaire solution de (4.37) est donné par

$$Z_{n+1} = L(e_{n+1}) + \sum_{m \geq 0} u_m.$$

Le théorème 4.2 s'applique et on a en particulier le

**THÉORÈME 4.3.** — *Sous les hypothèses ( $\mathcal{H}' 1$ ), ( $\mathcal{H}' 2$ ) et (H3), le processus stationnaire  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , solution de (4.37), est géométriquement absolument régulier et  $Eg(Z_n) < \infty$  [ $g$  étant la fonction donnée par (H3)].*

*Remarque 4.1.* — L'hypothèse de moment qui suit, implique ( $\mathcal{H}' 2$ ) et (H3).

( $\mathcal{H}'' 2$ ) il existe  $s > 0$  tel que

$$E |(L(e_n))|^s < \infty \quad \text{et} \quad E \|A + B(e_n)\|^s < 1;$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme d'application linéaire.

En effet le moment d'ordre  $s$  de  $u_m$  se majore grâce à l'indépendance des  $e_n$  et ( $\mathcal{H}' 2$ ) se déduit facilement; l'hypothèse (H3) est vérifiée avec  $g(x) = |x|^s + 1$  en procédant comme dans [20].

## 5. EXEMPLES

### 5.1. Processus ARMA vectoriels

Soit  $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  un processus stationnaire en loi, à valeurs dans  $\mathbb{R}^l$ , satisfaisant l'équation ARMA :

$$(5.1) \quad \sum_{i=0}^P B(i) Y_{n-i} = \sum_{k=0}^Q A(k) e_{n-k}$$

où  $B(i)$  et  $A(k)$  sont des matrices réelles de dimensions respectives  $l \times l$  et  $l \times r$ ;  $B(0) = \text{Id}$ ;  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans  $\mathbb{R}^r$ .

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  on définit les matrices :

$$(5.2) \quad P(z) = \sum_{i=0}^P B(i) z^{P-i} \quad \text{et} \quad Q(z) = \sum_{k=0}^Q A(k) z^{Q-k};$$

on fait maintenant les hypothèses suivantes :

$$(5.3) \quad E|e_n| < \infty$$

$$(5.4) \quad E e_n = 0$$

$$(5.5) \quad \det P(z) \neq 0 \quad \text{pour} \quad |z| \geq 1$$

Sous ces hypothèses  $Y_n$  s'écrit :

$$(5.6) \quad Y_n = \sum_{j=0}^{\infty} c_j e_{n-j};$$

en utilisant (5.1) et (5.6) H. Akaike [1] montre qu'il existe un processus stationnaire markovien  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^k$  avec  $k = \text{Max}(P, Q + 1)$  et tel que :

$$(5.7) \quad Z_n = F Z_{n-1} + G e_n$$

$$(5.8) \quad Y_n = H Z_n$$

où  $F, G, H$  sont des matrices réelles et :

$$(5.9) \quad \text{les valeurs propres de } F \text{ sont des zéros de } \det P(z).$$

En fait dans sa démonstration H. Akaike suppose que les zéros de  $\det Q(z)$  sont en valeur absolue strictement inférieurs à 1; ce qui signifie que  $(e_n)$  est l'innovation de  $(Y_n)$ . Cependant cette hypothèse n'est pas nécessaire; il suffit, dans sa démonstration, de prendre les espérances conditionnellement



à la tribu engendrée par  $\{e_n, e_{n-1}, \dots\}$  au lieu de celle engendrée par  $\{Y_n, Y_{n-1}, \dots\}$ .

D'après (5.8) le coefficient de mélange de  $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  a les mêmes propriétés que celui de  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ; les résultats de la section 4 s'appliquent aux processus  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Les conditions (H 1) et (H 2) sont immédiatement vérifiées d'après (5.3) et (5.9); la condition (H 3) est aussi vérifiée grâce à (5.3) et (5.9) en prenant la fonction  $g$  définie dans [18] et [19].

On a donc :

**THÉORÈME 5.1.** — *Si la loi de  $e_n$  est dominée par la mesure lebesgienne d'une variété algébrique lisse  $V$  contenue dans  $\mathbb{R}^r$  et contenant zéro, alors  $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est géométriquement absolument régulier.*

Ce résultat améliore nettement celui que nous avons obtenu dans [18] et [19] où on supposait que  $e_n$  avait une densité strictement positive dans  $\mathbb{R}^r$ ; dans le théorème 5.1, si  $V \neq \mathbb{R}^r$ ,  $e_n$  n'a pas de densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^r$ .

## 5.2. Processus bilinéaires

Soit  $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  un processus stationnaire en loi, réel satisfaisant l'équation bilinéaire :

$$(5.10) \quad Y_n = \sum_{j=1}^p a_j Y_{n-j} + e_n + \sum_{j=1}^q b_j e_{n-j} + \sum_{k=1}^Q \sum_{j=0}^P b_{kj} Y_{n-j-k} e_{n-k}$$

où  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite de variables aléatoires réelle i. i. d. et  $E e_n^2 < \infty$ .

D. T. Pham [27] montre qu'il existe un processus stationnaire  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^r$  avec  $r = \text{Max}(p, P+q, P+Q)$  tel que :

$$(5.11) \quad Z_n = (A + B e_n) Z_{n-1} + C e_n + D e_n^2 + F$$

et

$$(5.12) \quad Y_n = H Z_{n+m-1}$$

où  $A, B, H$  sont des matrices,  $C, D, F$  des vecteurs et  $m$  l'indice du modèle.

Ici également les résultats de la section 4 s'appliquent; on obtient :

**THÉORÈME 5.2.** — *Supposons que :*

- (i)  $e_n$  admet une densité de probabilité;
- (ii) les valeurs propres de  $A$  sont en valeur absolue strictement inférieures à 1;

(iii)  $\exists s > 0$  tel que  $E|e_n|^{2s} < \infty$  et  $E\|A + B e_n\|^s < 1$   
 alors le processus  $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est géométriquement absolument régulier; de plus

$$E|Y_n|^s < \infty. \quad \blacksquare$$

### 5.3. Exemples d'espaces d'états

Nous donnons maintenant deux exemples de variétés algébriques des états pour des processus  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  bilinéaires vérifiant une équation (5.11) de la forme :

$$(5.13) \quad Z_n = (A + B e_n) Z_{n-1} + C e_n;$$

on suppose que les hypothèses (A1) et (A2) sont satisfaites et que  $e_n$  admet une densité de probabilité positive sur tout  $\mathbb{R}$  ce qui est le meilleur des cas.

Notons  $\langle A, B; C \rangle$  (resp.  $\langle A; C \rangle$ ) le plus petit espace vectoriel contenant  $C$  et invariant par  $A$  et  $B$  (resp. invariant par  $A$ );  $\langle A, B; C \rangle$  est l'espace euclidien du processus  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Soit  $W$  sa variété algébrique des états.

D'après (5.13) il est clair que le point d'attraction est le point 0.

Notre premier exemple concerne le cas où  $W = \langle A, B; C \rangle$ .

#### Exemple 5.3.1

PROPOSITION 5.1. — Si  $\langle A; C \rangle = \langle A, B; C \rangle$  alors  $W = \langle A, B; C \rangle$ .

Démonstration. — Elle est simple; soit  $k = \dim \langle A; C \rangle$ ,  $\{C, AC, \dots, A^{k-1}C\}$  est alors une base de  $\langle A; C \rangle$ ; l'écriture de la matrice  $D\varphi^k(0, \cdot)$  dans la base  $\{C, AC, \dots, A^{k-1}C\}$  et au point  $(0, 0, \dots, 0)$  de  $\mathbb{R}^k$  montre alors facilement que :

$$(5.14) \quad \text{rg}(D\varphi^k(0, \cdot))_0 = k$$

$\varphi$  étant défini à partir de (5.13) par

$$(5.15) \quad Z_n = \varphi(Z_{n-1}, e_n)$$

et  $\varphi^k$  à partir de (4.2).

(5.14) implique que  $\dim W = k$ , ce qui donne nécessairement :

$$(5.16) \quad W = \langle A; C \rangle = \langle A, B; C \rangle.$$

Nous donnons maintenant un exemple simple où  $W$  n'est pas égale à l'espace euclidien de  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .

*Exemple 5.3.2*

Prenons :

$$(5.17) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

il est facile de vérifier que :

$$(5.18) \quad \langle A, B; C \rangle = \mathbb{R}^3$$

et que  $\{ C, AC, BC \}$  est une base.

Si on regarde  $\varphi^2(0, \cdot)$  et  $\varphi^3(0, \cdot)$  on constate que :

$$(5.19) \quad \text{Max rg } D\varphi^2(0, \cdot) = \text{Max rg } D\varphi^3(0, \cdot) = 2$$

ce qui en vertu de la proposition 4.1 signifie que :

$$(5.20) \quad \dim W = 2;$$

il nous suffit donc de trouver l'image de  $\varphi^2(0, \cdot)$ ; on a :

$$(5.21) \quad \varphi^2(0, e_1, e_2) = ACe_1 + BCe_1e_2 + Ce_2$$

ce qui veut dire que l'image  $\varphi^2(0, \mathbb{R}^2)$  est la surface d'équation

$$(5.22) \quad Z - XY = 0$$

dans le repère  $\{ C, AC, BC \}$ .

Cette surface est la variété algébrique des états mais c'est aussi dans ce cas particulier l'espace des états.

## 6. CONCLUSION

En guise de conclusion on notera que les résultats des sections 4 et 5 ont des conséquences importantes pour les estimateurs empiriques des paramètres du processus bilinéaire (5.10); si les conditions du théorème 5.2 sont satisfaites avec  $s > 2$  alors le processus  $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est de carré intégrable (il admet des moments d'ordre  $s$ ) et sa fonction covariance est celle d'un processus ARMA dont la partie autorégressive a pour coefficient les coefficients  $a_1, \dots, a_p$  de l'équation (5.10) [27].

Les estimateurs empiriques des covariances de  $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  sont

- (i) consistants par ergodicité de  $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ;

(ii) convergents en moyenne d'ordre  $p$  pour tout  $p < \frac{s}{2}$  avec une vitesse  $N^{-p/2}$  grâce à une majoration de R. Yokoyama [40];

(iii) asymptotiquement gaussiens (pour  $s$  suffisamment grand) puisque le processus est géométriquement mélangeant (on peut voir P. Hall et C. C. Heyde [10] par exemple).

On peut ensuite estimer  $a_1, \dots, a_p$  par la méthode de Yule-Walker; ainsi que le montrent R. Azencott et D. Dacunha-Castelle [2] les estimateurs obtenus ont alors les mêmes propriétés que les estimateurs des covariances.

## APPENDICE

Les développements importants de la géométrie algébrique complexe ont longtemps contrasté avec le peu de résultats obtenus en géométrie algébrique réelle; cela est dû au fait que des résultats essentiels en géométrie algébrique complexe comme le Nullstellensatz, la connexité d'un ensemble algébrique irréductible, la correspondance entre les points de  $\mathbb{C}^n$  et les idéaux maximaux de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  sont faux dans le cas réel. Les variétés algébriques réelles que nous définissons plus bas sont généralement étudiées en tant que « ensemble de points réels d'un schéma algébrique sur  $\mathbb{R}$  » [6], en fait d'un schéma algébrique affine puisque nous nous limiterons dans notre exposé à des variétés algébriques affines. En dehors des travaux pionniers de J. Nash [23] et H. Whitney [38] ce n'est que très récemment qu'on assiste à un développement systématique de la géométrie algébrique réelle (pour une bibliographie on peut regarder [16], [42]).

Notre objectif dans l'exposé qui suit est de présenter dans un cadre élémentaire des résultats qu'on peut trouver, de manière souvent implicite et dans un langage parfois abstrait, dans la bibliographie que nous avons citée. Il n'y a donc aucun apport original. Nous nous inspirerons beaucoup du livre de D. Mumford [22] qui traite de géométrie projective complexe et nos premiers énoncés de (A 1) jusqu'à (A 12) proviennent de Th. Bröcker [4].

### A 1

Un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  est appelé ensemble algébrique s'il existe des polynômes  $F_1, F_2, \dots, F_r$  dans  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  tels que :

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n, F_1(x) = F_2(x) = \dots = F_r(x) = 0\};$$

En fait, et c'est là encore une différence avec la géométrie algébrique complexe,  $A$  peut être défini avec un seul polynôme puisque :

$$F_1(x) = F_2(x) = \dots = F_r(x) = 0 \Leftrightarrow F_1^2(x) + F_2^2(x) + \dots + F_r^2(x) = 0$$

**A 2**

L'ensemble des polynômes qui s'annulent sur  $A$  constituent un idéal de  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  appelé idéal de  $A$  (cet idéal n'est pas nécessairement celui engendré par les polynômes  $F_1, F_2, \dots, F_r$  qui ont permis de définir  $A$ ).

**A 3**

Les ensembles algébriques de  $\mathbb{R}^n$  sont les fermés d'une topologie sur  $\mathbb{R}^n$  appelée topologie de Zariski. Cette topologie est moins fine que la topologie classique sur  $\mathbb{R}^n$ ; en particulier tout ouvert (resp. fermé) pour la topologie de Zariski est ouvert (resp. fermé) pour la topologie classique.

**A 4**

Un ensemble algébrique  $A$  dans  $\mathbb{R}^n$  est dit irréductible si pour tous ensembles algébriques  $A_1$  et  $A_2$  tels que :

$$A = A_1 \cup A_2$$

on a nécessairement  $A = A_1$  ou  $A = A_2$ .

**A 5**

$A$  est irréductible si et seulement si son idéal est premier.

Dans ce cas on dira que  $A$  est une variété algébrique.

(En fait il s'agit d'une variété algébrique affine; une variété algébrique plus générale étant définie par la propriété d'être localement une variété algébrique affine.)

**A 6**

Soit  $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$  une partie génératrice de l'idéal  $I$  d'une variété algébrique  $V$  dans  $\mathbb{R}^n$ ; on appelle rang de  $V$  (ou codimension dans  $\mathbb{R}^n$ ) le nombre entier

$$(A 6. 1) \quad \rho(V) = \text{Max}_{x \in V} \text{rg} \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$\rho(V)$  ne dépend pas de la partie génératrice de  $I$  choisie et on a :

$$(A 6. 2) \quad \rho(V) = \text{Sup}_{F_1, F_2, \dots, F_r \in I} \text{Max}_{x \in V} \text{rg} \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq n}}$$

**A 7**

Soit  $V$  une variété algébrique dans  $\mathbb{R}^n$ ; la dimension de  $V$  est définie par :

$$\dim V = n - \rho(V)$$

**A 8**

Tout ensemble algébrique  $A$  est réunion finie de variétés algébriques  $V_1, \dots, V_k$ . La dimension de  $A$  est alors :

$$\dim A = \max_{i=1, \dots, k} \dim V_i.$$

**A 9**

Si  $V \subset W$  sont deux variétés algébriques; alors :

$$\dim V = \dim W \quad \text{si et seulement si} \quad V = W.$$

Comme corollaire de ce résultat on a :

**A 10. STATIONNARITÉ**

Toute suite croissante de variétés algébriques dans  $\mathbb{R}^n$  est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang).

**A 11**

Soit  $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$  une partie génératrice de l'idéal  $I$  d'une variété algébrique  $V$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\rho(V)$  le rang de  $V$ ; l'ensemble des points  $x$  dans  $V$  qui vérifient :

$$\operatorname{rg} \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n}} < \rho(V)$$

est appelé lieu singulier de  $V$  et sera noté  $\Sigma_V$ ; les points de  $\Sigma_V$  sont appelés points singuliers de  $V$ .  $\Sigma_V$  est un ensemble algébrique et :

$$\dim \Sigma_V < \dim V.$$

**A 12**

L'ensemble  $R_V = V - \Sigma_V$  est appelé lieu régulier de  $V$ . Les points de  $R_V$  sont appelés points réguliers de  $V$ .

$R_V$  est une variété analytique réelle dont la dimension est  $\dim V$ .

### A 13

On appelle ouvert lisse de  $V$  tout ouvert de la variété analytique  $R_V$ . Si  $\Sigma_V = \emptyset$  on dit que  $V$  est une variété algébrique lisse.

### A 14

Soient  $V_1$  une variété algébrique de dimension  $m$  dans  $\mathbb{R}^M$  et  $V_2$  une variété algébrique de dimension  $n$  dans  $\mathbb{R}^N$ , alors  $W = V_1 \times V_2$  est une variété algébrique de dimension  $m+n$  dans  $\mathbb{R}^{M+N}$ ; de plus :

$$R_{V_1} \times R_{V_2} \subset R_W.$$

La démonstration est identique au cas complexe.

La propriété (A 12) a une généralisation; introduisons d'abord la notion d'ensemble semi-algébrique.

### A 15

Un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  est dit semi-algébrique s'il existe une famille finie de polynômes  $f_{ij}, g_{ij}$  dans  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  tels que :

$$A = \bigcup_i \{ x \in \mathbb{R}^n, f_{ij}(x) > 0, \forall j \text{ et } g_{ij}(x) = 0, \forall j \}$$

### A 16 [6]

La dimension d'un ensemble semi-algébrique est la dimension de sa fermeture pour la topologie de Zariski.

Si cette fermeture est irréductible, l'ensemble semi-algébrique est dit irréductible.

### A 17. THÉORÈME DE STRATIFICATION [17]

Tout ensemble semi-algébrique  $A$  est réunion disjointe finie de variétés analytiques connexes  $A_1, \dots, A_s$ ; de plus :

$$\dim A = \max_{i=1, \dots, s} \dim A_i \quad \square$$

Nous passons maintenant à la notion d'application polynômiale.

**A 18**

Soit  $V \subset \mathbb{R}^M$  et  $W \subset \mathbb{R}^N$  des variétés algébriques et  $\varphi$  une application de  $\mathbb{R}^M$  dans  $\mathbb{R}^N$  dont les composantes sont des fractions rationnelles; on dit que  $\varphi$  est une fonction régulière de  $V$  dans  $W$  si  $\varphi(V) \subset W$ . Pour ne pas confondre avec la notion de régularité introduite dans A 20, on dira par abus de langage que  $\varphi$  est une application polynômiale.

**A 19**

Une application polynômiale de  $V$  dans  $W$  est continue pour la topologie de Zariski.

**A 20**

Un point  $x$  dans  $V$  est dit point régulier de  $\varphi$  si  $x \in R_V$ ,  $\varphi(x) \in R_W$  et la restriction de  $\varphi$  à  $R_V$  est de rang  $\dim W$  au point  $x$ . Les points non réguliers de  $\varphi$  sont appelés points critiques de  $\varphi$ , et leurs images sont appelées valeurs singulières de  $\varphi$ .

**A 21. CRITÈRE DE JACOBIEN [22]**

Supposons que  $\dim V = m$ ,  $\dim W = n$ ,  $x \in R_V$  et  $\varphi(x) \in R_W$ ; soit  $F_1, \dots, F_k$  une partie génératrice de l'idéal de  $V$ ; alors  $x$  est un point régulier de  $\varphi$  si et seulement si :

$$\text{rg} \left( \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right) \right) = M - m + n$$

Ce critère est utile parce que  $\varphi$  est donnée sur tout  $\mathbb{R}^M$  et  $V$  est définie par des équations.

Quand  $V = \mathbb{R}^M$  la partie  $\left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)$  n'a pas lieu d'être.

**A 22 THÉORÈME DE TARSKI-SEIDENBERG [32]**

L'image d'une variété algébrique par une application polynômiale est un ensemble semi-algébrique.

**A 23**

Soit  $\varphi$  une application polynômiale de la variété algébrique  $V$  dans la variété algébrique  $W$ . On dit que  $\varphi$  est dominante si  $W$  est la fermeture de Zariski de  $\varphi(V)$ .

Il revient au même de dire que  $\varphi(V)$  contient un ouvert non vide de  $R_W$  ou que  $\varphi$  admet un point régulier; cela se voit facilement en utilisant (A 16), (A 17) et (A 22).

Notons qu'on a alors nécessairement :

$$\dim V \geq \dim W.$$



Soit  $G$  l'ensemble des points critiques de  $\varphi$  et  $y$  un point de  $W - \varphi(G)$ , alors  $\varphi^{-1}(y)$  est un ensemble algébrique de dimension

$$\dim V - \dim W.$$

Que ce soit un ensemble algébrique est évident; pour la dimension on peut restreindre  $\varphi$  à  $R_V - (\varphi^{-1}(\Sigma_W) \cup G)$  qui est une sous-variété analytique de  $R_V$ ; l'image de cette sous-variété par  $\varphi$  est dans  $R_W$ ; on applique par conséquent le résultat connu pour les variétés analytiques (J. Dieudonné [7]):  $\varphi^{-1}(y)$  est une variété analytique de dimension

$$\dim V - \dim W$$

on conclut en utilisant (A 12).

Notons comme conséquence que si  $\dim V = \dim W$  alors  $\text{card } \varphi^{-1}(y) < \infty$ .

#### A 24

Soit  $V$  une variété algébrique lisse,  $\varphi$  une application polynômiale dominante de  $V$  dans une variété algébrique  $W$ ; notons  $G$  l'ensemble des points critiques de  $\varphi$ . Alors  $\varphi(G)$  est contenu dans un ensemble algébrique de dimension strictement inférieure à  $\dim W$ .

Pour la démonstration, on note que  $G$  est un ensemble algébrique puisqu'il apparaît comme réunion de  $\varphi^{-1}(\Sigma_W)$  et de l'ensemble des zéros d'une famille de polynômes (des mineurs du jacobien). Sa dimension est strictement inférieure à  $\dim V$  car  $\varphi$  est dominante.  $\varphi(G)$  est un semi-algébrique (A 22) soit  $L$  sa fermeture de Zariski. Si  $L = W$ ,  $L$  contiendrait un ouvert de  $R_W$  et  $\varphi(G)$  également d'après (A 16) et (A 17), mais cela contredirait le théorème de Sard pour les variétés analytiques [7].

Comme conséquence on a :

#### A 25

Si  $\varphi$  est une application polynômiale dominante d'une variété algébrique lisse  $V$  dans une variété algébrique  $W$  alors :

$$\dim W = \text{Max}_{x \in V} \text{rg}(D\varphi)(x).$$

#### A 26. THÉORÈME DE LA FIBRE LOCALEMENT TRIVIALE [11]

Soit  $\varphi$  une application polynômiale dominante d'une variété algébrique  $V$  dans une variété algébrique  $W$ ; alors il existe un ensemble algébrique  $Z$  dans  $W$  de dimension strictement inférieure à  $\dim W$  tel que tout point  $y$  dans  $W - Z$  possède un voisinage ouvert  $U$  de sorte que pour tout  $x \in U$ ,  $\varphi^{-1}(x)$  et  $\varphi^{-1}(y)$  soient homéomorphes.

En particulier, quand  $\dim V = \dim W$  et  $y$  est une valeur régulière de  $\varphi$  alors il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $y$  dans  $W$  tel que pour tout  $x$  dans  $U$  on ait :

$$\text{card } \varphi^{-1}(x) = \text{card } \varphi^{-1}(y) < \infty$$

[il suffit d'utiliser (A 23)].

## A 27. RÉSOLUTION DES SINGULARITÉS [12]

Soit  $V$  une variété algébrique dans  $\mathbb{R}^m$  de dimension  $m$ . Alors il existe une variété analytique  $\hat{V}$  de dimension  $m$  et une application analytique  $l$  de  $\hat{V}$  dans  $\mathbb{R}^m$  telle que :

- (i)  $l(\hat{V}) = V$ ;
- (ii)  $l$  est une application propre de  $\hat{V}$  sur  $V$  (i.e. l'image réciproque de tout compact est compacte).

## RÉFÉRENCES

- [1] H. AKAIKE, Markovian Representation of Stochastic Processes, *Ann. Inst. Stat. Math.*, vol. **26**, 1974, p. 363-387.
- [2] R. AZENCOTT et D. DACUNHA-CASTELLE, *Séries d'observations irrégulières*, Masson, Paris, 1984.
- [3] J. R. BLUM, D. L. HANSON et L. H. KOOPMANS, On the Strong Law of Large Numbers for a Class of Stochastic Processes, *Z. Wahr. Verw. Gebiete*, vol. **2**, 1963, p. 1-11.
- [4] Th. BRÖCKER, *Differentiable Germs and Catastrophes*, Cambridge University Press, 1975.
- [5] Y. A. DAVYDOV, Mixing Conditions for Markov Chains, *Theor. Prob. Appl.*, vol. **28**, 1973, p. 313-328.
- [6] H. DELFS et M. KNEBUSH, Semi Algebraic Topology Over a Real Closed Fields I et II, *Math. Zeit.*, vol. **177**, 1981, p. 107-129 et vol. **178**, 1981, p. 175-213.
- [7] J. DIEUDONNÉ, *Éléments d'analyse*, t. III, Gauthier-Villars, Paris, 1970.
- [8] J. L. DOOB, *Stochastic Processes*, Wiley, New York, 1953.
- [9] V. V. GORODETSKI, On the Strong Mixing Property for Linear Sequences, *Theor. Prob. Appl.*, vol. **22**, 1977, p. 411-413.
- [10] P. HALL et C. C. HEYDE, *Martingale Limit Theory and its Application*, London Academic, 1980.
- [11] R. M. HARDT, Semi Algebraic Local Triviality in Semi Algebraic Mappings, *Am. J. Math.*, vol. **102**, 1980, p. 291-302.
- [12] H. HIRONAKA, Resolution of Singularities of an Algebraic Variety, I-II, *Ann. Math.*, vol. **79**, 1964, p. 109-326.
- [13] I. A. IBRAGIMOV et Y. V. LINNIK, *Independent and Stationary Sequences of Random Variables*, Walth-Noordhoof Publishing Gröningen, 1974.
- [14] I. A. IBRAGIMOV et Y. ROZANOV, *Processus aléatoires gaussiens*, MIR, Moscou, 1974.
- [15] N. JAIN et B. JAMISON, Contributions to Doebelin's Theory of Markov Processes, *Z. Wahr. Verw. Gebiete*, vol. **8**, 1967, p. 19-40.
- [16] T. Y. LAM, An Introduction to Real Algebra, *Rocky Mountain J. Math.*, vol. **14**, 1984, p. 4.
- [17] S. LOJASIEWICZ, *Ensembles semi-analytiques*, multigraphie de l'I.H.E.S., Bures-sur-Yvette, 1965.
- [18] A. MOKKADEM, Sur le mélange d'un processus ARMA vectoriel, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 303, série I, 1986, p. 519-521.
- [19] A. MOKKADEM, Mixing Properties of ARMA Processes, *Stoch. Proc. Appl.*, vol. **29**, 1988, p. 309-315.
- [20] A. MOKKADEM, Sur un modèle autorégressif non linéaire, ergodicité et ergodicité géométrique, *J.T.S.A.*, vol. **8**, 1987, p. 195-204.
- [21] A. MOKKADEM, Conditions suffisantes d'existence et d'ergodicité géométrique des modèles bilinéaires, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 301, série I, 1985, p. 375-377.

- [22] D. MUMFORD, *Algebraic Geometry I, Complex Projective Varieties*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [23] J. NASH, Real Algebraic Manifolds, *Ann. Math.*, vol. **56**, 1952, p. 405-421.
- [24] E. NUMMELIN et P. TUOMINEN, Geometric Ergodicity of Harris Recurrent Markov Chains, *Stoch. Proc. Appl.*, vol. **12**, 1982, p. 187-202.
- [25] S. OREY, *Limit Theorems for Markov Chain Transition Probabilities*, Van Nostrand, London, 1971.
- [26] T. D. PHAM et L. T. TRAN, Some Mixing Properties of Time Series Models, *Stoch. Proc. Appl.*, vol. **19**, 1986, p. 297-303.
- [27] T. D. PHAM, Bilinear Markovian Representation and Bilinear Models, *Stoch. Proc. Appl.*, vol. **20**, 1985, p. 295-306.
- [28] M. Q. PHAM, *Introduction à la géométrie des variétés différentiables*, Dunod, Paris, 1969.
- [29] D. REVUZ, *Markov Chains*, North Holland, Amsterdam, 1984.
- [30] M. ROSENBLATT, *Markov Processes, Structure and Asymptotic Behaviour*, Springer, Berlin, 1971.
- [31] M. ROSENBLATT, A Central Limit Theorem and a Strong Mixing Condition, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. **42**, 1956, p. 43-47.
- [32] A. SEIDENBERG, A New Decision Method for Elementary Algebra, *Ann. Math.*, vol. **2**, 1952, p. 365-374.
- [33] H. TAKAHATA,  $L_\infty$  Bounds for Asymptotic Normality of Weakly Dependent Summands Using Stein's Methods, *Ann. Prob.*, vol. **9**, 1981, p. 676-683.
- [34] A. N. TIKHOMIROV, On the Convergence Rate in the Central Limit Theorem for Weakly Dependent Random Variables, *Theor. Prob. Appl.*, vol. **25**, 1980, p. 790-809.
- [35] R. L. TWEEDIE, Sufficient Conditions for Ergodicity and Recurrence of Markov Chains, *Stoch. Proc. Appl.*, vol. **3**, 1975, p. 385-403.
- [36] R. L. TWEEDIE, The Existence of Moments for Stationary Markov Chains, *J. Appl. Prob.*, vol. **20**, 1983, p. 191-196.
- [37] F. W. WARNER, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Singer, MIT, 1971.
- [38] H. WHITNEY, Elementary Structure of Real Algebraic Varieties, *Ann. Math.*, vol. **66**, 1957, p. 545-556.
- [39] C. S. WITHERS, Conditions for Linear Processes to be Strong Mixing, *Z. Wahr. Verw. Gebiete*, vol. **57**, 1981, p. 481-494.
- [40] R. YOKOYAMA, Moments Bounds for Stationary Mixing Sequences, *Z. Wahr. Verw. Gebiete*, vol. **52**, 1980, p. 45-57.
- [41] Y. ROZANOV, *Stationary Random Processes*, Holden Day Series, 1967.
- [42] E. BECKER, On the Real Spectrum of a Ring and its Applications to Semi Algebraic Geometry, *Bull. A.M.S.*, vol. **15**, 1986, p. 19-60.

(Manuscrit reçu le 8 décembre 1987)

(corrigé le 12 décembre 1989.)