

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. DERMOUNE

Distributions sur l'espace de P. Lévy et calcul stochastique

Annales de l'I. H. P., section B, tome 26, n° 1 (1990), p. 101-119

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1990__26_1_101_0>

© Gauthier-Villars, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Distributions sur l'espace de P. Lévy et calcul stochastique

par

A. DERMOUNE

U.A.213. Tour 46, Université Paris 6, 4, place Jussieu 75230 Paris cedex 05, France

RÉSUMÉ. — Récemment le calcul des distributions sur l'espace de Wiener (resp. sur l'espace de Poisson) a permis quelques extensions du calcul stochastique relatif au brownien sur $[0, 1]$: [D. OC. 84] [D. NU, E. PA. 86] [A. S. US. 85] (et resp. [A. DE, P. KR. et L. Wu 88]). Le but du présent travail est de combiner ces deux types de résultats et [P. KR. 88] pour étudier d'abord les distributions sur l'espace de P. Lévy d'un P.A.I. centré du second ordre (X_t) sur $\mathbb{R}_+ =]0, \infty[$, admettant une version cadlag et sans discontinuité fixe. Puis ces résultats sont utilisés pour étendre le calcul stochastique par rapport à un tel P.A.I.

Mots clés : I.S.M. = intégrale stochastique multiple, P.A.I. = processus à accroissement indépendant.

ABSTRACT. — Recently the calculus of distributions on Wiener space (resp. on Poisson space) has allowed to study some extensions of stochastic calculus relative to brownien (resp. relative to the Poisson processes), [D. OC. 84], [D. NU, E. PA. 86], [A. S. US. 85] (and resp. [A. DE, P. KR. et L. WU 88]). The aim of this work is to combine these two kinds of results and to study at first the distributions on P. Lévy space of centred P.A.I. with second order (X_t) on $\mathbb{R}_+ =]0, +\infty[$, and assuming a cadlag's version and without a fixed discontinuities. Then these results are used in order to extend the stochastic calculus in comparison with such P.A.I.

Classification A.M.S. : 60 H 99.

1. INTRODUCTION

Récemment le calcul des distributions sur l'espace de Wiener (resp. sur l'espace de Poisson) a permis d'étudier quelques extensions du calcul stochastique relatif au brownien B_t (resp. relatif aux processus de Poisson Y_t marqué sur $[0, 1]$): [OC. D 84] [NU. D, PA. E 86] [US. A. S. 85] (et resp. [DE. A, KR. P, WU. L. 88]). Le but du présent travail est de combiner ces deux types de résultats et [KR. P 88] pour étudier d'abord les distributions sur l'espace de P. Lévy d'un P.A.I. centré du second ordre (X_t) sur $\mathbb{R}_+ =]0, +\infty[$ admettant une version cadlag et sans discontinuités fixes *i. e.* pour tout $t > 0$, $P(\Delta X_t \neq 0) = 0$. Puis ces résultats sont utilisés pour étendre le calcul stochastique par rapport à un tel P.A.I.

Le reste de cette introduction consiste à décrire l'espace de P. Lévy associée à un tel processus X supposé fixé une fois pour toute

(1.1) *Les mesures stochastiques.* D'après P. Lévy, on peut caractériser un tel processus X par une mesure stochastique indépendante M sur $Z = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$; M est formée de deux parties indépendantes M' et $M'' = p$ concentrées resp. sur $Z' = \mathbb{R}_+ \times \{0\}$ et sur $Z'' = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_*$. La partie gaussienne M' est caractérisée par une fonction continue croissante σ sur \mathbb{R}_+ ; elle réalise une isométrie

$$(1.2) \quad H' = L^2(\mathbb{R}_+, d\sigma) \xrightarrow{M'} L^2(\Omega).$$

Introduisant le « brownien » $B_t = M'(1_{(0,t]})$ on peut écrire $M' = dB$.

La partie poissonnienne centrée $q(dt, du)$ de M est caractérisée par une mesure positive ν sur Z'' qui intègre la fonction $1_{]0,t]} \times u^2$ pour tout t fini. On dit que ν est la mesure de Lévy du processus X_t et $q = p - \nu$ réalise une isométrie $H'' = L^2(Z'', d\nu) \rightarrow L^2(\Omega)$.

En conclusion pour tout borélien E de Z tel que

$$(1.3) \quad \int_{E \cap Z'} d\sigma(t) + \iint_{E \cap Z''} \nu(dt, du) < \infty$$

$$\text{on a } M(E) = \int_{E \cap Z'} dB(t) + \iint_{E \cap Z''} q(du, dt).$$

D'où la représentation de Lévy . . .

$$(1.4) \quad t \rightarrow X_t = \int_0^t dB(u) + \iint_{]0,t] \times \mathbb{R}_*} uq(du, dt).$$

C'est une martingale de carré intégrable dont le crochet oblique est le processus déterministe :

$$(1.5) \quad t \rightarrow \langle X \rangle_t = \sigma(t) + \iint_{]0,t] \times \mathbb{R}_*} y^2 d\nu(ds, dy).$$

Posons $K = L^2(\mathbb{R}_+, d\langle X \rangle_t)$ et $H = H' \oplus H''$.

Introduisant l'isométrie linéaire

$$(1.6) \quad K \ni f = f(s) \xrightarrow{i} f + f \otimes \text{Id}_{\mathbb{R}_*} = f(s) + f(s) y \in H$$

la représentation de P. Lévy peut être réécrite

$$(1.7) \quad t \rightarrow X_t = M(i \mathbf{1}_{(0, t]}) = M'(\mathbf{1}_{(0, t]}) + M''(\mathbf{1}_{(0, t]}(s) y).$$

(1.8) *L'espace de Paul Lévy* $\Omega = \Omega' \times \Omega''$ de X .

Cet espace est l'espace probabilisé canonique associé au processus X et à cette représentation de P. Lévy. On modélise la partie poissonnienne M'' par une probabilité de Poisson P'' sur l'espace $\Omega'' = M_p(Z'')$ des mesures ponctuelles $\omega = \sum_i \delta_{t_i, y_i}$ sur Z'' qui pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier n sont

bornées sur $\{(t, y) \in Z'', 0 < t \leq n \text{ et } |y| > \varepsilon\}$. L'espace Ω'' est muni de sa topologie polonaise usuelle et de la mesure de Poisson P'' d'intensité ν .

L'espace vectoriel engendré par Ω'' est noté $\text{Vect } \Omega''$. Il est en dualité avec l'espace $U'' = E t(Z'')$ engendré par les indicatrices $\mathbf{1}_{[0, s] \times A}$, avec A borélien de \mathbb{R}_* . Cette dualité est notée $U'' \dots \text{Vect } \Omega''$. Cet espace U'' est dense dans l'espace de Hilbert H'' . $E t(Z'')$ est en dualité avec $\text{Vect } \Omega''$ et engendre la tribu borélienne de Ω'' . L'espace $P_n(\Omega'')$ des polynômes cylindriques homogènes de degré n sur Ω'' est défini pour $n=1$ comme engendré par les restrictions à Ω'' des formes linéaires $x \rightarrow x([0, s] \times A)$ et pour $n \geq 1$ comme l'espace engendré par les puissances n^o de ces formes.

On pose $P(\Omega'') = \sum_0^\infty P_n(\Omega'')$.

Pour définir l'espace probabilisé gaussien (Ω', P') modélisant $M' = dB$, introduisons d'abord l'espace de Wiener associé à B :

$$(U' \dots \Omega', P').$$

Cela signifie que $\underline{\Omega}'$ est l'espace de Fréchet des fonctions réelles continues sur \mathbb{R}_+ nulles pour $t=0$, $\underline{\Omega}'$ est naturellement en dualité avec l'espace U' engendré par les mesures de Dirac δ_s sur \mathbb{R}_+ ($s > 0$) et que la mesure gaussienne \underline{P}' sur $\underline{\Omega}'$ a pour forme bilinéaire de covariance est si $s \leq t$:

$$\underline{U}' \times \underline{U}' \ni (\delta_s; \delta_t) \rightarrow \langle \delta_s, \delta_t \rangle = E(B_s B_t) = \int_0^s d\sigma(u)$$

L'espace gaussien cherché $(U' \dots \Omega', P)$ est l'espace gaussien isomorphe déduit du précédent par l'application bijective $\beta, \underline{\Omega}' \rightarrow \Omega' \subset \mathcal{D}'$ induite par la dérivation au sens des distributions. Donc Ω' est l'espace des dérivées distributions de toutes les $x \in \underline{\Omega}'$, $P' = \beta(\underline{P}')$, et

$$U' = E t(\mathbb{R}_+) = \text{Vect} \{ \mathbf{1}_{(0, s]}, s > 0 \}$$

est l'espace des fonctions étagées sur \mathbb{R}_+ , le produit scalaire de la covariance sur U' est induit par H' .

L'espace de P. Lévy relatif à X étant un produit d'espaces probabilisés

$$(1.9) \quad (U' \times U'' \dots \Omega' \times \text{Vect } \Omega'', P' \otimes P'')$$

Un autre intérêt du présent travail est de montrer comment travailler avec les distributions sur un tel produit, ce qui peut être utile dans d'autres situations.

(1.10) *Terminons l'introduction par quelques rappels sur l'espace de Fock d'un espace de Hilbert H.*

(a) L'espace de Fock de H est défini ici comme la somme hilbertienne

$$(1.11) \quad \text{Fock H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} S_n(H)$$

où $S_n(H)$ est le produit tensoriel hilbertien symétrique d'ordre n de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$; tandis que $\sqrt{n!} S_n(H)$ désigne le même espace vectoriel, mais dont la norme a été multipliée par $(n!)^{1/2}$. L'emploi des distributions amène à sortir de L^2 , donc aussi à sortir de l'espace de Fock. Il est donc prudent d'habiller le Fock avant de sortir :

(b) Habillage du Fock associé à tout sous-espace dense U de H . Le dual du produit tensoriel symétrique (non complété ici) $S_n(U)$ de U est l'espace $\text{Pol}_n(U)$ des polynômes homogènes Q de degré n sur U . On décide de prendre la dualité $\langle Q, x^{\otimes n} \rangle = n! Q(x^n)$ entre $S_n(U)$ et son dual. Il ne faut pas oublier que pour calculer la valeur $Q(x^n)$ de Q en x , le terme $n!$ n'intervient pas, d'où pour tout n un triplet $S_n(U) \subset \sqrt{n!} S_n(H) \subset \text{Pol}_n(U)$. Faisons varier n et prenons la somme directe des espaces internes de ces triplets, et la somme hilbertienne des espaces médians. Il vient ainsi le triplet suivant d'habillage du Fock :

$$(1.12) \quad S(U) = \sum S_n(U) \subset \text{Fock H} \subset \text{Pôl}(U)$$

où $\text{Pôl}(U) = \prod \text{Pol}_n(U)$ est l'espace des séries formelles sur U . Nous sommes ainsi amené à une interprétation *globale* (et non plus terme à terme) de toute $F = \sum F_n \in \text{Fock H}$ comme une série formelle $F(z) = \sum F_n(z^n)$ sur U . Par exemple pour tout u fixé $\in U$, l'exponentielle $\exp u = \sum u^{\otimes n}/n!$ est vue maintenant comme la fonction $z \rightarrow \exp \langle u, z \rangle$ sur U et l'on a la formule suivante pour tout $F \in \text{Fock H}$ et tout $z \in H$

$$(1.13) \quad F(z) = \langle F, \exp z \rangle_{\text{Fock}}.$$

Je remercie P. A. Meyer pour des commentaires très utiles sur une première version de ce travail et P. Krée pour l'aide qu'il m'a apportée.

2. RELATION ENTRE L'ISOMÉTRIE DÉFINIE PAR I.S.M. ET L'ISOMÉTRIE DE DÉCOMPOSITION EN CHAOS DES P.A.I.

(2.1) Isométries définies par I.S.M. [ME. P. A. 75]

L'isométrie définie par intégrales stochastiques multiples (I.S.M.) associée à (X_+) est l'isométrie

$$I = (I_k) : \text{Fock } K \rightarrow L^2(\Omega)$$

qui est telle que pour tout $k \geq 1$ et pour toute suite de k intervalles $J(j) =]t_j, t'_j]$ disjoints, on a :

$$(2.2) \quad I_k(J(1) \times \dots \times J(k)) = \prod_{j=1}^k I_1(J(j)),$$

où $I_1(J(j)) = X(t'_j) - X(t_j)$.

Par exemple dans le cas où X est un mouvement Brownien ou un Processus de Poisson, on obtient une isométrie bijective I dite de décomposition en chaos. Il faut étendre ce procédé I.S.M. [SU 84] pour définir la décomposition en chaos des mesures ponctuelles de Poisson dont l'intensité est régulière. Par exemple pour la partie brownienne B et pour la partie poissonnienne M'' de la mesure stochastique M associée au P.A.I. X décrit dans l'introduction, on a deux isométries bijectives

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \text{Fock } L^2(\mathbb{R}_+, d\sigma) &\xrightarrow{I'} L^2(\Omega') \\ \text{Fock } L^2(Z'', \nu) &\xrightarrow{I''} L^2(\Omega''). \end{aligned}$$

Par la suite on considère les deux espaces $L^2(\Omega')$ et $L^2(\Omega'')$ comme plongés dans $L^2(\Omega)$ avec $\Omega = \Omega' \times \Omega''$.

Il faut encore une autre extension de l'isométrie définie par I.S.M. pour définir la décomposition en chaos des P.A.I.S. [IT. K. 56], celle-ci n'étant plus définie par la collection des applications I_k définie en (2.2). De plus une relation importante entre cette décomposition en chaos avec I' et I'' n'est pas explicitée dans [IT. K 56] et il faut généraliser sa construction dans le cas non stationnaire. Dans ce contexte, il est commode (ne serait-ce que pour y voir plus clair), d'introduire une définition générale des décompositions en chaos et d'utiliser quelques propriétés correspondantes [KR. P. 88].

(2.4) Définition des décompositions en chaos

Soit U un espace vectoriel, et M un processus linéaire $U \rightarrow L^2(\Omega)$ admettant des moments de tous les ordres. On suppose que la forme

bilinéaire de covariance de M

$$(2.5) \quad U \times U \ni (u; v) \rightarrow E[(Mu - E(Mu))(Mv - E(Mv))]$$

est non dégénérée *i. e.* définit un produit scalaire sur U. L'espace hilbertien stochastique H de M est défini comme le complété de U pour ce produit scalaire. On dit que l'espace $L_M^2(\Omega)$ des classes L^2 mesurables par rapport à la tribu engendrée par M admet une décomposition en chaos si les deux conditions suivantes sont vérifiées

(a) D'une part si les variables $(Mu)^k$ avec $u \in U$, $k=0, 1, \dots$ forment un système total dans $L_M^2(\Omega)$. Par conséquent seulement sous cette condition (a), appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la suite des sous-espaces $P_k = \text{Vect} \{ (Mu)^k, u \in U \}$ on obtient une suite (C_k) de sous-espaces fermés de $L_M^2(\Omega)$ tels que $C_0 = \mathbb{R}$, $C_1 \equiv H$.

$$(2.6) \quad \forall k, \quad \bar{P}_{\leq k} = \bigoplus_{j=0}^k C_j \quad \text{et} \quad L_M^2(\Omega) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} C_j.$$

(b) Notons Π_k le projecteur orthogonal de $L^2(\Omega)$ d'image $\bar{P}_{\leq k}$ l'application suivante est isométrique pour tout $k \geq 1$

$$(2.7) \quad \sqrt{k!} S_k(H) \supset S_k(U) \ni t \xrightarrow{I_k} t - \Pi_k t \in C_k.$$

La collection des prolongements continus (notés toujours I_k) de ces isométries fournit donc une isométrie $I = (I_k)$ de Fock H sur $L_M^2(\Omega)$ dont l'inverse I^{-1} est appelée la transformation chaotique.

(2.8) Vérifions que I' et I'' sont des décompositions en chaos dans le sens général

Pour I'' , le processus linéaire M'' est défini sur l'espace U'' et $M''(1_{(0,t] \times A}) = \rho([0, t] \times A)$, l'espace hilbertien stochastique est $H'' = L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_*, \nu)$.

Introduisons pour tout $k > 0$ le sous-espace

$$(2.9) \quad T_k(U'') = \text{vect} \left\{ \begin{aligned} & \bigotimes_{j=1}^k \mathbf{1}_{J(j) \times A_j} = \prod_{j=1}^k \mathbf{1}_{J(j) \times A_j} \\ & J(j) =]t_j, t'_j], t_1 < t'_1 \leq \dots < t'_k, \\ & A_j \text{ des boréliens de } \mathbb{R}_*, \text{ avec } \nu(J(j) \times A_j) < +\infty \end{aligned} \right\}$$

de $L^2((\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_*)^k, \nu^{\otimes k})$.

Comme ν ne charge pas les points de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_*$, alors $\text{Sym}(T_k(U''))$, le sous-espace de $T_k(U'')$ des tenseurs symétriques est dense dans $S_k(H'')$. On

sait [SU. D 84] que les applications suivantes sont isométriques pour $k > 1$

$$(2.10) \quad \sqrt{k!} S_k(H'') \supset \text{Sym}(T_k(U'')) \ni \mathcal{O} \\ = \text{Sym} \left(\bigotimes_{j=1}^k \mathbf{1}_{J(j) \times A_j} \right) \xrightarrow{I_k''} \prod_{j=1}^k q(J(j) \times A_j) \in L_{M''}^2(\Omega)$$

et que de plus $I_k'' = I_k$.

Un raisonnement analogue vaut pour la partie brownienne $M' = dB$.

(2.11) **Définissons la décomposition en chaos liée au processus X à accroissements indépendants étudié**

C'est la décomposition en chaos de l'espace L^2 du processus linéaire

$$(2.12) \quad U = (U', U'') \xrightarrow{M=M'+M''} L^2(\Omega).$$

Plus précisément on peut vérifier en imitant [IT.K 56] que l'on a une décomposition en chaos au sens usuel.

Une autre méthode qui éclaire ce calcul consiste à dire que $L_{M'}^2$ et $L_{M''}^2$ admettant des isométries I' et I'' de décomposition en chaos, et M' et M'' étant indépendants, il en résulte d'une manière générale deux choses. D'abord L_M^2 admet une isométrie $I(M)$ de décomposition en chaos; de plus $I(M)$ est le produit tensoriel de I' et de I'' . D'où

$$(2.13) \quad \text{Fock}(H) \xrightarrow{I(M)=I' \otimes I''} L^2(\Omega).$$

Le théorème qui suit explicite le lien entre cette décomposition en chaos de la mesure M et l'isométrie I définie par I.S.M. associée à la martingale (X_t) .

(2.14) **THÉORÈME 1.** — *Soit X un P.A.I. comme dans l'introduction, i l'isométrie $K \rightarrow H$ définie en (1.6) et $\Gamma(i)$ la contraction correspondante entre espaces de Fock. Alors le diagramme suivant est commutatif*

$$(2.15) \quad \begin{array}{ccc} \text{Fock}(H) & \xrightarrow{I(M)} & L^2(\Omega) \\ \Gamma(i) \uparrow & & \uparrow I \\ & & \text{Fock}(K) \end{array}$$

Preuve. — Plaçons nous en un degré k fixé et considérons des intervalles disjoints $J(j) =]t_j, t'_j]$, $1 \leq j \leq k$ avec $t_1 < t'_1 \leq t_2 < \dots \leq t_k < t'_k$. Vue la densité dans $L^2(Q_k)$ de l'espace engendré par $\mathbf{1}_{J(1) \times \dots \times J(k)}$, il suffit de montrer que:

$$\mathcal{O} = \bigotimes_{j=1}^k \mathbf{1}_{J(j)} \Rightarrow I_k(\mathcal{O}) = I_k(M)(\Gamma(i)\mathcal{O}).$$

Or $\Gamma(i)\mathcal{O} = \text{sym}[(\mathbf{1}_{J(1)} + \mathbf{1}_{J(1)} \otimes \text{Id}_{\mathbb{R}_*}) \otimes \dots \otimes (\mathbf{1}_{J(k)} + \mathbf{1}_{J(k)} \otimes \text{Id}_{\mathbb{R}_*})]$.

En développant ce produit dans $S_k(H)$ il vient :

$$= \sum_{\alpha \subset \{1, \dots, k\}} \text{sym}[(\otimes_{m \in \alpha} \mathbf{1}_{J(m)}) \otimes (\otimes_{m' \in \alpha^c} \mathbf{1}_{J(m')} \otimes \text{Id}_{\mathbb{R}_*})]$$

où $\alpha^c = \{1, \dots, k\} \setminus \alpha$.

Comme $I(M) = I' \otimes I''$ il vient

$$\begin{aligned} I_k(M)(\Gamma(i)\mathcal{O}) &= \sum_{\alpha \subset \{1, \dots, k\}} \prod_{m \in \alpha} M'(J(m)) \prod_{m' \in \alpha^c} M''(\mathbf{1}_{J(m')} \otimes \text{Id}_{\mathbb{R}_*}) \\ &= \prod_{j=1}^k [M'(J(j)) + M''(\mathbf{1}_{J(i)} \otimes \text{Id}_{\mathbb{R}_*})] = I_k(\mathcal{O}). \end{aligned}$$

et le théorème est démontré. Voyons un corollaire.

(2.16) COROLLAIRE. — Soit (X_t) un processus à accroissement indépendant sur \mathbb{R}_* satisfaisant aux conditions de l'introduction. Alors avec les notations du théorème 1, I est surjective si et seulement si il existe une mesure positive ρ sur \mathbb{R}_+ étrangère par rapport à $d\sigma$ et s'il existe une fonction mesurable $u: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_*$ telle que l'on ait l'égalité de mesures

$$(2.17) \quad \nu(dt, dv) = \rho(dt) \otimes \delta_{u(t)}(dv).$$

Autrement dit l'espace L^2 de la martingale X admet une décomposition en chaos ssi il n'y a pas vraiment de mélange entre partie gaussiennes et poissonniennes : X sautant constamment entre un état purement brownien et un état de processus de Poisson pur.

Preuve du corollaire. — Vu le théorème 1, I est la composée de l'injection isométrique $\Gamma(i)$ avec la bijection isométrique $I(M)$. Par conséquent I est surjective ssi $\Gamma(i)$ est surjective, autrement dit ssi i est surjective i. e. :

$$\forall (f, g) \in H, \exists h \in K, \quad f(t) + g(t, y) = h(t) + h(t)y.$$

Donc $h = f$ et $g(t, y) = h(t)y$ v-presque sûrement.

En prenant en particulier pour g l'indicatrice d'un pavé $\varpi = [a, b] \times [c, d]$ et $f = \mathbf{1}_{(a,b)}$ il vient que $1 \equiv y h(t)$ sur ϖ . Comme $y \neq 0$, on a $h(t) \neq 0$ et $y = h(t)^{-1}$ est v-presque sûrement une fonction de t d'où le résultat :

(2.18) Remarque. — Le problème de savoir si pour toute martingale de carré intégrable l'implication suivante est vraie :

(2.19) propriété de représentation prévisible \Rightarrow propriété de décomposition en chaos reste ouvert, l'implication inverse est toujours vraie. Cependant le corollaire 2.16 combiné avec le paragraphe III qu'on va voir, montre que cette implication est vraie pour tout P.A.I. du second ordre, sans discontinuités fixes, à trajectoires cadlag.

3. DISTRIBUTIONS SUR L'ESPACE DE P. LÉVY

Vu 2, l'espace L^2 de l'espace de P. Lévy de (X_t) à la propriété de décomposition en chaos au sens de la partie 2. Le travail [KR. P. 88] donnant la théorie de distributions vectorielles pour tous les espaces «chaotiques», cette théorie s'applique ici. En particulier le calcul différentiel correspondant au sens des distributions, est identique au calcul différentiel relatif aux espaces gaussiens publié en 1975 [KR. P 74-75], [KR. M 74-77], [LA. B 75-76]. Voir aussi [ST. D. W 81], [ST. D. W 87]. On explique rapidement comment ceci se met en œuvre ici.

(3.1) Distributions vectorielles

Le processus X étant fixé comme dans l'introduction il lui correspond d'abord un espace gaussien (Ω', P') . L'inverse I^{-1} de la décomposition en chaos de (Ω', P') fournit un isomorphisme de triplets.

$$(3.2) \quad \begin{array}{ccccc} P(\Omega') \subset L^2(\Omega') \subset P(\Omega')^* & & & & \\ \downarrow \simeq & \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow I^{-1} & \\ S(U') \subset \text{Fock } H' \subset \hat{P}(\hat{U}') & & & & \end{array}$$

Pour étudier la dérivation ∇^k d'ordre k au sens des distributions, on tensorise ces deux triplets avec le triplet $S_k(U') \hookrightarrow S_k(H') \hookrightarrow \text{Pol}_k(U')$. Tout élément f de l'espace de distributions vectorielles qui apparaît ainsi

$$(3.3) \quad (P(\Omega') \otimes S_k(U'))^* = L(S_k(U'), P(\Omega')^*)$$

a une interprétation probabiliste très importante : c'est un processus généralisé $f(t_1, \dots, t_k)$ à k -places qui fournit par «intégration sur le cadran chronologique Q_k » une variable aléatoire [ME.P.A 88], [KR. P 88].

On a de même des triplets analogues pour l'espace (Ω'', P'') de Poisson. En remplaçant ainsi dans (3.2) les lettres Ω', U', H' par les lettres Ω'', U'', H'' on obtient un diagramme analogue (3.2)'. Puis par produit tensoriel de ces deux diagrammes, on obtient un diagramme (3.3) avec des lettres non primées Ω, U et H . Même chose pour les distributions vectorielles.

(3.4) Dérivation ∇^k et divergence δ^k au sens des distributions

Pour tout entier $k > 0$ fixé on a une formule d'intégration par parties avec ∇^k et δ^k . Détaillons le cas particulier $k = 1$. Informellement le gradient $\nabla = \nabla' \otimes \nabla''$ est le produit tensoriel de deux opérateurs de dérivation

partielle

$$(3.5) \quad \begin{array}{ccc} L^2(\Omega') & \xrightarrow{\nabla'} & L^2(\Omega', H') \\ \otimes & & \otimes \\ L^2(\Omega'') & \xrightarrow{\nabla''} & L^2(\Omega'', H'') \end{array}$$

Donc la divergence $\delta = \delta' + \delta''$ est la somme des divergences relatives resp. à la partie gaussienne et à la partie poissonienne. L'opérateur $N = N' \otimes N''$ de nombre de particules est le produit tensoriel des opérateurs correspondants N' et N'' relatifs à Ω' et à Ω'' resp.

(3.6) *Les espaces de Sobolev* scalaires $W^{p,k}(\Omega)$ ou vectoriels $W^{p,k}(\Omega, H)$ s'étudient naturellement à la Schwartz dans ce cadre, en prenant mot pour mot ce qui avait été fait en 1974-1975: ce sont les espaces des $f \in L^p(\Omega)$ [ou $L^p(\Omega, H)$] ayant k dérivées distributions dans L^p . Comme ils sont normaux et complets, il est clair qu'on peut les définir par complétion fonctionnelle. Une inégalité très utile est la continuité de la divergence

$$\|\delta f\|_{p,k} \leq C \|f\|_{p,k+1}.$$

Elle a été prouvée dans le cas gaussien par [LA.B 76] pour $p=2$, et par [KR.P 83] pour $1 < p < \infty$. La preuve de B. Lascar utilisant seulement les chaos, elle s'applique à tout espace chaotique.

4. APPLICATION À L'INTÉGRALE STOCHASTIQUE PAR RAPPORT À (X_t)

Il faut faire intervenir maintenant la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$, où $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$.

Comme les espaces $L^2(\Omega, K)$ et $L^2(\Omega, H)$ sont respectivement isomorphes à $L^2(\Omega) \otimes K$, et à $L^2(\Omega) \otimes H$, alors on a l'injection canonique $\text{Id} \otimes i$ de $L^2(\Omega, K)$ dans $L^2(\Omega, H)$, où Id désigne l'opérateur d'identité de $L^2(\Omega)$. Pour simplifier on désigne par i l'injection $\text{Id} \otimes i$.

Ainsi si u appartient à $L^2(\Omega, K)$, iu est le processus

$$(iu)(t, z) = u(t) + zu(t), \quad (t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}.$$

(4.1) THÉORÈME 2. — Soit u un processus prévisible défini sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ définissant une classe $u \in L^2(\Omega, K)$. Notons $\text{Int } u$ son intégrale de Ito.

Alors

$$(4.2) \quad \text{Int } u = \delta(iu).$$

Principe de la preuve. — Par approximation on se ramène au cas particulier d'un processus simple

$$u = (\xi' \otimes \xi'') \mathbf{1}_{]t, t']}$$

où $\xi' \in L^2(\Omega')$ est $\mathcal{F}'_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ -mesurable, $\xi'' \in L^2(\Omega'')$ est $\mathcal{F}''_t = \sigma(q([0, s] \times A), s \leq t, A \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n})$ -mesurable.

Par définition de Int :

$$\text{Int } u = (\xi' \otimes \xi'') M(i \mathbf{1}_{[t, t+1]}) = \xi' M'(\mathbf{1}_{[t, t+1]}) \otimes \xi'' + \xi' \otimes (\xi'' M''(\mathbf{1}_{[t, t+1]} z)).$$

Il suffit ensuite d'appliquer (3.5).

La question qui se pose maintenant est de déterminer l'image de Int et puis de trouver une formule d'inversion.

Énonçons tout d'abord le résultat suivant qui se démontre de la même façon que dans le cas du processus de Wiener.

LEMME. — Notons par $L^2 \text{ ad}(\Omega, K)$ l'espace des classes des processus adaptés (Z_t) avec $\|Z\|_{L^2(\Omega, K)}^2 = E \int_0^\infty (Z_t)^2 d\langle x \rangle_t < +\infty$, alors on a :

(a) $\|\delta(iZ)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|Z\|_{L^2(\Omega, K)}^2$
 (b) $\forall F = \sum_{n>0} I_n(M)(g_n) \in L^2(\Omega)$,

$$E[F | \mathcal{F}_t] = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(M)[g_n \mathbf{1}_{(0, t]} \otimes n).$$

(4.3) THÉORÈME 3. — Soit $f \in W^{2,1}(\Omega)$, f appartenant à l'image de l'opérateur Int. Alors notant ad l'opérateur d'adaptation dans $L^2(\Omega, K)$, i.e., $\text{ad}Z(t) = E[Z_t | \mathcal{F}_t]$, on a :

(4.4) $f = \delta((i \cdot \text{ad} \cdot i^T \cdot \nabla) f)$

où i^T désigne l'application transposée de i .

Preuve. — Soit $u \in L^2(\Omega, K)$ prévisible tel que $f = \text{Int } u$, par le théorème 2, on a $\text{Int } u = \delta(iu)$.

Alors pour tout processus $g \in L^2(\Omega, K)$

$$\begin{aligned} \langle u, g \rangle_{L^2(\Omega, K)} &= \langle u, \text{ad } g \rangle_{L^2(\Omega, K)} = \langle f, \delta(i \cdot \text{ad } g) \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle \nabla f, i \cdot \text{ad } g \rangle_{L^2(\Omega, H)} = \langle \text{ad } i^T \cdot \nabla \cdot f, g \rangle_{L^2(\Omega, K)} \end{aligned}$$

d'où le résultat qui ne surprend pas.

L'opérateur de projection de H sur K, étant le transposé i^T de i , notons Π l'opérateur $\text{id} \otimes i^T$ où Id est l'identité de Fock (H).

Pour tout entier $n \geq 1$, et pour tout $g_n \in H^{\circ n}$, g_n est aussi l'élément de $H^{\circ n-1} \otimes H \subset \text{Fock}(H) \otimes H$, et alors $\Pi g_n \in H^{\circ n-1} \otimes K$.

(4.5) THÉORÈME 4. — Soit $F \in L^2(\Omega)$ centré, et $F = \sum_{n \geq 1} I_n(M)(g_n)$ sa décomposition par I(M) donnée par (2.4). Alors F est une intégrale stochastique par rapport à (X_t) ssi :

(4.5) $\forall n \geq 1, g_n((t_1, z_1), \dots, (t_n, z_n))$
 $= n \text{sym}[(i \cdot \Pi g_n)((t_1, z_1), \dots, (t_n, z_n)) \mathbf{1}_{[0, t_n]}(t_1) \cdot \dots \cdot \mathbf{1}_{[0, t_n]}(t_{n-1})].$

Plus explicitement, si j est l'indice tel que $t_j = \max_{1 \leq k \leq n} t_k$, ceci s'écrit

$$(4.6) \quad g_n((t_1, z_1), \dots, (t_n, z_n)) \\ = \prod g_n((t_1, z_1), \dots, (t_{j-1}, z_{j-1}), (t_n, z_n), \dots, (t_j, z_j)) \\ + z_j \prod g_n((t_1, z_1), \dots, (t_{j-1}, z_{j-1}), (t_n, z_n), \dots, (t_j, z_j)).$$

Preuve. — Soit $F = \sum_{n \geq 1} I_n(H)(g_n)$ un élément de $L^2(\Omega)$ centré. D'après

(4.2), F est une intégrale stochastique par rapport à (X_t) si et seulement si, pour chaque entier n , $I_n(M)(g_n)$ l'est aussi.

Soit alors $n \geq 1$, $I_n(M)(g_n) \in W^{2,1}(\Omega)$, et par suite par le théorème 3, $I_n(M)(g_n)$ est intégrale stochastique par rapport à (X_t) ssi :

$$I_n(M)(g_n) = \delta(i \cdot \text{ad} \cdot i^T \cdot \nabla \cdot I_n(M)(g_n)).$$

Le processus $\nabla I_n(g_n)$ est définie par :

$$\nabla I_n(M)(g_n)(t, z) = n I_{n-1}(M)(g_n((t, z), \cdot)).$$

Alors

$$(i^T \cdot \nabla I_n(M)(g_n))(t) = n I_{n-1}(M)(\prod g_n(t, \cdot)),$$

et

$$(\text{ad} \cdot i^T \cdot \nabla I_n(M)(g_n))(t) = E[n I_{n-1}(M)(\prod g_n(t, \cdot)) | \mathcal{F}_t] \\ = n I_{n-1}(M)(\prod g_n(t, \cdot) 1_{[0, t]} \otimes n - 1).$$

Finalement

$$i \cdot I_{n-1}(M)(\prod g_n(t, \cdot) 1_{[0, t]} \otimes n - 1) = I_{n-1}(M)(i \cdot \prod g_n((t, z), \cdot) 1_{[0, t]} \otimes n - 1)$$

et

$$\delta[n I_{n-1}(M)((i \cdot \prod g_n)((t, z), \cdot) 1_{[0, t]} \otimes n - 1)] \\ = n I_n(M)[\text{sym}(i \cdot \prod g_n) 1_{[0, t_1]}(t_2) \dots 1_{[0, t_1]}(t_n)]$$

Ainsi

$$g_n(t_1, z_1), \dots, (t_n, z_n) \\ = n \text{sym}[(i \cdot \prod g_n)((t_1, z_1), \dots, (t_n, z_n)) 1_{[0, t_1]}(t_2) \dots 1_{[0, t_1]}(t_n)]$$

c.à.d. (4.5).

Or $(i \cdot \prod g_n)((t_1, z_1), \dots, (t_n, z_n)) 1_{[0, t_1]}(t_2) \dots 1_{[0, t_1]}(t_n)$ est symétrique par rapport aux $(n-1)$ dernières variables (t_j, z_j) . Donc

$$n \text{sym}[(i \cdot \prod g_n) 1_{[0, t_1]}(t_2) \dots 1_{[0, t_1]}(t_n)] \\ = (i \cdot \prod g_n)((t_1, z_1), \dots, (t_n, z_n)) 1_{[0, t_1]}(t_2) \dots 1_{[0, t_1]}(t_n) \\ + \sum_{j=2}^n (i \cdot \prod g_n)((t_j, z_j), \dots, (t_1, z_1), \\ (t_{j+1}, z_{j+1}), \dots, (t_n, z_n)) 1_{[0, t_j]}(t_1) \dots 1_{[0, t_j]}(t_n).$$

Si j est l'indice tel que $t_j = \max_{1 \leq k \leq n} t_k$, alors on obtient (4.6).

(4.7) Application à la propriété de la représentation prévisible

Vu (4.6), (X_t) à la propriété de la représentation prévisible ssi Π est bijective, donc ssi i est bijective, et par le corollaire (2.16) ceci est exactement la condition nécessaire et suffisante pour que (X_t) ait la décomposition en chaos.

On retrouve ainsi par une autre méthode le théorème (3.3) dans [Wu.H.S., GA.W.J. 80].

5. APPLICATION À LA FORMULE DE CHANGEMENT DE VARIABLES

Pour simplifier l'exposé on remplace dès lors \mathbb{R}_+ par $[0, 1] = T$ et $d\sigma(t)$ par dt . Comme il faut utiliser les résultats correspondants pour le mouvement brownien et pour le processus de Poisson, énonçons d'abord le résultat brownien obtenu dans [NU.D, PA.E, 87-88].

(5.1) THÉORÈME. — Soit $u \in W^{4,2}(\Omega', L^2([0, 1], dt))$.

On suppose qu'il existe $p > 4$ tel que la somme suivante soit finie :

$$(5.2) \quad \int_0^1 \mathbb{E} |u(t)|^p dt + \int_0^1 \int_0^1 |\mathbb{E} \nabla_t u(s)|^p ds dt + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{E} |\nabla_t \nabla_s u(z)|^p dt ds dz.$$

Alors, pour toute fonction f de classe C^2 , dont les dérivées f', f'' sont bornées et pour tout $t \in [0, 1]$ on a en posant

$$(5.3) \quad X_t = \delta(u \mathbf{1}_{[0,t]}) = \int_0^t u(s) dB(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) u^2(s) ds + \int_0^t f''(X_s) \int_0^s \nabla_s u(r) dB(r) u(s) ds.$$

L'étape difficile de la preuve du théorème est la preuve de la

(5.4) PROPOSITION. — Soit $u \in W^{2,1}(\Omega', L^2([0, 1], dt))$.

On pose $X_t = \delta(u \mathbf{1}_{[0,t]})$ pour tout $t \in [0, 1]$. Alors notant $\sigma = \{0 = t(1) < t(2) < \dots < t(n) = 1\}$ une subdivision de $[0, 1]$, on a

$$V_\sigma(X) = \sum_{t_i \in \sigma} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \rightarrow \int_0^1 u^2(t) dt$$

dans $L^1(\Omega')$ quand $|\sigma| \rightarrow 0$.

Nous proposons ci-après une preuve plus simple de cette proposition; cette preuve utilise le

(5.5) LEMME. — Pour $p > 2$ et toute $u \in W^{p,2}(\Omega', L^2([0, 1], dt))$, on a

$$(\delta(u))^2 = \delta(\delta(u)u) - \int_0^1 \delta(\nabla_t u) u(t) dt + \int_0^1 (u(t))^2 dt.$$

Preuve. — Pour tout polynôme cylindrique φ sur Ω'

$$(\star) \quad \langle \delta((\delta u)u), \varphi \rangle = \langle (\delta u)u, \nabla \varphi \rangle = E \left[\int_0^1 (\delta u)u(t) \nabla_t \varphi dt \right].$$

Or

$$\delta u \nabla \varphi = \nabla((\delta u)\varphi) - \varphi \nabla(\delta u) = \nabla((\delta u)\varphi) - \varphi [\delta(\nabla u) + u].$$

Donc le deuxième membre de (\star) peut s'écrire comme la somme de trois termes

$$E \int_0^1 \nabla_t((\delta u)\varphi)u(t) dt - E \int_0^1 \varphi \delta(\nabla_t u)u(t) dt - E \left[\int_0^1 \varphi(t)(u(t))^2 dt \right].$$

Or le premier de ces termes s'écrit $\langle (\delta u)\varphi, \delta u \rangle = \langle (\delta u)^2, \varphi \rangle$.

En reportant ceci dans (\star) , on obtient le lemme.

Preuve de (5.4) en utilisant le lemme (5.5).

Soit (u^k) une suite de polynômes cylindriques à valeurs dans H' , qui converge vers u dans $W^{2,1}(\Omega', H')$.

On pose $X_i^k = \delta(u^k 1_{[0, 1]})$, $\Delta_i = [t_i, t_{i+1}[$.

$$\begin{aligned} E |V_\sigma(X) - V_\sigma(X^k)| &= E \left| \sum_i \left(\int_{\Delta_i} u(t) dB(t) \right)^2 - \left(\int_{\Delta_i} (u^k(t)) dB(t) \right)^2 \right| \\ &\leq E \sum_i \left| \int_{\Delta_i} (u + u^k)(t) dB(t) \int_{\Delta_i} (u - u^k)(t) dB(t) \right| \leq I_+ I_- \end{aligned}$$

avec $I_\pm = \left(E \sum_i \left(\int_{\Delta_i} (u \pm u^k)(t) dB(t) \right)^2 \right)^{1/2}$.

D'où avec l'inégalité de B. Lascar

$$I_\pm \leq C \left(\sum_i \| (u \pm u^k) 1_{\Delta_i} \|_{W^{2,1}(\Omega', H')}^2 \right)^{1/2} \leq C \| (u + u^k) \|_{W^{2,1}(\Omega', H')}.$$

Il suffit donc de calculer la limite de $V_\sigma(X^k)$ lorsque $|\sigma| \rightarrow 0$.

Utilisant le lemme (5.5); $V_\sigma(X^k)$ est la somme de trois termes $V_\sigma(X^k) = I(\sigma, k) + II(\sigma, k) + III(\sigma, k)$. Il s'agit de montrer qu'au second membre les deux premiers termes tendent vers 0 dans $L^2(\Omega')$ quand $|\sigma| \rightarrow 0$ puisque le dernier terme est égal à $\int_0^1 (u_k(t))^2 dt$.

Considérons le premier terme

$$I(\sigma, k) = \sum_i \delta(\delta(u^k 1_{\Delta_i}) u^k 1_{\Delta_i})$$

Puisque u^k est un polynôme cylindrique, alors le processus $t \rightarrow \delta(u^k 1_{[0, t]})$ est continu, et par suite:

$$\forall t \in [0, 1], \quad \sum_i \delta(u^k 1_{\Delta_i}) u^k(t) 1_{\Delta_i}(t) \rightarrow 0 \quad \text{si } |\sigma| \rightarrow 0.$$

D'autre part, par l'inégalité de Hölder :

$$E \int_0^1 \left(\sum_i \delta(u^k 1_{\Delta_i}) u^k(t) 1_{\Delta_i}(t) \right)^2 dt \leq (E(\delta(u^k))^4)^{1/2} \int_0^1 (E(u^k(t))^4)^{1/2} dt.$$

Donc $\sum_i \delta(u^k 1_{\Delta_i}) u^k(t) 1_{\Delta_i}(t)$ est 2-équi-intégrable dans $L^2(\Omega' \times T)$. Comme la convergence a lieu en mesure vers 0, alors elle a aussi bien dans $L^2(\Omega' \times T) = L^2(\Omega', H')$.

De la même manière on montre que $\sum_i \nabla_t(\delta(u^k 1_{\Delta_i}) u^k(s) 1_{\Delta_i}(s))$ converge dans $L^2(\Omega', H' \otimes H')$ vers 0. Vue la continuité de la divergence $I(\sigma, k)$ tend vers 0 dans $L^2(\Omega')$ si $|\sigma| \rightarrow 0$.

De la même façon on montre que $II(\sigma, k)$ tend vers 0 si $|\sigma| \rightarrow 0$ dans $L^2(\Omega')$.

Finalement $V_\sigma(X^k)$ converge dans $L^2(\Omega')$ vers $\int_0^1 (u^k(t))^2 dt$, si $|\sigma| \rightarrow 0$.

C.Q.F.D.

Pour démontrer la formule (5.3), Nualart et Pardoux avaient besoin de l'existence d'une version continue du processus $t \rightarrow X_t = \delta(u \mathbf{1}_{[0,t]})$, ce qui nécessite u très régulière.

On propose ci-après une formule de changement de variables plus simple, car elle est valable pour u moins régulière et car la démonstration est immédiate.

(5.6) PROPOSITION. — Soit $u \in W^{2,2}(\Omega', L^2(T, dt))$.

Pour tout $t \in [0, 1]$, posons $X_t = \delta(u \mathbf{1}_{[0,t]})$.

Alors pour toute $f \in C^2$, on a :

$$f(X_t) = f(0) + \int_0^1 f'(E(X_t/\mathcal{F}_s)) E(\nabla_s X_t/\mathcal{F}_s) dB(s) \\ + \frac{1}{2} \int_0^1 f''(E(X_t/\mathcal{F}_s)) (E(\nabla_s X_t/\mathcal{F}_s))^2 ds.$$

Preuve. — Par la formule de D. Ocone

$$X_t = \int_0^1 E(\nabla_s X_t/\mathcal{F}_s) dB(s).$$

Posons

$$M_s = E(X_t/\mathcal{F}_s) = \int_0^s E(\nabla_r X_t/\mathcal{F}_r) dB(r).$$

Alors (M) est une martingale de carré intégrable de crochet

$$A(s) = \int_0^s (E(\nabla_r X_t/\mathcal{F}_r))^2 ds.$$

Et en appliquant la formule de Itô à $M_{(1)}$, on a donc la formule.

Étudions maintenant la formule de changement de variables pour les processus définis sur l'espace de P. Lévy, et pour simplifier on suppose que v est bornée.

Soient

$$u \in L^2(\Omega, H'), \quad \varphi \in L^2(\Omega, H''),$$

on suppose que :

u vérifie P' p.s. les hypothèses du théorème (5.1) et que P'' p.s. $\varphi \in W^{2,1}(\Omega'', H'')$. Posons alors

$$Z_t = \int_0^t u(s) dB(s), \quad Y_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(s, z) dq(s, z) \quad \text{et} \quad S_t = Y_t + Z_t.$$

Alors on a le résultat suivant :

(5.7) THÉORÈME. — Soit f de classe C^2 , dont les dérivées f' , f'' sont bornées. Alors pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned}
 f(S_t) = & f(S_0) + \int_0^t f'(S_s) u(s) dB(s) \\
 & + \int_0^t f'(S_{s-}) dY(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(S_s) u^2(s) ds \\
 & + \int_0^t f''(S_s) \int_0^s \nabla_s u(r) dB(r) u(s) ds + \sum_{s \leq t} [f(S(s)) - f(S_{s-}) - f'(S_s) \Delta Y(s)].
 \end{aligned}$$

Preuve. — Soit $w_2 = \sum_{i=1}^{(w)} S_{(T_i, z_{T_i})}$ une trajectoire fixée élément de Ω'' .

D'après [DE.A, KR.P, WU.L 88].

$t \rightarrow Y_t(w_2)$ est cadlag à variation finie, et saute aux mêmes instants que le processus de Poisson $t \rightarrow \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} dq(s, z)$. On a alors d'après Nualart-Pardoux pour tout $t \in [T_i, T_{i+1}[$,

$$\begin{aligned}
 f(S_t) = & f(S_{T_i}) + \int_{T_i}^t f'(S_s) u(s) dB(s) \\
 & + \int_{T_i}^t f'(S_s) dY(s) + \frac{1}{2} \int_{T_i}^t f''(S_s) u^2(s) ds \\
 & + \int_{T_i}^t f''(S_s) \int_0^s \nabla_s u(r) dB(r) u(s) ds.
 \end{aligned}$$

En faisant tendre t vers T_{i+1} , comme dans [C.DO, P.A.ME 68-69], on a

$$\begin{aligned}
 f(S_{T_{i+1}}) = & f(S_{T_i}) + \int_{T_i}^{T_{i+1}} f'(S(s)) u(s) dB(s) \\
 & + \int_{[T_i, T_{i+1}[} f'(S_s) dY(s) + \frac{1}{2} \int_{T_i}^{T_{i+1}} f''(S_s) u^2(s) ds \\
 & + \int_{T_i}^{T_{i+1}} f''(S_s) \int_0^s \nabla_s u(r) dB(r) u(s) ds.
 \end{aligned}$$

En sommant sur les indices i , et en rajoutant les sauts, on obtient :

$$\begin{aligned}
 f(S_t) = & f(S_0) + \int_0^t f'(S_s) u(s) dB(s) + \int_0^t f'(S_{s-}) dY(s) \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^t f''(S_s) u^2(s) ds + \int_0^t f''(S_s) \int_0^s \nabla_s u(r) dB(r) u(s) ds \\
 & + \sum_{s \leq t} [f(S_s) - [f(S_{s-}) - f'(S_s) \Delta Y_s]].
 \end{aligned}$$

Notons que cette somme a bien un sens car elle ne comporte qu'un nombre fini de termes.

RÉFÉRENCES

- [DO. C. ME. P. A. 68-69] C. DOLÉANS-DADE et P. A. MEYER, Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales, Séminaire de Probabilité IV, *Lect. Notes Math.*, **124**.
- [IT. K 56] K. ITO, Spectral type of the shift transformation of differential processes with stationary increments, *Tr. Am. Math. Soc.*, vol. **81**, 1956.
- [L.E.P. 65] P. LÉVY, *Processus stochastiques et mouvements browniens*, Gauthier-Villars, Paris.
- [KR.P 87-88] P. KRÉE, Théorie des distributions en dimension infinie et intégrales stochastiques multiples. Conférence Silivri, 1986, *Lect. Notes Math.*, 1988 (à paraître).
- [KR.M 74-77] M. KRÉE, Propriétés de traces en dimension infinie d'espaces du type Sobolev, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **279**, série A, 1974, p. 157-160, et *Bull. Soc. Math. France*, vol. **105**, 1977, p. 141-163.
- [KR. P 74-75] P. KRÉE, Solutions faibles d'équations aux dérivées fonctionnelles, *Lect. Notes Math.*, n° **410**, 1974, et n° **474**, 1975.
- [KR. P 76] P. KRÉE, Théorie des distributions en dimension infinie, *Bull. Soc. Math. France*, Suppl. n° 46, Coll. Lyon, 1975.
- [ME. P. A. 75] P. A. MEYER, Un cours sur les intégrales stochastiques, p. 321-331, Séminaire de Probabilités X, *Lect. Notes Math.*, n° **511**.
- [LA. B. 75-76] B. LASCAR, Propriétés locales d'espaces de Sobolev en dimension infinie, *Comm. Part. Diff. Eq.*, vol. **1**, (6), 1976, p. 561-584.
- [DE. A. KR. P, WU. L 88] A. DERMOUNE, P. KRÉE et L. WU, Calculs stochastiques par rapport à la mesure aléatoire de Poisson, *Séminaire de Probabilités*, XXII, 1988 (à paraître).
- [NU. D, PA. E 7-88] D. NUALART et E. PARDOUX, *Stochastic Calculus with anticipating integrands*, Preprint, 1986.
- [OC. D 84] D. OCONE, *Malliavin calculus and stochastic integral representation of diffusion processes Stochastics*, vol. **12**, 1984, p. 161-185.
- [ME. P. A. 88] P. A. MEYER, Distributions noyaux et symboles d'après P. Krée, Séminaire de Probabilités XXII, *Lect. Notes Math.*, 1988.
- [ST. D. W. 87] D. W. STROOCK, Homogeneous chaos revisited, p. 1-7, Séminaire de Probabilités XXI, *Lect. Notes Math.*, 1987.
- [ST. D. W. 81] D. W. STROOCK, The Malliavin calculus a functional analytic approach, *J. Funct. Anal.*, vol. **44**, 1981, p. 212-257.
- [SU. D. 84] D. SURGAILIS, On multiple Poisson stochastic integrals and associated Markov semi-groups, *Prob. Math. Stat.*, vol. **3**, fasc. 2, 1984, p. 217-239.
- [US. A. S. 86] A. S. USTUNEL, *The Ito formula for anticipative processes with non monotonous time scale via the Malliavin Calculus* (preprint).

[WU. H. S, GA. W. J. 80] H. S. WU et W. J. GANG, The total continuity of natural filtrations and the strong property of predictable representation for Jump processes and processes with independent increments, *Séminaire de Probabilités*, vol. **920**, 1981, p. 348-354.

(Manuscrit reçu le 9 mai 1988.)