

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

P. VALLOIS

Sur le passage de certaines marches aléatoires planes au-dessus d'une hyperbole équilatère

Annales de l'I. H. P., section B, tome 25, n° 4 (1989), p. 443-456

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1989__25_4_443_0

© Gauthier-Villars, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur le passage de certaines marches aléatoires planes au-dessus d'une hyperbole équilatère

par

P. VALLOIS

Laboratoire de Probabilités,
Tour n° 56, 3^e étage, 75252 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — On étudie le passage de certaines marches aléatoires planes au-dessus d'une hyperbole équilatère. Il est alors possible de réaliser presque sûrement, l'équation de convolution de Barndorff-Nielsen et Halgreen:

$\mu(\lambda, a, b) = \mu(-\lambda, a, b) \star \gamma(\lambda, 2/a); \quad \lambda > 0, \quad a > 0, \quad b > 0,$
où $\mu(v, a, b)$ [resp. $\gamma(\lambda, c)$] désigne la loi Gaussienne inverse généralisée (resp. gamma) de paramètres $v, a > 0$ et $b > 0$ (resp. $\lambda > 0$ et $c > 0$).

Mots clés : Marches aléatoires, loi Gaussienne inverse généralisée.

ABSTRACT. — We study the crossing of some planar random walks over an hyperbola. We can give an almost sure realization of the convolution equation of Barndorff-Nielsen and Halgreen:

$\mu(\lambda, a, b) = \mu(-\lambda, a, b) \star \gamma(\lambda, 2/a); \quad \lambda > 0, \quad a > 0, \quad b > 0,$
where $\mu(v, a, b)$ (resp. $\gamma(\lambda, c)$) denotes the generalized inverse Gaussian distribution (resp. gamma distribution) with parameters $v, a > 0$ and $b > 0$ (resp. $\lambda > 0$ and $c > 0$).

Classification A.M.S. : 60 E 99, 60 J 15, 60 J 75.

1. INTRODUCTION

On considère la loi Gaussienne inverse généralisée $\mu(\lambda, a, b)$, définie par :

$$\mu(\lambda, a, b)(dx) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda/2} \frac{1}{2K_\lambda(\sqrt{ab})} x^{\lambda-1} \exp - \frac{1}{2} \left(ax + \frac{b}{x}\right) 1_{\{x > 0\}} dx.$$

avec λ réel, a et $b > 0$.

Cette distribution a été introduite par Good [3]. Barndorff-Nielsen et Halgreen [1] ont montré qu'elle vérifie la relation :

$$(1) \quad \mu(\lambda, a, b) = \mu(-\lambda, a, b) * \gamma(\lambda, 2/a); \quad \lambda > 0, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

$$\text{où } \gamma(\lambda, a)(dx) = \frac{x^{\lambda-1}}{a^\lambda \Gamma(\lambda)} \exp - (x/a) 1_{\{x > 0\}} dx.$$

Si $(y_n)_{n \geq 1}$ est une suite de réels positifs, on note $([y_1, y_2, \dots, y_n])_{n \geq 1}$ la suite définie par récurrence de la manière suivante : $[y_1] = y_1$,

$$[y_1, y_2, \dots, y_{n+1}] = y_1 + \frac{1}{[y_2, \dots, y_{n+1}]}.$$

Letac et Seshadri [5] ont établi le résultat d'approximation suivant :

Soient $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\text{Loi}(U_{2n+1}) = \gamma(\lambda, 2/b)$, $\text{Loi}(U_{2n+2}) = \gamma(\lambda, 2/a)$ pour tout $n \geq 0$, avec $b > 0$, $a > 0$, $\lambda > 0$. Alors la suite $([U_1, U_2, \dots, U_n])_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable de loi $\mu(\lambda, b, a)$.

Soient α_1 et α_2 deux réels positifs, $(\bar{X}_n)_{n \geq 0}$ et $(\bar{Y}_n)_{n \geq 0}$ deux marches aléatoires indépendantes définies par :

$$(2) \quad \bar{X}_n = \bar{X}(n + \alpha_1) \quad \text{et} \quad \bar{Y}_n = \bar{Y}(n + \alpha_2), \quad \text{pour tout } n \geq 0,$$

où $(\bar{X}(t); t \geq 0)$ et $(\bar{Y}(t); t \geq 0)$ sont deux processus indépendants, à accroissements indépendants et stationnaires, caractérisés par leur transformée de Fourier :

$$(3) \quad \begin{cases} E[\exp i\lambda \bar{X}(t)] = (1 - i\lambda\beta_1)^{-t}, \\ E[\exp i\lambda \bar{Y}(t)] = (1 - i\lambda\beta_2)^{-t}, \end{cases}$$

β_1 et β_2 désignant deux réels strictement positifs (\bar{X} et \bar{Y} sont deux processus de sauts purs ([2], VI, (4-2)), nuls en zéro et pour tout $t > 0$, $\bar{X}(t)$ (resp. $\bar{Y}(t)$) a pour loi $\gamma(t, \beta_1)$ (resp. $\gamma(t, \beta_2)$). On note $(Z_n)_{n \geq 0}$ la marche aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}_+^2 , définie par $Z_n = (\bar{X}_n, \bar{Y}_n)$, pour tout $n \geq 0$, (H) la branche d'hyperbole équilatère incluse dans \mathbb{R}_+^2 :

$$(H) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2; xy = 1\}, \\ (H^+) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2; xy > 1\} \quad \text{et} \quad (H^-) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2; xy < 1\}.$$

On s'intéresse au temps d'entrée de $(Z_n)_{n \geq 0}$ dans l'ensemble (H^+) . On introduit :

$$N = \inf \{n \geq 0 / Z_n \in (H^+)\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = 0$.

On a :

$$\{0 < N < +\infty\} = \{\bar{X}_{N-1} \bar{Y}_{N-1} \leq 1 < \bar{X}_N \bar{Y}_N\}.$$

Soient

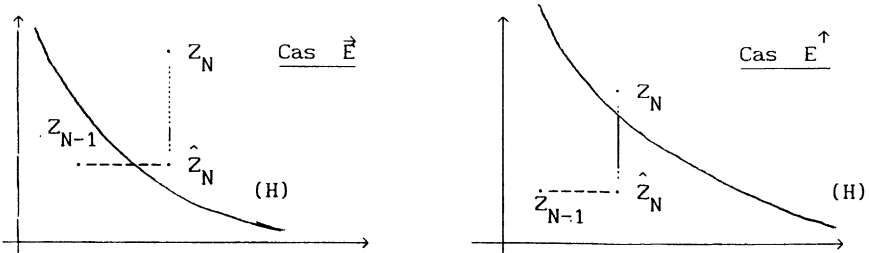
$$\bar{E} = \{\bar{X}_{N-1} \bar{Y}_{N-1} \leq 1 < \bar{X}_N \bar{Y}_{N-1}, 0 < N < +\infty\}$$

et

$$E^\uparrow = \{\bar{X}_N \bar{Y}_{N-1} \leq 1 < \bar{X}_N \bar{Y}_N, 0 < N < +\infty\}.$$

Alors les deux ensembles \bar{E} et E^\uparrow sont disjoints et $\{0 < N < +\infty\} = \bar{E} \cup E^\uparrow$.

On peut donner une traduction géométrique des deux événements \bar{E} et E^\uparrow de la manière suivante :



Si \hat{Z}_N désigne le point de coordonnées $(\bar{X}_N, \bar{Y}_{N-1})$, le cas \bar{E} (resp. E^\uparrow) est celui où l'hyperbole (H) coupe le côté horizontal (resp. vertical) du triangle $Z_{N-1} \hat{Z}_N Z_N$.

Conditionnellement à \bar{E} , on introduit les trois points M, M_1 et M_2 du plan :

1°

$$M_1 (1/\bar{Y}(\alpha_2 + N - 1), \bar{Y}(\alpha_2 + N - 1)),$$

$$M (1/\bar{Y}(\alpha_2 + N - 1), 1/\bar{X}(\alpha_2 + N - 1))$$

et

$$M_2 (\bar{X}(\alpha_2 + N - 1), 1/\bar{X}(\alpha_2 + N - 1)),$$

lorsque $\alpha_2 > \alpha_1 + 1$.

2°

$$M_1 (1/\bar{Y}(\alpha_1 + N - 1), \bar{Y}(\alpha_1 + N - 1)),$$

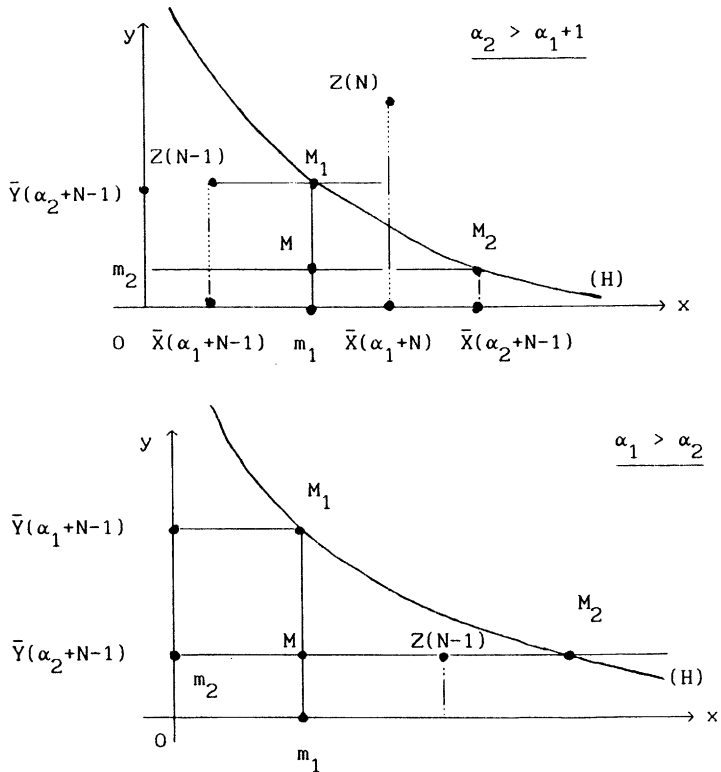
$$M (1/\bar{Y}(\alpha_1 + N - 1), \bar{Y}(\alpha_2 + N - 1))$$

et

$$M_2(1/\bar{Y}(\alpha_2 + N - 1), \bar{Y}(\alpha_2 + N - 1)),$$

lorsque $\alpha_1 > \alpha_2$.

On a alors le schéma suivant :



On note m_1 et m_2 les projections respectives de M sur les axes Ox et Oy.
 Le résultat essentiel de cet article est le

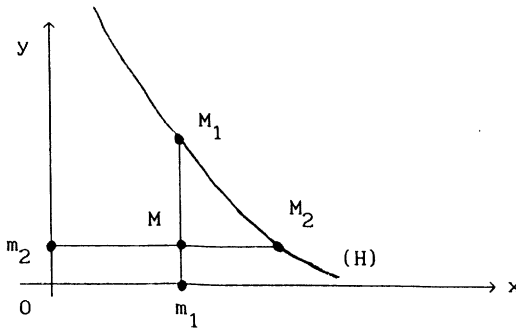
THÉORÈME. — Soit $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$ ou $\alpha_2 > \alpha_1 + 1$. Alors conditionnellement à \bar{E} :

- 1° Les variables aléatoires $m_1 M$, MM_1 et N (resp. $m_2 M$, MM_2 et N) sont indépendantes.
- 2° $m_2 M$ a pour loi $\mu(-|\alpha_2 - \alpha_1|, 2/\beta_1, 2/\beta_2)$, MM_2 a pour loi $\gamma(|\alpha_2 - \alpha_1|, \beta_1)$, donc $m_2 M_2$ a pour loi $\mu(|\alpha_2 - \alpha_1|, 2/\beta_1, 2/\beta_2)$.
- 3° $m_1 M$ a pour loi $\mu(-|\alpha_2 - \alpha_1|, 2/\beta_2, 2/\beta_1)$, MM_1 a pour loi $\gamma(|\alpha_2 - \alpha_1|, \beta_2)$, donc $m_1 M_1$ a pour loi $\mu(|\alpha_2 - \alpha_1|, 2/\beta_2, 2/\beta_1)$.

On peut donner une traduction géométrique de la caractérisation de loi Gaussienne inverse généralisée, donnée par Letac et Seshadri [5].

PROPOSITION 1. — Soient M un point (aléatoire) appartenant à (H^-) , m_1 et m_2 les projections de M sur les axes Ox et Oy , M_1 (resp. M_2) le point de (H) appartenant à la droite $(m_1 M)$ (resp. $(m_2 M)$). On suppose de plus que $m_1 M$ et MM_1 sont indépendantes, $m_2 M$ et MM_2 sont indépendantes, MM_1 et MM_2 ont pour lois respectives $\gamma(\alpha, \beta_2)$ et $\gamma(\alpha, \beta_1)$. Alors $m_2 M$ et $m_1 M$ ont pour lois respectives $\mu(-\alpha, 2/\beta_1, 2/\beta_2)$ et $\mu(-\alpha, 2/\beta_2, 2/\beta_1)$.

On a alors la figure suivante :



2. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Le résultat clé est le suivant :

LEMME 1. — Soient $\alpha > 0, \beta > 0, Y$ une variable aléatoire de loi $\gamma(\alpha, \beta)$ et A un événement tel que $P(A | Y=y) = c \left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha'} \exp\left(-\frac{1}{\beta' y}\right)$ avec $c > 0, \beta' > 0, \alpha' > 0$. Alors :

1° $P(Y \in dy | A) = \mu(\alpha - \alpha', 2/\beta, 2/\beta') (dy)$.

2° Si $\alpha' > \alpha$ et Y' désigne une variable aléatoire indépendante de Y et de A , de loi $\gamma(\alpha' - \alpha, \beta)$, on a :

(i) $P(A | Y + Y' = y) = \frac{c \beta'^{\alpha' - \alpha} \Gamma(\alpha')}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{y}\right)^\alpha \exp\left(-\frac{1}{\beta' y}\right)$.

(ii) On en déduit que conditionnellement à $A, Y + Y'$ (resp. Y, Y') a pour loi $\mu(\alpha' - \alpha, 2/\beta, 2/\beta')$ (resp. $\mu(\alpha - \alpha', 2/\beta, 2/\beta'), \gamma(\alpha' - \alpha, \beta)$).

Démonstration. — Soit f une fonction borélienne et bornée.

1° On pose $\Delta = E(f(Y) 1_A)$. On en déduit :

$$\Delta = \frac{c}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(y) \exp\left(-\left(\frac{y}{\beta} + \frac{1}{\beta' y}\right) y^{\alpha-\alpha'-1}\right) dy,$$

d'où le 1°

2° (i) Soit $\Delta' = E(f(Y+Y') 1_A)$. On a :

$$\Delta' = c' \int_0^\infty \int_0^\infty f(y+y') y^{\alpha-\alpha'-1} y'^{\alpha'-\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{y+y'}{\beta} + \frac{1}{\beta' y}\right) dy dy',\right.$$

avec

$$c' = c(\beta^{\alpha'} \Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha' - \alpha))^{-1}.$$

On pose $t = y + y'$, il vient :

$$\Delta' = c' \int_0^\infty f(t) \exp\left(-\left(\frac{t}{\beta}\right) \psi(t) dt\right.$$

avec :

$$\psi(t) = \int_0^t y^{\alpha-\alpha'-1} (t-y)^{\alpha'-\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{\beta' y}\right) dy.$$

Pour calculer $\psi(t)$, on fait le changement de variable $\frac{1}{y} = z + \frac{1}{t}$:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= t^{\alpha'-\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{1}{\beta' t}\right) \int_0^\infty z^{\alpha'-\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{z}{\beta'}\right) dz\right. \right. \\ &= \beta'^{\alpha'-\alpha} \Gamma(\alpha' - \alpha) t^{\alpha'-\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{\beta' t}\right). \end{aligned}$$

D'où :

$$\Delta' = c_0 \int_0^\infty f(t) \left(\frac{1}{t}\right)^\alpha \exp\left(-\left(\frac{1}{\beta' t}\right) P(Y+Y' \in dt)\right.$$

avec

$$c_0 = c \beta'^{\alpha'-\alpha} \Gamma(\alpha') \Gamma(\alpha)^{-1}.$$

COROLLAIRE 1. — Soient $\alpha > 0$, $\alpha' > 0$, $\beta > 0$, $\beta' > 0$, Y , X et X' trois variables aléatoires de lois respectives $\gamma(\alpha, \beta)$, $\gamma(\alpha', \beta')$, $\gamma(1, \beta')$, et A l'événement $A = \{XY < 1 < (X+X')Y\}$. Alors :

1° $P(A | Y=y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha'+1)} \frac{1}{\beta'^{\alpha'}} \left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha'} \exp\left(-\frac{1}{\beta' y}\right)$. On en déduit que la loi de Y conditionnellement à A est égale à $\mu(\alpha-\alpha', 2/\beta, 2/\beta')$.

2° Conditionnellement à A , la variable aléatoire $X+X'-1/Y$ est indépendante de Y et a pour loi $\gamma(1, \beta')$.

Démonstration :

$$1^\circ P(A | Y = y) = \iint \mathbf{1}_{\{xy < 1 < (x+x')y\}} \frac{x^{\alpha'-1}}{\beta'^{\alpha'} \Gamma(\alpha') \beta'} \times \exp\left(-\frac{1}{\beta'}(x+x')\right) dx dx',$$

on intègre par rapport à x' il vient :

$$P(A/Y = y) = \frac{\exp-(1/(\beta' y))}{\beta'^{\alpha'} \Gamma(\alpha')} \int_0^{1/y} x^{\alpha'-1} dx = \frac{1}{\beta'^{\alpha'} \Gamma(\alpha' + 1)} \left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha'} \exp-\left(\frac{1}{\beta' y}\right).$$

2° Soient f et g deux fonctions boréliennes bornées et

$$\Delta = E(f(X + X' - 1/Y)g(Y) \mathbf{1}_A).$$

On a :

$$\Delta = \int f\left(x + x' - \frac{1}{y}\right) g(y) \mathbf{1}_{\{xy < 1 < y(x+x')\}} \frac{1}{\beta'} \times \exp-\left(\frac{x'}{\beta'}\right) P(X \in dx) P(Y \in dy) dx'$$

d'où :

$$\Delta = \left[\int_0^\infty f(z) \frac{1}{\beta'} \exp-\frac{z}{\beta'} dz \right] \int g(y) \mathbf{1}_{\{xy < 1\}} \times \exp\frac{1}{\beta'} \left(x - \frac{1}{y}\right) P(X \in dx) P(Y \in dy).$$

LEMME 2. — Soient $\alpha > 0, \beta > 0, \beta' > 0$ et Y une variable aléatoire de loi $\gamma(\alpha, \beta)$.

1° Si A est un événement tel que $P(A | Y = y) = c \left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha'} \exp-\frac{1}{\beta' y}, c > 0, \alpha' > \alpha, \beta' > 0$ et Y' une variable aléatoire indépendante de Y et de A , de loi $\gamma(\alpha' - \alpha, \beta)$, on a : conditionnellement à $A, \frac{1}{Y} - \frac{1}{Y + Y'} = \frac{Y'}{Y(Y + Y')}$ est indépendante de $Y + Y'$ et a pour loi $\gamma(\alpha' - \alpha, \beta')$.

2° Si $\alpha' > 0, \alpha > \alpha' + 1, X, X'$ et X'' désignent trois variables aléatoires indépendantes et indépendantes de Y , de lois respectives $\gamma(\alpha', \beta'), \gamma(1, \beta')$ et $\gamma(\alpha - \alpha' - 1, \beta')$ et $A = \{XY < 1 < (X + X')Y\}$, on a : conditionnellement à A , les deux v. a. $Y - \frac{1}{X + X' + X''}$ et $X + X' + X''$ sont indépendantes et ont pour lois $\gamma(\alpha - \alpha', \beta)$ et $\mu(\alpha - \alpha', 2/\beta', 2/\beta)$.

Démonstration. — Soient f et g deux fonctions boréliennes bornées,

$$\Delta = E \left(f(Y + Y') g \left(\frac{Y'}{Y(Y + Y')} \right) 1_A \right)$$

et

$$\Delta' = E \left(f \left(Y - \frac{1}{X + X' + X''} \right) g(X + X' + X'') 1_{\{XY < 1 < (X + X')Y\}} \right).$$

1° On a :

$$\Delta = c_1 \int f(y + y') g \left(\frac{y'}{y(y + y')} \right) y^{\alpha - \alpha' - 1} y'^{\alpha' - \alpha - 1} \\ \times \exp - \left(\frac{1}{\beta' y} + \frac{1}{\beta} (y + y') \right) 1_{\{y > 0, y' > 0\}} dy dy'$$

avec $c_1 = c(\beta\beta' \Gamma(\alpha' - \alpha) \Gamma(\alpha))^{-1}$.

On pose

$$u = y + y' \quad \text{et} \quad v = \frac{y'}{y(y + y')} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y + y'}$$

d'où $y = \frac{u}{1 + uv}$, $y' = \frac{u^2 v}{1 + uv}$. On en déduit :

$$\Delta = c_1 \int f(u) g(v) (uv)^{\alpha' - \alpha - 1} \exp - \left(\frac{1}{u\beta'} + \frac{u}{\beta} + \frac{v}{\beta'} \right) 1_{\{u > 0, v > 0\}} du dv.$$

Le 1° du lemme 2 est ainsi établi.

2° D'une manière identique, on a :

$$\Delta' = c_2 \int f \left(y - \frac{1}{x + x' + x''} \right) g(x + x' + x'') y^{\alpha - 1} x^{\alpha' - 1} x''^{\alpha - \alpha' - 2} \\ \times \exp - \left(\frac{y}{\beta} + \frac{x + x' + x''}{\beta'} \right) 1_{\{xy < 1 < (x + x')y, x > 0, x' > 0, x'' > 0, y > 0\}} dx dx' dx'' dy$$

avec $c_2 = [(\beta\beta')^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha') \Gamma(\alpha - \alpha' - 1)]^{-1}$.

On fait le changement de variables $x = x$, $t = x + x'$, $v = x + x' + x''$ et $u = y - \frac{1}{x + x' + x''}$ (soit $x = x$, $x' = t - x$, $y = u + 1/v$, $x'' = v - t$), il vient :

$$\Delta' = c_2 \int f(u) g(v) \left(u + \frac{1}{v} \right)^{\alpha - 1} \psi(u, v) \\ \times \exp - \left(\frac{1}{\beta} \left(u + \frac{1}{v} \right) + \frac{v}{\beta'} \right) 1_{\{u > 0, v > 0\}} du dv,$$

avec

$$\psi(u, v) = \int x^{\alpha'-1} (v-t)^{\alpha-\alpha'-2} 1_{(x(u+(1/v)) < 1 < t(u+(1/v)), 0 < x < t < v)} dx dt.$$

On intègre par rapport à x :

$$\begin{aligned} \psi(u, v) &= \frac{1}{\alpha'} \left(u + \frac{1}{v}\right)^{-\alpha'} \int_{(u+(1/v))^{-1}}^v (v-t)^{\alpha-\alpha'-2} dt \\ &= \frac{(vu)^{\alpha-\alpha'-1}}{\alpha'(\alpha-\alpha'-1)} \left(u + \frac{1}{v}\right)^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \Delta' &= \frac{c_2}{\alpha'(\alpha-\alpha'-1)} \int f(u) g(v) (uv)^{\alpha-\alpha'-1} \\ &\quad \times \exp\left(-\left(\frac{1}{\beta}\left(u + \frac{1}{v}\right) + \frac{v}{\beta'}\right) 1_{\{u>0, v>0\}}\right) du dv, \end{aligned}$$

d'où le 2° du lemme 2.

3. APPLICATIONS

Soient α_1 et α_2 (resp. β_1 et β_2) deux réels positifs (resp. strictement positifs), $(\bar{X}_n)_{n \geq 0}$ et $(\bar{Y}_n)_{n \geq 0}$ deux marches aléatoires indépendantes telles que :

(4) \bar{X}_n (resp. \bar{Y}_n) a pour loi $\gamma(\alpha_1 + n, \beta_1)$ (resp. $\gamma(\alpha_2 + n, \beta_2)$), pour tout $n \geq 0$ (où $\gamma(0, \beta)$ désigne la masse de Dirac en zéro).

On note $(Z_n)_{n \geq 0}$ la marche aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}_+^2 définie par $Z_n = (\bar{X}_n, \bar{Y}_n)$, $n \geq 0$, (H) la branche d'hyperbole équilatère incluse dans \mathbb{R}_+^2 :

$$\begin{aligned} (H) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2; xy = 1\}, \\ (H^+) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2; xy > 1\} \quad \text{et} \quad (H^-) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2; xy < 1\}. \end{aligned}$$

Soient $N = \inf \{n \geq 0 / Z_n \in (H^+)\}$, avec la convention $\inf \emptyset = 0$,

$$\bar{E} = \{\bar{X}_{N-1} \bar{Y}_{N-1} \leq 1 < \bar{X}_N \bar{Y}_{N-1}, 0 < N < +\infty\}$$

et

$$E^\dagger = \{\bar{X}_N \bar{Y}_{N-1} \leq 1 < \bar{X}_N \bar{Y}_N, 0 < N < +\infty\}.$$

Alors les deux ensembles \bar{E} et E^\dagger sont disjoints et $\{0 < N < +\infty\} = \bar{E} \cup E^\dagger$, (On a donné dans l'introduction, une traduction géométrique des deux événements \bar{E} et E^\dagger .)

Soient $\bar{X}'_n = \bar{Y}_n$, $\bar{Y}'_n = \bar{X}_{n+1}$, $n \geq 0$. Les deux marches $(\bar{X}'_n)_{n \geq 0}$ et $(\bar{Y}'_n)_{n \geq 0}$ sont indépendantes et vérifient (4) avec $\alpha'_1 = \alpha_2$; $\alpha'_2 = \alpha_1 + 1$, $\beta'_1 = \beta_2$ et $\beta'_2 = \beta_1$. On note $N' = \inf \{n \geq 0 / \bar{X}'_n \bar{Y}'_n > 1\}$. Alors $E^\dagger = \bar{E}'$ et sur cet ensemble on a $N' = N$. Par conséquent :

(5) Le changement de α_1 en α_2 , α_2 en $\alpha_1 + 1$, β_1 en β_2 et β_2 en β_1 , \bar{X} en \bar{Y} , \bar{Y} en \bar{X} , permet de ramener l'étude du cas E^\dagger à celle relative à \bar{E} .

Dans la suite de cette note, on raisonnera conditionnellement à \bar{E} .

PROPOSITION 2. — Soient $(Z_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire vérifiant les conditions (4) et $N = \inf \{n \geq 0 / Z_n \in (H^+)\}$. Alors :

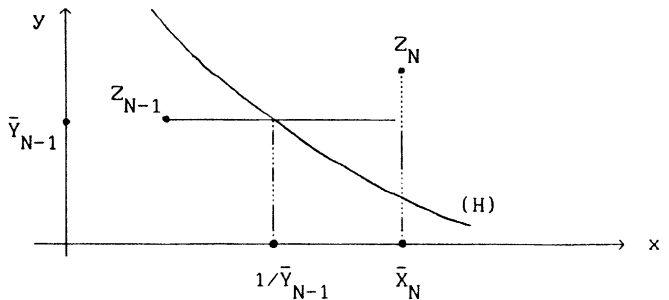
1° N es fini presque sûrement.

2° Conditionnellement à \bar{E} :

(a) \bar{Y}_{N-1} est indépendante de N et a pour loi $\mu(\alpha_2 - \alpha_1, 2/\beta_2, 2/\beta_1)$.

(b) $\bar{X}_N - 1/\bar{Y}_{N-1}$ est indépendante de N et de \bar{Y}_{N-1} et a pour loi $\gamma(1, \beta_1)$.

On peut représenter les trois variables aléatoires intervenant dans l'énoncé de la proposition précédente sur le dessin suivant :



Démonstration. — Puisque \bar{X}_n et \bar{Y}_n tendent vers $+\infty$, lorsque n tend vers $+\infty$, il est clair que $N < +\infty$ presque sûrement.

Soient f, g et h trois fonctions boréliennes bornées et

$$\Delta = E(f(\bar{Y}_{N-1})g(\bar{X}_N - 1/\bar{Y}_{N-1})h(N)1_{\bar{E}}).$$

On a :

$$\Delta = \sum_{n=0}^{\infty} h(n+1) E(f(\bar{Y}_n)g(\bar{X}_{n+1} - 1/\bar{Y}_n)1_{\{N=n+1, \bar{E}\}}),$$

$$\Delta = \sum_{n=0}^{\infty} h(n+1) E(f(\bar{Y}_n)g(\bar{X}_n + X_{n+1} - 1/\bar{Y}_n)1_{\{X_n \bar{Y}_n < 1 < (X_n + X_{n+1}) \bar{Y}_n\}}),$$

où $X_{n+1} = \bar{X}_{n+1} - \bar{X}_n$. Il suffit alors d'appliquer le corollaire 1 avec $Y = \bar{Y}_n$, $X = \bar{X}_n$ et $X' = X_{n+1}$.

Remarque. — La probabilité de l'événement \bar{E} est donnée par :

$$P(\bar{E}) = 2 \beta^{\alpha_1 + \alpha_2} K_{\alpha_2 - \alpha_1} (2 \beta) \left[\sum_{n \geq 0} \beta^{2n} (1/\Gamma(\alpha_1 + n + 1) \Gamma(\alpha_2 + n)) \right],$$

où $\beta = 1/\sqrt{\beta_1 \beta_2}$.

D'après la remarque (5), on a :

$$P(E^1) = 2 \beta^{\alpha_1 + \alpha_2 + 1} K_{\alpha_1 + 1 - \alpha_2} (2 \beta) \left[\sum_{n \geq 0} \beta^{2n} (1/\Gamma(\alpha_1 + n + 1) \Gamma(\alpha_2 + n + 1)) \right].$$

Rappelons que

$$K_{-p} = K_p \quad \text{et} \quad I_p(z) = \sum_{n \geq 0} (z/2)^{p+2n} (1/\Gamma(p+n+1) n!).$$

On en déduit que, lorsque $\alpha_1 = 0$, on a :

$$P(\bar{E}) = 2 \beta (I_{\alpha_2 - 1} K_{\alpha_2}) (2 \beta) \quad \text{et} \quad P(E^1) = 2 \beta (K_{\alpha_2 - 1} I_{\alpha_2}) (2 \beta).$$

Mais $I_{\alpha_2 - 1} K_{\alpha_2}(z) + K_{\alpha_2 - 1} I_{\alpha_2}(z) = 1/z$, d'où $P(\bar{E}) + P(E^1) = 1$.

Remarquons que $P(\bar{E}) + P(E^1) = P(\bar{X}_0 \bar{Y}_0 < 1)$; en particulier lorsque $\alpha_1 = 0$, on a $\bar{X}_0 = 0$ et $P(\bar{E}) + P(E^1) = 1$.

Pour réaliser l'équation de convolution (1), il est commode de représenter les deux marches aléatoires $(\bar{X}_n)_{n \geq 0}$ et $(\bar{Y}_n)_{n \geq 0}$ à l'aide de deux processus à accroissements indépendants et stationnaires ((2), (3)).

Démonstration du théorème. — 1° On suppose $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$.

(a) On a $m_1 M = \bar{Y}(\alpha_2 + N - 1)$ qui a pour loi, d'après la proposition 2, $\mu(\alpha_2 - \alpha_1, 2/\beta_2, 2/\beta_1)$.

Soit $\Delta = E(f(MM_1)g(m_1 M)h(N)1_{\bar{E}})$, alors :

$$\Delta = \sum_{n \geq 1} E[f(\bar{Y}(\alpha_1 + n - 1) - \bar{Y}(\alpha_2 + n - 1))g(\bar{Y}(\alpha_2 + n - 1))h(n) \times 1_{\{\bar{Y}(\alpha_2 + n - 1) X(\alpha_1 + n - 1) < 1 < \bar{Y}(\alpha_2 + n - 1) X(\alpha_1 + n)\}}].$$

D'où $\Delta = E[f(\bar{Y}(\alpha_1 - \alpha_2))] E[g(\bar{Y}(\alpha_2 + N - 1))h(N)1_{\bar{E}}]$. D'après la proposition 2, on en déduit que les v. a. $m_1 M$, MM_1 et N sont indépendantes et le 3° du théorème.

(b) Soit $\Delta = E(f(m_2 M)g(MM_2)h(N)1_{\bar{E}})$. Alors :

$$\Delta = \sum_{n \geq 1} E[f(1/\bar{Y}(\alpha_1 + n - 1))g(1/\bar{Y}(\alpha_2 + n - 1) - 1/\bar{Y}(\alpha_1 + n - 1))h(n) \times 1_{\{X(\alpha_1 + n - 1) \bar{Y}(\alpha_2 + n - 1) < 1 < X(\alpha_1 + n) \bar{Y}(\alpha_2 + n - 1)\}}].$$

Soient $\alpha = \alpha_2 + n - 1$, $\beta = \beta_2$, $\alpha' = \alpha_1 + n - 1$, $\beta' = \beta_1$, $\beta = \beta_2$, $Y = \bar{Y}(\alpha_2 + n - 1)$, $X = \bar{X}(\alpha_1 + n - 1)$, $X' = \bar{X}(\alpha_1 + n) - \bar{X}(\alpha_1 + n - 1)$, $Y' = \bar{Y}(\alpha_1 + n - 1) - \bar{Y}(\alpha_2 + n - 1)$ et $A = \{XY < 1 < (X + X')Y\}$. Il suffit alors d'appliquer successivement le 1° du corollaire 1, le 1° du lemme 2 et le 2° (ii) du lemme 1.

2° Supposons à présent : $\alpha_2 > \alpha_1 + 1$.

(a) D'après la proposition 2, $m_2 M = 1/\bar{Y}(\alpha_2 + N - 1)$ a pour loi $\mu(-(\alpha_2 - \alpha_1), 2/\beta_1, 2/\beta_2)$, $Z = \bar{X}(\alpha_1 + N) - 1/\bar{Y}(\alpha_2 + N - 1)$ a pour loi $\gamma(1, \beta_1)$ et conditionnellement à \bar{E} , les trois v. a. $m_2 M$, Z et N sont indépendantes.

Mais

$$\bar{E} = \bigcup_{n \geq 1} \{ \bar{X}(\alpha_1 + n - 1) \bar{Y}(\alpha_2 + n - 1) < 1 < \bar{X}(\alpha_1 + n) \bar{Y}(\alpha_2 + n - 1) \},$$

on en déduit que conditionnellement à \bar{E} , la variable aléatoire $Z' = \bar{X}(\alpha_2 + N - 1) - \bar{X}(\alpha_1 + N)$ est indépendante de N , Z et $m_2 M$ et a pour loi $\gamma(\alpha_2 - \alpha_1 - 1, \beta_1)$. De plus

$$MM_2 = \bar{X}(\alpha_2 + N - 1) - 1/\bar{Y}(\alpha_2 + N - 1), \quad \text{d'où } MM_2 = Z + Z'.$$

(b) On note $\Delta = E(f(m_1 M)g(MM_1)h(N)1_{\bar{E}})$, on a :

$$\Delta = \sum_{n \geq 1} E[f(1/\bar{X}(\alpha_2 + n - 1)g(\bar{Y}(\alpha_2 + n - 1) - 1/\bar{X}(\alpha_2 + n - 1))h(n) \times 1_{\{\bar{X}(\alpha_1 + n - 1)\bar{Y}(\alpha_2 + n - 1) < 1 < \bar{X}(\alpha_1 + n)\bar{Y}(\alpha_2 + n - 1)\}}].$$

Soient $\alpha = \alpha_2 + n - 1$, $\alpha' = \alpha_1 + n - 1$, $\beta' = \beta_1$, $\beta = \beta_2$, $X = \bar{X}(\alpha_1 + n - 1)$, $X' = \bar{X}(\alpha_1 + n) - \bar{X}(\alpha_1 + n - 1)$, $X'' = \bar{X}(\alpha_2 - 1 + n) - \bar{X}(\alpha_1 + n)$, $Y = \bar{Y}(\alpha_2 + n - 1)$ et $A = \{XY < 1 < (X + X')Y\}$. On applique alors le 2° du lemme 2; on en déduit l'indépendance des v. a. $m_1 M$, MM_1 et N et la loi de $m_1 M$ et MM_1 , conditionnellement à \bar{E} .

Démonstration de la proposition 1. — On rappelle le résultat de Letac et Seshadri [5] :

Soient U_1 , U_2 et U trois variables aléatoires strictement positives, indépendantes, U_1 de loi $\gamma(\alpha, \beta_1)$, U_2 de loi $\gamma(\alpha, \beta_2)$ et telles que les deux variables aléatoires U et $\frac{1}{U_2 + 1/(U_1 + U)}$ aient même loi. Alors :

$$(6) \quad U \text{ a pour loi } \mu(-\alpha, 2/\beta_1, 2/\beta_2).$$

On a :

$$m_2 M = \frac{1}{m_1 M_1} = \frac{1}{m_1 M + MM_1} \quad \text{et} \quad m_1 M = \frac{1}{m_2 M_2} = \frac{1}{m_2 M + MM_2}.$$

De plus $m_i M$ et MM_i sont indépendantes, $i = 1, 2$, MM_1 (resp. MM_2) a pour loi $\gamma(\alpha, \beta_2)$ (resp. $\gamma(\alpha, \beta_1)$). Soient U_1 , U_2 et U trois v. a. indépendantes telles que $U_1 \stackrel{(d)}{=} MM_2$, $U_2 \stackrel{(d)}{=} MM_1$ et $U \stackrel{(d)}{=} m_2 M$. On applique (6), on en déduit que $m_2 M$ a pour loi $\mu(-\alpha, 2/\beta_1, 2/\beta_2)$. Par raison de symétrie, la loi de $m_1 M$ est égale à $\mu(-\alpha, 2/\beta_2, 2/\beta_1)$.

Remarque. — Afin de donner une extension aux théorèmes de Ray et Knight sur les temps locaux du mouvement brownien ([4], [6], [7]), j'ai introduit le temps d'arrêt $T : T = \inf\{t \mid L_t L_t^\alpha > 1\}$, où L et L^α désignent

respectivement le temps local au niveau 0 (resp. $\alpha > 0$) d'un mouvement brownien $(B_t; t \geq 0)$ réel, issu de 0. Alors : $B_T = 0$ ou α , $L_T = 1/L_T^\alpha$ et (7) conditionnellement à $\{B_T = 0\}$ (resp. $\{B_T = \alpha\}$) L_T^α (resp. L_T) a pour loi $\mu(0, 1/\alpha, 1/\alpha)$ (resp. $\mu(1, 1/\alpha, 1/\alpha)$).

Le lien avec les marches aléatoires est le suivant :

On introduit la suite de temps d'arrêt $(\sigma_n)_{n \geq 0}$ de passages successifs du mouvement brownien aux niveaux 0 et α : $\sigma_0 = 0$, et

$$\sigma_{n+1} = \inf \{t > \sigma_n / B_t \in \{0, \alpha\} \setminus \{B_{\sigma_n}\}\}, \quad n \geq 0.$$

Alors :

(i) $L_t^\alpha = L_{\sigma_{2n}}^\alpha$ pour tout t de $[\sigma_{2n}, \sigma_{2n+1}]$, $L_t = L_{\sigma_{2n+1}}$ pour tout t de $[\sigma_{2n+1}, \sigma_{2n+2}]$, $n \geq 0$.

(ii) Soient $X_0 = Y_0 = 0$, $X_{n+1} = L_{\sigma_{2n+2}} - L_{\sigma_{2n}}$, $Y_{n+1} = L_{\sigma_{2n+2}}^\alpha - L_{\sigma_{2n}}^\alpha$, $n \geq 0$.

D'après le (i), pour tout $n \geq 0$ on a : $X_{n+1} = L_{\sigma_{2n+1}} - L_{\sigma_{2n}}$ et $Y_{n+1} = L_{\sigma_{2n+2}}^\alpha - L_{\sigma_{2n+1}}^\alpha$, et de plus la famille de variables aléatoires $\{X_n, Y_n; n \geq 1\}$ est formée de variables aléatoires indépendantes, équidistribuées et de loi $\gamma(1, 2\alpha)$.

On note $(\bar{X}_n)_{n \geq 0}$ et $(\bar{Y}_n)_{n \geq 0}$ les deux marches aléatoires : $\bar{X}_n = \sum_{p=0}^n X_p$

et $\bar{Y}_n = \sum_{p=0}^n Y_p$, $n \geq 0$. Ces deux marches vérifient la propriété (4) avec

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ et $\beta_1 = \beta_2 = 2\alpha$, de plus $\bar{X}_n = L_{\sigma_{2n}}$ et $\bar{Y}_n = L_{\sigma_{2n}}^\alpha$ pour tout $n \geq 0$.

(iii) D'après (i) on a :

$$\{B_T = 0, T < +\infty\} = \bigcup_{n \geq 0} \{\sigma_{2n} \leq T < \sigma_{2n+1}\}$$

(resp. $\{B_T = \alpha, T < +\infty\} = \bigcup_{n \geq 0} \{\sigma_{2n+1} \leq T < \sigma_{2n+3}\}$), et

$$\{\sigma_{2n} \leq T < \sigma_{2n+1}\} = \{L_{\sigma_{2n}} L_{\sigma_{2n}}^\alpha \leq 1 < L_{\sigma_{2n+1}} L_{\sigma_{2n+1}}^\alpha\} = \{\bar{X}_n \bar{Y}_n \leq 1 < \bar{X}_{n+1} \bar{Y}_n\},$$

et sur cet ensemble on a : $L_T^\alpha = \bar{Y}_n$, $L_T = 1/\bar{Y}_n$ (resp.

$$\{\sigma_{2n+1} \leq T < \sigma_{2n+2}\} = \{L_{\sigma_{2n+1}} L_{\sigma_{2n+1}}^\alpha \leq 1 < L_{\sigma_{2n+2}} L_{\sigma_{2n+2}}^\alpha\},$$

d'où :

$$\{\sigma_{2n+1} \leq T < \sigma_{2n+2}\} = \{\bar{X}_{n+1} \bar{Y}_n \leq 1 < \bar{X}_{n+1} \bar{Y}_{n+1}\},$$

et sur cet ensemble on a :

$$L_T = \bar{X}_{n+1} \quad \text{et} \quad L_T^\alpha = 1/\bar{X}_{n+1}.$$

Soit $N = \inf \{n \geq 0 / \bar{X}_n \bar{Y}_n > 1\}$, alors :

$$\{B_T = 0, T < +\infty\} = \{1 \leq N < +\infty, \bar{X}_{N-1} \bar{Y}_{N-1} \leq 1 < \bar{X}_N \bar{Y}_{N-1}\}$$

et sur cet ensemble, on a :

$$L_T^\alpha = \bar{Y}_{N-1} \quad \text{et} \quad L_T = 1/\bar{Y}_{N-1}.$$

(resp.

$$\{B_T = \alpha, T < +\infty\} = \{1 \leq N < +\infty, \bar{X}_N \bar{Y}_{N-1} \leq 1 < \bar{X}_N \bar{Y}_N\}$$

et sur cet ensemble, on a :

$$L_T = \bar{X}_N \quad \text{et} \quad L_T^\alpha = 1/\bar{X}_N.$$

La propriété (7) résulte alors de la proposition 2.

RÉFÉRENCES

- [1] O. BARNDORFF-NIELSEN et C. HALGREEN, Infinite Divisibility of the Hyperbolic and Generalized Inverse Gaussian Distribution, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, vol. **38**, 1977, p. 309-312.
- [2] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. **II**, Wiley, New York, 1966.
- [3] I. J. GOOD, The Population Frequencies of Species and the Estimation of Population Parameters, *Biometrika*, vol. **40**, 1953, p. 237-260.
- [4] F. B. KNIGHT, Random Walks and a Sojourn Density of Brownian Motion, *T.A.M.S.*, vol. **109**, 1963, p. 56-86.
- [5] G. LETAC et V. SESHADRI, A Characterization of the Generalized Inverse Gaussian Distribution by Continued Fractions, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete*, vol. **62**, 1983, p. 485-489.
- [6] D. B. RAY, Sojourn Times of Diffusion Processes, *Ill. J. Math.*, vol. **7**, 1963, p. 615-630.
- [7] P. VALLOIS, *Une extension des théorèmes de Ray-Knight sur les temps locaux browniens* (à paraître).

(Manuscrit reçu le 12 décembre 1988.)