ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

M. BABILLOT

Théorie du renouvellement pour des chaînes semi-markoviennes transientes

Annales de l'I. H. P., section B, tome 24, nº 4 (1988), p. 507-569

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1988__24_4_507_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 24, n° 4, 1988, p. 507-569. *Probabilités et Statistiques*

Théorie du renouvellement pour des chaînes semi-markoviennes transientes

par

M. BABILLOT

Université Paris-VII,
U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique,
2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — On considère des processus de Markov sur un espace d'états M, invariants sous l'action d'un groupe de transformations sur M, isomorphe à $\mathbb{R}^d$.

Dans le cas de transience, un équivalent à l'infini du noyau potentiel est obtenu, et ce en toutes dimensions, généralisant ainsi les théorèmes de renouvellement de Blackwell et de Ney-Spitzer pour les marches aléatoires sur $\mathbb{R}^d$.

Ceci s'applique à la fonction de Green d'un revêtement abélien de variété riemannienne compacte et à une large classe de marches aléatoires sur les extensions compactes de $\mathbb{R}^d$.

ABSTRACT. — We consider Markov processes with state space M, which are supposed to be invariant under the action of a group of transformations on M, isomorphic to $\mathbb{R}^d$.

In the transient case, an equivalent at infinity of the potential kernel is given, in all dimensions. This extends the classical Blackwell's and Ney-Spitzer's renewal theorems for random walks on $\mathbb{R}^d$. This applies to the Green function of an abelian covering of a compact riemannian manifold, and to a large class of random walks on compact extensions of $\mathbb{R}^d$.

Key words : Potential kernel, random walk, Martin boundary, semi-Markov processes.

Classification A.M.S. : 60 J 45, 60 K 05, 60 K 15, 60 J 50.

INTRODUCTION

Après le grand développement des marches aléatoires sur $\mathbb{R}^d$ au cours des années 60, est apparue la nécessité d'étudier des processus dont les accroissements ne sont plus indépendants, mais gouvernés par l'évolution d'une chaîne de Markov sur un espace de base X. Telles sont en effet les marches aléatoires avec degrés internes de liberté de Kramli et Szasz, les fonctionnelles additives de chaînes de Markov de Nagaev et Kesten, les marches de Markov de Guivarc'h. On adoptera ici la terminologie de chaîne semi-markovienne, introduite par P. Levy dans le cadre de l'étude des sauts d'un processus additif, et reprise par Jacod :

Soit (X, Σ) un espace mesurable, une chaîne de Markov homogène $(x_n, \xi_n)_{n \geqq 0}$ d'espace d'états $X \times \mathbb{R}^d$ est dite *semi-markovienne* si pour tout état (x, ξ), la loi de ξ_1 sous $\mathbf{P}_{(x, \xi)}$ est identique à celle de $\xi + \xi_1$ sous $\mathbf{P}_{(x, 0)}$.

Une marche aléatoire sur $\mathbb{R}^d$ n'est alors autre qu'une chaîne semi-markovienne de base réduite à un point.

Les résultats de transience et de récurrence pour de tels processus, obtenus par Jacod en dimension 1 et par Guivarc'h en dimension supérieure fournissent le point de départ de cet article. Se plaçant dans une situation de transience, et sous l'hypothèse fondamentale de forte ergodicité de la chaîne de Markov sur la base, on développe ici une théorie du renouvellement pour les chaînes semi-markoviennes. Notons pour cela $\mathbf{P}$ le noyau de transition de $(x_n, \xi_n)_{n \geqq 0}$ et $\mathbf{U}$ le noyau potentiel :

$$\mathbf{U} = \sum_0^\infty \mathbf{P}^n.$$

Le nombre $\mathbf{U}((x, \xi), A \times B)$ mesure alors le nombre moyen de visites de la chaîne semi-markovienne dans $A \times B$, partant de (x, ξ). Le principal résultat de cet article est une estimation asymptotique de $\mathbf{U}((x, \xi), A \times B)$ lorsque B est un compact de $\mathbb{R}^d$ et ξ se trouve loin de B. Nous étendons ainsi les théorèmes de renouvellement de Blackwell (en dimension 1) et de Ney et Spitzer (en dimension supérieure) pour les marches aléatoires sur $\mathbb{R}^d$.

Décrivons à ce sujet les résultats classiques. En 1964, Spitzer donne un équivalent du noyau potentiel pour une marche aléatoire centrée sur $\mathbb{Z}^d$, $d \geqq 3$. Le cas décentré est atteint deux ans plus tard par Ney et Spitzer. Leur démonstration repose sur un théorème central limite local dont la précision, et donc la difficulté, se doivent d'augmenter avec la dimension de l'espace. Dans le cas centré $(d \geqq 3)$, le noyau potentiel $\mathbf{U}(x, .) = \sum_0^\infty \mathbf{P}^n(x, .)$ tend vers 0 comme $|x|^{2-d}$ lorsque x s'en va vers le point à l'infini de $\mathbb{Z}^d$. Dans le cas décentré ($d \geqq 1$), intervient de plus la direction de convergence à l'infini : $\mathbf{U}(x, .)$ se comporte comme $|x|^{(1-d)/2}$ dans la direction de la moyenne, et tend exponentiellement vite vers 0 dans les autres directions. Ney et Spitzer obtiennent de plus un équivalent uniforme en direction, ce qui leur permet d'identifier par homéomorphisme la frontière de Martin d'une marche aléatoire décentrée à la sphère unité de $\mathbb{R}^d$. En 1965, Doney, et en 1969 Stam donnent ce même équivalent sur $\mathbb{R}^d$. Ces résultats sont repris en 1984 par Carlsson et Wainger qui développent la notion de « cône de convergence » autour d'une direction. Mais ils ne s'intéressent pas au caractère uniforme de l'équivalent, point crucial pour obtenir la frontière de Martin. Notons de plus qu'une hypothèse de bonne décroissance à l'infini de la fonction caractéristique de la loi de la marche leur est nécessaire; celle-ci n'intervenant pas sur le groupe discret $\mathbb{Z}^d$ dont le groupe dual est compact.

Le passage des marches aléatoires aux chaînes semi-markoviennes, décrit dans une première partie, s'effectue grâce à l'introduction de certaines familles d'opérateurs. Ainsi, les opérateurs de Fourier généralisent la notion de fonction caractéristique d'une probabilité et traduisent de manière concrète la structure abélienne du groupe $\mathbb{R}^d$. Les opérateurs de Laplace, qui apparaissent de manière naturelle pour des chaînes semi-markoviennes décentrées, permettent quant à eux la relativisation d'un processus semi-markovien. Les propriétés de type probabiliste des chaînes (apériodicité, ergodicité) se transposent alors en propriétés spectrales (valeurs propres simples, quasi-compacité) de ces opérateurs. Grâce à cette traduction, le noyau potentiel peut s'exprimer comme la transformée de Fourier de fonctions présentant certaines singularités à l'origine.

L'étude de telles intégrales fait l'objet d'une deuxième partie. On y énonce tout d'abord les principaux théorèmes [(2.6), cas centré, et (2.9), cas décentré], puis, en vue de leur preuve, on décompose le noyau potentiel en somme de deux termes :

— le terme principal, qui n'est autre que le potentiel d'un mouvement brownien dans le cas centré, et celui d'un mouvement brownien avec « drift » constant dans le cas décentré;

— et d'un terme résiduel qui s'étudie suivant les cas par intégration par parties ou au moyen du découpement dyadique des intégrales.

Cette approche, directe, ne repose donc pas sur un théorème limite local, comme chez Spitzer. Elle autorise de plus, dans le cas décentré, une étude uniforme en direction, ce qui permet de décrire, sous des hypothèses de nature topologique, la frontière de Martin des chaînes semi-markoviennes. Elle permet enfin de retrouver les résultats sur le cône de convergence de Carlsson et Wainger, tout en supprimant l'hypothèse de décroissance à l'infini de la fonction caractéristique.

Deux applications sont proposées dans une troisième partie : la première est une estimation à l'infini de la fonction de Green sur un revêtement abélien de variété riemannienne compacte; la seconde donne un équivalent du noyau potentiel pour une classe de marches aléatoires vérifiant de faibles hypothèses de régularité relativement à la mesure de Haar du groupe sur les extensions compactes de $\mathbb{R}^d$. On élargit ainsi à cette classe la détermination de l'ensemble **H** des fonctions harmoniques positives : **H** était connu pour des marches aléatoires de loi ayant une densité à support compact.

Je suis très heureuse de pouvoir remercier ici M[me] L. Élie et M. P. Bougerol pour leur aide et leurs très utiles conseils. Je remercie également M. Y. Meyer pour le long entretien qu'il m'a accordé afin de m'expliquer la méthode du découpement dyadique des intégrales.

NOTATIONS :

– produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$: $\langle x \mid y \rangle$ ou $x.y$;

– norme sur $\mathbb{R}^d$: $|x| = \langle x \mid x \rangle^{1/2}$;

– si σ est une matrice définie positive, on note $|x|_\sigma$ le nombre $\sqrt{\sigma^{-1}(x)}$;

– transformée de Fourier :

$$f \in L^1(\mathbb{R}^d): \quad \hat{f}(\lambda) = \int e^{\lambda \cdot \xi} f(\xi)\, d\xi;$$

– si F est une fonction sur un espace produit $X \times \mathbb{R}^d$ et ξ un vecteur de $\mathbb{R}^d$, F^ξ désigne la translatée de F par ξ : $F^\xi(x, \xi') = F(x, \xi + \xi')$;

– pour tout élément a d'un banach E et tout a′ de son dual, on note $a' \otimes a$ l'opérateur sur E :

$$\forall b \in E, \qquad a' \otimes a(b) = a'(b)\, a.$$

Si E est un espace de fonctions, et $a' = f\pi$ un élément du dual ayant une densité relativement à une mesure de référence π, on notera souvent pour simplifier $f \otimes a$ au lieu de $f\pi \otimes a$.

PREMIÈRE PARTIE : LES CHAÎNES SEMI-MARKOVIENNES

A. Définitions, exemples

(1.1) Si (X, Σ) est un espace mesurable, on dira d'une chaîne de Markov $(x_n, \xi_n)_{n \geqq 0}$ d'espace d'états $X \times \mathbb{R}^d$, homogène de noyau de transition $\mathbf{P}$ qu'elle est *semi-markovienne de base* X si pour toute fonction $\mathbf{F}$ positive sur $X \times \mathbb{R}^d$ et tout vecteur ξ de $\mathbb{R}^d$,

$$(\mathbf{P}\,\mathrm{F})^{\xi} = \mathbf{P}(\mathrm{F}^{\xi}).$$

C'est ainsi la propriété fondamentale des marches aléatoires d'invariance par translation qui est étendue aux chaînes semi-markoviennes. Cette propriété a pour conséquence les deux faits suivants : la chaîne $(x_n)_{n \geqq 0}$ est une chaîne de Markov sur X dont le noyau de transition $\bar{\mathbf{P}}$ apparaît comme l'image de $\mathbf{P}$ par la projection canonique $(X \times \mathbb{R}^d \to X)$; l'accroissement $\xi_{n+1} - \xi_n$ à l'instant n ne dépend du passé que par x_n.

Une marche aléatoire sur $\mathbb{R}^d$ n'est donc qu'une chaîne semi-markovienne de base réduite à un point. Donnons-en maintenant quelques exemples non triviaux. Le premier apparaît dans l'étude des chaînes de Markov elles-mêmes. Si $(x_n)_{n \geqq 0}$ est une chaîne de Markov sur X, on peut s'intéresser au nombre de passages de (x_i) dans un ensemble mesurable A de X avant l'instant n, soit à l'expression $\xi_n = \sum_{i=0}^{n} 1_{\mathrm{A}}(x_i)$. De fait, pour toute fonction f mesurable de X dans $\mathbb{R}^d$, il est aisé de voir que le couple $\left(x_n, \sum_{0}^{n} f(x_i)\right)$ est semi-markovien (Nagaev [35]). Un tel couple peut être mis en évidence lors de l'étude de séries lacunaires : x_n est la chaîne de Markov associée à la transformation $z \to z^2$ du cercle unité et la fonction f est prise égale à l'identité de $\mathbb{R}^d$ (Guivarc'h [21]).

C'est dans le cadre des produits de matrices aléatoires que Kesten [31] introduisit les « fonctionnelles additives » de chaînes de Markov. Cherchant à estimer la quantité réelle $S_n(x) = \log |X_n \ldots X_1 x|$ où $(X_i)_{i \geqq 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi sur le groupe linéaire $\mathbf{GL}(d, \mathbb{R})$ et x un vecteur de $\mathbb{R}^d$, il fut amené à introduire la chaîne de Markov auxiliaire sur la sphère unité de $\mathbb{R}^d$:

$$x_n = \frac{X_n \dots X_1 x}{|X_n \dots X_1 x|}.$$

De la décomposition en somme

$$S_{n+1}(x) = S_n(x) + \log |X_{n+1} x_n|$$

et de l'indépendance de X_{n+1} et de x_n résultait le caractère semi-markovien, de base $\mathbf{S}^{\mathbf{d}-1}$, du couple $(x_n, S_n(x))$.

(1.2) Enfin, les chaînes semi-markoviennes apparaissent de manière naturelle dès lors que l'on s'intéresse aux marches aléatoires sur les groupes de Lie. Donnons-nous en effet un groupe de Lie connexe G et une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans G. Supposons de plus que le groupe G soit produit semi-direct de deux sous-groupes S et T : T est distingué dans G et S agit par automorphismes sur T de telle sorte que la loi du groupe est donnée par la formule : $(t, s)(t', s') = (t(s.t'), ss')$. Considérons alors les deux situations suivantes :

(*a*) le sous-groupe T est isomorphe à $\mathbb{R}^d$. La marche aléatoire *droite* $R_n = X_1 X_2 \dots X_n$, dont le noyau de transition commute avec les translations à gauche par les éléments de G, est en particulier invariante sous l'action des éléments de $\mathbb{R}^d$. Puisque ceux-ci opèrent par translation : $(t, 1)(t', s') = (t + t', s')$, la marche R_n peut se voir comme une chaîne semi-markovienne de base S. La chaîne de Markov en projection sur la base est alors une marche aléatoire droite sur S. Le groupe des déplacements $\mathbf{G}^{\mathbf{d}} = \mathbb{R}^{\mathbf{d}} \times \mathbf{SO}(d)$, ainsi que toutes les extensions compactes de $\mathbb{R}^d$ offrent un champ d'utilisations de cette situation. Ceci sera développé dans la troisième partie.

(*b*) le sous-groupe S est isomorphe à $\mathbb{R}^d$. C'est maintenant la marche aléatoire *gauche* $L_n = X_n \dots X_1$ qui peut être vue comme une chaîne semi-markovienne, de base T. Ce cadre sera développé ultérieurement en vue d'une étude de la compactification de Martin des espaces riemanniens symétriques.

Venons-en maintenant à l'ensemble de conditions sous lesquelles nos résultats ont lieu. Elles reprennent celles de Guivarc'h [21], Kesten [31].

B. Forte ergodicité de la chaîne sur la base

(1.3) On suppose qu'il existe une mesure de probabilité π sur l'espace X qui soit $\bar{\mathbf{P}}$-invariante. L'opérateur de transition $\bar{\mathbf{P}}$ induit alors une contraction de $L^1(X, \pi)$, pour laquelle on exige que l'équation $\bar{\mathbf{P}} f = e^{i\theta} f$ n'ait d'autres solutions que $e^{i\theta} = 1$, et f constante π-*p. s.* Cette hypothèse entraîne l'ergodicité relativement à π de la chaîne $(x_n)_{n \geqq 0}$: la tribu des invariants est grossière. Le théorème ergodique assure alors que la suite des opérateurs $\bar{\mathrm{P}}^n$ converge au sens de Cesàro pour la topologie faible des opérateurs vers le projecteur $\pi \otimes 1$ (la fonction constante égale à 1 sur X est notée 1). Une notion de forte convergence nous est nécessaire, mais ceci sur un espace de fonctions qui peut être restreint.

(1.4) DÉFINITION. – Soit E un sous-espace de Banach de $\mathrm{L}^1(\mathrm{X}, \pi)$, contenant les fonctions constantes. Une chaîne de Markov sur X, admettant pour probabilité invariante π, est E-fortement ergodique si son noyau de transition $\bar{\mathrm{P}}$ obéit aux deux conditions suivantes :

(i) l'opérateur $\bar{\mathrm{P}}$ laisse stable E;

(ii) la suite $\bar{\mathrm{P}}^n$ converge en norme d'opérateurs vers le projecteur $\pi \otimes 1$.

(1.5) Lorsque la chaîne de Markov vérifie l'hypothèse (1.3), la condition (ii) est réalisée si l'opérateur $\bar{\mathrm{P}}$ est *quasi-compact* sur E, c'est-à-dire s'il existe un entier n_0 et un opérateur compact K tels que $\|\bar{\mathrm{P}}^{n_0} - \mathrm{K}\| < 1$. On sait en effet que de tels opérateurs possèdent les deux propriétés suivantes :

– toute valeur spectrale périphérique est une valeur propre et un pôle d'ordre fini de la résolvante;

– les projecteurs spectraux associés à ces pôles sont de rang fini (Brunel-Revuz [10]).

Ainsi, si l'on sait de plus que $\bar{\mathrm{P}}$ a pour seule valeur propre périphérique 1, et que celle-ci est simple [condition (1.3)], le spectre de $\bar{\mathrm{P}}$ (*dans* E) est réunion disjointe du singleton $\{1\}$, et d'une partie de $\mathbb{C}$ contenue dans une boule de rayon strictement inférieur à 1 [15]. Le calcul des opérateurs permet alors d'écrire $\bar{\mathrm{P}}$ comme la somme

$$\bar{\mathrm{P}} = \pi \otimes 1 + \mathrm{Q} \qquad \text{avec} \quad (\pi \otimes 1)\,\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(\pi \otimes 1) = 0$$

où Q est un opérateur sur E de rayon spectral inférieur strictement à 1. En itérant l'égalité précédente, on obtient pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\bar{\mathrm{P}}^n = \pi \otimes 1 + \mathrm{Q}^n \qquad \text{avec} \quad \|\mathrm{Q}^n\| \leqq c^n, \quad c < 1,$$

d'où la forte ergodicité de $\bar{\mathrm{P}}$.

La réciproque est vraie de manière évidente, la forte ergodicité de $\bar{\mathrm{P}}$ donnant simultanément la condition (1.3) sur E et sa quasi-compacité.

(1.6) L'espace de Banach E peut varier suivant les situations que l'on envisage. Donnons-en quelques exemples :

(*a*) Si le noyau de transition $\bar{\mathrm{P}}$ admet une densité p relativement à la mesure invariante π strictement positive, alors $\bar{\mathrm{P}}$ obéit à la condition (1.3) [22]. Supposons de plus p bornée; dans ce cas, $\bar{\mathrm{P}}$ est de carré compact dans $\mathrm{E} = \mathrm{L}^\infty(\mathrm{X}, \pi)$. Si maintenant p est de carré intégrable, l'opérateur $\bar{\mathrm{P}}$ est de Hilbert-Schmidt, donc compact dans $\mathrm{E} = \mathrm{L}^2(\mathrm{X}, \pi)$. Enfin, si p est minorée partout par une constante strictement positive, l'opérateur de transition $\bar{\mathbf{P}}$ obéit à la condition de Doeblin et est quasi-compact sur l'espace des fonctions bornées de X (Revuz, [38]).

(*b*) Lorsque X est un groupe compact, et $\bar{\mathbf{P}}$ le noyau de transition d'une marche aléatoire de loi $\bar{\mu}$ sur X, la forte ergodicité de la chaîne $(x_n)_{n \geqq 0}$ sur l'espace des fonctions continues est équivalente à l'étalement de la mesure $\bar{\mu}$ sur X [23].

(*c*) Supposons enfin que X soit un espace métrique compact et que $\bar{\mathbf{P}}$ possède la propriété de contraction de Doeblin-Fortet. Le théorème de Ionescu-Tulcea-Marinescu donne la quasi-compacité de $\bar{\mathbf{P}}$ sur l'espace E des fonctions lipschitziennes (Norman [37], Guivarc'h [22]).

(1.7) Cette dernière situation ne sera pas envisagée dans le présent travail. Sauf mention du contraire, E est un espace « usuel » de fonctions, à savoir $L^p(X, \pi)$, pour $1 \leqq p \leqq \infty$, ou les fonctions bornées ou encore l'espace des fonctions continues sur X, si X est topologique compact. Dans ce cas le cône des fonctions positives ou nulles permet de munir E d'un ordre partiel qui en fait un *treillis de Banach* au sens de Schaeffer [41], à savoir :

– pour tout couple de fonctions positives (f, g) de $E \times E$ telles que $f \leqq g$, on a $\|f\|_E \leqq \|g\|_E$;

– pour tout couple (f, g) de $E \times E$, les deux fonctions $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ appartiennent à E.

Cette remarque aura d'importantes conséquences sur le spectre des opérateurs qui seront *positifs* sur E, c'est-à-dire ceux qui conserveront le cône des fonctions positives.

C. Adaptation, changement de section et opérateurs de Fourier

(1.8) Changement de section.

Soit $(X_n)_{n \geqq 0} = (x_n, \xi_n)_{n \geqq 0}$ une chaîne semi-markovienne sur $X \times \mathbb{R}^d$. Si g est une fonction de X dans $\mathbb{R}^d$, les propriétés de transience de ξ_n et de $\xi_n - g(x_n)$ sont essentiellement les mêmes. Ceci conduit à introduire la notion de *g-changement de section.* On appelle ainsi la nouvelle chaîne semi-markovienne $({}^g X_n)_{n \geqq 0}$ construite à partir de g de la manière suivante :

$$\mathbf{P}_{(x, \xi)}\text{-}p.\,s., \qquad {}^g X_n = (x_n, \xi_n - g(x_n)), \qquad {}^g X_0 = (x, \xi - g(x)).$$

Un g-changement de section correspond donc à un changement d'origine sur chaque fibre. On considérera plus particulièrement les g-changements de section *réguliers*, c'est-à-dire ceux pour lesquels les coordonnées de g appartiennent à E.

On notera les objets attachés à cette nouvelle chaîne avec un g en exposant à gauche. Ainsi, ${}^g\mathbf{P}$ désigne le noyau de transition :

$${}^g\mathbf{P}\,F(x, \xi) = \mathbf{E}_{(x, \xi)}[F(x_1, \xi_1 - g(x_1) + g(x))].$$

(1.9) Adaptation.

Il apparaît naturel de supposer que, à un changement de section près, la chaîne $(\xi_n)_{n \geqq 0}$ ne reste pas dans un sous-espace de $\mathbb{R}^d$. On dit que la chaîne semi-markovienne $(x_n, \xi_n)_{n \geqq 0}$ est *adaptée*, (resp. *apériodique*), (resp. *irréductible*), si, pour toute fonction g intégrable de X dans $\mathbb{R}^d$, et pour tout sous-espace vectoriel (resp. sous-espace affine) (resp. demi-espace) H de $\mathbb{R}^d$, on a :

$$\pi(A_{g, H}) < 1 \qquad \text{où} \quad A_{g, H} = \{x \in X / {}^g\mathbf{P}_{(x, 0)}[\xi_1 \in H] = 1\}.$$

(1.10) Opérateurs de Fourier.

Lorsque $(\xi_n)_{n \geqq 0}$ est simplement une marche aléatoire de loi μ sur $\mathbb{R}^d$, l'apériodicité de μ se lit sur sa transformée de Fourier $\hat{\mu}$: celle-ci ne vaut 1 en module qu'au point 0 de $\mathbb{R}^d$. C'est sur les propriétés spectrales de l'opérateuf de Fourier $\mathbf{P}^\lambda$, qui généralise l'opérateur de multiplication par $\hat{\mu}(\lambda)$, que l'on pourra voir l'apériodicité de la chaîne semi-markovienne.

On définit, pour tout λ de $\mathbb{R}^d$, $\mathbf{P}^\lambda$ par :

$$\forall f \in L^1(X, \pi), \quad \mathbf{P}^\lambda f(x) = \mathbf{E}_{(x, 0)}[f(x_1) e^{i\lambda \cdot \xi_1}].$$

(1.11) Supposons que la chaîne semi-markovienne ne soit pas apériodique. Il existe donc une fonction g intégrable de X dans $\mathbb{R}^d$, un sous-espace H, et un vecteur λ orthogonal à H tels que $\pi(dx)$-*p. s.*, $\mathbf{P}_{(x, 0)}$-*p. s.* le produit scalaire $\langle \lambda | \xi_1 - g(x_1) + g(x) \rangle$ soit constant. Soit θ ce nombre. Pour un tel λ, on a :

$$\mathbf{P}^\lambda [e^{-i\lambda \cdot g}] = e^{i\theta} e^{-i\lambda \cdot g}$$

et la fonction $e^{-i\lambda \cdot g}$ apparaît comme un vecteur propre de l'opérateur de Fourier $\mathbf{P}^\lambda$. On trouve de fait les deux équivalences suivantes (Guivarc'h [22]) :

Soit $(X_n)_{n \geqq 0}$ une chaîne semi-markovienne dont la chaîne en projection sur la base vérifie la condition (1.3).

(*a*) $\mathbf{P}$ est adapté si et seulement si, pour tout λ non nul, 1 n'est pas valeur propre de $\mathbf{P}^\lambda$.

(*b*) $\mathbf{P}$ est apériodique si et seulement si, pour tout λ non nul, $\mathbf{P}^\lambda$ n'admet aucune valeur propre de module 1.

(1.12) Condition S(E).

L'apériodicité de $\mathbf{P}$ interdit donc l'existence de valeurs propres de module 1. On cherche maintenant à éliminer les valeurs spectrales de module 1, en se restreignant éventuellement à l'espace E sur lequel la chaîne de base $(x_n)_{n \geqq 0}$ est fortement ergodique [*cf.* (1.4)]. D'où la :

Condition S(E) : pour tout λ de $\mathbb{R}^d$, l'opérateur de Fourier $\mathbf{P}^\lambda$ définit une contraction de E pour laquelle toute valeur spectrale périphérique est valeur propre.

(1.13) Rayon spectral de l'opérateur de Fourier.

La condition $\mathbf{S}(E)$ se trouve réalisée dès que $\mathbf{P}^\lambda$ est quasi-compact sur E [*cf.* (1.5)]. Notons que l'application $(\lambda \to \mathbf{P}^\lambda)$ étant une pertubation continue de l'opérateur $\bar{\mathbf{P}}$, $(\mathbf{P}^\lambda_{|\lambda=0} = \bar{\mathbf{P}})$, l'opérateur $\mathbf{P}^\lambda$ reste quasi-compact lorsque λ est proche de 0. Ainsi, la condition $\mathbf{S}(E)$ ne porte que sur les valeurs de λ qui sont loin de 0. D'après ce qui précède, nous avons :

Si $\mathbf{P}$ *est un noyau semi-markovien apériodique vérifiant la condition* $\mathbf{S}(E)$, *pour tout* λ *non nul, le rayon spectral de l'opérateur de Fourier* $\mathbf{P}^\lambda$ *est strictement inférieur à* 1 (*sur* E).

(1.14) Une propriété importante de la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}^d$ est qu'elle transforme la convolution des mesures en multiplication des fonctions caractéristiques. De l'invariance par translation des noyaux semi-markoviens, résulte un phénomène analogue : l'opérateur de Fourier associé au noyau itéré $\mathbf{P}^n$ est l'opérateur de Fourier itéré n fois. On montre en effet par récurrence sur n que :

$$\forall f \in L^1(X, \pi)$$
$$(\mathbf{P}^n)^\lambda f(x) = \mathbf{E}_{(x,0)}[e^{i\lambda \cdot \xi n} f(x_n)] = (\mathbf{P}^\lambda)^n f(x).$$

(1.15) Terminons ce paragraphe sur la remarque suivante : si l'on remplace le noyau de transition $\mathbf{P}$ par le nouveau noyau $\mathbf{P}_1 = \sum_0^\infty \mathbf{P}^n/2^{n+1}$, le noyau potentiel $\mathbf{U} = \sum_0^\infty \mathbf{P}^n$ est très peu modifié : $\mathbf{U}_1 = \mathrm{Id} + \mathbf{U}$. Cette transformation n'affecte pas non plus les propriétés de $\mathbf{P}$. Par exemple, les noyaux en projection $\bar{\mathbf{P}}_1$ et $\bar{\mathbf{P}}$ sont simultanément E-fortement ergodiques, les opérateurs de Fourier se déduisent l'un de l'autre par la même transformation ((1.14)), et obéissent en même temps à la condition $\mathbf{S}(E)$. Son intérêt est le suivant : en utilisant la caractérisation (1.11), on peut montrer [2] que, si $\mathbf{P}$ est adapté, $\mathbf{P}_1$ est apériodique. Ainsi, quitte à remplacer $\mathbf{P}$ par $\mathbf{P}_1$ dans l'étude du noyau potentiel, on pourra utiliser l'hypothèse d'adaptation au lieu de celle d'apériodicité.

D. Moments et Opérateurs de Fourier

(1.16) Moments, hypothèse de centrage.

On fixe maintenant un espace de fonctions E contenu dans $L^1(X, \pi)$ sur lequel la chaîne de Markov $(x_n)_{n \geq 0}$ est fortement ergodique [Définition (1.4)]. Nous dirons qu'une chaîne semi-markovienne admet un *moment d'ordre* p, $p \in \mathbb{R}^+$ si pour tout élément f de E, la fonction de x $\mathbf{E}_{(x,0)}[|\xi_1|^p f(x_1)]$ appartient à E.

Lorsque $p=2$, on note M (resp. Σ), l'opérateur moyenne (resp. énergie) :

$$\mathrm{M}: \quad \mathrm{M} f(x)=\mathbf{E}_{(x,\,0)}[\xi_1 f(x_1)],$$

$$\Sigma: \quad \Sigma f(x)=\mathbf{E}_{(x,\,0)}[\xi_1\, {}^t\xi_1 f(x_1)].$$

Si l'on écrit l'influence d'un changement de section g sur l'opérateur M, on trouve la relation :

$${}^g\mathrm{M}\,1(x)=\mathrm{M}\,1(x)+g(x)-\bar{\mathbf{P}}g(x).$$

Le vecteur $\langle {}^g\mathrm{M}\,1 \mid \pi \rangle$ est par conséquent un *invariant* de la chaîne semi-markovienne.

Lorsque la chaîne est E-fortement ergodique, nous avons l'égalité

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-\bar{\mathbf{P}})_{\mid \mathrm{E}}=\mathrm{Ker}\,\pi\otimes 1,$$

l'inclusion $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-\bar{\mathbf{P}})\subset\mathrm{Ker}\,\pi\otimes 1$ étant vraie dès que la mesure π est $\bar{\mathbf{P}}$-invariante. Il est donc possible dans ce cas de trouver un changement de section régulier g tel que $(\mathrm{Id}-\bar{\mathbf{P}})g=\langle \mathrm{M}\,1 \mid \pi \rangle-\mathrm{M}\,1$, soit ${}^g\mathrm{M}\,1=\langle \mathrm{M}\,1 \mid \pi \rangle$. Ceci justifie la

(1.17) Définition. — Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\geqq 0}$ une chaîne semi-markovienne de base X ayant un moment d'ordre 1. Si la chaîne $(x_n)_{n\geqq 0}$ est E-fortement ergodique, il existe un et un seul élément g de E tel que l'image de la fonction 1 par l'opérateur moyenne associé au g-changement de section soit identiquement égale au vecteur $\langle \mathrm{M}\,1 \mid \pi \rangle$ de $\mathbb{R}^d$. Ce vecteur sera appelé *moyenne* de la chaîne semi-markovienne, et sera noté m. La chaîne sera dite *centrée* si sa moyenne est nulle.

(1.18) On veut maintenant préciser le lien entre l'hypothèse d'adaptation et l'inversibilité de la matrice $\langle \Sigma\,1 \mid \pi \rangle$. C'est le but de la :

Proposition. — *Soit* $(\mathrm{X}_n)_{n\geqq 0}$ *une chaîne semi-markovienne adaptée ayant un moment d'ordre* 2. *Pour tout g-changement de section régulier, la matrice symétrique* $\langle {}^g\Sigma\,1 \mid \pi \rangle$ *est définie positive.*

Preuve. — Si $(\mathrm{X}_n)_{n\geqq 0}$ est adaptée, $({}^g\mathrm{X}_n)_{n\geqq 0}$ est adaptée [*cf.* définition (1.9)]. Il suffit donc de montrer la proposition pour $(\mathrm{X}_n)_{n\geqq 0}$. Soit donc la matrice $\langle \Sigma\,1 \mid \pi \rangle$ considérée comme forme quadratique sur $\mathbb{R}^d$, et appliquons lui un vecteur h de $\mathbb{R}^d$. Nous avons

$$\langle \Sigma\,1 \mid \pi \rangle(h)=\int \pi(dx)\,\mathbf{E}_{(x,\,0)}[\langle \xi_1 \mid h \rangle^2].$$

L'existence d'un vecteur h non nul tel que $\langle \Sigma\,1 \mid \pi \rangle(h)=0$ entraîne l'existence d'un sous-espace vectoriel H, à savoir $(h)^{\perp}$, tel que $\pi(dx)$-*p. s.*, $\mathbf{P}_{(x,\,0)}$-*p. s.*, $\xi_1\in\mathrm{H}$, ce qui est contraire à l'hypothèse d'adaptation.

(1.19) Matrice énergie.

La définition (1.18) dit essentiellement que l'on peut associer à une chaîne semi-markovienne vérifiant de bonnes hypothèses un g-changement de section canonique pour lequel la moyenne est constante. On appellera *matrice énergie* (notée σ) la matrice $\langle {}^g\Sigma 1 \mid \pi \rangle$. Celle-ci est définie positive si la chaîne semi-markovienne est adaptée, d'après la proposition (1.18).

(1.20) La régularité de la transformation de Fourier est reliée à l'existence de moments de la chaîne. Si $\mathbf{P}$ admet un moment d'ordre p entier, l'application à valeurs opérateurs $\lambda \to \mathbf{P}^\lambda$ est de classe C^p, et pour p supérieur ou égal à 2, nous avons, en notant D la différentiation par rapport à λ:

$$i\mathrm{M} = \mathrm{D}\mathbf{P}^\lambda_{\mid \lambda=0}; \qquad -\Sigma = \mathrm{D}^2\,\mathbf{P}^\lambda_{\mid \lambda=0}$$

(1.21) Pertubations

Ce lien peut être affiné en faisant usage de la théorie des pertubations d'opérateurs (Kato [29]) : supposons $\bar{\mathbf{P}}$ fortement ergodique, alors

$$\bar{\mathbf{P}} = \pi \otimes 1 + \mathrm{Q} \qquad \text{avec} \quad (\pi \otimes 1)\,\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(\pi \otimes 1) = 0$$

[*c.f.* (1.5)]. Puisque l'application $(\lambda \to \mathbf{P}^\lambda)$ est une pertubation continue de $\bar{\mathbf{P}}$, les prorpiétés spectrales de $\mathbf{P}^\lambda$ sont essentiellement les mêmes que celles de $\bar{\mathbf{P}}$, si λ est proche de 0. En particulier, il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}^d$ tel que, pour tout λ de U, on ait :

$$\mathbf{P}^\lambda = k(\lambda)\,p_\lambda + \mathrm{Q}_\lambda \qquad \text{avec} \quad p_\lambda \mathrm{Q}_\lambda = \mathrm{Q}_\lambda p_\lambda = 0$$

où :

– $k(\lambda)$ est la valeur spectrale de plus haut module de l'opérateur de Fourier $\mathbf{P}^\lambda$. C'est une valeur propre, et elle est isolée dans le spectre de $\mathbf{P}^\lambda$.

– p_λ est le projecteur spectral associé à $k(\lambda)$. Il est de rang égal à 1, et s'écrit donc $p_\lambda = \pi_\lambda \otimes \varphi_\lambda$ où φ_λ est un générateur du sous-espace propre, et π_λ un élément du dual de E, $\mathbf{P}^\lambda$-invariant normalisé pour que $\langle \pi_\lambda \mid \varphi_\lambda \rangle = 1$.

– Q_λ est un opérateur de rayon spectral strictement inférieur à 1.

L'étude du renouvellement introduit la somme $\sum \mathbf{P}^n$. L'intérêt de la décomposition ci-dessus réside dans le fait qu'elle permet une écriture explicite de la singularité en 0 de la résolvante

$$\mathbf{R}(1, \mathbf{P}^\lambda) = \sum (\mathbf{P}^\lambda)^n$$

(cette résolvante est bien définie, pour λ non nul, dès que le noyau $\mathbf{P}$ semi-markovien est apériodique et vérifie la condition ($\mathbf{S}$(E)), puisque l'on sait alors que le rayon spectral de $\mathbf{P}^\lambda$ est strictement inférieur à 1 (1.13).

En effet:

$$(\mathbf{P}^{\lambda})^n = k(\lambda)^n p_\lambda + (Q_\lambda)^n$$

et:

$$R(1, \mathbf{P}^{\lambda}) = \frac{p_\lambda}{1-k(\lambda)} + R(1, Q_\lambda).$$

(1.22) La proposition suivante donne le développement en 0 de la fonction $\lambda \to k(\lambda)$.

PROPOSITION (Guivarc'h [22]). — *Soit* $(X_n)_{n \geqq 0}$ *une chaîne semi-markovienne adaptée, ayant un moment d'ordre* 2. *On suppose la chaîne* $(x_n)_{n \geqq 0}$ *de base* E-*fortement ergodique. Soit* $k(\lambda)$ *la valeur propre de plus haut module de l'opérateur de Fourier* $\mathbf{P}^{\lambda}$, *définie au voisinage de* 0. *Alors:*

$$k(0)=1, \qquad k'(0) = i\langle M1 \mid \pi \rangle, \qquad k''(0) = -\sigma,$$

où σ *est la matrice énergie introduite en* (1.19).

Si de plus la chaîne admet un moment d'ordre p, l'application k est de classe C^p.

E. Moments exponentiels et transformée de Laplace

Nous aurons également besoin de la notion de moment exponentiel, que nous définissons maintenant.

On se donne E un treillis de Banach [*cf.* (1.7)] sur lequel la chaîne de base $(x_n)_{n \geqq 0}$ est fortement ergodique.

(1.23) DÉFINITION. — On dira d'une chaîne semi-markovienne $(x_n, \xi_n)_{n \geqq 0}$ qu'elle admet un moment d'ordre exponentiel si pour tout r de $\mathbb{R}^+$, l'application qui à toute fonction f de E fait correspondre la fonction $E_r f$:

$$E_r f(x) = \mathbf{E}_{(x, 0)}[f(x_1)\, e^{r \,|\xi_1|}]$$

est un opérateur borné de E.

(1.24) Transformée de Laplace.

Lorsqu'une chaîne semi-markovienne admet un moment exponentiel, il est possible de définir un prolongement analytique de la transformation de Fourier, à savoir la *transformation de Laplace:* à tout z de $\mathbb{C}^d$, on associe l'opérateur de Laplace, $\bar{\mathbf{P}}^z$, défini par:

$$\forall f \in E, \quad \bar{\mathbf{P}}^z f(x) = \mathbf{E}_{(x, 0)}[f(x_1)\, e^{z \cdot \xi_1}],$$

où:

$$z \,.\, \xi_1 = u \,.\, \xi_1 + i\lambda \,.\, \xi_1,$$

si $z = u + i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $u \in \mathbb{R}^d$.

Lorsque z est imaginaire pur, on retrouve l'opérateur de Fourier $\mathbf{P}^{\lambda}$ (Attention ! $\mathbf{P}^{\lambda}=\bar{\mathbf{P}}^{i\lambda}$). Par contre, si z est réel, on obtient de nouveaux opérateurs, qui sont positifs.

Intéressons-nous au spectre de ces opérateurs. Supposons en effet que l'on connaisse un vecteur u de $\mathbb{R}^d$ pour lequel il existe une fonction φ_u strictement positive et $\bar{\mathbf{P}}^u$-invariante. De l'invariance par translation des noyaux semi-markoviens résulte que la fonction produit sur $X \times \mathbb{R}^d$: $H_u(x, \xi)=\varphi_u(x)e^{u \cdot \xi}$ est *harmonique* pour le processus initial, et que le noyau relativisé défini par :

$$R^u F=\frac{1}{H_u} P(H_u F)$$

reste semi-markovien. L'étude de ces noyaux peut donc conduire à de nouvelles informations sur $\mathbf{P}$. Nous sommes par conséquent amenés à introduire le *rayon spectral* de l'opérateur $\bar{\mathbf{P}}^u$, que l'on note $r(u)$. Les propriétés de r sont énoncées dans la :

(1.25) Proposition. — *Soit $(X_n)_{n \geqq 0}=(x_n, \xi_n)_{n \geqq 0}$ une chaîne semi-markovienne adaptée ayant un moment d'ordre exponentiel. Supposons la chaîne de base $(x_n)_{n \geqq 0}$ E-fortement ergodique. Alors :*

(*a*) *la fonction $u \to r(u)$ est logarithmiquement convexe;*

(*b*) *si m est la moyenne de la chaîne* (1.17), *et σ la matrice énergie* (1.18) *de la chaîne $r'(0)=m$, $r''(0)=\sigma$;*

(*c*) *si $(X_n)_{n \geqq 0}$ est irréductible* [*définition* (1.9)], *la norme de $\bar{\mathbf{P}}^u$ tend vers l'infini lorsque $|u|$ tend vers l'infini.*

Preuve — (*a*) Soit donc E l'espace de Banach sur lequel $(x_n)_{n \geqq 0}$ est fortement ergodique; on rappelle, suivant (1.7), que E est égal à $L^p(X, \pi)$, $1 \leqq p \leqq \infty$, ou bien à $C(X)$ si X est topologique compact. Pour toute fonction φ positive de E, pour tout couple (u, u') appartenant à $(\mathbb{R}^d)^2$ et pour tout t de $[0, 1]$, nous avons :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{P}}^{tu+(1-t)u'} \varphi(x) &= \mathbf{E}_{(x, 0)}[(e^{u \cdot \xi_1} \varphi(x_1))^t (e^{u' \cdot \xi_1} \varphi(x_1))^{1-t}],\\ &\leqq (\bar{\mathbf{P}}^u \varphi(x))^t (\bar{\mathbf{P}}^{u'} \varphi(x))^{1-t}\end{aligned}$$

en vertu de l'inégalité de Hölder. Puisque E est un treillis de Banach, qui de plus vérifie

$$\forall t \in [0, 1], \quad \forall f \in E, \qquad \|f^t\| \leqq \|f\|^t \quad \text{(Jensen)}$$

on peut encore écrire

$$\|\bar{\mathbf{P}}^{tu+(1-t)u'}\| \leqq \|\bar{\mathbf{P}}^u\|^t \|\bar{\mathbf{P}}^{u'}\|^{1-t}$$

d'où la log-convexité de l'application $(u \to \|\bar{\mathbf{P}}^u\|)$. Le (*a*) découle maintenant des deux égalités :

$$\|(\bar{\mathbf{P}}^u)^n\| = \|\overline{(\mathbf{P}^n)}^u\| \qquad \text{et} \qquad r(u)=\liminf_n \|(\bar{\mathbf{P}}^u)^n\|^{1/n}.$$

(*b*) Il suffit de se placer au voisinage de 0, pour lequel on sait que l'opérateur $\bar{\mathbf{P}}^u$ reste quasi-compact. Ainsi, le spectre de $\bar{\mathbf{P}}^u$ est constitué d'une valeur propre isolée $k(u)$ et d'une partie de $\mathbb{C}$ contenue dans une boule de rayon strictement inférieur à 1. Puisque l'opérateur $\bar{\mathbf{P}}^u$ est positif, $k(u)$ est un nombre réel positif, et est donc égal à $r(u)$. Un calcul analogue à celui de la proposition (1.22) conduit aux deux égalités du (*b*).

(*c*) Il est aisé de voir que pour qu'une fonction convexe f tende vers l'infini, il suffit que pour tout s de la sphère unité, on ait :

$$\lim_{t \to +\infty} f(ts) = +\infty.$$

Soit donc s fixé. D'après l'irréductibilité de la chaîne semi-markovienne, il existe un ensemble A de π-mesure positive et deux nombres ε_1 et ε_2 tels que, pour tout x de A :

$$\mathbf{P}_{(x,\,0)}(\xi_1 \,.\, s \geqq \varepsilon_1) > \varepsilon_2.$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned}\|\bar{\mathbf{P}}^{ts} 1\|_{\mathrm{L}^1} &= \int \pi(dx)\,\mathbf{E}_{(x,\,0)}[e^{ts\,.\,\xi_1}],\\ &\geqq \int_{\mathrm{A}} \pi(dx)\,\mathbf{E}_{(x,\,0)}[e^{ts\,.\,\xi_1}\,1_{\{s\,.\,\xi_1 \geqq \varepsilon_1\}}],\\ &\geqq e^{\varepsilon_1 t}\,\varepsilon_2\,\pi(\mathrm{A}).\end{aligned}$$

Donc $\|\bar{\mathbf{P}}^{ts} 1\|_{\mathrm{L}^1}$ tend vers l'infini lorsque t tend vers l'infini. Maintenant, de l'inclusion continue de E dans L^1 résultent les inégalités :

$$\|\bar{\mathbf{P}}^{ts}\| \geqq \|\bar{\mathbf{P}}^{ts} 1\|_{\mathrm{E}} \geqq \|\bar{\mathbf{P}}^{ts} 1\|_{\mathrm{L}^1},$$

et donc $\|\bar{\mathbf{P}}^{ts}\|$ tend vers l'infini en même temps que t.

De la remarque ci-dessus découle le (*c*) de la proposition.

La proposition (1.25) conduit à différencier entre les cas centré et décentré. Si en effet $m=0$, la fonction convexe r voit son gradient s'annuler en 0. Comme $r''(0)$ est définie positive, r a pour minimum 1, atteint au seul point 0. Si par contre m est non-nul, l'ensemble D des u de $\mathbb{R}^d$ tels que le rayon spectral de l'opérateur $\bar{\mathbf{P}}^u$ soit strictement inférieur à 1 est un ouvert convexe non vide. Tout élément du bord

$$\partial\,\mathrm{D} = \{u \in \mathbb{R}^d;\ r(u) = 1\}$$

donne lieu à un opérateur $\bar{\mathbf{P}}^u$ susceptible d'admettre un élément invariant, et donc éventuellement à une fonction H_u harmonique. L'étude du renouvellement de la chaîne semi-markovienne montrera la trivialité des fonctions harmoniques positives dans le cas centré, et au contraire l'existence de fonctions harmoniques positives non constantes dans le cas décentré.

(1.26) Il faut maintenant associer à tout élément u de $\partial\mathrm{D}$ un élément φ_u qui soit $\bar{\mathbf{P}}^u$-invariant. Pour cela, on considère le sous-ensemble de $\partial\mathrm{D}$:

$$\partial\mathrm{D}^* = \{u \in \partial\mathrm{D};\ \bar{\mathbf{P}}^u \textit{ est quasi-compact sur } \mathrm{E}\}.$$

Nous avons le:

THÉORÈME. — *Soit* $\mathrm{E} = \mathrm{L}^p(\mathrm{X}, \pi)$, *avec* $\mathrm{F} = \mathrm{L}^q(\mathrm{X}, \pi)$, *où* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (F *est le dual de* E *si* $p < +\infty$).

Soit $(\mathrm{X}_n)_{n \geqq 0}$ *une chaîne semi-markovienne ayant un moment exponentiel, et dont la chaîne de base* $(x_n)_{n \geqq 0}$ *est* E-*fortement ergodique. Soit* $\partial\mathrm{D}^*$ *l'ensemble défini ci-dessus. Alors, pour tout u de* $\partial\mathrm{D}^*$:

(*a*) $r(u) = 1$ *est valeur spectrale de* $\bar{\mathbf{P}}^u$ *et est un pôle de la résolvante.*

(*b*) 1 *est l'unique valeur spectrale de module* 1 *de l'opérateur* $\bar{\mathbf{P}}^u$. *Le sous-espace spectral associé est de dimension* 1, *et est engendré par un élément* π-*p. s. strictement positif.*

On note φ_u le générateur positif tel que $\pi(\varphi_u) = 1$.

(*c*) *L'opérateur adjoint de* $\bar{\mathbf{P}}^u$ *dans le dual topologique de* E *laisse stable* F. *Sa restriction à* F *admet un unique élément* ψ_u, invariant, π-*p. s. strictement positif, et normalisé pour que* $\langle \psi_u \,|\, \varphi_u \rangle_\pi = 1$.

(*d*) *L'opérateur* $\bar{\mathbf{P}}^u$ *s'écrit comme la somme:*

$$\bar{\mathbf{P}}^u = \psi_u \otimes \varphi_u + \mathrm{Q}'_u,$$

où $\psi_u \otimes \varphi_u = p'_u$ *est le projecteur spectral de rang* 1 *associé à la valeur propre* 1, *et* Q'_u *est un opérateur de rayon spectral strictement inférieur à* 1 *tel que:* $p'_u \mathrm{Q}'_u = \mathrm{Q}'_u p'_u = 0$.

Preuve. — (*a*) Puisque l'opérateur de Laplace $\bar{\mathbf{P}}^u$ est un opérateur positif sur E, son rayon spectral $r(u)$ est valeur spectrale (Schaefer [41]). La quasi-compacité de $\bar{\mathbf{P}}^u$ lorsque u appartient à $\partial\mathrm{D}^*$ en fait un pôle de la résolvante, d'où le (*a*).

(*b*) Plaçons nous tout d'abord dans $\mathrm{E} = \mathrm{L}^p(\mathrm{X}, \pi)$ pour $1 \leqq p < \infty$. L'espace F est alors égal au dual de E. Le (*b*) découle du théorème 5.2, p. 329 de Schaefer et de son corollaire, si l'on sait que l'opérateur $\bar{\mathbf{P}}^u$ est irréductible au sens de Schaefer, c'est-à-dire:

$$\forall f \in \mathrm{E}^+, \quad \forall g \in \mathrm{F}^+, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \qquad \langle g \,|\, (\bar{\mathbf{P}}^u)^n f \rangle_\pi > 0,$$

ce qui est le cas ici. En effet, l'irréductibilité de $\bar{\mathbf{P}}^u$ est équivalente à:

$$\forall f \in \mathrm{E}^+, \quad \pi\Big(\bigcap_n \{(\bar{\mathbf{P}}^u)^n f = 0\}\Big) = 0.$$

Or, remarquons que si $(\bar{\mathbf{P}}^u)^n f(x) = 0$, alors

$$\mathbf{E}_{(x,\,0)}[e^{u \cdot \xi_n} f(x_n)] = 0,$$

soit encore

$$e^{u \cdot \xi_n} f(x_n) = 0, \quad \mathbf{P}_{(x,\,0)}\text{-}p.\,s.$$

par conséquent, $f(x_n)=0$, $\mathbf{P}_{(x,\,0)}$-$p.\,s.$ et finalement on obtient $\bar{\mathbf{P}}^n f(x)=0$. Il suffit donc de montrer que:

$$\pi(\bigcap_n \{\bar{\mathbf{P}}^n f=0\})=0.$$

Notons α le nombre strictement positif $\pi(f)$. La forte ergodicité de $\bar{\mathbf{P}}$ donne:

$$\|\bar{\mathbf{P}}^n f-\alpha\| \leqq c^n \|f\|, \qquad \text{avec} \quad c<1.$$

Introduisons les ensembles $A_m=\{\bar{\mathbf{P}}^m f=0\}$ et $A = \bigcap_{m\geqq 1} A_m$. Alors:

$$\|1_A(\bar{\mathbf{P}}^n f-\alpha)\| \leqq c^n \|f\|$$

Soit encore, pour tout n:

$$\alpha\pi(A)^{1/p} \leqq c^n \|f\|.$$

Donc $\pi(A)=0$, ce qui prouve l'irréductibilité de $\bar{\mathbf{P}}^u$.

Lorsque $E=L^\infty(X, \pi)$, F s'identifie au sous-espace du dual de E formé des mesures absolument continues par rapport à π. L'adjoint de $\bar{\mathbf{P}}^u$ laisse stable F, car la mesure $\pi\bar{\mathbf{P}}^u$ est absolument continue par rapport à π.

La notion d'irréductibilité de $\bar{\mathbf{P}}^u$ peut être réduite au couple (E, F), et on peut montrer aisément que le théorème de Schaefer reste valable dans ce cas, car F est séquentiellement fermé dans le dual de $L^\infty(X, \pi)$ (théorème de Vitali-Hahn-Saks, *cf.* p. ex. [4]). Le (*b*) du théorème est alors vrai dans L^∞.

Le (*c*) vient du fait que la restriction de l'adjoint de $\bar{\mathbf{P}}^u$ à F reste encore quasi-compact irréductible dans F. On applique alors à nouveau le théorème de Schaefer.

(*d*) On sait maintenant que le spectre de $\bar{\mathbf{P}}^u$ est réunion disjointe de 1 et d'une partie de $\mathbb{C}$ contenue dans une boule de rayon ρ strictement inférieur à 1. Le sous-espace spectral associé à 1 étant de dimension 1, le projecteur spectral p'_u s'écrit, pour tout f dans E:

$$p'_u(f)=\langle \psi_u | f\rangle_\pi \varphi_u,$$

de plus, le rayon spectral de $Q'_u=\bar{\mathbf{P}}^u-p'_u$ est au plus égal à ρ.

Signalons que la stricte positivité des éléments invariants découle directement de l'irréductibilité de l'opérateur de Laplace.

(1.27) *Remarque*

Lorsque X est un espace métrique compact, on peut également se placer sur l'espace des fonctions continues sur X. Dans ce cas, il faut des conditions supplémentaires sur l'adjoint de $\bar{\mathbf{P}}^u$. On peut, par exemple, demander sa quasi-compacité sur un sous-espace de fonctions convenable du dual; le théorème reste valide.

(1.28) Étude de la chaîne relativisée en projection sur la base.

On reprend les notations du théorème (1.26). Pour tout u de ∂D^*, on note H_u la fonction harmonique sur $X \times \mathbb{R}^d$:

$$H_u(x, \xi) = \varphi_u(x) e^{u.\xi},$$

et R^u le noyau semi-markovien relativisé de $\mathbf{P}$ par H_u [*cf.* (1.24)]. Alors l'image de R^u par la projection sur X, que l'on note $\bar{R}^u$, est le relativisé de $\bar{\mathbf{P}}^u$ par φ_u. Il admet comme unique mesure invariante la mesure π_u, définie par : $\pi_u(dx) = \varphi_u(x) \psi_u(x) \pi(dx)$.

On introduit l'espace de Banach E_u des fonctions sur X qui sont quotient d'un élément de E par φ_u. Si $f = g/\varphi_u$, $g \in E$, on définit la norme de f comme étant égale à $\| g \|_E$. Dans ces conditions, le (*d*) du théorème (1.26) s'écrit encore :

$$\forall f \in E_u, \quad \bar{R}^u f(x) = \langle \pi_u | f \rangle 1 + Q_u(f),$$

où Q_u est l'opérateur relativisé de Q'_u par φ_u. On note p_u le projecteur $\pi_u \otimes 1$. On obtient ainsi :

$$\bar{R}^u = p_u + Q_u, \qquad \textit{avec} \quad p_u Q_u = Q_u p_u = 0, \quad \textit{et} \quad r(Q_u) < 1$$

Ceci entraîne que $\bar{R}^u$ est E_u-fortement ergodique.

(1.29) Opérateurs de Fourier de la chaîne relativisée.

Tous les objets attachés à une chaîne semi-markovienne peuvent être redéfinis ici pour la chaîne semi-markovienne relativisée. En particulier, l'opérateur de Fourier $(R^u)^\lambda$ n'est autre que l'opérateur de Laplace $\bar{\mathbf{P}}^{u+i\lambda}$ relativisé par φ_u. Il définit sur l'espace de Banach E_u une contraction qui a les mêmes propriétés spectrales que $\bar{\mathbf{P}}^{u+i\lambda}$. Donnons-en un exemple :

Grâce à la caractérisation (1.11) de l'apériodicité d'une chaîne semi-markovienne, il est possible de montrer que la chaîne relativisée est apériodique en même temps que la chaîne initiale.

Supposons en effet qu'il existe un vecteur λ non nul de $\mathbb{R}^d$ et un élément $g = \varphi/\varphi_u$ de E_u tel que

$$(\bar{R}^u)^\lambda g = e^{i\theta} g, \qquad \textit{soit} \quad \frac{1}{\varphi_u} \bar{\mathbf{P}}^{u+i\lambda} \varphi_u g = e^{i\theta} g$$

ce qui s'écrit encore :

$$e^{i\theta} \varphi(x) = \mathbf{E}_{(x, 0)} [e^{u \cdot \xi_1} e^{i\lambda . \xi_1} \varphi(x_1)].$$

On a alors : $|\varphi| \leqq \bar{\mathbf{P}}^u |\varphi|$.

En intégrant par rapport à la mesure $\psi_u(x) \pi(dx)$, qui est $\bar{\mathbf{P}}^u$-invariante, on obtient

$$|\varphi| = \bar{\mathbf{P}}^u |\varphi|, \quad \pi\text{-}p.\,s.$$

Et par conséquent $|\varphi| = c\,\varphi_u(x)$, ce qui montre que $|g|$ est constant. Par conséquent :

$$\mathbf{E}_x\left[e^{u\cdot\xi_1}\frac{\varphi_u(x_1)}{\varphi_u(x)}e^{i\lambda\cdot\xi_1}\frac{g(x_1)}{g(x)}\right]=e^{i\theta}.$$

Puisque $e^{u\cdot\xi_1}\dfrac{\varphi_u(x_1)}{\varphi_u(x)}$ est positif et d'intégrale 1 par rapport à $\mathbf{P}_{(x,0)}$, et que $e^{i\langle\lambda\,|\,\xi_1\rangle}\dfrac{g(x_1)}{g(x)}$ est de module 1, l'égalité ci-dessus impose :

$$e^{i\langle\lambda\,|\,\xi_1\rangle}\frac{g(x_1)}{g(x)}=e^{i\theta},\qquad \mathbf{P}_{(x,0)}\text{-}p.\,s.,\quad \pi(dx)\text{-}p.\,s.$$

et g apparaît comme vecteur propre de l'opérateur de Fourier $\mathbf{P}^\lambda$, ce qui est impossible du fait de l'apériodicité de $\mathbf{P}$. Ceci prouve l'apériodicité de la chaîne relativisée.

De la même façon, la condition spectrale (S) sur le noyau semi-markovien R^u se lit sur l'opérateur de Laplace $\bar{\mathbf{P}}^{u+i\lambda}$, et peut s'écrire :

Condition $\mathrm{S}(\mathrm{E}_u)$

Pour tout λ non nul, toute valeur spectrale de module 1 de $\bar{\mathbf{P}}^{u+i\lambda}$ est valeur propre.

Si la condition $\mathrm{S}(\mathrm{E}_u)$ est réalisée, et modulo l'apériodicité de la chaîne semi-markovienne, le rayon spectral de l'opérateur de Fourier $(\bar{\mathrm{R}}^u)^\lambda$ est strictement inférieur à 1 [*cf.* également (1.13)].

(1.30) Moyenne et covariance de la chaîne relativisée.

Par pertubation continue de l'opérateur $\bar{\mathrm{R}}^u$, on obtient encore la décomposition spectrale, pour λ dans un voisinage de 0 :

$$(\bar{\mathrm{R}}^u)^\lambda = k(u+i\lambda)\,p_{u+i\lambda}+\mathrm{Q}_{u+i\lambda}$$

où $k(u+i\lambda)$ est la valeur propre de plus haut module de $(\bar{\mathrm{R}}^u)^\lambda$, strictement inférieure à 1 d'après ce qui précède.

Signalons que $k(u+i\lambda)$ est également la valeur propre de plus haut module de l'opérateur $\bar{\mathbf{P}}^{u+i\lambda}$, et par conséquent fournit un prolongement analytique de $(\lambda\to k(\lambda))$ pour lequel

$$k(u+i\lambda)_{|\lambda=0}=r(\bar{\mathbf{P}}^u)=1\qquad (u\in\partial\mathrm{D}).$$

Les dérivées première et seconde de k par rapport à λ font apparaître les moyenne et énergie de la chaîne relativisée. Notons :

— m_u le vecteur :

$$\langle \mathrm{M}^u 1\,|\,\pi_u\rangle=\int \pi_u(dx)\frac{1}{\varphi_u(x)}\mathbf{E}_{(x,\,0)}[\xi_1\,\varphi_u(x_1)\,e^{u\cdot\xi_1}]$$

— g_u le changement de section tel que ${}^{g_u}\mathrm{M}^u 1$ soit identiquement égal à m_u;

— σ_u la matrice

$$\int \pi_u(dx) \frac{1}{\varphi_u(x)} \mathbf{E}_{(x,\, g_u(x))} [(\xi_1 - g_u(x_1))^t (\xi_1 - g_u(x_1))\, \varphi_u(x_1)\, e^{u \cdot (\xi_1 - g_u(x_1))}]$$

Nous avons les relations analogues à (1.22) :

$$m_u = -i \frac{\partial}{\partial \lambda} k(u+i\lambda)_{|\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial v} r(v)_{|v=u}$$

$$\sigma_u = -\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} k(u+i\lambda)_{|\lambda=0}.$$

(1.31) Comparaison entre $\partial \mathrm{D}$ et $\partial \mathrm{D}^*$.

La propriété de quasi-compacité de l'opérateur de transition $\bar{\mathbf{P}}$ n'est pas stable par passage à $\bar{\mathbf{P}}^u$, autrement dit l'ensemble $\partial \mathrm{D}^*$ peut être strictement inclus dans $\partial \mathrm{D}$, comme le montre l'exemple suivant:

Considérons le groupe affine $\mathrm{G} = \mathrm{B} \times \mathrm{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dont la loi est donnée par:

$$(b, a)(b', a') = (b + e^a b', a + a'),$$

et fixons nous une probabilité μ sur G. La marche aléatoire gauche de loi μ sur G définit une chaîne semi-markovienne dont la chaîne (x_n) sur la base B a pour noyau de transition:

$$\bar{\mathbf{P}} f(x) = \int f(e^a x + b)\, d\mu(b, a).$$

On note $\bar{\mu}$ l'image de μ par la projection canonique $\mathrm{B} \times \mathrm{A} \to \mathrm{A}$. Lorsque $\int a\, d\bar{\mu}(a)$ est fini et strictement négatif, lorsque $\int \mathrm{Log}^+ b\, d\mu(b, a)$ est fini, $(x_n)_{n \geqq 0}$ est récurrente (L. Elie [17]) et admet comme unique mesure invariante la loi π de la série convergente $\mathrm{Z} = \sum a_1 \ldots a_{i-1} b_i$, où (a_i, b_i) est une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi μ. Il suffit d'une hypothèse de densité sur la loi μ pour rendre cette chaîne fortement ergodique. [On peut prendre par exemple un mouvement brownien sur le groupe affine (Bougerol [8])].

Relativisons la marche par une exponentielle.

Le noyau $\bar{\mathbf{P}}^u$ est alors donné par:

$$\bar{\mathbf{P}}^u f(x) = \int e^{u \cdot a} f(e^a x + b)\, d\mu(b, a) = \int f(e^a x + b)\, d\mu^u(b, a)$$

si μ^u est la mesure donnée par : $d\mu^u(b, a) = e^{u \cdot a} d\mu(b, a)$. L'ensemble ∂ D est ici constitué des deux points 1 et u_0 de $\mathbb{R}$ tels que $\int e^{u \cdot a} d\bar{\mu}(a)$ soit égal à 1.

Par convexité de la transformée de Laplace, le nombre $\int a e^{u_0 \cdot a} d\bar{\mu}(a)$ est strictement positif, ce qui implique que la chaîne relativisée est transiente (L. Elie [17]). Par conséquent, l'ensemble ∂ D* est ici réduit au singleton $\{1\}$.

(1.32) Lorsque ∂ D est égal à ∂ D*.

Supposons, à l'inverse de l'exemple précédent, que pour tout z de $\mathbb{C}^d$, l'opérateur de Laplace $\bar{\mathbf{P}}^z$ soit quasi-compact sur E [on dit d'un opérateur T de rayon spectral r(T) qu'il est quasi-compact si l'opérateur T/r (T) est quasi-compact au sens de (1.5)]. Dans ce cas, les ensembles ∂ D et ∂ D* coincident. De plus, le rayon spectral $r(u)$ est valeur propre isolée de $\bar{\mathbf{P}}^u$ et s'identifie à la norme de cet opérateur. On voit ainsi que $r(u)$ tend vers l'infini lorsque u tend vers l'infini [prop. (1.25)], ce qui implique que l'ensemble $\mathrm{D} = \{u;\ r(u) \leqq 1\}$ est compact.

Par ailleurs, la dérivée seconde de r est en tout point une matrice strictement positive dès que la chaîne semi-markovienne est adaptée [*cf.* (1.30)]. Ainsi, r est strictement convexe, et ∂ D est le bord d'un ensemble compact et strictement convexe. Si la moyenne $m = r'$ (0) est non nulle, D est d'intérieur non vide, et l'application qui à tout u de ∂ D associe le vecteur normé :

$$\frac{m_u}{\|m_u\|} = \frac{\operatorname{grad} r(u)}{\|\operatorname{grad} r(u)\|}$$

est par conséquent un homéomorphisme de ∂ D sur la spère unité de $\mathbb{R}^d$.

Ceci a pour conséquence que m_u décrit toutes les directions de $\mathbb{R}^d$ lorsque u varie dans ∂ D. L'étude du renouvellement des chaînes relativisées correspondantes permettra d'identifier dans ce cadre la frontière de Martin de la chaîne semi-markovienne avec la sphère unité de $\mathbb{R}^d$.

DEUXIÈME PARTIE : THÉORÈMES DE RENOUVELLEMENT ET INTÉGRALES SINGULIÈRES SUR $\mathbb{R}^d$

Cette partie étudie le noyau potentiel U d'une chaîne semi-markovienne de noyau de transition **P**, soit $\mathbf{U} = \sum_{n \geqq 0} \mathbf{P}^n$. Pour toute fonction positive F sur $X \times \mathbb{R}^d$, on a:

$$\mathrm{U}\,\mathrm{F}(x, \xi) = \mathbf{E}_{(x, \xi)}\Big(\sum_{n \geqq 0} \mathrm{F}(x_n, \xi_n)\Big).$$

Si A est un ensemble mesurable de $X \times \mathbb{R}^d$, $\mathrm{U}\,1_A(x, \xi)$ mesure le nombre moyen de visites de la chaîne dans A partant de (x, ξ). Ce nombre peut être fini ou infini suivant que la chaîne semi-markovienne est transiente ou non.

A. Transience, récurrence et théorème limite local

(2.1) L'étude de la transience et de la récurrence des chaînes semi-markoviennes a tout d'abord été traitée en dimension 1 par Jacod [28] en 1971. Il donne un critère basé sur l'existence d'un moment d'ordre 1 et d'une mesure invariante π pour la chaîne de Markov en projection sur la base X:

– si la moyenne m de la chaîne semi-markovienne [*cf.* (1.17)] est nulle, la chaîne est récurrente;

– sinon, la chaîne est transiente: partant de tout point (x, ξ) elle sort de tout ensemble produit de X et d'un compact de $\mathbb{R}^d$ au bout d'un temps fini.

De plus, si l'on suppose dans ce dernier cas que la moyenne m est strictement positive, pour tout pavé $A \times B$ de $X \times \mathbb{R}^d$, le nombre $\mathrm{U}_{(x, \xi)}(A \times B)$ converge vers $(1/m)\,\pi(A)\,d\xi(B)$ lorsque ξ tend vers $-\infty$. [On note $d\xi$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.] C'est ce théorème que nous voulons généraliser en toute dimension.

En dimension supérieure ou égale à 3, Hennion [24] en 1981 établit la transience des chaînes semi-markoviennes dont le noyau de transition $\mathbf{P}$ obéit à une condition de régularité (étalement) relativement à la mesure invariante $\pi \otimes d\xi$.

Lorsque l'espace d'états X est fini, Kramli et Szasz ([32], 1984) reprennent les travaux de Nagaev [35] et montrent un théorème central limite pour des chaînes semi-markoviennes centrées, qui étend celui de Sinai (1981) obtenu pour certaines chaînes semi-markoviennes symétriques.

Enfin, le passage à un espace X quelconque mais sur lequel la chaîne de base est fortement ergodique [*cf.* (1.4)] a été effectué par Guivarc'h [22] en 1984; il donne dans le cas centré un théorème limite local: lorsque n est grand,

$$\mathbf{P}_{(x, 0)}[(x_n, \xi_n) \in A \times B] \quad \textit{est équivalent à} \ \frac{\pi(A)\,d\xi(B)}{n^{d/2}}$$

sous les hypothèses supplémentaires d'apériodicité et de condition $\mathbf{S}(E)$ [*cf.* (1.12)].

Ce théorème redonne donc la transience des chaînes semi-markoviennes en dimension plus grande que 3, et montre leur récurrence dans le cas centré en dimension inférieure ou égale à 2.

(2.2) Nous nous plaçons dorénavant dans une situation de transience: notre but est d'étudier le comportement à l'infini du noyau potentiel. Nous verrons que les résultats de renouvellement, énoncés dans les parties B (cas centré) et C (cas décentré) reprennent ceux, classiques, des marches aléatoires sur $\mathbb{R}^d$. Leur preuve fera l'objet des parties suivantes.

B. Énoncé du théorème de renouvellement dans le cas centré

(2.3) Les classes de fonctions $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}^X$.

Afin d'éviter les problèmes d'intégrabilité à l'infini des transformées de Fourier, on introduit la *classe* $\mathscr{H}$ des fonctions définies et intégrables sur $\mathbb{R}^d$, dont la transformée de Fourier est de classe C^∞ à support compact. Cette classe vérifie les hypothèses du lemme de Breiman [9], p. 218, à savoir:

– elle contient un élément continu et partout strictement positif: la fonction ρ dont la transformée de Fourier est donnée par:

$$\hat{\rho}(x)=1_{\{|x|\leqq 1\}}e^{-1/|x|^2}.$$

(*cf.* annexe 1 de [2]);

– elle est stable par multiplication par une exponentielle complexe.

Le résultat suivant est alors vrai:

Soit $(\nu_n)_{n\geq 0}$ *une suite de mesures de Radon sur* $\mathbb{R}^d$, *de masse finie ou infinie. S'il existe une mesure* ν *pour laquelle les fonctions de* $\mathscr{H}$ *sont* ν-*intégrables et telle que* $\nu_n(f)$ *converge vers* $\nu(f)$ *pour toute* f *de* $\mathscr{H}$, *alors la suite de mesures* $(\nu_n)_{n\geqq 0}$ *converge vaguement vers* ν.

Considérons maintenant une chaîne semi-markovienne $(x_n, \xi_n)_{n\geq 0}$ d'espace d'états $X\times\mathbb{R}^d$. Supposons que la chaîne de Markov $(x_n)_{n\geqq 0}$ admette une mesure de probabilité π invariante et qu'elle soit fortement ergodique sur un sous-espace de Banach E de $L^1(X, \pi)$ (définition 1.4). On définit la *classe* $\mathscr{H}^X$ de fonctions sur $X\times\mathbb{R}^d$ par:

$$\mathscr{H}^X=\{F\in L^1(X\times\mathbb{R}^d, \pi\otimes d\xi);\ F(x, \xi)=g(x)f(\xi),\ g\in E,\ f\in\mathscr{H}\}.$$

On peut alors énoncer le théorème de renouvellement dans le cas centré:

THÉORÈME. — *Soit* $(x_n,\xi_n)_{n\geq 0}$ *une chaîne semi-markovienne d'espace d'états* $X\times\mathbb{R}^d$, $d\geqq 3$, *adaptée* [*définition* (1.9)]. *On suppose l'existence d'une mesure de probabilité* π *sur* X *et d'un sous-espace de Banach* E *de* $L^1(X, \pi)$, *contenant les constantes, tels que la chaîne de Markov* $(x_n)_{n\geq 0}$ *soit* E-*fortement ergodique* [*définition* (1.4)]. *Si la condition* S(E) [cf. (1.12)] *est remplie, si la chaîne semi-markovienne admet un moment d'ordre supérieur à* $\max(d-2,2+\varepsilon)$, *pour un certain* $\varepsilon>0$ [*définition* (1.16)], *et si la chaîne* *est centrée* (1.17), *alors:*

Il existe une matrice σ, *définie positive, telle que pour toute fonction* F *de* $\mathscr{H}^{\mathrm{X}}$, *et tout point* x *de* X, *on ait:*

$$|\det \sigma|^{1/2} |\xi|_{\sigma}^{d-2} \mathrm{U}\,\mathrm{F}(x, \xi)$$

converge, lorsque $|\xi|$ *tend vers l'infini, vers:*

$$c_d \int \mathrm{F}(y, \xi') \pi(dy)\, d\xi', \qquad \textit{avec} \quad c_d = \frac{\Gamma((d-2)/2)}{(2\pi)^{d/2}}.$$

On rappelle que la notation $|\xi|_{\sigma}$ désigne le nombre $|\sigma^{-1}(\xi)|^{1/2}$.

(2.4) Par densité des fonctions de $\mathscr{H}^{\mathrm{X}}$, on peut énoncer le:

COROLLAIRE. — *La convergence dans le théorème* (2.3) *a lieu pour les fonctions* F *de la forme:* $\mathrm{F}(x, \xi) = g(x) f(\xi)$, *où* g *appartient à l'espace de Banach* E *et* f *est continue à support compact. Si* $\mathrm{E} = \mathrm{L}^p(\mathrm{X}, \pi)$, $1 \leqq p \leqq \infty$, *elle s'étend aux fonctions mesurables sur* $\mathrm{X} \times \mathbb{R}^d$, *bornées, et dont le support est contenu dans un pavé* $\mathrm{X} \times \mathrm{K}$, *où* K *est un compact de* $\mathbb{R}^d$.

(2.5) Détaillons sous forme de corollaire une situation favorable:

COROLLAIRE. — *Soit* $(x_n, \xi_n)_{n \geqq 0}$ *une chaîne semi-markovienne adaptée sur* $\mathrm{X} \times \mathbb{R}^d$, $d \geqq 3$ *admettant un moment d'ordre* $\max(d-2, 2+\varepsilon)$, *pour un* $\varepsilon > 0$ *et centrée. Si la chaîne* $(x_n)_{n \geqq 0}$ *sur la base admet une densité bornée strictement positive par rapport à une mesure invariante de masse finie* π, *alors le noyau potentiel de la chaîne semi-markovienne se comporte à l'infini comme dans le théorème* (2.3).

En effet, on se trouve dans la situation de l'exemple (*a*) de (1.6), ce qui donne l'ergodicité du noyau de transition $\overline{\mathbf{P}}$ de $(x_n)_{n \geqq 0}$ sur l'espace $\mathrm{E} = \mathrm{L}^{\infty}(\mathrm{X}, \pi)$. La quasi-compacité de $\overline{\mathbf{P}}$ se trouve préservée par passage à l'opérateur de Fourier (Guivarc'h, [22]). La condition S(E) se trouve ainsi réalisée et l'on peut appliquer le théorème (2.3).

(2.6) Remarque.

Le théorème de renouvellement dans le cas centré prolonge donc celui de Spitzer à propos des marches aléatoires sur $\mathbf{Z}^d$. La méthode que nous utiliserons ne repose pas, à la différence de Spitzer, sur un théorème central limite « fort », mais sur l'étude asymptotique directe d'une intégrale singulière, dont on mettra en évidence l'analogie de comportement avec celui du potentiel newtonien en dimension $\geqq 3$ (Potentiel du mouvement brownien) :

$$\mathrm{U}_0 f(\xi) = \int \frac{f(\xi')}{|\xi - \xi'|^{d-2}} d\xi'.$$

Cependant, l'outil de base reste la transformation de Fourier : dans le cas d'une marche aléatoire de loi μ sur $A\,(A=\mathbb{R}^d$ *ou* $A=\mathbb{Z}^d)$, le noyau potentiel peut s'écrire de la manière suivante :

$$\mathbf{U} f(\xi)=\int_{\hat{A}} e^{i\xi\cdot\lambda}\frac{\hat{f}(\lambda)}{1-\hat{\mu}(\lambda)}\,d\lambda$$

dès que la fonction sous le signe somme est intégrable sur le groupe dual $\hat{A}$. Ainsi, on voit que l'introduction de la classe $\mathscr{H}^X$ ($\hat{f}$ à support compact) permettra de supprimer l'hypothèse de bonne décroissance à l'infini de la fonction caractéristique de μ, qui n'intervient que si l'on se place sur $\mathbb{R}^d$: le groupe dual de $\mathbb{Z}^d$ est compact.

(2.7) Frontière de Martin dans le cas centré.

Supposons que X soit un espace topologique compact et que $\mathbf{P}$ laisse stable l'ensemble des fonctions continues sur $X\times\mathbb{R}^d$. Supposons d'autre part que $\mathbf{P}$ admette un adjoint, noté $\check{\mathbf{P}}$, sur l'espace des fonctions continues sur $X\times\mathbb{R}^d$. La théorie de la frontière de Martin affirme alors que toute fonction $\mathbf{P}$-harmonique positive extrémale peut être atteinte comme valeur d'adhérence du noyau de Martin :

$$\check{k}_r((x,\xi),.)=\frac{\check{U}((x,\xi),.)}{\check{U}\,r(x,\xi)}$$

pour une fonction de référence r convenablement choisie, lorsque (x,ξ) tend vers le point à l'infini (Revuz [38]). Dans le cas centré, et lorsque E est égal à C(X), la convergence du théorème (2.3) est uniforme en x. Notre théorème montre donc que quelle que soit la façon d'aller à l'infini, le noyau de Martin converge toujours vers la même limite. On en déduit qu'il n'existe pas de fonctions harmoniques positives autres que les constantes. Il n'en sera pas de même pour une chaîne décentrée.

C. Théorème de renouvellement, cas décentré

(2.8) Notations et hypothèses.

(*a*) Soit $(X_n)_{n\geq 0}=(x_n,\xi_n)_{n\geq 0}$ une chaîne semi-markovienne sur $X\times\mathbb{R}^d$ adaptée [*cf.* (1.9)], possédant un moment exponentiel (1.23), décentrée. On suppose que le noyau de transition $\bar{\mathbf{P}}$ de la chaîne de Markov $(x_n)_{n\geq 0}$ est E-fortement ergodique relativement à une mesure π $\bar{\mathbf{P}}$-invariante [def. (1.4)]. L'espace E est pris égal à $L^p(X,\pi)$, $1\leq p\leq\infty$ (1.4).

(*b*) A tout $z=u+i\lambda$ de $\mathbb{C}^d$, on associe l'opérateur de Laplace $\bar{\mathbf{P}}^z$ (1.24). On note ∂D l'ensemble des points u de $\mathbb{R}^d$ tels que le rayon spectral de l'opérateur de Laplace positif $\bar{\mathbf{P}}^u$ soit égal à 1, et ∂D^* le sous-ensemble de ∂D constitué des u tels que $\bar{\mathbf{P}}^u$ soit quasi-compact.

(c) Le théorème (1.26) associe à tout u de ∂D^* une unique fonction φ_u strictement positive π-*p. s.*, $\bar{\mathbf{P}}^u$ invariante, telle que $\pi(\varphi_u)=1$, et une fonction ψ_u du dual de E, invariante par l'adjoint de $\bar{\mathbf{P}}^u$.

(d) La fonction $H_u(x, \xi)=\varphi_u(x)e^{u\cdot\xi}$ est harmonique, et strictement positive $\pi(dx)\otimes d\xi$-*p. s.* Le noyau semi-markovien de la chaîne relativisée est noté $\mathbf{R}^u$:

$$\mathbf{R}^u(F)=\frac{1}{H_u}P(H_u F).$$

Le noyau en projection sur la base $\bar{\mathbf{R}}^u$ admet comme mesure invariante la mesure π_u : $\pi_u(dx)=\psi_u(x)\varphi_u(x)\pi(dx)$ (1.28).

(e) On suppose que pour tout u de ∂D^* les seules valeurs spectrales de module 1 de l'opérateur de Fourier-Laplace sont des valeurs propres [condition $S(E_u)$], ce qui assure que le rayon spectral de l'opérateur de Fourier de la chaîne relativisée est strictement inférieur à 1 (1.29).

(f) Enfin, on note m_u (resp. σ_u) la moyenne (resp. la matrice énergie) de la chaîne relativisée [*cf.* 1.30)] et $c(u)$ le nombre $|\det\sigma_u|^{-1/2}|m_u|_{\sigma_u}^{-1}$.

(g) La classe de fonctions $\mathscr{H}^X$ a été introduite en (2.2).

On peut maintenant décrire le comportement du noyau potentiel $\mathbf{U}$ de la chaîne semi-markovienne le long de certaines directions de $\mathbb{R}^d$:

(2.9) THÉORÈME. — *Avec les notations et sous les hypothèses précédentes, pour toute fonction* F *de* $\mathscr{H}^X$, *et pour tout compact* C^* *contenu dans* ∂D^*, *la quantité :*

$$(2\pi t)^{(d-1)/2}\exp(tm_u.u)\,\mathbf{U}F(x,\ -tm_u)$$

converge lorsque le nombre réel positif t tend vers $+\infty$ uniformément en u variant dans le compact C^* *vers :*

$$c(u)\,\varphi_u(x)\int_{X\times\mathbb{R}^d}e^{-u\cdot\xi}F(y,\xi)\,\psi_u(y)\,\pi(dy)\,d\xi.$$

En particulier, si u est nul, la convergence de $\mathbf{U}$ *dans la direction de la moyenne m est polynomiale :*

$$(2\pi t)^{(d-1)/2}\,\mathbf{U}F(x,\ -tm)\quad \textit{tend vers}\quad c(0)\int_{X\times\mathbb{R}^d}F(y,\xi)\,\pi(dy)\,d\xi$$

si t tend vers $+\infty$.

Remarque. — Lorsque X est un espace topologique compact, le théorème reste valable sur C(X) si l'on suppose de plus que, pour tout u de ∂D^*, l'adjoint de $\bar{P}^u$ dans le dual de C(X) reste quasi-compact sur un sous-espace de fonctions (*cf.* remarque 1.27), auquel appartiendra ψ_u.

(2.10) Convergence dans toutes les directions.

Si maintenant on considère une chaîne semi-markovienne irréductible [def. (1.9)] possédant un moment exponentiel, décentrée, et telle que pour tout z de $\mathbb{C}^d$, l'opérateur de Laplace $\bar{P}^z$ soit quasi-compact sur l'espace E, on a vu en (1.32) que l'ensemble $\partial D = \partial D^*$ est homéomorphe à la sphère unité de $\mathbb{R}^d$ par l'application :

$$\partial D \mapsto S^{d-1}$$
$$u \mapsto \frac{m_u}{|m_u|}.$$

Ainsi, m_u décrit *toutes* les directions de $\mathbb{R}^d$.

De plus, la condition $S(E_u)$ se trouve réalisée grâce à la quasi-compacité des opérateurs $\bar{P}^u$. L'uniformité en u de l'équivalent obtenu au théorème (2.9) permet alors de décrire le comportement du noyau potentiel $UF(x, \xi)$ lorsque ξ tend vers l'infini et $\xi/|\xi|$ tend vers un vecteur s fixe de la sphère unité de $\mathbb{R}^d$ (ξ n'est plus astreint à rester sur la demi-droite $\mathbb{R}^+ s$).

Ceci est décrit dans le corollaire qui suit, où l'on note l l'homéomorphisme inverse de celui défini ci-dessus, et c_s le nombre $c(u)|m_u|^{(d-1)/2}$, lorsque $l(s) = u$ [*cf.* (2.8.*f*)].

COROLLAIRE. — *Sous ces hypothèses, la suite de mesures*

$$|2\pi\xi|^{(d-1)/2} \exp\left\langle l\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)\middle|\xi\right\rangle U((x, \xi), .)$$

converge vaguement vers la mesure sur $X \times \mathbb{R}^d$:

$$c_s\, \varphi_{l(s)}(x)\,(\psi_{l(s)}(y)\,\pi(dy)) \otimes \exp(-\langle l(s)|\xi'\rangle)\, d\xi'$$

lorsque $|\xi|$ *tend vers l'infini et* $\xi/|\xi|$ *tend vers* $-s$.

Remarques.

(0) Le théorème 2.9 redonne en dimension 1 le théorème de Jacod et, lorsque X est réduit à un point, le théorème de renouvellement des marches aléatoires décentrées de Ney et Spitzer.

(1) Lorsque

$$\left|\frac{\xi}{|\xi|} + s\right| = o(|\xi|^{1/2}),$$

l'exponentielle $\exp\langle l(\xi/|\xi|)|\xi\rangle$ est équivalente à $\exp\langle l(s)\|\xi|s\rangle$. On retrouve ainsi le théorème de convergence à l'intérieur d'un cône autour d'une direction de Carlsson et Wainger [11].

(2) On verra (partie H) que le théorème de renouvellement dans la seule direction de la moyenne ne nécessite qu'une hypothèse faible de moment : l'existence d'un moment d'ordre $\max(d-1/2, 2+\varepsilon)$. Il n'est plus nécessaire en effet de relativiser le processus.

(3) L'existence d'un moment d'ordre $2+\varepsilon$ est technique : elle permet une majoration explicite des différentes fonctions intervenant dans la preuve du théorème (2.9). Peut-être n'est-elle pas nécessaire. Par contre, l'existence d'un moment d'ordre $d-2$ dans le cas centré et $(d-1)/2$ dans le cas décentré est impérative : Stam donne un exemple de marche aléatoire sur $\mathbb{R}^d$ dont la loi n'a pas de moments assez grands et dont le noyau potentiel n'a pas le comportement voulu.

(4) Dans le cas décentré, l'hypothèse selon laquelle E est un bon espace de fonctions ($L^p(X, \pi)$) n'intervient que dans la démonstration de l'*existence* des fonctions φ_u, $\bar{\mathbf{P}}^u$-invariante, et ψ_u, $\check{\bar{\mathbf{P}}}^u$-invariante, et de la *forte ergodicité* de la chaîne relativisée.

Si l'on connaît par avance un espace de Banach E sur lequel $\bar{\mathbf{P}}^u$ soit quasi-compact, et admette une décomposition spectrale du type :

$$\bar{\mathbf{P}}^u = \psi_u \otimes \varphi_u + Q'_u, \qquad \text{avec} \quad r(Q'_u) < 1$$

alors, les autres hypothèses étant conservées, le théorème de renouvellement (2.9) reste valide.

(2.11) Frontière de Martin.

Plaçons-nous dans un cadre topologique : X est compact, $E = C(X)$, le noyau semi-markovien $\mathbf{P}$ laisse stable $C(X \times \mathbb{R}^d)$. Si $\mathbf{P}$ a un noyau adjoint sur $C(X)$, pour tout u, le noyau relativisé $\bar{\mathbf{R}}^u$ a un adjoint sur $C(X \times \mathbb{R}^d)$. Supposons que, pour tout z de $\mathbb{C}^d$, $\bar{\mathbf{P}}^z$ et son adjoint soient quasi-compacts sur $C(X)$. Le corollaire (2.10) implique que *toute fonction harmonique positive extrémale s'écrit comme le produit d'une fonction* φ_u *positive sur* X *et d'une exponentielle* $e^{\langle u \mid \cdot \rangle}$, *où* u *varie dans un compact homéomorphe à la sphère unité de* $\mathbb{R}^d$.

D. Écriture du noyau potentiel comme intégrale singulière

Dans toute cette partie, la résolvante en z d'un opérateur borné T sera notée $R(z, T)$.

(2.12) Soit donc (X_n) une chaîne semi-markovienne adaptée, ayant un moment d'ordre 2, dont la chaîne de base est E-fortement ergodique, et vérifiant la condition S(E). Pour toute fonction de la classe

$\mathscr{H}^{X}$: $F(x, \xi)=g(x) f(\xi)$; $g \in E$, $f \in \mathscr{H}$, on a :

$$\begin{aligned}
UF(x, \xi) &= \lim_{N} \sum_{0}^{N} \mathbf{E}_{(x, \xi)} [g(x_n) f(\xi_n)] \\
&= \lim_{N} \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{0}^{N} E_{(x, \xi)} \left(g(x_n) \int e^{i\lambda \cdot \xi_n} \hat{f}(-\lambda)\, d\lambda \right) \\
&= \lim_{N} \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{i\lambda \cdot \xi} \hat{f}(-\lambda) \sum_{0}^{N} (\mathbf{P}^{\lambda})^n g(x)\, d\lambda
\end{aligned}$$

par application successive de la formule d'inversion de Fourier sur $\mathbb{R}^d$, de l'invariance par translation des noyaux semi-markoviens, et de l'égalité $(\mathbf{P}^n)^{\lambda} = (\mathbf{P}^{\lambda})^n$ (1.14).

Découpons l'espace $\mathbb{R}^d$ en un voisinage U adéquat de 0 et en son complémentaire. Sur le complémentaire de U, le rayon spectral $r(\lambda)$ de $\mathbf{P}^{\lambda}$ est strictement inférieur à 1 [*cf.* (1.13)]. C'est une fonction continue de λ qui atteint donc son maximum sur le support compact de $\hat{f}$ privé de U. Par conséquent, il existe $\rho < 1$ tel que :

$$\forall \lambda \in (\operatorname{supp} \hat{f}) \cap U^c, \qquad r(\lambda) < \rho \quad \text{et} \quad \| R(1, \mathbf{P}^{\lambda}) \| \leqq \frac{1}{1-\rho}.$$

D'autre part, d'après (1.21), lorsque λ varie dans U :

$$R(1, \mathbf{P}^{\lambda}) = \frac{p_{\lambda}}{1-k(\lambda)} + R(1, Q_{\lambda}).$$

Puisque pour tout λ dans U, le spectre de Q_{λ} est contenu dans une boule de rayon ρ' strictement inférieur à 1, la norme de $R(1, Q_{\lambda})$ peut être majorée uniformément en λ de U par $1/(1-\rho')$.

Soit maintenant la fonction définie au voisinage U de 0 par :

$$\lambda \to \frac{1}{1-k(\lambda)}.$$

Elle possède une singularité en $0 (k(0)=1)$, différente suivant que l'on se trouve dans le cas centré ou le cas décentré.

1^er^ cas : $m=0$, $d \geqq 3$.

On sait que $k'(0)=0$ et $k''(0) = -\sigma$, où σ est la matrice énergie [*cf.* (1.22)]. Puisque σ est définie positive, la fonction $1/1-k(\lambda))$ peut être majorée au voisinage de 0 par $c/|\lambda|^2$ (pour une certaine constante c), qui y est intégrable (la fonction $|\lambda|^{-s}$ est intégrable en 0 si et seulement si s est strictement inférieur à d).

2^e^ cas : $m \neq 0$, $d \geqq 2$.

Dans ce cas, $1-k(\lambda) = -im.\lambda + (\sigma(\lambda)/2) + o(|\lambda|^2)$, et par suite, il existe une constante c telle que

$$|1-k(\lambda)| \geqq |im.\lambda + c|\lambda|^2|.$$

Le lemme suivant donne alors le critère d'intégrabilité de la fonction de $\lambda : (im.\lambda+c|\lambda|^2)^{-1}$. Dans ce lemme, on prend $m=e_1$, premier vecteur de base, et $c=1$.

(2.13) LEMME. — *La fonction* $(\lambda \to |i\lambda_1+|\lambda|^2|^{-s})$ *est intégrable en* 0 *pour tout* $s<(d+1)/2$.

En conséquence, la fonction $(1-k(\lambda))^{-1}$ est intégrable en 0.

Preuve du lemme. — Considérons l'inégalité (I) :

$$\text{(I)}\qquad \forall x\in\mathbb{R},\quad \forall y\in\mathbb{R},\quad \forall\alpha>0,\quad \forall\beta>0,\qquad |x+iy|^{\alpha+\beta}\geqq c|x|^{\alpha}|y|^{\beta}$$

où c est une constante qui dépend uniquement de (α, β).

En posant $s=[(d+1)/2]-\varepsilon$ et $\lambda=(\lambda_1, \lambda')$, $\lambda_1\in\mathbb{R}$, $\lambda'\in\mathbb{R}^{d-1}$ on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{1}{|i\lambda_1+|\lambda|^2|^s} &\leqq \frac{1}{|i\lambda_1+|\lambda'|^2|^s}\\ &\leqq \frac{1}{c|\lambda_1|^{1-\varepsilon/2}}\,\frac{1}{|\lambda'|^{d-1-\varepsilon}} \qquad \text{ineg. (I)}\end{aligned}$$

Sur cette dernière ligne apparaît le produit de deux fonctions, dont la première est intégrable sur $\mathbb{R}$ et la seconde sur $\mathbb{R}^{d-1}$, ce qui prouve le lemme.

(2.14) Conclusion.

Les majorations que l'on vient d'établir permettent d'appliquer le théorème de convergence dominée aux trois suites de fonctions :

$$\begin{gathered}\frac{1-k(\lambda)^{N+1}}{1-k(\lambda)}\hat{f}(\lambda)p_\lambda g(x), \qquad \lambda\in U,\\ \hat{f}(\lambda)R(1,Q_\lambda)(I-Q_\lambda^{N+1})g(x), \qquad \lambda\in U\\ \hat{f}(\lambda)R(1,\mathbf{P}^\lambda)(1-(\mathbf{P}^\lambda)^{N+1})g(x), \qquad \lambda\in(\operatorname{supp}\hat{f})\cap U^c.\end{gathered}$$

Le noyau potentiel **U** de la chaîne semi-markovienne (X_n) contre la fonction F s'écrit donc comme la somme de trois termes

$$\begin{aligned}\mathbf{U}F(x,\xi)=&\frac{1}{(2\pi)^d}\int_U e^{i\lambda\cdot\xi}\frac{p_\lambda g(x)}{1-k(\lambda)}\hat{f}(-\lambda)\,d\lambda\\ &+\frac{1}{(2\pi)^d}\int_U e^{i\lambda\cdot\xi}R(1,Q_\lambda)g(x)\hat{f}(-\lambda)\,d\lambda\\ &+\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{U^c} e^{i\lambda\cdot\xi}R(1,\mathbf{P}^\lambda)g(x)\hat{f}(-\lambda)\,d\lambda.\end{aligned}$$

Ainsi, si l'on remplace la fonction caractéristique 1_U par une fonction g_U, C^∞, valant 1 au voisinage de 0, et nulle en dehors de U, on se trouve en présence de la transformée de Fourier de trois fonctions à support compact. Deux sont régulières sur $\mathbb{R}^d$, i. e. de classe C^k si la chaîne semi-markovienne admet un moment d'ordre k, ce sont $g_U(\lambda)\,R(1, Q_\lambda)\,g(x)\,\hat{f}(-\lambda)$ et $(1-g_U(\lambda))\,R(1, P^\lambda)\,g(x)\,\hat{f}(-\lambda)$.

La troisième est singulière en 0 et de classe C^k en dehors de 0. Pour continuer, il nous faut savoir relier la régularité de ce type de fonctions au comportement à l'infini de leur transformée de Fourier. C'est ce que se propose de faire le paragraphe qui vient.

E. Intégration par parties ; les espaces $C^r(K)$

On utilisera les notations de Landau o et O pour décrire le comportement des fonctions à l'infini et au voisinage de 0.

Dans cette partie, K désigne un compact de $\mathbb{R}^d$, C(K) [resp. $C^k(K)$], l'espace des fonctions continues (resp. de classe C^k) à support dans K. On munit ces deux espaces de leur norme naturelle.

Le point de départ de cette étude est la :

(2.15) Propriété à l'ordre k.

Soit D^k l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ en $o(|x|^{-k})$ à l'infini, muni de la norme :

$$\forall g\in D^k, \quad \|g\|_{\hat{k}}=\sup_x |x|^k|g(x)|.$$

Alors la transformée de Fourier définit un opérateur continu de $C^k(K)$ dans D^k.

Cette propriété se montre de manière élémentaire par intégration par parties : $x^k\hat{g}$ s'écrit en effet comme la transformée de Fourier de $g^{(k)}$.

(2.16) On recherche maintenant une condition suffisante sous laquelle une fonction dérivable k fois, sauf sur un ensemble de mesure nulle, et dont la dérivée k-ième est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, voit sa transformée de Fourier en $o(|x|^{-k})$. Pour cela, il suffit de montrer que l'on peut effectivement intégrer par parties. La proposition suivante fournit cette condition, pour des fonctions qui sont régulières partout sauf éventuellement en 0, et dont la singularité en 0 n'excède pas $|y|^{-s}$ avec $s<d-1$.

(2.17) Proposition. — *Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$, $d\geqq 2$, à support compact, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d-\{0\}$, dont la dérivée est intégrable, en $O(|y|^{-s})$ en 0, pour un $s<d-1$. Alors*

(*a*) *la fonction h est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, et*

$$H:\quad y_1\to\int h(y_1,\ldots y_d)\,dy_2\ldots dy_d$$

est continue en 0 ;

(*b*) H *est dérivable sur* $\mathbb{R}^d - \{0\}$ *et :*

$$\mathrm{H}'(y_1) = \int \frac{\partial h}{\partial y_1}(y_1 \dots y_d)\, dy_2 \dots dy_d;$$

(*c*)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial h}{\partial y_1}(y)\, dy = 0.$$

En conséquence, si h vérifie les hypothèses de la proposition, $e^{ix \cdot y} h$ les vérifie également. L'intégration par parties est licite, et $\hat{h}$ appartient à D^1.

Montrons la proposition.

Posons $y = (y_1, y')$, $y' \in \mathbb{R}^{d-1}$ et $\mathrm{M} = \sup_y |y|^s h(y)$.

Uniformément en y_1, h est majorée par la fonction $\mathrm{M}\, 1_{\mathrm{K}}(y')\, |y'|^{-s}$, intégrable sur $\mathbb{R}^{d-1}$ puisque $s < d-1$. La fonction H est donc bien définie, et le théorème de Lebesgue donne sa continuité. La dérivabilité est claire puisque l'on se place en dehors de 0. Quant au (*c*), il suffit d'écrire :

$$\int \frac{\partial h}{\partial y_1}(y)\, dy = \int_{|y_1| \geqq \varepsilon} \mathrm{H}'(y_1)\, dy_1 + \int_{|y_1| \leqq \varepsilon} \frac{\partial h}{\partial y_1}(y)\, dy.$$

Le premier terme est égal à $\mathrm{H}(-\varepsilon) - \mathrm{H}(\varepsilon)$ qui est donc petit lorsque ε tend vers 0 d'après (*a*). Le second terme est également arbitrairement petit puisque l'on intègre sur l'ensemble $\mathrm{supp}(h) \cap \{|y_1| \leqq \varepsilon\}$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^d$. Ceci achève la preuve de la proposition.

(2.18) COROLLAIRE. — *Soit h une fonction à support compact, de classe C^k sur $\mathbb{R}^d$ privé de* 0, *dont les dérivées jusqu'à l'ordre $k-1$ sont en* $\mathrm{O}(|y|^{-s})$ *en* 0 *pour un $s < d-1$, et dont la dérivée k-ième est intégrable.*

Alors, la transformée de Fourier de h est un $o(|x|^{-k})$ à l'infini.

(2.19) Le passage à un ordre r non entier.

On s'intéresse donc ici aux fonctions qui voient leur transformée de Fourier se comporter en $o(|x|^{-r})$ à l'infini. Contrairement à ce que nous venons de faire nous n'allons pas chercher à connaître l'effet simultané d'une singularité en 0 et d'une certaine régularité ailleurs sur la transformée de Fourier. En effet, une intégration par parties « fractionnaire » est possible mais difficile à manier. De plus, on verra que la méthode du découpement dyadique des intégrales, plus souple, permet de séparer les deux problèmes. Nous allons donc ici préciser le lien entre une régularité C^r et le comportement asymptotique de la transformée de Fourier — pour des fonctions à support compact sur $\mathbb{R}^d$.

(2.20) Condition de Hölder fine.

On se donne $r = m + \alpha$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]0, 1[$.

Les fonctions à support compact, m fois différentiables et dont la différentielle m-ième l est höldérienne d'ordre α, i. e. telles que la quantité

$$[l]_\alpha = \sup_{|y-z| \leqq 1} \frac{|l(y)-l(z)|}{|y-z|^\alpha}$$

soit finie, pourraient généraliser les fonctions de classe C^k. Cependant, leur transformée de Fourier est en $O(|x|^{-r})$ à l'infini [6], et non pas en $o(|x|^{-r})$. Nous sommes donc amenés à définir une condition de Hölder plus fine sous laquelle les transformées de Fourier auront le comportement voulu :

DÉFINITION. — On dira que la fonction l définie sur $\mathbb{R}^d$ est *finement hölderienne* d'ordre α si :

(1) l est hölderienne d'ordre α;

(2) pour tout y fixé, le rapport $|l(y+t)-l(y)|/|t|^\alpha$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0.

(2.21) Propriété à l'ordre r.

Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$. On note $C^r(K)$ l'espace des fonctions à support dans K, dont la différentielle d'ordre m est finement hölderienne d'ordre α. L'espace $C^r(K)$ est muni de la norme :

$$\|h\|_r = \|h\|_\infty + \ldots + \|h^{(m)}\|_\infty + [h^{(m)}]_\alpha.$$

On note par analogie avec le cas entier D^r l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ en $o(|x|^{-r})$ à l'infini. La norme sur D^r est donnée par :

$$\|f\|_r^{\cdot} = \sup_x |x|^r |f(x)|.$$

La propriété à l'ordre r s'énonce ainsi :

PROPOSITION. — *La transformation de Fourier est une application continue de* $C^r(K)$ *dans* D^r, *pour les normes correspondantes.*

Preuve. — Montrons que l'image de $C^r(K)$ est bien contenue dans D^r. La propriété à l'ordre k entier permet de supposer $m=0$, soit $r=\alpha$. On s'inspire ici de Katznelson [30], p. 25. Soit donc h un élément de $C^\alpha(K)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\hat{h}(x) &= \int e^{ix \cdot y} h(y)\, dy, \\
&= -\int e^{i\langle x \mid y - \pi x/|x|^2\rangle} h(y)\, dy, \\
&= -\int e^{ix \cdot y} h\left(y + \frac{\pi x}{|x|^2}\right) dy, \\
&= \frac{1}{2}\int e^{ix \cdot y}\left[h(y) - h\left(y + \frac{\pi x}{|x|^2}\right)\right] dy.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|x|^{\alpha}|\hat{h}(x)| \leqq \frac{1}{2}\int\left|\frac{h(y)-h(y+\pi x/|x|^2)}{1/|x|^{\alpha}}\right| dy.$$

Mais le rapport tend vers 0 simplement, puisque h est finement hölderienne et, h étant supposée à support dans K, il est majoré par $[h]_{\alpha} 1_{K+1}(y)$ dès que $|x|$ est supérieur à π. Le théorème de Lebesgue permet ainsi de conclure.

La continuité de la transformation de Fourier découle immédiatement des estimations ci-dessus. Ceci achève la preuve.

(2.22) Remarques.

(*a*) Les espaces $C^r(K)$ que l'on vient d'introduire sont très proches des espaces de Besov de [6], la condition de support étant usuellement remplacée par une condition d'intégrabilité du module de continuité.

(*b*) Quelques propriétés des espaces traditionnels $C^k(K)$ s'étendent aux espaces $C^r(K)$. En particulier, $C^r(K)$ est stable pour le produit et le quotient au sens suivant : si h_1 appartient à $C^r(\mathbb{R}^d)$ et ne s'annule pas sur un compact K de $\mathbb{R}^d$, alors pour tout h_2 de $C^r(K)$, le quotient h_2/h_1 appartient encore à $C^r(K)$.

F. Potentiel du mouvement brownien et du mouvement brownien décentré

(2.23) Revenons à l'expression (2.14) du potentiel d'une chaîne semi-markovienne comme somme de trois transformées de Fourier, et plaçons-nous dans le cas centré. La propriété à l'ordre $(d-2)$ (2.16) montre que les transformées de Fourier des deux dernières fonctions sont en $o(|\xi|^{2-d})$ à l'infini. Le terme principal est donc celui qui fait intervenir la fonction

$$\Phi(\lambda)=g_U(\lambda)\frac{p_\lambda g(x)}{1-k(\lambda)}\hat{f}(-\lambda).$$

Cette fonction est de classe C^{d-2} sur l'intersection du support de $\hat{f}$ avec tout complémentaire d'un voisinage de 0. C'est par conséquent *le comportement de $k(\lambda)$ en 0 qui détermine celui du noyau potentiel à l'infini.*

(2.24) Dans le cas centré, on sait que : $1-k(\lambda)=\sigma(\lambda)/2+o(|\lambda|^2)$ (1.22), et la fonction Φ ci-dessus est équivalente en 0 à la fonction Φ_1 :

$$\Phi_1(\lambda)=2p_0 g(x)\hat{f}(0)\frac{g_U(\lambda)}{\sigma(\lambda)}=C\frac{g_U(\lambda)}{\sigma(\lambda)},$$

avec

$$C=2\left(\int_{X\times\mathbb{R}^d} g(y) f(\xi)\pi(dy)\,d\xi\right).$$

Nous allons commencer par étudier la transformée de Fourier de $g_U(\lambda)/\sigma(\lambda)$, en remarquant que ce type de fonction intervient naturellement dans l'étude d'un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^d$.

Pour cela, notons que g_U étant une fonction C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}^d$, sa transformée de Fourier est à décroissance rapide à l'infini, et donc intégrable sur $\mathbb{R}^d$. En particulier, $\hat{g}_U$ appartient à la classe $\mathscr{H}$ [*cf.* (2.3)]. Ceci motive la proposition suivante, où h pourra être prise égale à $\hat{g}_U$, et σ égale à l'identité de $\mathbb{R}^d$: $\sigma(\lambda)=|\lambda|^2$.

(2.25) Potentiel du mouvement brownien.

PROPOSITION. — *Soit* $(B_t)_{t>0}$ *un mouvement brownien d-dimensionnel,* $d \geqq 3$, *et h une fonction de la classe* $\mathscr{H}$.

(*a*) *Le noyau potentiel* U_0 *de* B_t *pris en h est égal à :*

$$U_0 h(\xi)=\frac{2}{(2\pi)^d}\int e^{i\xi\cdot\lambda}\frac{\hat{h}(-\lambda)}{|\lambda|^2}d\lambda=c_d\int\frac{h(\xi')}{|\xi-\xi'|^{d-2}}d\xi' ;$$

(*b*) $|\xi|^{d-2}U_0 h(\xi)$ *converge vers* $c_d\int h(\xi')\,d\xi'$, *lorsque* ξ *tend vers l'infini,*

où c_d *est la constante qui apparaît au théorème* (2.9).

Remarque. — Cette proposition n'est autre que le théorème de renouvellement dans le cas « limite » d'un mouvement brownien.

Il suffit maintenant d'un changement de variable pour prouver le :

(2.26) COROLLAIRE. — *L'expression*

$$|\xi|_\sigma^{d-2}\frac{2}{(2\pi)^d}\int e^{i\xi\cdot\lambda}\Phi_1(\lambda)\,d\lambda$$

converge, lorsque ξ *tend vers l'infini, vers* $\dfrac{c_d}{|\det\sigma|^{1/2}}\displaystyle\int g(y)\,f(\xi')\,\pi(dy)\,d\xi'$.

Preuve de la proposition (2.25). — On désigne par $(P_t)_{t\geqq 0}$ le semi-groupe de transition du mouvement brownien sur $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}P_t h(\xi)&=\frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\int h(\xi+\xi')\,e^{-|\xi'|^2/2t}\,d\xi'\\&=\frac{1}{(2\pi)^d}\int e^{i\xi\cdot\lambda}e^{-t|\lambda|^2/2}\,\hat{h}(-\lambda)\,d\lambda.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}U_0 h(\xi)&=\int_0^\infty P_t h(\xi)\,dt\\&=\frac{1}{(2\pi)^d}\int e^{i\xi\cdot\lambda}\hat{h}(-\lambda)\int_0^\infty e^{-t|\lambda|^2/2}\,dt\,d\lambda\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^d} \int e^{i\xi.\lambda} \frac{\hat{h}(-\lambda)}{|\lambda|^2} d\lambda.$$

La deuxième partie de l'égalité (a) résulte d'un théorème classique d'analyse de Fourier vrai dès que $\hat{h}/|\lambda|^2$ et $h/|\lambda|^{d-2}$ dont intégrables sur $\mathbb{R}^d$ (Stein [45]) (la transformée de Fourier de $|y|^{-\alpha}$ est $c_\alpha |y|^{\alpha-d}$ au sens des distributions).

L'assertion (b) est claire lorsque h est à support compact. Lorsque h est à décroissance rapide, on utilise la technique de découpage suivante : partons de l'égalité

$$|\xi|^{d-2} \mathrm{U}_0 h(\xi) = c_d \int_{\mathbb{R}^d} h(\xi') \frac{|\xi|^{d-2}}{|\xi-\xi'|^{d-2}} d\xi'$$

et fixons $\varepsilon > 0$. Il existe alors un compact K tel que $\int_{\mathrm{K}^c} |h| \leqq \varepsilon$, et sur ce compact, le rapport $|\xi|/|\xi-\xi'|$ converge uniformément vers 1. Donc :

$$\int_{\mathrm{K}} |h(\xi')| \left| 1 - \frac{|\xi|^{d-2}}{|\xi-\xi'|^{d-2}} \right| d\xi' \leqq \varepsilon,$$

pour tout ξ assez grand.

On découpe le complémentaire de K en deux zones :
$\mathrm{I}_1 = \{\xi', |\xi-\xi'| \geqq |\xi/2|\} \cap \mathrm{K}^c$ pour laquelle

$$\int_{\mathrm{I}_1} h(\xi') \frac{|\xi|^{d-2}}{|\xi-\xi'|^{d-2}} d\xi' \leqq 2^{d-2} \int_{\mathrm{K}^c} |h| \leqq 2^{d-2} \varepsilon$$

et $\mathrm{I}_2 = \{\xi', |\xi-\xi'| \leqq |\xi/2|\} \cap \mathrm{K}^c$. Sur I_2, $|\xi'| \geqq |\xi|/2$, et on peut utiliser la décroissance de h :

$$\exists \mathrm{M}, \quad \forall \xi' \in \mathrm{I}_2, \quad |h(\xi')| \leqq \frac{\mathrm{M}}{|\xi'|^{d+1}} \leqq 2^{d+1} \frac{\mathrm{M}}{|\xi|^{d+1}}.$$

Ainsi, l'intégrale sur I_2 se majore de la manière suivante :

$$\int_{\mathrm{I}_2} h(\xi') \frac{|\xi|^{d-2}}{|\xi-\xi'|^{d-2}} d\xi' \leqq 2^{d+1} \frac{\mathrm{M}}{|\xi|^3} \int_{|\xi-\xi'| \leqq |\xi|/2} \frac{d\xi'}{|\xi-\xi'|^{d-2}} \leqq \frac{\mathrm{M}^*}{|\xi|}.$$

On obtient finalement :

$$\int_{\mathrm{K}^c} |h(\xi')| \left| 1 - \frac{|\xi|^{d-2}}{|\xi-\xi'|^{d-2}} \right| d\xi' \leqq \varepsilon + 2^{d-2}\varepsilon + \frac{\mathrm{M}^*}{|\xi|},$$

qui est petit si ξ est grand. Ceci termine la preuve de la Proposition.

(2.27) Cas décentré; domaines convenables.

Nous nous plaçons sous les hypothèses du théorème (2.9). En particulier, rappelons que pour tout u tel que l'opérateur de Laplace soit quasi-compact et de rayon spectral égal à 1 ($u \in \partial D^*$), $k(u+i\lambda)$ représente la valeur spectrale de plus haut module de l'opérateur de Fourier associé à la chaîne relativisée (1.29).

Si l'on utilise l'écriture du noyau potentiel comme intégrale singulière (2.14), pour le noyau R^u, un raisonnement analogue au cas centré montre que le terme principal est celui qui fait intervenir la transformée de Fourier de la fonction :

$$p_{u+i\lambda} g(x) \hat{f}(-\lambda) \frac{g_U(\lambda)}{1-k(u+i\lambda)}.$$

Nous savons (1.30) que $k(u+i\lambda)$ admet en 0 le développement limité suivant :

$$k(u+i\lambda) = 1 + im_u.\lambda - \sigma_u(\lambda)/2 + o(|\lambda|^2).$$

Par conséquent, la fonction ci-dessus est équivalente en 0 à :

$$\Phi_u(\lambda) = C \frac{g_U(\lambda)}{-im_u.\lambda + \sigma_u(\lambda)/2}$$

avec

$$C = p_u g(x) \hat{f}(0) = \int_{X \times \mathbb{R}^d} g \otimes f \, \pi_u \otimes d\xi.$$

Pour étudier la transformée de Fourier de Φ_u, observons que $u \mapsto m_u$ (resp. $u \mapsto \sigma_u$) est continue de ∂D^* dans $\mathbb{R}^d$ (resp. dans l'ensemble $\mathscr{S}^+$ des matrices symétriques définies positives). Puisque m_u est le gradient en u de la fonction convexe r (1.30), il ne s'annule pas (sinon, r atteindrait son minimum sur ∂D^*, ce qui n'est pas vrai dans le cas décentré). Ainsi, lorsque u est astreint à rester dans un compact de ∂D^*, le couple (m_u, σ_u) reste dans un *domaine convenable* A de $\mathbb{R}^d \times \mathscr{S}^+$, c'est-à-dire un domaine pour lequel il existe deux constantes réelles non nulles c et C telles que :

$$c \leqq |m| \leqq C \quad \text{et} \quad c|\lambda|^2 \leqq \sigma^{-1}(\lambda) \leqq C|\lambda|^2$$

pour tout $a = (m, \sigma)$ de A et tout λ de $\mathbb{R}^d$.

(2.28) Potentiel d'un processus gaussien décentré.

Introduisons pour tout $a = (m, \sigma)$ de $\mathbb{R}^d \times \mathscr{S}^+$ un processus $(X_t^a)_{t \geqq 0}$ additif, d'espace d'états $\mathbb{R}^d$, de loi gaussienne décentrée $\mathscr{N}(m, \sigma)$. Le semi-groupe de convolution s'écrit :

$$P_t^a h(\xi) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \frac{1}{|\det \sigma|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^d} h(\xi+\xi') \exp - \frac{\sigma^{-1}(\xi'-tm)}{2t} d\xi'.$$

Ce processus est transient en toute dimension, et son noyau potentiel U_0^a se calcule explicitement comme le montre la :

PROPOSITION. — *Soit* A *un domaine convenable au sens ci-dessus. Avec les notations précédentes, on a pour tout élément h de la classe* $\mathscr{H}$:

(*a*)

$$U_0^a h(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{i\lambda.\xi} \frac{\hat{h}(-\lambda)}{-im.\lambda + \sigma(\lambda)/2} d\lambda$$

(*b*)

$$(2\pi t)^{(d-1)/2} |m|_\sigma |\det \sigma|^{1/2} U_0^a h(-tm)$$

converge, uniformément en a de A, *lorsque t tend vers* $+\infty$, *vers* $\hat{h}(0)$.

Montrons ce résultat, classique (*voir* [26]) lorsque, d'une part le couple (m, σ) est fixe, et d'autre part la fonction h est à support compact sur $\mathbb{R}^d$.

(*a*) Grâce à la forme d'inversion de Fourier,

$$P_t^a h(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{i\lambda.\xi} \hat{h}(-\lambda) \exp(it\lambda.m - t\sigma(\lambda)/2) \, d\lambda$$

et le (*a*) résulte de la définition de $U_0^a = \int_0^\infty P_t^a \, dt$ et du fait que la fonction de λ : $1/(-i\lambda.m + \sigma(\lambda)/2)$ est intégrable au voisinage de 0 [lemme (2.13)].

(*b*) Comme dans le cas de $1/|\lambda|^2$, la fonction $1/(-i\lambda.m + \sigma(\lambda)/2)$ admet une transformée de Fourier au sens des distributions. Celle-ci s'exprime en fonction de la fonction de Bessel modifiée $K_{(d/2)-1}$ où :

$$K_\nu(s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{-\nu-1} \exp\left(-\frac{s}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right) dt, \qquad si \quad s > 0.$$

Il suffit en effet de calculer

$$U_0^a h(\xi) = \int_0^{+\infty} P_t^a h(\xi) \, dt$$

pour obtenir, si $a = (m, \sigma)$:

$$\frac{2|Rm|^{(d/2)-1}}{\det R (2\pi)^{d/2}} \int h(\xi') \exp\langle R(\xi' - \xi) | Rm \rangle$$

$$\times K_{(d/2)-1}(|R(\xi' - \xi)|.|Rm|) \frac{d\xi'}{|R(\xi' - \xi)|^{(d/2)-1}}$$

en notant R la racine carrée de la forme quadratique σ^{-1} : $R^t R = \sigma^{-1}$. Or on connaît le comportement à l'infini de $K_\nu(s)$ losque s est grand : il est équivalent à $\sqrt{\pi/2s}\, e^{-s}$ [48]. Formellement, $U_0^a h(\xi)$ est donc équivalent à :

$$\frac{|\mathrm{R}\,m|^{(d-3)/2}}{\det \mathrm{R}\,(2\pi)^{(d-1)/2}} \int h(\xi') \exp(\langle \mathrm{R}(\xi'-\xi) \,|\, \mathrm{R}\,m \rangle - |\mathrm{R}(\xi'-\xi)|\,.\,|\mathrm{R}\,m|) \left(\frac{1}{|\mathrm{R}(\xi'-\xi)|}\right)^{(d-1)/2} d\xi'.$$

Si l'on pose maintenant $\xi = -tm$, m tendant vers l'infini,

– d'une part, l'exponentielle

$$\exp(\langle \mathrm{R}(\xi'-\xi) \,|\, \mathrm{R}\,m \rangle - |\mathrm{R}(\xi'-\xi)|\,.\,|\mathrm{R}\,m|)$$

converge simplement vers 1, en ξ', uniformément sur tout compact et uniformément en $(m,\ \mathrm{R}^t\mathrm{R})$ appartenant au domaine convenable;

– d'autre part, le rapport $(|\mathrm{R}\,\xi| / |\mathrm{R}(\xi-\xi')|)^{(d-1)/2}$ converge simplement vers 1.

Ainsi, $\mathrm{U}_0^a h(-tm)$ est équivalent à $(1/|\mathrm{R}\,m|)\,(1/|\det \mathrm{R}|)\,(1/2\pi t)^{(d-1)/2}$.

Il faut maintenant justifier le passage à la limite. La formule suivante [47], p. 206 précise le terme d'erreur $\mathbf{E}$ entre $\mathrm{K}_{(d/2)-1}$ et son équivalent.

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_{(d/2)-1}(s) &= \sqrt{\frac{\pi}{2s}}\, e^{-s} \frac{1}{\Gamma((d-1)/2)} \int_0^\infty e^{-t}\, t^{(d-3)/2} \left(1+\frac{t}{2s}\right)^{(d-3)/2} dt \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2s}}\, e^{-s}\, \mathbf{E}(s). \end{aligned}$$

Il est aisé de voir que $\mathbf{E}$ vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) convergence : $\mathbf{E}(s)$ tend vers 1 lorsque $\mathbf{s}$ tend vers l'infini,

(ii) domination : il existe une constante numérique δ telle que :

$$0 \leqq \mathbf{E}(s) \leqq \delta\left(1+\frac{1}{s^{(d-3)/2}}\right), \qquad s \in \mathbb{R}^+.$$

Lorsque $d=3$, $\mathbf{E}$ est identiquement égal à 1; le noyau potentiel s'écrit alors de manière exacte :

$$\begin{aligned} \Delta^a(t) &= (2\pi t)^{(d-1)/2}\, |\mathrm{R}\,m|\,.\,|\det \mathrm{R}|\, \mathrm{U}_0^a h(-tm) \\ &= \int h(\xi')\, \Phi^a(-tm,\ \xi')\, d\xi' \end{aligned}$$

où la fonction Φ^a est définie par :

$$\begin{aligned} \Phi^a(\xi,\ \xi') = {} & \exp(\langle \mathrm{R}(\xi'-\xi) \,|\, \mathrm{R}\,m \rangle - |\mathrm{R}(\xi'-\xi)|\,.\,|\mathrm{R}\,m|) \\ & \mathbf{E}(|\mathrm{R}(\xi'-\xi)|\,.\,|\mathrm{R}\,m|) \left(\frac{|\mathrm{R}(\xi)|}{|\mathrm{R}(\xi-\xi')|}\right)^{(d-1)/2} \end{aligned}$$

(a) les majorations $c \leqq |m| \leqq \mathrm{C}$ et $c\,|\lambda|^2 \leqq \sigma^{-1}(\lambda) = |\mathrm{R}\,\lambda|^2 \leqq \mathrm{C}\,|\lambda|^2$, pour tout λ de $\mathbb{R}^d$ et tout $(m,\ \sigma)$ de $\mathbf{A}$ permettent de montrer que la fonction

$\xi' \mapsto \Phi^a(\xi', -tm)$ converge vers 1, lorsque t tend vers l'infini, uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d$ et uniformément en (m, σ) de **A**. Par suite, si K est un compact de $\mathbb{R}^d$,

$$\forall \varepsilon>0, \quad \exists \mathrm{T}, \quad \forall t \geqq \mathrm{T}, \quad \forall a \in \mathrm{A}, \quad \forall \xi' \in \mathrm{K},$$
$$|\Phi^a(\xi', -tm)-1| \leqq \varepsilon$$

(*b*) Choisissons maintenant K tel que $\int_{\mathrm{K}^0} |h(\xi')|\, d\xi' \leqq \varepsilon$, et découpons le complémentaire de K en deux zones, comme dans la preuve de la proposition (2.25)

$$\mathrm{I}_1 = \{\xi', |\mathrm{R}(\xi-\xi')| \geqq |\mathrm{R}\,\xi/2|\} \cap \mathrm{K}^c$$

et

$$\mathrm{I}_2 = \{\xi', |\mathrm{R}(\xi-\xi')| \leqq |\mathrm{R}\,\xi/2|\} \cap \mathrm{K}^c.$$

L'intégrale de $|h(\xi')|.|\Phi^a(\xi, \xi')|$ sur I_1 est majorée par $2\delta 2^{(d-1)/2}\varepsilon$. D'autre part, en utilisant la décroissance de h à l'infini $(\mathrm{M} = \sup |\xi'|^{d+1} |h(\xi')|$est fini], un calcul identique à celui de la proposition (2.25) montre qu'il existe une constante M* telle que l'intégrale sur I_2 de $h(\xi')\Phi^a(\xi, \xi')$ se majore par $\mathrm{M}^*\left(\frac{1}{|\mathrm{R}\,\xi|} + \left(\frac{1}{|\mathrm{R}\,\xi|}\right)^{(d-1)/2}\right)$.

Ainsi, lorsque $\xi = -tm$, ce dernier terme tend encore vers 0, lorsque t tend vers l'infini, uniformément en $a=(m, \sigma)$ de A. Ceci achève la preuve de la proposition (2.28).

(2.29) Corollaire. — *Si Φ_u est la fonction correspondant au terme principal, introduite en* (2.27),

$$(2\pi t)^{(d-1)/2} \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i\langle tm_u | \lambda\rangle} \Phi_u(\lambda)\, d\lambda$$

converge uniformément en u variant dans un compact de ∂D, lorsque t tend vers l'infini, vers*

$$c(u) \int g(y)\, \pi_u(dy) \int f(\xi')\, d\xi',$$

où c(u) est la constante du théorème de renouvellement, introduite en (2.8.*f*).

G. Preuve du théorème de renouvellement dans le cas centré, $d \geqq 3$

(2.30) Soit donc $(\mathrm{X}_n)_{n \geqq 0}$ une chaîne semi-markovienne adaptée, possédant un moment d'ordre supérieur à max $(d-2, 2+\varepsilon)$, centrée. On suppose que le noyau **P** vérifie la condition S(E), et que sa projection sur X est E-fortement ergodique. Enfin, soit $\mathrm{F}(x, \xi) = f(x)\, g(\xi)$ un élément de la classe

$\mathcal{H}^X$. Nous avons vu que sous ces conditions, en notant $R(1, T)$ la résolvante de l'opérateur T en 1, et en utilisant la décomposition spectrale au voisinage de 0 de l'opérateur de Fourier $\mathbf{P}^\lambda = k(\lambda) p_\lambda + Q_\lambda$, le noyau potentiel s'écrivait :

$$\begin{aligned}\mathrm{UF}(x, \xi) = (2\pi)^{-d} \left(\int \mathrm{F}(y, \xi') \pi(dy)\, d\xi' \right) \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda \cdot \xi} \frac{2 g_{\mathrm{U}}(\lambda)}{\sigma(\lambda)} d\lambda \\ + (2\pi)^{-d} \int e^{i\lambda \cdot \xi} h(\lambda)\, d\lambda \\ + (2\pi)^{-d} \int e^{i\lambda \cdot \xi} (\mathrm{R}(1, \mathrm{Q}_\lambda) g(x) g_{\mathrm{U}}(\lambda) \\ + \mathrm{R}(1, \mathbf{P}^\lambda) g(x)(1 - g_{\mathrm{U}}(\lambda)) \hat{f}(-\lambda)\, d\lambda\end{aligned}$$

où l'on note :

– g_{U} une fonction C^∞ valant 1 au voisinage de 0, et nulle en dehors de l'ouvert U sur lequel la décomposition spectrale de $\mathbf{P}^\lambda$ est valable et tel que $|1 - k(\lambda)| \geqq c |\lambda|^2$;

– h la fonction définie par :

$$h(\lambda) = \left(\frac{p_\lambda g(x) \hat{f}(-\lambda)}{1 - k(\lambda)} - \frac{p_0 g(x) \hat{f}(0)}{\sigma(\lambda)/2} \right) g_{\mathrm{U}}(\lambda).$$

Le corollaire (2.26) montre que le premier terme a le comportement voulu, lorsque $|\xi|$ tend vers l'infini : il est équivalent à :

$$\frac{1}{|\xi|_\sigma^{d-2}} \frac{c_d}{|\det \sigma|^{1/2}} \int \mathrm{F}(y, \xi') \pi(dy)\, d\xi'.$$

De plus, la fonction de λ intervenant dans le troisième terme est de classe C^{d-2} sur $\mathbb{R}^d$. Sa transformée de Fourier est donc en $o(|\xi|^{2-d})$. Il ne nous reste plus qu'à montrer que la transformée de Fourier de h a aussi le même comportement à l'infini.

Pour cela, nous allons montrer que la fonction h, qui est à support compact sur $\mathbb{R}^d$, singulière en 0, et de classe C^{d-2} en dehors de 0, vérifie les hypothèses du corollaire (2.18). C'est le but de la :

(2.31) PROPOSITION. – *Soit $h(\lambda)$ la fonction ci-dessus. Pour tout $k \leqq d-2$, il existe une constante d_k telle que*

$$|h^{(k)}(\lambda)| \leqq d_k / |\lambda|^{k+2-\varepsilon}, \qquad si \quad \lambda \in \mathrm{V} \setminus \{0\}.$$

En particulier, la fonction $h^{(d-2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$.

Le corollaire (2.18) implique alors que $\hat{h}$ est bien en $o(|\xi|^{2-d})$ à l'infini, ce qui terminera la preuve du théorème de renouvellement dans le cas centré.

Preuve de la proposition (2.31). – Elle repose sur l'idée suivante : la fonction $(1 - k(\lambda))^{-1}$ étant en $|\lambda|^{-2}$ en 0, ses dérivées à l'ordre k vont être de l'ordre de $|\lambda|^{-2-k}$. Par contre, si on lui soustrait son équivalent en 0, la singularité de h en 0 va être moindre que celle de $(1-k(\lambda))^{-1}$. Puisque la chaîne admet un moment d'ordre $2+\varepsilon$, nous avons :

$$1-k(\lambda)=\frac{\sigma(\lambda)}{2}+o(|\lambda|^{2+\varepsilon}).$$

Posons :

$$\varepsilon(\lambda)=p_\lambda g(x)\hat{f}(-\lambda)\sigma(\lambda)-2p_0 g(x)\hat{f}(0)(1-k(\lambda)).$$

Nous avons, pour tout λ dans U :

$$|\varepsilon(\lambda)|\leqq C_1|\lambda|^{2+\varepsilon}$$
$$|\varepsilon'(\lambda)|\leqq C_2|\lambda|^{1+\varepsilon}$$
$$|\varepsilon''(\lambda)|\leqq C_3|\lambda|^{\varepsilon}.$$

Ainsi, la fonction h s'écrit encore :

$$h(\lambda)=\frac{g_U(\lambda)\,\varepsilon(\lambda)}{\sigma(\lambda)(1-k(\lambda))}.$$

Par application de la formule de Leibniz, à des constantes près :

$$\forall k=1,\ldots,d-2,$$
$$h^{(k)}(\lambda)=\sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=k} g_U^{(\alpha)}(\lambda)\,\varepsilon^{(\beta)}(\lambda)\left(\frac{1}{\sigma(\lambda)}\right)^{(\gamma)}\left(\frac{1}{1-k(\lambda)}\right)^{(\delta)}.$$

Le lemme suivant permet d'estimer en 0 les dérivées de $1/\sigma$ et de $1/(1-k)$:

(2.32) LEMME. — *Si* I *est un domaine de* $\mathbb{R}$ *et g une fonction de classe* C^k *ne s'annulant pas sur* I, *la fonction* $(1/g)^{(k)}$ *est la somme de termes de la forme :*

$$C_{i,j}\frac{(g')^j P_{i,j}(g'',\ldots,g^{(k)})}{g^i}$$

où : — Les nombres $C_{i,j}$ *sont des constantes indépendantes de g — Les* $P_{i,j}$ *sont des polynômes indépendants de g — Le couple d'entiers* (i,j) *vérifie* $2i-j\leqq k+2$.

La preuve du lemme se fait sans difficulté par récurrence sur k.

En utilisant ce lemme, les minorations suivantes (données à une constante multiplicative près) :

$$\forall\lambda\in U$$
$$\sigma(\lambda)\geqq|\lambda|^2,\qquad |\sigma'(\lambda)|\leqq|\lambda|,\qquad |1-k(\lambda)|\geqq|\lambda|^2,\qquad |k'(\lambda)|\leqq|\lambda|$$

et la majoration :

$$|\sigma''(\lambda)|+\ldots+|\sigma^{(k)}(\lambda)|+|(1-k)''(\lambda)|+\ldots+|(1-k)^{(k)}(\lambda)|\leqq M$$

on obtient :

$$\forall \lambda \in U, \quad \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{(\gamma)}(\lambda) \leqq \frac{1}{|\lambda|^{2+\gamma}}, \qquad \left(\frac{1}{1-k}\right)^{(\delta)}(\lambda) \leqq \frac{1}{|\lambda|^{2+\delta}}.$$

La proposition (2.31) résulte alors des majorations sur ε.

Ceci achève la preuve de la proposition (2.31), et par conséquent, celle du théorème de renouvellement dans le cas centré.

H. Preuve du théorème de renouvellement, cas décentré

On reprend les notations et les hypothèses introduites en (2.8). En particulier, on sait que l'on peut associer à tout u de ∂D^* une fonction φ_u définie sur la base X et strictement positive telle que $H_u(x, \xi) = \varphi_u(x) \exp u.\xi$ soit harmonique pour la chaîne semi-markovienne. Soient R^u le noyau de la chaîne relativisée [*voir* (1.28) et seq.], et U^u le noyau potentiel correspondant :

$$U^u F = \sum_{n \geqq 0} (R^u)^n F = \frac{1}{H_u} U(FH_u).$$

Pour démontrer le théorème de renouvellement dans le cas décentré, il faut estimer la quantité

$$\begin{aligned} \Delta_u(\xi) &= \frac{1}{\varphi_u(x) \exp u.\xi} UF(x, \xi) \\ &= U^u\left(\frac{F}{H_u}\right)(x, \xi) \end{aligned}$$

lorsque :

– x est un point fixé de X;

– $\xi = -tm_u$ et t tend vers $+\infty$;

– u varie dans un compact C^* inclus dans ∂D^*;

– F appartient à la classe de fonctions $\mathscr{H}^X$: $F(x, \xi) = g(x) f(\xi)$, $g \in E$, $f \in \mathscr{H}$ [*cf.* (2.2)].

(2.34) Observons tout d'abord que $\dfrac{F}{H_u}(x, \xi) = \dfrac{g(x)}{\varphi_u(x)} f(\xi) \exp -u.\xi$.

La fonction f est la transformée de Fourier d'une fonction à support compact. Elle se prolonge donc sur $\mathbb{C}^d$ en une fonction analytique à croissance exponentielle, soit $f(z)$. La fonction $f(z) \exp u.z$ étant encore analytique à croissance exponentielle, c'est la transformée de Fourier d'une fonction à support compact (théorème de Paley-Wiener). Ceci permet de montrer que

$$f_u: \quad f_u(\xi) = f(\xi) e^{u.\xi}$$

appartient encore à la classe $\mathscr{H}$.

On utilisera le fait suivant :

Pour tout compact C^* *de* $\mathbb{R}^d$, *il existe un compact* K *tel que l'application qui à tout* u *de* C^* *fait correspondre la transformée de Fourier de* f_u *est continue de* C^* *dans* $C^{(d-1)/2}(K)$.

[*voir* en (2.20) la définition de $C^{(d-1)/2}(K)$, si d est pair.]

(2.35) Régularité de $\bar{\mathbf{P}}^z$.

On sait que si une chaîne semi-markovienne admet un moment d'ordre k entier, la transformation de Fourier est de classe C^k. Si maintenant elle admet un moment exponentiel, on peut définir pour tout $z=u+i\lambda$ de $\mathbb{C}^d$, pour tout entier k et pour tout multi-indice $m=(m_1, \ldots, m_d)$ de taille $k\,(\sum m_i=k)$ l'opérateur $\partial^m \bar{\mathbf{P}}^z$:

$$\forall g \in E, \quad \partial^m \bar{\mathbf{P}}^z g(x)=i^k \mathbf{E}_{(x,\,0)}[\xi_1^m e^{z\,.\,\xi_1} g(x_1)].$$

Par application du théorème de Lebesgue, il est aisé de voir que l'application :

$$u \mapsto (\lambda \mapsto \partial^m \bar{\mathbf{P}}^{u+i\lambda})$$

est continue.

Cette régularité reste conservée lorsque l'on considère les fonctions construites à partir de $\bar{\mathbf{P}}^z$. En particulier, seront de classe C^∞ [et par conséquent de classe C^r au sens de (2.21) pour r réel positif], de manière continue en u, les trois fonctions :

$$\lambda \mapsto k(u+i\lambda)$$
$$\lambda \mapsto p_{u+i\lambda}$$
$$\lambda \mapsto Q_{u+i\lambda}$$

qui interviennent dans la décomposition de l'opérateur de Fourier $(R^u)^\lambda$ de la chaîne relativisée [*voir* (1.30)]. Signalons que ces fonctions ne sont définies que dans un voisinage de 0 qui peut être pris indépendant de u lorsque u varie dans un compact C^* de ∂D^*. De plus, on choisira ce voisinage U tel que :

(i) $\exists\,\rho<1, \quad \forall \lambda \in U, \forall u \in C^*, r(Q_{u+i\lambda}) \leqq \rho$;

(ii) $\exists\,p'<1, \forall u \in C^*, \forall \lambda \in U^c \cap K, r((R^u)^\lambda) \leqq \rho'$.

Le compact K qui intervient dans (ii) est celui qui a été mis en évidence en (2.34).

(2.36) Pour résoudre le problème (2.33), utilisons l'écriture du noyau potentiel comme intégrale singulière, et ce, pour le noyau semi-markovien relativisé R^u. La quantité à estimer $\Delta_u(\xi)$ apparaît comme la somme de trois termes (2.14) :

– le terme principal, qui fait intervenir la fonction $(1-k(u+i\lambda))^{-1}$, pour λ variant dans un voisinage U de 0;

— et deux termes résiduels, qui font intervenir respectivement la résolvante de l'opérateur de Fourier associé à R^u pour λ dans l'intersection de K et du complémentaire de U, et la résolvante de l'opérateur $Q_{u+i\lambda}$ pour λ variant dans U.

Ces deux derniers termes s'expriment comme la transformée de Fourier de fonctions de classe $C^{(d-1)/2}$, de façon continue en u [*voir* (2.35)]. Ce fait, et les majorations (i) et (ii) ci-dessus montrent qu'ils sont en $o(|\xi|^{(1-d)/2})$ à l'infini [*cf.* (2.21)], uniformément en u de C^*.

Le terme principal $\Pi_u(\xi)$ peut lui-même être décomposé comme suit :

$$\Pi_u(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int F H_u(x', \xi')\,\pi_u(dx')\,d\xi'$$
$$\times\int e^{i\lambda.\xi}\frac{g_U(\lambda)}{-im_u.\lambda+\sigma_u(\lambda)/2}\,d\lambda+\frac{1}{(2\pi)^d}\int e^{i\lambda.\xi}\,h_u(\lambda)\,d\lambda$$

où g_U est une fonction de classe C^∞ valant 1 au voisinage de 0 et nulle en dehors de U, et h_u est la fonction analogue à celle du cas centré [*cf.* (2.30)]:

$$h_u(\lambda)=g_U(\lambda)\left(\frac{p_{u+i\lambda}g_u(x)\hat{f}_u(-\lambda)}{1-k(u+i\lambda)}-\frac{p_u g_u(x)\hat{f}_u(0)}{-im_u.\lambda+\sigma_u(\lambda)/2}\right).$$

L'étude du potentiel d'un mouvement brownien « décentré » menée en (2.27) et (2.28) permet maintenant d'estimer le premier terme dans la décomposition de Π_u ci-dessus lorsque $\xi=-tm_u$, $t\to+\infty$, et le corollaire (2.29) fait apparaître l'équivalent annoncé au théorème de renouvellement dans le cas décentré.

(2.37) Comme dans le cas centré, il reste donc à montrer que la fonction $\hat{h}_u(\xi)$ est en $o(|\xi|^{(1-d)/2})$ à l'infini, de manière uniforme en u. Lorsque la dimension d de l'espace est impaire, $(d-1)/2=d_0$, on peut envisager de procéder par intégrations par parties successives, en utilisant le critère (2.31) pour écrire $|\xi|^{d_0}\hat{h}_u(\xi)=\hat{h}_u^{(d_0)}(\xi)$ [2]. Cette méthode n'est plus appropriée en dimension paire. On utilise alors le découpement dyadique des intégrales : on découpe l'espace $\mathbb{R}^d$ en couronnes $\mathscr{C}_k$, qui se rapprochent de l'origine, et dont la géométrie est adaptée au type de singularité envisagé. La singularité de la fonction h_u se traduira alors au moyen d'une famille de coefficients $(\alpha_k)_{k\geqq 0}$, qui décrira le comportement de h_u sur chaque couronne.

On introduira également un groupe de dilatation $(D^k)_{k\in\mathbb{Z}}$, tel que l'application D^k fasse passer de la k-ième couronne à la couronne $\mathscr{C}_0$. C'est sur cette couronne que l'on pourra lire les propriétés de régularité de h_u.

(2.38) Construction des couronnes.

La singularité en 0 de la fonction $h_u(\lambda)$ est en $[-im_u.\lambda+\sigma_u(\lambda)/2]^{-1}$. Puisque le couple (m_u, σ_u) varie dans un domaine convenable de $\mathbb{R}^d\times\mathcal{S}^+$ [*cf.* (2.27)], il est possible de trouver deux constantes c et C, indépendantes de u, telles que, pour tout λ dans U, on ait :

$$\begin{aligned}\frac{1}{C}\left|i\lambda.e_u+|\lambda'_u|^2\right| &\leqq\frac{1}{c}\left|-im_u.\lambda+\sigma_u(\lambda)/2\right|\\ &\leqq\left|1-k(u+i\lambda)\right|\\ &\leqq c\left|-im_u.\lambda+\sigma_u(\lambda)/2\right|\\ &\leqq C\left|i\lambda.e_u+|\lambda'_u|^2\right|\end{aligned}\tag{E_1}$$

où :

– e_u désigne le vecteur unitaire $m_u/\|m_u\|$;
– λ'_u désigne la projection orthogonale de λ sur l'espace $(e_u)^\perp$.

Si e est un vecteur unitaire fixé de $\mathbb{R}^d$, on note $y=y_1\,e\oplus y'$ la décomposition d'un vecteur y relativement à celle de $\mathbb{R}^d$: $\mathbb{R}^d=\langle e\rangle\oplus\langle e\rangle^\perp$.

Soit r_u une rotation de $\mathbb{R}^d$ telle que $r_u e_u=e$, et choisie pour que $u\mapsto r_u$ soit continue. L'estimation (E_1) s'crit encore, pour tout λ dans U :

$$\frac{1}{C}\left|i(r_u\lambda)_1+|(r_u\lambda)'|^2\right|\leqq\frac{1}{c}\left|-im_u.\lambda+\sigma_u(\lambda)/2\right|\tag{E_2}$$

On peut maintenant introduire les couronnes :

$$\mathcal{C}_k=\left\{y,\ \frac{1}{4^{k+1}}\leqq\left|iy_1+|y'|^2\right|\leqq\frac{1}{4^k}\right\},$$

et :

$$\mathcal{C}_k^u=r_u^{-1}\,\mathcal{C}_k.$$

Ces couronnes se rapprochent de l'origine k grandit. Il est donc possible de trouver un rang n_0 tel que $\bigcup_{k\geqq n_0}\mathcal{C}_k^u$ soit contenu dans le voisinage U de 0, c'est-à-dire tel que les estimations (E_2) soient valables. Ainsi, pour $k\geqq n_0$, la fonction $(1-k(u+i\lambda))^{-1}$ est de l'ordre de 4^{k+1} sur $\mathcal{C}_k^u$.

Ce rang n_0 peut être pris indépendant de u.

D'autre part, on suppose U assez petit pour que $U\subset\bigcap_{u\in C^*}\bigcup_{k\geqq 0}\mathcal{C}_k^u$.

(2.39) Construction du groupe de dilatation associé.

On considére la dialtation D dont la matrice sur $\mathbb{R}^d$ est :

$$\begin{pmatrix}1/4 & 0\\ 0 & (1/2)/\mathrm{Id}_{d-1}\end{pmatrix}$$

soit $D(y_1, y')=(y_1/4,\ y'/2)$. On a donc $\|D\|=1/2$; $\|D^{-1}\|=4$, et le déterminant de D est égal à $1/2^{d+1}$.

La dilatation D itérée k fois envoie bijectivement $\mathscr{C}_0$ sur $\mathscr{C}_k$, et par conséquent $D_u^k = r_u^{-1} D^k r_u$ est une bijection de $\mathscr{C}_0^u$ sur $\mathscr{C}_k^u$.

(2.40) Découpage de $\mathbb{R}^d$ au moyen des couronnes.

Puisque le voisinage U de 0 est contenu dans $\bigcap_u \bigcup_{k \geqq 0} \mathscr{C}_k^u$, on peut écrire

$$1_U = \sum_{k \geqq 0} 1_U 1_{\mathscr{C}_k}.$$

Pour ne pas créer de singularité artificielle, on introduit une fonction ρ, C^∞, à support compact dans un voisinage en tube autour de $\mathscr{C}_0$, telle que :

$$\forall \lambda \in \bigcup_{k \geqq 0} \mathscr{C}_k, \quad \sum_{k \geqq 0} \rho(D^{-k} \lambda) = 1.$$

La fonction ρ est essentiellement la fonction caractéristique de $\mathscr{C}_0$, régularisée au bord de $\mathscr{C}_0$.

Pour tout u de ∂D^*, on a également :

$$\forall \lambda \in \bigcup_{k \geqq 0} \mathscr{C}_k^u, \quad \sum_{k \geqq 0} \rho_u(D_u^{-k} \lambda) = 1 \qquad (E_3)$$

où ρ_u est l'image de ρ par la rotation r_u : $\rho_u(z) = \rho(r_u z)$. Le support de ρ_u est alors un voisinage de $\mathscr{C}_0^u$.

(2.41) On peut désormais étudier $\hat{h}_u(\xi)$; rappelons que h_u a été définie en (2.36). On a donc :

$$\begin{aligned}
\hat{h}_u(\xi) &= \int_U e^{i\lambda \cdot \xi} h_u(\lambda)\, d\lambda \\
&= \sum_{k \geqq 0} \int_U e^{i\lambda \cdot \xi} \rho_u(D_u^{-k} \lambda) h_u(\lambda)\, d\lambda \quad (\textit{d'après } E_3) \\
&= \sum_{k \geqq 0} \frac{1}{(2^k)^{d+1}} \int_U \exp(i \langle D_u^k \xi \,|\, \lambda \rangle) \rho_u(\lambda) h_u(D_u^k \lambda)\, d\lambda \\
&= \sum_{k \geqq 0} \frac{1}{(2^k)^{d+1}} \hat{\rho}_{u,k}(D_u^k \xi)
\end{aligned}$$

où l'on a posé $\rho_{u,k}(\lambda) = \rho_u(\lambda) h_u(D_u^k \lambda)$.

La fonction $\rho_{u,k}$ a pour support celui de ρ_u, qui est essentiellement la couronne $\mathscr{C}_0^u$. Soit $\tilde{K} = \bigcup_k \mathscr{C}_k^u$. C'est un compact, contenu dans le complémentaire d'un voisinage de l'unité. La proposition suivante étudie les propriétés de $\rho_{u,k}$ sur $\tilde{K}$:

(2.42) PROPOSITION. — *(a) Pour tout u de ∂D^*, $\rho_{u,k}$ appartient à $C^{(d-1)/2}(\tilde{K})$, et l'application $u \mapsto \rho_{u,k}$ est continue.*

(*b*) *Il existe un nombre* M, *indépendant de u variant dans un compact de* ∂D^*, *et un nombre* ε' *strictement positif tels que :*

$$\forall k \geqq n_0, \quad \| \rho_{u,k} \|_{(d-1)/2} \leqq M (4^k)^{1-\varepsilon'/2}$$

Preuve. — Les fonctions de λ : $1-k(u+i\lambda)$ et $-im_u.\lambda+\sigma(\lambda)/2$ ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$. Ainsi, h_u est de classe $C^{(d-1)/2}$ sur tout compact contenu dans le complémentaire d'un voisinage de 0, et ce, de manière continue en u. Puisque $\rho_{u,k}$ est l'image de $\rho_u(D^{-k}\lambda)\,h_u(\lambda)$ par la dilatation D_u^{-k}, le (*a*) résulte du fait que, lorsque λ varie dans $\tilde{K}$, $D_u^{-k}(\lambda)$ varie dans $D_u^{-k}\tilde{K}$, qui est contenu dans le complémentaire d'un voisinage de 0.

La majoration de la norme de $\rho_{u,k}$ repose sur le même principe que dans le cas centré [proposition (2.31)]. On pose :

$$\varepsilon_u(\lambda) = (-im_u.\lambda+\sigma(\lambda)/2)\,\rho_{u+i\lambda}\,g_u(x)\,\hat{f}_u(-\lambda) \\ -(1-k(u+i\lambda))\,p_u\,g_u(x)\,\hat{f}_u(0)$$

$$a_u(\lambda) = \varepsilon_u(D_u^{-k}\lambda) \qquad (\lambda \in \operatorname{supp}\rho_u)$$

$$v_u(\lambda) = 1-k(u+iD_u^{-k}\lambda)$$

$$w_u(\lambda) = -i\langle m_u \mid D_u^{-k}\lambda\rangle + \sigma(D_u^{-k}\lambda)/2$$

La fonction $\rho_{u,k}$ s'écrit donc $\rho_{u,k} = a_u \cdot \rho_u/v_u \cdot w_u$, et l'abaissement de la singularité proviendra du terme ε_u.

Les inégalités ci-dessous sont valables à une constante multiplicative près, indépendante de u variant dans un compact de ∂D^*.

Tout d'abord, il est immédiat de voir que, les dérivées de ρ_u pouvant être majorées uniformément en u, on a :

$$\| \rho_{u,k} \|_{(d-1)/2} \leqq \sum_{\alpha+\beta+\gamma=(d-1)/2} \| a \|_\alpha \left\| \frac{1}{v_u} \right\|_\beta \left\| \frac{1}{w_u} \right\|_\gamma$$

où :

– tous les indices sont entiers si d est impair;

– deux sont entiers et le troisième demi-entier si d est pair.

Puisque la chaîne semi-markovienne admet un moment d'ordre $2+\varepsilon$, la fonction ε est deux fois différentiable, et l'on a :

$$|\varepsilon_u(\lambda)| \leqq |\lambda|^{2+\varepsilon}, \qquad |\varepsilon_u'(\lambda)| \leqq |\lambda|^{1+\varepsilon}, \qquad |\varepsilon_u''(\lambda)| \leqq |\lambda|^{\varepsilon}.$$

Ceci permet d'estimer la norme-α de a. Distinguons entre les cas $\alpha=0$, 1/2, 1, 3/2, 2, et $\alpha \geqq 5/2$.

(1) $\alpha=0$. On a :

$$\| a \|_0 = \sup_{\lambda \in \mathscr{C}_0^*} |\varepsilon(D_u^k(\lambda))| \leqq \| D_u^k \|^{2+\varepsilon} \leqq 1/(2^k)^{2+\varepsilon}$$

(rappelons que $\| D_u^k \| = 1/2^k$).

(2) $\alpha=1/2$. On écrit :

$$
\begin{aligned}
[a]_{1/2} &= \sup_{\lambda,\,\lambda'\in\mathscr{C}_0^*,\ |\lambda-\lambda'|\leqq 1} \frac{|\varepsilon(D_u^k\lambda)-\varepsilon(D_u^k\lambda')|}{|\lambda-\lambda'|^{1/2}} \\
&\leqq \sup_{z\in\mathscr{C}_0^*} |\varepsilon'_u D_u^k(z)| \sup_{|\lambda-\lambda'|\leqq 1} \frac{|D_u^k\lambda-D_u^k\lambda'|}{|\lambda-\lambda'|^{1/2}} \\
&\leqq \| D_u^k\|^{1+\varepsilon}\| D_u^k\| \\
&\leqq 1/(2^k)^{2+\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

(3) $\alpha=1$. Alors :

$$
\begin{aligned}
\| a\|_1 &= \sup_{\lambda\in\mathscr{C}_0^*} |D_u^k\varepsilon'(D_u^k\lambda)| \\
&\leqq \| D^k\| . \| D^k\|^{1+\varepsilon} \\
&\leqq 1/(2^k)^{2+\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

On trouve le même résultat lorsque $\alpha=3/2$ et 2. Si maintenant $\alpha\geqq 5/2$, on a toujours :

$$[a]_\alpha \leqq \| D^k\|^\alpha \|\varepsilon_u\|^\alpha \leqq 1/(2^k)^\alpha \leqq 1/(2^k)^{5/2}.$$

Dans tous les cas, il existe $\varepsilon'=\inf(\varepsilon, 1/2)$ tel que $\| a\|_\alpha \leqq 1/(2^k)^{2+\varepsilon'}$.

Montrons maintenant que $\| 1/v\|_\beta \leqq 4^k$ et que $\| 1/w\|_\gamma \leqq 4^k$.

Nous savons que la dérivée n-ième de la fonction $1/v$ est la somme de termes de la forme $\dfrac{(v')^j P(v'', \ldots, v^{(k)})}{v^i}$, avec $2i-j\leqq n+2$ [lemme (2.32)]. De plus, le degré de dérivation dans $P(v'', \ldots, v^{(k)})$ est égal à $n-j$. Ainsi, si β est entier, la dérivée β-ième de $(1/v_u)$ va être majorée par la somme de termes du type :

$$\frac{\| D_u^k(k'(u+i(D_u^k\lambda)))\|^j \| D_u^k\|^{\beta-j}}{|1-k(u+i(D_u^k\lambda))|^i}.$$

Mais si z est proche de 0, $k'(u+iz)$ est proche de m_u, et $D_u^k(k'(u+iD_u^k\lambda))$ est proche de $D_u^k m_u=m_u/4^k$.

D'autre part, si $\lambda\in\mathscr{C}_0$, $D_u^k\lambda\in\mathscr{C}_0^k$, et si $k\geqq n_0$, l'estimation (E_2) est valable :

$$|1-k(u+i(D_u^k\lambda))| \geqq c/4^k,$$

et chaque terme est de l'ordre de $1/(4^k)^j\, 1/(2^k)^{\beta-j}(4^k)^i \leqq 4^k$.

Le même calcul peut être fait si β est non entier. Ainsi $\| 1/v_u\|_\beta \leqq 4^k$, et de manière identique, on a : $\| 1/w_u\|_\gamma \leqq 4^k$.

Dans tous les cas, nous avons donc :

$$\| a_u\|_\alpha \| 1/v_u\|_\beta \| 1/w_u\|_\gamma \leqq (4^k)^{1-\varepsilon'/2}$$

ce qui termine la preuve de la proposition (2.42).

(2.43) Fin de la preuve du théorème de renouvellement dans le cas décentré.

Il nous faut montrer que la transformée de Fourier de h_u est en $o(|\xi|^{(1-d)/2})$ à l'infini. Pour cela, rappelons l'égalité de découpage obtenue en (2.41) :

$$\hat{h}_u(\xi)=\sum_{k\geqq 0}\frac{1}{(2^k)^{d+1}}\hat{\rho}_{u,\,k}(\mathrm{D}_u^k\xi).$$

(*a*) Il résulte de la proposition (2.42) et de la continuité de la transformation de Fourier de $\mathrm{C}^{(d-1)/2}(\tilde{\mathrm{K}})$ dans $\mathrm{D}^{(d-1)/2}$ [proposition (2.21)] que pour tout $k\geqq n_0$, nous avons :

$$\|\hat{\rho}_{u,\,k}\|_{\widehat{(d-1)/2}}=\sup_z|z|^{(d-1)/2}|\hat{\rho}_{u,\,k}(z)|\leqq\|\rho_{u,\,k}\|_{(d-1)/2}\leqq(4^k)^{1-\varepsilon'/2}$$

et ceci, uniformément en u variant dans un compact de $\partial\mathrm{D}^*$.

Par suite, les majorations suivantes ont lieu :

$$\begin{aligned}\sup_\xi|\xi|^{(d-1)/2}|\hat{\rho}_{u,\,k}(\mathrm{D}_u^k\xi)|&\leqq(4^k)^{1-\varepsilon'/2}\sup_\xi\frac{|\xi|^{(d-1)/2}}{|\mathrm{D}_u^k\xi|^{(d-1)/2}}\\&\leqq(2^k)^{d+1-\varepsilon'}\end{aligned}$$

puisque la norme de D_u^{-k} est égale à 4^k.

(*b*) Fixons δ strictement positif, et N tel que

$$\sum_{k\geqq\mathrm{N}}\frac{1}{2^{k\,\varepsilon'}}\leqq\delta.$$

Nous avons alors :

$$|\xi|^{(d-1)/2}\hat{h}_u(\xi)=|\xi|^{(d-1)/2}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{1}{(2^k)^{d+1}}\hat{\rho}_{u,\,k}(\mathrm{D}_u^k\xi)+\mathrm{R}_u(\xi)$$

où $\mathrm{R}_u(\xi)$ est majoré uniformément en u par δ.

(*c*) Pour tout k fixé, k inférieur à N, la proposition (2.42) donne la continuité de l'application

$$\begin{aligned}\partial\mathrm{D}^*&\mapsto\mathrm{C}^{(d-1)/2}(\tilde{\mathrm{K}})\\u&\mapsto\rho_{u,\,k}.\end{aligned}$$

Par composition avec la transformation de Fourier, continue de $\mathrm{C}^{(d-1)/2}(\tilde{\mathrm{K}})$ dans $\mathrm{D}^{(d-1)/2}$, nous déduisons la continuité de l'application de $\partial\mathrm{D}^*$ dans $\mathrm{D}^{(d-1)/2}$ qui à tout u associe $\rho_{u,\,k}$. Ainsi, pour tout k fixé, $|x|^{(d-1)/2}\rho_{u,\,k}(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini, et ce continûment en u. Par suite :

$$|\xi|^{(d-1)/2}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{1}{(2^k)^{d+1}}\hat{\rho}_{u,\,k}(\mathrm{D}_u^k\xi)\to 0$$

lorsque ξ tend vers l'infini, uniformément en u de C^*. Par conséquent, δ étant pris arbitrairement petit dans (*b*), $|\xi|^{(d-1)/2}\hat{h}_u(\xi)$ est encore arbitrairement petit lorsque $|\xi|$ tend vers l'infini, et ceci achève la preuve du théorème de renouvellement dans le cas décentré.

(2.44) *Remarque.*
Cette démonstration montre que pour obtenir l'équivalent du noyau potentiel d'une chaîne semi-markovienne décentrée dans la seule direction de la moyenne, il suffit de supposer, en plus des hypothèses usuelles de forte ergodicité, adaptation et condition S(E), l'existence d'un moment d'ordre égal à $\max((d-1)/2, 2+\varepsilon)$, pour un ε strictement positif quelconque.

TROISIÈME PARTIE
APPLICATIONS

A. Mouvement brownien sur un revêtement abélien de variété riemannienne compacte

Les variétés que nous considérons ici sont supposées de classe C^3.

(3.1) Le mouvement brownien comme chaîne semi-markovienne. Guivarc'h [20].

Soit $(\bar{M}, \bar{g})$ une variété compacte et connexe, munie d'une structure riemannienne $\bar{g}$. On se donne un revêtement riemannien (M, g, p) de $(\bar{M}, \bar{g})$, dont on suppose la fibre isomorphe à $\mathbb{Z}^d$ avec $d \geqq 3$. Le groupe abélien $\mathbb{Z}^d$ s'identifie alors à un groupe d'isométries sur M.

L'opérateur de Laplace-Beltrami Δ_M étant un invariant de la métrique, il commute avec les isométries de M. Notons $(P_t)_{t\geqq 0}$ le semi-groupe ayant pour générateur Δ_M, i.e. le semi-groupe de transition du mouvement brownien sur M, et pour tout t, $p(t, x, y)$ la densité de P_t relativement à la mesure sur M canoniquement attachée à la métrique riemannienne g. La propriété d'invariance sous l'action des isométries s'écrit encore :

$$\forall \gamma \in \mathbb{Z}^d, \quad \forall (x, y) \in M \times M, \qquad p(t, \gamma x, \gamma y) = p(t, x, y).$$

Ainsi, si l'on se fixe un domaine fondamental X de l'action de $\mathbb{Z}^d$ sur M, le mouvement brownien à temps entiers sur M s'identifie mesurablement à une chaîne semi-markovienne sur $X \times \mathbb{Z}^d$. De plus, la chaîne de Markov sur la base X est l'image par cette identification du mouvement brownien sur $\bar{M}$. Enfin, la distance sur M est équivalente à la norme euclidienne, i.e. il existe deux constantes c et C telles que pour tout point x de M et toute isométrie γ de $\mathbb{Z}^d$ on ait :

$$c d(x, \gamma x) \leqq \|\gamma\| \leqq C d(x, \gamma x).$$

Les constantes c et C dépendent de la géométrie de $\bar{M}$.

(3.2) Propriétés.

La chaîne sur la base a une densité continue strictement positive, bornée par compacité de $\bar{M}$, d'où sa forte ergodicité sur l'espace des fonctions bornées sur X [*voir* (1.6)].

La stricte positivité de p sur M implique l'adaptation de la chaîne semi-markovienne sur $X \times \mathbb{Z}^d$. De plus, les théorèmes de comparaison de [34] s'appliquent : il existe une constante c_1 telle que :

$$p(1, x, y) \leqq \exp(-c_1 d^2(x, y))$$

ce qui assure l'existence de moments de tous ordres de la chaîne semi-markovienne.

L'hypothèse de centrage est acquise grâce à la symétrie du noyau P_t sur $L^2(M)$.

Nous nous trouvons donc sous les conditions d'application du corollaire (2.5) du théorème de renouvellement (2.3). En conséquence, nous pouvons donner le comportement du noyau potentiel de la chaîne semi-markovienne.

(3.3) Potentiel du mouvement brownien.

On note x_0 un point origine de M fixé, U le noyau potentiel : $\mathbf{U} = \int_0^\infty \mathbf{P}_t \, dt$, et $\mathbf{Q}$ le noyau $\int_0^1 \mathbf{P}_t \, dt$.

De l'égalité :

$$\mathbf{U} = \sum_{n \geqq 0} \mathbf{P}_n \mathbf{Q}$$

et de l'invariance sous $\mathbf{Q}$ de la mesure $dx \otimes d\gamma$ sur $X \times \mathbb{Z}^d$ résulte le :

THÉORÈME. — *Il existe une matrice définie positive σ telle que pour toute fonction* F *à support compact sur* M, $\mathbf{U}F(\gamma x_0)$ *est équivalent lorsque γ tend vers l'infini dans $\mathbb{Z}^d$ à :*

$$|\gamma|_\sigma^{2-d} \frac{c_d}{|\det \sigma|^{1/2}} \int_{X \times \mathbb{Z}^d} F(\gamma' x) \, dx \, d\gamma'.$$

On a noté $|\gamma|_\sigma$ le nombre $\sigma^{-1}(\gamma)^{1/2}$, et c_d est la constante $\dfrac{\Gamma((d-2)/2)}{2(\pi) d/2}$.

Signalons que la matrice σ dépend uniquement de la géométrie de $\bar{M}$.

En corollaire, donnons une estimation du comportement de la fonction de Green sur M :

$$g(x, y)=\int_0^\infty p(t, x, y)\,dt.$$

On note $F \approx G$ lorsque $F=O(G)$ et $G=O(F)$ à l'infini.

COROLLAIRE. — *Soit* M *un revêtement abélien d'une variété riemannienne compacte, de fibre* $\mathbb{Z}^d$, $d \geqq 3$. *Si* $p(t, x, y)$ *désigne le noyau de la chaleur sur* M *au temps* t *et* $g(x, y)=\int_0^\infty p(t, x, y)\,dt$ *la fonction de Green sur* M, *alors*

$$g(x_0, y) \approx \frac{1}{d(x_0, y)^{d-2}},$$

pour tout point origine x_0 *fixé de* M.

B. Marches aléatoires sur les extensions compactes de $\mathbb{R}^d$

(3.4) Structure de ces groupes.

Soit G un groupe topologique localement compact à base dénombrable. On dit que G est une extension compacte du groupe vectoriel $\mathbb{R}^d$ s'il existe un sous-groupe V distingué de G et isomorphe à $\mathbb{R}^d$ tel que G/V soit compact. On sait alors (Hochschild [25], p. 44) que V est facteur semi-direct de G, c'est-à-dire qu'il existe un sous-groupe compact K de G tel que :

$$\begin{gathered} V \times K \mapsto G \\ (\xi, k) \mapsto \xi k \end{gathered}$$

soit un homéomorphisme. Si l'on note Ad la représentation de K dans GL(V) qui à tout k de K associe l'automorphisme intérieur $(\xi \to k \xi k^{-1})$ restreint à V, alors G s'identifie au produit semi-direct $V \times K$ muni de la loi :

$$(\xi, k)(\xi', k')=(\xi+\mathrm{Ad}\,k(\xi'), kk').$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, on note encore $\mathrm{Ad}\,k(\xi)=k.\xi$.

Par compacité de K, il est possible de munir $\mathbb{R}^d$ d'un produit scalaire qui fait de Ad(K) un sous-groupe du groupe $\mathcal{O}(d)$ des isométries de $\mathbb{R}^d$. L'action de K sur $\mathbb{R}^d$ est alors semi-simple : s'il laisse stable un sous-espace de $\mathbb{R}^d$, il laisse stable son orthogonal. *On notera* W *l'espace des points fixes de l'action de* K *sur* $\mathbb{R}^d$. On obtient ainsi une décomposition de $\mathbb{R}^d$ en somme directe orthogonale :

$$\mathbb{R}^d = W \oplus W^\perp.$$

On notera $Y=Y^W+Y^{W\perp}$ la décomposition correspondante d'un vecteur Y de $\mathbb{R}^d$.

Signalons que l'espace W peut être réduit à $\{0\}$: si G est le groupe des déplacements de l'espace euclidien, le sous-groupe compact K est égal au groupe des rotations de $\mathbb{R}^d$. L'action de K est transitive sur $\mathbb{R}^d$ et n'admet par conséquent pas d'autres points fixes que 0.

(3.5) Marches aléatoires sur G et centrage.

Soit $((k_n, Y_n))_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi μ sur G et

$$\begin{aligned}(x_n, \xi_n) &= (k, \xi)(k_1, Y_1)\dots(k_n, Y_n)\\ &= (kk_1\dots k_n, \xi+kY_1+kk_1.Y_2+\dots+kk_1\dots k_{n-1}Y_n)\end{aligned}$$

la marche aléatoire droite de loi μ sur G, prise à l'instant n issue de (k, ξ). On a montré en (1.2) qu'elle peut être vue comme une chaîne semi-markovienne sur $K\times\mathbb{R}^d$, de base compacte K. La chaîne de Markov $(x_n)_{n\geq 0}$ est la marche aléatoire droite sur K qui a pour loi $\bar{\mu}$, image de μ par la projection $(G\mapsto G/\mathbb{R}^d)$. La mesure de Haar sur K fournit une probabilité invariante pour $(x_n)_{n\geq 0}$.

Supposons qu μ admette un moment d'ordre 1, et estimons la moyenne de la chaîne semi-markovienne. Nous avons :

$$\begin{aligned}\forall k\in K,\quad M\,1(k) &= \mathbf{E}(k.Y_1)\\ &= \mathbf{E}(Y_1^W+k\,Y_1^{W\perp})\\ &= \mathbf{E}(Y_1^W)+k\,\mathbf{E}(Y_1^{W\perp}).\end{aligned}$$

Par suite :

$$m=\int_K M\,1(k)\,dk=\mathbf{E}(Y_1^W)$$

puisque pour tout vecteur Y de $W^\perp$ le vecteur $\int_K k\,dk.Y$ est nul : c'est un point fixe sous K qui appartient à $W^\perp$.

On voit ainsi que le non-centrage de la chaîne semi-markovienne ne peut provenir que de la partie de $\mathbb{R}^d$ où l'action de K est triviale. Ceci nous conduit à poser la :

DÉFINITION. — *Soit* $G=\mathbb{R}^d\times K$ *une extension compacte de* $\mathbb{R}^d$, *et* W *l'espace des points fixes de* $\mathbb{R}^d$ *sous l'action de* K. *Soit* p_W *la projection orthogonale sur* W.

Soit μ *une probabilité sur* G *ayant un moment d'ordre* 1. *On appelle moyenne de* μ *le vecteur :*

$$m=\int_G p_W(\xi)\,d\mu(k, \xi).$$

La loi μ *sera dite centrée si* $m=0$, *et décentrée dans le cas contraire.*

(3.6) Étalement de la mesure $\bar{\mu}$, opérateurs de Fourier.

Dans toute la suite, la mesure $\bar{\mu}$, image de μ sur K, sera supposée vérifier les deux conditions suivantes :

(1) Le support de $\bar{\mu}$ n'est pas contenu dans un translaté d'un sous-groupe distingué strict de K.

(2) La mesure $\bar{\mu}$ est *étalée*, c'est-à-dire qu'il existe une puissance de convolution de $\bar{\mu}$ non singulière relativement à la mesure de Haar sur K.

Lorsque K est connexe, la seconde condition implique la première.

Il découle classiquement de ces deux hypothèses que la marche aléatoire de loi $\bar{\mu}$ sur K est fortement ergodique sur l'espace des fonctions continues, relativement à la mesure de Haar π sur K [23].

Cette régularité se transmet aux opérateurs de Fourier, comme le montre l'étude qui suit :

Pour tout λ de $\mathbb{R}^d$, l'opérateur de Fourier de la chaîne semi-markovienne est ici donné par :

$$\mathbf{P}^\lambda f(k) = \int f(kk')\, e^{i\langle \lambda \mid k.\xi\rangle}\, d\mu(k', \xi)$$

soit, si $\mu = \int \varepsilon_k \otimes \eta_k\, d\bar{\mu}(k)$ est une désintégration de μ suivant K (*cf.* [3]) :

$$\mathbf{P}^\lambda f(k) = \int f(kk')\, \hat{\eta}_{k'}(k^{-1}\lambda)\, d\bar{\mu}(k').$$

On a alors la :

Proposition. — *Si* μ *est une probabilité sur* $G = K \times \mathbb{R}^d$, *telle que la projection de* μ *sur* K *soit étalée, alors* $\mathbf{P}^\lambda$ *est quasi-compact sur l'espace des fonctions continues.*

Preuve. — Soit $\rho < 1$. Quitte à considérer une puisance de μ, on peut supposer que

$$d\mu(k) = \varphi(k)\, dk + d\beta(k),$$

où β est une mesure sur K de variation totale inférieure à ρ. Ainsi, $\mathbf{P}^\lambda$ est somme de deux opérateurs A et B, où :

$$\mathrm{A} f(k) = \int f(kk')\, \hat{\eta}_{k'}(k^{-1}\lambda)\, \varphi(k')\, dk'$$

$$\mathrm{B} f(k) = \int f(kk')\, \hat{\eta}_{k'}(k^{-1}\lambda)\, d\beta(k').$$

Remarquons tout d'abord que :

$$\|\mathrm{B}\| \leqq \sup_k \int |\hat{\eta}_{k'}(k^{-1}\lambda)|\, d\beta(k') \leqq \|\beta\| \leqq \rho,$$

puisque $|\hat{\eta}_{k'}(k^{-1}\lambda)| \leqq 1$.

Montrons que A est un opérateur compact de C(K).

Pour cela, d'après Ascoli, il suffit de montrer que :

$$\forall k_0 \in \mathrm{K}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0,$$

tel que :

$$\forall f \in \mathrm{C}(\mathrm{K}), \qquad \|f\| \leqq 1,$$
$$\textit{si} \quad \|k - k_0\| \leqq \delta, \quad \textit{alors} \quad \|\mathrm{A} f(k) - \mathrm{A} f(k_0)\| \leqq \varepsilon.$$

L'opérateur A possède un noyau, noté encore A, relativement à dk, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \mathrm{A} f(k) &= \int f(kk')\, \hat{\eta}_{k'}(k^{-1}\lambda)\, \varphi(k')\, dk' \\ &= \int_{\mathrm{K}} f(kk')\, \mathrm{A}(k, k')\, dk'. \end{aligned}$$

Soit donc k_0 fixé dans K. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{A} f(k) - \mathrm{A} f(k_0) &= \int f(kk')(\mathrm{A}(k, k') - \mathrm{A}(k_0, k'))\, dk' \\ &\quad + \int (f(kk') - f(k_0 k'))\, \mathrm{A}(k_0, k')\, dk' \\ &= \Delta_1 f(k) + \Delta_2 f(k). \end{aligned}$$

Tout d'abord,

$$\begin{aligned} |\Delta_1 f(k)| &\leqq \int |\mathrm{A}(k, k') - \mathrm{A}(k_0, k')|\, dk' \\ &\leqq \int |\hat{\eta}_{k'}(k^{-1}\lambda) - \hat{\eta}_{k'}(k_0^{-1}\lambda)|\, \varphi(k')\, dk'. \end{aligned}$$

Mais $u \mapsto \hat{\eta}_{k'}(u\lambda)$ est continue en u, ainsi $\Delta_1 f(k)$ tend vers 0 lorsque k tend vers k_0, par application du théorème de Lebesgue.

Ensuite, puisque $k' \mapsto \mathrm{A}(k_0, k')$ est mesurable, il est possible de construire une fonction φ_0, continue, telle que :

$$\int |\mathrm{A}(k_0, k') - \varphi_0(k')|\, dk' \leqq \varepsilon/4.$$

On peut alors écrire :

$$\Delta_2 f(k) = \int (f(kk') - f(k_0 k'))\, \varphi_0(k')\, dk' + \Delta_3 f(k),$$

avec :

$$|\Delta_3 f(k)| \leqq 2\|f\|\, \varepsilon/4 \leqq \varepsilon/2.$$

Maintenant :

$$|\Delta_2 f(k)| \leqq |\Delta_3 f(k)| + \int |\varphi_0(k^{-1}k') - \varphi_0(k_0^{-1}k')|\, dk',$$

et puisque φ_0 est continue, ce dernier terme tend vers 0, lorsque k tend vers k_0, d'où la proposition.

(3.7) Rayon spectral de l'opérateur de Fourier.

On suppose que μ est irréductible sur G, c'est-à-dire que le semi-groupe fermé engendré par son support est égal à G. On a alors la :

PROPOSITION. — *Pour tout λ non nul, le rayon spectral de l'opérateur de Fourier $\mathbf{P}^\lambda$ est strictement inférieur à* 1.

Preuve. — Supposons au contraire $r(\mathbf{P}^\lambda)=1$. Puisque $\mathbf{P}^\lambda$ est quasi-compact, et quitte à considérer la mesure $\tilde{\mu} = \sum_{n \geqq 0} \mu^{*n}/2^{n+1}$ [*cf.* (1.15)], on peut supposer que 1 est valeur propre de $\mathbf{P}^\lambda$. Il existe donc une fonction continue f telle que :

$$\mathbf{P}^\lambda f(k) = \int e^{i\langle \lambda \mid k.\xi \rangle} f(kk')\, d\mu(k', \xi) = f(k). \tag{1}$$

Mais ceci implique :

$$|f(k)| \leqq \int |f(kk')|\, d\bar{\mu}(k') = \bar{\mathbf{P}}|f|(k) \leqq \bar{\mathbf{P}}^n |f|(k), \qquad \forall n.$$

Puisque $\bar{\mathbf{P}}^n|f|$ converge vers $\int_K |f|$, on a $|f(k)| \leqq \int_K |f|$, et ceci impose à $|f|$ d'être constant.

L'égalité (1) s'écrit alors :

$$\int e^{i\langle \lambda \mid k.\xi \rangle} \frac{f(kk')}{f(k)}\, d\mu(k', \xi) = 1,$$

soit pour tout k, $d\mu(k', \xi)$-*p. s.*, $e^{i\langle \lambda \mid k.\xi \rangle} f(kk')/f(k) = 1$.

Maintenant,

$$\mathrm{H} = \bigcap_k \left\{ (k', \xi);\ e^{i\langle \lambda \mid k.\xi \rangle} \frac{f(kk')}{f(k)} = 1 \right\}$$

est un semi-groupe de G, et il contient le support de μ.

Puisque μ est supposée irréductible, ceci impose $\mathrm{H}=\mathrm{G}$. Mais, si λ est non nul, le point $(1, \pi\lambda/|\lambda|^2)$ n'appartient pas à H (prendre $k=1$), il y a donc contradiction. Ceci achève la démonstration.

Remarque :

Lors de l'étude d'une chaîne semi-markovienne, l'hypothèse d'apériodicité du noyau semi-markovien et la condition S(E) ont été introduites dans le seul but d'assurer que le rayon spectral de $\mathbf{P}^\lambda$ soit strictement inférieur à 1 pour λ non nul. Elles apparaissent dans ce cadre comme propriétés de la loi μ, à savoir : l'étalement de $\bar{\mu}$ qui donne la quasi-compacité de $\mathbf{P}^\lambda$, et en particulier la condition $\mathbf{S}(\mathrm{E})$, et l'irréductibilité de μ, qui entraîne l'adaptation de la chaîne semi-markovienne.

(3.8) Opérateurs de Laplace.

On dira que μ admet un moment exponentiel si $\int e^{r|\xi|}\,d\mu(k,\xi) < +\infty$, pour tout $r \in \mathbb{R}^+$.

On définit alors l'opérateur de Laplace sur $\mathrm{C}(\mathrm{K})$, pour tout $z = u + i\lambda$ de $\mathbb{C}^d$:

$$\bar{\mathbf{P}}^{u+i\lambda} f(k) = \int e^{\langle u+i\lambda \mid k.\xi\rangle} f(kk')\,d\mu(k',\xi),$$

qui correspond à l'opérateur de Laplace de la chaîne semi-markovienne [*cf.* (1.24)].

PROPOSITION. — *Soit* μ *une probabilité sur* $\mathrm{K} \times \mathbb{R}^d$, *admettant un moment exponentiel, et dont la projection sur* K *a une densité relativement à la mesure de Haar sur* K. *Alors, pour tout* z *de* $\mathbb{C}^d$, *l'opérateur* $\bar{\mathbf{P}}^z$ *est compact.*

La preuve de la proposition est semblable à celle de la proposition (3.7), le point crucial étant que si A désigne le noyau de $\bar{\mathbf{P}}^z$ par rapport à dk', on a :

$$\lim_{k \to k_0} \int |\mathrm{A}(k,k') - \mathrm{A}(k_0,k')|\,dk' = 0.$$

Or, si φ est la densité de $\bar{\mu}$ relativement à dk :

$$\begin{aligned}
&\int |\mathrm{A}(k,k') - \mathrm{A}(k_0,k')|\,dk' \\
&\quad = \int_{\mathrm{K}} \left| \int e^{\langle z \mid k.\xi\rangle}\,d\eta_{k'}(\xi) - \int e^{\langle z \mid k_0.\xi\rangle}\,d\eta_{k'}(\xi) \right| \varphi(k')\,dk' \\
&\quad \leqq \int_{\mathrm{G}} d\mu(k',\xi)\, \left| e^{\langle z \mid k.\xi\rangle} - e^{\langle z \mid k_0.\xi\rangle} \right|.
\end{aligned}$$

Mais l'application $k \mapsto e^{\langle z \mid k.\xi\rangle}$ est continue en k, et donc la différence tend vers 0 simplement.

D'autre part, $\left| e^{\langle z \mid k.\xi\rangle} - e^{\langle z \mid k_0.\xi\rangle} \right| \leqq 2\,e^{|u|.|\xi|}$, qui est intégrable relativement à μ, ce qui permet de conclure.

(3.9) Théorème de renouvellement (cas centré).

Nous pouvons désormais décrire, en application du théorème (2.3) dans le cas centré, le comportement du noyau potentiel d'une marche aléatoire de moyenne nulle.

On sait en effet que si la projection de la loi sur K est étalée, la chaîne (x_n) sur K est fortement ergodique. D'autre part, on a vu en (3.7) comment la condition S (E) et l'apériodicité de la chaîne semi-markovienne pouvaient être remplacées par l'étalement de $\bar{\mu}$ et l'irréductibilité de μ. Ceci conduit par conséquent au :

THÉORÈME. — *Soit* $G = K \times \mathbb{R}^d$ *une extension compacte de* $\mathbb{R}^d$, *avec* $d \geqq 3$. *Soit* μ *une probabilité irréductible sur* G *telle que la projection de* μ *sur* K *soit étalée, admettant un moment d'ordre* $\max(d-2,\ 2+\varepsilon)$, *centrée. Il existe alors une matrice* σ *définie positive, telle que la suite de mesures :*

$$\|g\|_\sigma^{d-2}\, \varepsilon_g * \mathbf{U}$$

converge vaguement vers $c_d\,|\det \sigma|^{-1/2}\, dk \otimes d\xi$, *lorsque* g *tend vers l'infini.*

On a noté $\|g\|_\sigma = |\sigma^{-1}(\xi)|^{1/2}$, pour $g = (k, \xi)$ et c_d la constante $\Gamma((d-2)/2)/(2\pi)^{d/2}$.

Remarques. — (1) La matrice σ est donnée par :

$$\sigma = \int_K k\, \mathbf{E}({}^g Y_1^t\, ({}^g Y_1))^t\, k\, dk$$

où ${}^g Y_1 = Y_1 - (\mathrm{Id} - k_1)(\mathrm{Id} - \mathbf{E}(k_1))^{-1}\, \mathbf{E}(Y_1)$, de telle sorte que ${}^g M\, 1(k) = k\, \mathbf{E}[{}^g Y_1]$ soit identiquement nul.

(2) Lorsque G est le groupe des déplacements de l'espace (auquel cas une marche aléatoire est automatiquement centrée), ce résultat précise celui de Roynette [40] qui montrait, par la méthode des fonctions barrières, la majoration :

$$\forall \alpha \leqq d-2, \quad \varepsilon_g * \mathbf{U}(f) \leqq c/\|g\|^\alpha.$$

(3.10) Théorème de renouvellement. Cas décentré.

THÉORÈME. — *Soit* G *une extension compacte de* $\mathbb{R}^d$, $d \geqq 1$, *et* μ *une probabilité sur* G, *irréductible, admettant un moment d'ordre exponentiel, décentrée. On suppose que la projection de* μ *sur la base compacte* K *admet une densité relativement à la mesure de Haar sur* K.

Alors, pour tout u *de* $\partial D = \{u;\ r(\bar{\mathbf{P}}^u) = 1\}$, *il existe, à une constante multiplicative près :*

— *une unique fonction* φ_u, *continue, telle que* $e^{u \cdot \xi}\varphi_u(k)$ *soit* μ-*harmonique;*

— *une unique fonction* ψ_u, *continue, telle que* $e^{-u \cdot \xi}\psi_u(k)$ *soit* $\check{\mu}$-*harmonique.*

Ces fonctions sont strictement positives sur K.

De plus, si l'on note

$$m_u = \int_G k\,.\,\xi'\,\varphi_u(kk')\,e^{\langle u\,|\,k\,.\,\xi'\rangle}\,\psi_u(k)\,dk\,d\mu(k',\,\xi')$$

l'application de ∂D^* *dans la sphère unité de* $\mathbb{R}^d$ *qui à* u *associe* $m_u/|m_u|$ *est un homéomorphisme.*

Le comportement du noyau potentiel est alors décrit de la manière suivante :

Pour toute fonction F *continue à support compact sur* G,

$$\exp(tm_u\,.\,u)\,(2\pi t)^{(d-1)/2}\,\mathrm{U\,F}(k,\,-tm_u)$$

converge uniformément en u *de* ∂D, *lorsque* t *tend vers* $+\infty$ *vers :*

$$c(u)\,\varphi_u(k)\int e^{-u\,.\,\xi}\,\mathrm{F}(k',\,\xi')\,\psi_u(k')\,dk'\,d\xi'$$

où $c(u)$ *est une constante reliée aux moments d'ordre* 1 *et* 2 *de la chaîne relativisée.*

Ce théorème se déduit simplement du théorème (2.9) et du corollaire (2.10), qui précise le cas où pour tout z de $\mathbb{C}^d$, l'opérateur $\bar{\mathbf{P}}^z$ est compact. Il faut simplement vérifier que l'adjoint de $\bar{\mathbf{P}}^u$ dans le dual de C(K) est quasi-compact sur C(K). Ceci découle du fait suivant : l'adjoint de $\bar{\mathbf{P}}^u$ peut être construit à partir de la probabilité $\check{\mu}$, image de μ par le passage à l'inverse. En effet, on peut écrire, pour toutes f et g continues sur K :

$$\begin{aligned}\int f(k)\,dk &= \int f(k)\int e^{\langle u\,|\,k\,.\,\xi\rangle}\,g(kk')\,d\mu(k',\,\xi)\,dk\\ &= \int g(k)\int e^{-\langle u\,|\,k\,.\,\xi\rangle} f(kk')\,d\check{\mu}(k',\,\xi)\,dk\\ &= \int g(k)\,\check{\mathbf{P}}^{-u} f(k)\,dk.\end{aligned}$$

On voit ci-dessus que $\check{\mathbf{P}}^{-u}$ est un opérateur de Laplace associé à la mesure $\check{\mu}$. Or μ et $\check{\mu}$ ont les mêmes propriétés, et en particulier, $\check{\mathbf{P}}^{-u}$ est quasi-compact sur C(K).

(3.11) Frontière de Martin.

Le théorème précédent permet de décrire le comportement du noyau potentiel, lorsque ξ tend vers l'infini et que $\xi/|\xi|$ tend vers $-s$, où s est un vecteur de la sphère unité. Nous obtenons l'équivalent suivant :

$$\mathrm{UF}(k, \xi) \simeq c_s |\xi|^{(1-d)/2} \exp(-\langle l(\xi/|\xi|) | \xi \rangle) \varphi_s(k) \times \int \exp(-l(s).\xi') \mathrm{F}(k', \xi') \psi_s(k') \, dk' \, d\xi',$$

où l est l'homéomorphisme inverse de

$$\partial \mathrm{D} \mapsto \mathrm{S}^{d-1}$$
$$u \mapsto \frac{m_u}{|m_u|}$$

De cet équivalent découle le :

COROLLAIRE. — *Soit* μ *une probabilité irréductible sur* $\mathrm{G} = \mathrm{K} \times \mathbb{R}^d$, *dont la projection sur* K *est étalée.*

1^{er} *cas : si la moyenne de* μ *est nulle et si* μ *admet un moment d'ordre* $\max(d-2, 2+\varepsilon)$, *la frontière de Martin est triviale.*

2^e *cas : si la moyenne de* μ *est non nulle, si* μ *admet un moment exponentiel, et si* $\bar{\mu}$, *ou une de ses puissances, admet une densité relativement à la mesure de Haar sur* K, *alors les fonctions* μ*-harmoniques positives extrémales s'écrivent comme produit d'une fonction* φ_u *continue positive sur* K, *et d'une exponentielle* $e^{u \cdot \xi}$, *où* u *varie dans un ensemble homéomorphe à la sphère unité de* $\mathbb{R}^d$.

Ceci généralise dans le cadre des extensions compactes de $\mathbb{R}^d$ les résultats de Conze-Guivarc'h [13], qui étudient la frontière de Martin des lois μ ayant une densité à support compact relativement à la mesure de Haar sur G.

RÉFÉRENCES

[1] R. AZENCOTT et P. CARTIER, Martin Boundary of Random Walks on Locally Compact Groups, *Proc. 6th Berkeley Symposium on Math. Stat. and Proba.*, vol. **3**, 1970, p. 87-129.

[2] M. BABILLOT, Le noyau potentiel des chaînes semi-markoviennes... *Thèse de troisième cycle*, Université de Paris-VII, 1985.

[3] BALDI, P. BOUGEROL et P. CREPEL, Théorème central limite pour le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **283**, série I, 1976, p. 53-56.

[4] B. BEAUZAMY, *Introduction to Banach Spaces and their Geometry*, Second edition, North-Holland, vol. **66**, 1985.

[5] M. BERGER, P. GAUDUCHON et P. MAZET, Le spectre d'une variété riemannienne, *Lectures Notes*, n° **194**, Springer-Verlag.

[6] BERGH-LOFSTROM, *Interpolation Spaces: An Introduction*, Springer-Verlag, 1976.

[7] P. BOUGEROL, Théorème central limite local sur certains groupes de Lie, *Ann. E.N.S.*, vol. **141**, 1981, p. 403-432.

[8] P. BOUGEROL, Exemples de théorèmes locaux sur les groupes de Lie résolubles, *Ann. I.H.P.*, vol. **29**, n° 4, 1983, p. 369-391.

[9] BREIMAN, *Probability*, Addison-Wesley, 1968.

[10] A. BRUNEL et D. REVUZ, Quelques applications probabilistes de la quasi-compacité, *Annales I.H.P.*, vol. **10**, 1974, p. 301-307.

[11] CARLSSON et WAINGER, On the Multi-Dimensional Renewal Theorem, *Journal of Math. Analysis and Applications*, vol. **100**, 1984, p. 316-322.

[12] G. CHOQUET et J. DENY, Sur l'équation de convolution $\mu * \sigma = \mu$, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **250**, 1960, p. 799-801.

[13] J. P. CONZE et Y. GUIVARC'H, Propriété de droite fixe et fonctions harmoniques positives, *Lectures Notes*, n° **404**, 1974, p. 126-132, Springer-Verlag.

[14] DONEY, An Analogue of the Renewal Theorem in Higher Dimensions, *Proc. London Math. Soc.*, vol. **3**, n° 16, 1966, p. 669-684.

[15] N. DUNFORD et J. T. SCHWARTZ, *Linear Operators*, Interscience, New York, 1953.

[16] L. ELIE, Fonctions Harmoniques positives sur le Groupe affine, *Lectures Notes*, n° **706**, Springer-Verlag, 1978.

[17] L. ELIE, Comportement asymptotique du noyau potentiel sur les Groupes de Lie, *Ann. E.N.S.*, 4e série, vol. **15**, 1982, p. 257-364.

[18] L. ELIE et A. RAUGI, Fonctions Harmoniques sur certains groupes résolubles, Note *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **280**, série A, 1975, p. 377-379.

[19] R. FORTET, Condition de Doeblin et quasi-compacité, *Ann. I.H.P.*, vol. **14**, 1978, p. 379-390.

[20] Y. GUIVARC'H, Mouvement brownien sur les revêtements d'une variété compacte, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **292**, série I, 1981, p. 851-853.

[21] Y. GUIVARC'H, Marches aléatoires à pas markovien, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **289**, série A, 1978, p. 211-213.

[22] Y. GUIVARC'H, Application d'un théorème limite local à la transience et à la récurrence des marches de Markov, *Lecture Notes*, n° **1096**, p. 301-332, Springer-Verlag, 1984.

[23] Y. GUIVARC'H, M. KEANE et B. ROYNETTE, Marches aléatoires sur les Groupes de Lie, *Lectures Notes*, n° **624**, Springer-Verlag, 1977.

[24] H. HENNION, Transience de certaines chaînes semi-markoviennes, *Ann. I.H.P.*, vol. **18**, n° 3, 1982, p. 277-291.

[25] G. HOCHSCHILD, *Structure of Lie Groups*, San Francisco, Holden Day, 1965.

[26] N. IKEDA et S. WATANABE, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland, 1981.

[27] ITO et MCKEAN Jr, *Diffusion Processes and Their Sample Paths*, Springer-Verlag, 1965.

[28] J. JACOD, Théorème de classification et renouvellement pour des chaînes semi-markoviennes, *Ann. I.H.P.*, vol. **7**, n° 2, 1971 et vol. **10**, n° 2, 1974.

[29] KATO, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Second edition, Springer-Verlag, 1980.

[30] Y. KATZNELSON, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Second edition, Dover, 1976.

[31] H. KESTEN, Random Differences and Renewal Theory for Products of Random Matrices, *Acta Math.*, vol. **131**, 1973, p. 207-248.

[32] KRAMLI et SZASZ, Random Walks with Internal Degrees of Freedom, *Z. Wahr*, vol. **63**, 1983, p. 83-95.

[33] P. MALLIAVIN, *Diffusions et géométrie différentielle globale*, Centro Inter. Math. Estivo Varenna, 1975.

[34] A. DEBIARD, B. GAVEAU et E. MAZET, Théorèmes de comparaison en Géométrie riemannienne, *Publications R.I.M.S.*, *Kyoto Univ.*, vol. **12**, 1976, p. 391-425.

[35] NAGAEV, Some Limit Theorems for Stationary Markov Chains, *Th. Proba. Appl.*, vol. **2**, 1957, p. 378-406.

[36] P. NEY et F. SPITZER, The Martin Boundary for Random Walks, *T.A.M.S.*, vol. **121**, 1966.

[37] NORMAN, *Markov Processes and Learning Models*, Academic Press, 1972.

[38] D. REVUZ, *Markov Chains*, North-Holland, second edition, 1984.

[39] B. ROYNETTE, Cours d'été de probabilités, Saint-Flour, *Lectures Notes*, n° **678**, Springer-Verlag, 1977.

[40] B. ROYNETTE, Marches aléatoires sur le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$, *Z. Wahr.*, vol. **31**, 1974, p. 25-34.

[41] H. H. SCHAEFFER, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer-Verlag, 1975.

[42] L. SCHWARTZ, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[43] F. SPITZER, *Principles of Random Walks*, Van Nostrand, Princeton, 1964.

[44] STAM, Renewal Theory in r Dimensions, *Compositio Math.*, vol. **21**, n° 4, 1969, p. 383-399.

[45] E. STEIN, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1970.

[46] TUTUBALIN, The Central Limit Theorem for Random Motions of an Euclidean Space, *Select. Trans. in Math. and Proba.*, vol. **12**, 1973, p. 47-57.

[47] WATSON, *A Treatise on Bessel Functions*, Cambridge University Press, second edition, 1962.

[48] A. WEIL, *Integration dans les groupes topologiques*, Hermann, Paris, 1940.

(*Manuscrit reçu le* 22 *octobre* 1987.)