ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

PHILIPPE BOUGEROL

Comparaison des exposants de Lyapounov des processus markoviens multiplicatifs

Annales de l'I. H. P., section B, tome 24, nº 4 (1988), p. 439-489

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1988__24_4_439_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 24, n° 4, 1988, p. 439-489. *Probabilités et Statistiques*

Comparaison des exposants de Lyapounov des processus markoviens multiplicatifs

par

Philippe BOUGEROL

Université de Nancy-I, Département de Mathématiques,
B. P. n° 239, 54506 Vandœuvre-les-Nancy

RÉSUMÉ. — Nous donnons un critère assurant que les exposants de Lyapounov de certains produits de matrices stationnaires définies au-dessus d'un processus de Markov, sont distincts. Ces matrices interviennent, par exemple, dans l'étude des équations différentielles stochastiques linéaires à coefficients markoviens et dans l'analyse des flots de difféomorphismes aléatoires d'une variété.

Mots clés : Exposants de Lyapounov, produits de matrices aléatoires, systèmes linéaires, flots stochastiques.

ABSTRACT. — We give a criterion ensuring that the Lyapunov exponents of some products of stationary matrices are distincts. These matrices occur, for instance, in the study of linear stochastic differential equations with markovian parameter and in the study of stochastic flows of diffeomorphisms.

Classification A.M.S. : 60 F 15, 60 J 57, 60 K 15.

1. INTRODUCTION

Considérons un processus de Markov stationnaire x_t, $t \in \mathrm{T}$, à temps discret $(\mathrm{T}=\mathbb{N})$ ou à temps continu $(\mathrm{T}=\mathbb{R}^+)$ sur un espace topologique E. Notre objet est l'étude des processus M_t, $t \in \mathrm{T}$, sur l'ensemble $\mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$ des matrices inversibles d'ordre d tels que (x_t, M_t) est un processus de Markov invariant sous l'action à droite de $\mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$. De façon précise, posons

DÉFINITION 1.1. — *Un processus de Markov* $\{(x_t, \mathrm{M}_t),\ t \in \mathrm{T}\}$ *sur* $\mathrm{E} \times \mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$, *de semi-groupe de transition* $\{\mathrm{R}_t, t \in \mathrm{T}\}$, *est un* processus markovien multiplicatif *si pour tout borélien* A (*resp.* B) *de* E (*resp.* $\mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$],

$$\mathrm{R}_t((x, \mathrm{M}); \mathrm{A} \times \mathrm{BM}) = \mathrm{R}_t((x, \mathrm{Id}); \mathrm{A} \times \mathrm{B})$$
$$\forall t \in \mathrm{T}, \quad x \in \mathrm{E}, \quad \mathrm{M} \in \mathrm{Gl}(d, \mathbb{R}),$$

où $\mathrm{BM} = \{\mathrm{NM} \in \mathrm{Gl}(d, \mathbb{R});\ \mathrm{N} \in \mathrm{B}\}$ *et* Id *est la matrice identité d'ordre d.*

Cette définition est inspirée de Iscoe, Ney, Nummelin [29]. Nous supposerons que E est un borélien d'un espace métrique séparable complet et, lorsque $\mathrm{T}=\mathbb{R}^+$, que le semi-groupe R_t est mesurable en t. Donnons deux exemples typiques de tels processus.

Considérons d'abord une équation différentielle stochastique linéaire sur $\mathbb{R}^d$,

$$dz_t = \mathrm{A}_0(x_t)\, z_t\, dt + \sum_{i=1}^{m} \mathrm{A}_i(x_t)\, z_t \circ d\mathrm{B}_t^i, \qquad z_t \in \mathbb{R}^d, \tag{1.1}$$

dont les coefficients x_t sont solutions d'une équation différentielle stochastique sur une variété V

$$dx_t = \mathrm{X}_0(x_t)\, dt + \sum_{i=1}^{m} \mathrm{X}_i(x_t) \circ d\mathrm{B}_t^i, \qquad x_t \in \mathrm{V}. \tag{1.2}$$

(pour chaque $i=0, 1, \ldots, m$, X_i est un champ de vecteur sur V et A_i une application de V dans l'ensemble de toutes les matrices carrées d'ordre d). Sous des hypothèses très générales, on peut écrire $z_t = \mathrm{M}_t z_0$, où $\{(x_t, \mathrm{M}_t),\ t \in \mathbb{R}^+\}$ est un processus markovien multiplicatif sur $\mathrm{V} \times \mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$.

Considérons ensuite un flot $\{f_t, t \in \mathrm{T}\}$ de difféomorphismes aléatoires d'une variété V. Par définition, $f_{t+s} \circ f_s^{-1}$ est indépendant de $\{f_r, r \leqq s\}$ et de même loi que f_t. Si Γ est une trivialisation mesurable du fibré tangent TV (*cf.* définition 6.3.3),

$$x_t = f_t(x), \qquad \mathrm{M}_t = \Gamma(f_t(x))\, \mathrm{D}f_t(x)\, \Gamma(x)^{-1}$$

est un processus markovien multiplicatif sur $\mathrm{V} \times \mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$. On trouvera d'autres exemples dans [9].

Nous supposerons que le processus $\{x_t, t \in \mathrm{T}\}$ sur E est stationnaire et ergodique. Sous une hypothèse d'intégrabilité, il existe alors d réels

$\gamma_1 \geqq \gamma_2 \geqq \ldots \geqq \gamma_d$, appelés *exposants de Lyapounov* tels que $\mathbb{P}_\pi$-presque sûrement, pour tout $p=1, 2, \ldots, d$,

$$\lim_{t \to +\infty} t^{-1} \operatorname{Log} \| \Lambda^p \mathrm{M}_t \| = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i.$$

Le but de cet article est de montrer un critère assurant que deux exposants d'indice donné sont distincts. Il étend les travaux de Baxendale [5], Caverhill [11], Chassaing [14], Guivarc'h [21], Guivarc'h, Raugi [22], Ledrappier [37], Royer [43] et Virtser [46]. Nous nous sommes particulièrement inspirés de Guivarc'h [21].

La motivation principale de ce travail est qu'il nous permet de montrer dans [9] que si $\{(x_t, \mathrm{M}_t),\ t \in \mathrm{T}; \pi\}$ est un système multiplicatif fortement irréductible (*cf.* définition 1.5) et si le processus x_t vérifie la condition de Doeblin, alors pour tout vecteur non nul u de $\mathbb{R}^d$ $1/\sqrt{t}(\operatorname{Log} \| \mathrm{M}_t u \| - t\gamma_1)$ converge vers une loi gaussienne centrée (non dégénérée si $\gamma_1 \neq \gamma_d$).

Nous obtenons une condition particulièrement simple pour que γ_1 soit différent de γ_d. Appliquant cette condition à l'équation (1.1) dans le cas où les matrices $\mathrm{A}_i(x)$ sont toutes de trace nulle, nous verrons que, généralement, les solutions z_t tendent p. s. vers l'infini exponentiellement vite.

Supposons que $d=2m$ et que les matrices M_t sont symplectiques. Appliquant notre critère aux exposants γ_m et γ_{m+1}, nous obtiendrons une condition pour que le système n'a pas d'exposant de Lyapounov égal à 0. Ceci est un ingrédient fondamental pour montrer que le spectre d'une équation de Schrödinger à coefficients markoviens dans une bande a un spectre purement ponctuel (*cf.* Bougerol, Lacroix [7], paragraphe B.IV, Delyon, Levy, Souillard [16] et Deylon, Simon, Souillard [17]). Nous obtenons aussi un critère assurant qu'un flot stochastique formé de transformations canoniques d'une variété symplectique est hyperbolique.

Afin d'énoncer de façon précise nos deux résultats principaux, introduisons quelques définitions. Pour tout $x \in \mathrm{E}$ notons $\mathbb{P}_x$ la loi du processus $\{(x_t, \mathrm{M}_t),\ t \in \mathrm{T}\}$ vérifiant $(x_0, \mathrm{M}_0) = (x, \mathrm{Id})$ et, si π est une probabilité sur E, $\mathbb{P}_\pi = \int_{\mathrm{E}} \mathbb{P}_x \, d\pi(x)$.

DÉFINITION 1.2. — *On appelle système multiplicatif sur* $\mathrm{E} \times \mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$ *la donnée d'un processus de Markov multiplicatif* $\{(x_t, \mathrm{M}_t),\ t \in \mathrm{T}\}$ *et d'une probabilité invariante ergodique* π *du processus* $\{x_t, t \in \mathrm{T}\}$ *telle que* $\operatorname{Sup}_{t \leqq 1} \mathbb{E}_\pi (\operatorname{Log}^+ \| \mathrm{M}_t \| + \operatorname{Log}^+ \| \mathrm{M}_t^{-1} \|)$ *est fini.*

Rappellons que la résolvante d'ordre 1 d'un processus de Markov de semi-groupe de transition $\{\mathrm{P}_t, t \in \mathrm{T}\}$ est le noyau $\int_0^\infty e^{-t} \mathrm{P}_t \, dt$ lorsque

$T=\mathbb{R}^+$ et le noyau $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n-1} P_n$ lorsque $T=\mathbb{N}$. Si ce processus est défini sur un espace topologique, on dit qu'il est *fellerien* si pour toute fonction continue bornée f, $P_t f$ est continue. Nous supposerons que le système considéré soit est non singulier, soit vérifie l'hypothèse (H), au sens des définitions suivantes.

DÉFINITION 1.3. — *Nous dirons que le système multiplicatif* $\{(x_t, M_t), t\in T; \pi\}$ *sur* $E\times Gl(d, \mathbb{R})$, *est* non singulier *si la résolvante d'ordre* 1 *du processus* $\{x_t, t\in T\}$, *notée* K, *est telle que*

$$\pi\{x\in E; K(x,.) \text{ n'est pas étrangère à } \pi\}\neq 0.$$

On dit que ce système vérifie l'hypothèse (H) *si*

(H_1) E *est un espace métrique complet.*

(H_2) *Le processus* (x_t, M_t) *est fellerien.*

(H_3) *Les fonctions boréliennes bornées* h *sur* E *vérifiant* $Kh=h$ *sont continues et* $\mathrm{Supp}(\pi)=E$.

Remarquons que ces hypothèses portent essentiellement sur le processus x_t. Un système satisfaisant à (H) est non singulier (*cf.* proposition 2.6). Si (x_t, M_t) est fellerien, $\mathrm{Supp}(\pi)\times Gl(d, \mathbb{R})$ est invariant par ce processus et il n'y a donc pas de perte de généralité à supposer que $\mathrm{Supp}(\pi)=E$ dans (H_3).

NOTATION 1.4. — *Soit* U *la résolvante d'ordre* 1 *d'un processus multiplicatif sur* $E\times Gl(d, \mathbb{R})$. *Pour tout* $x\in E$, *on note* D_x *le support de la probabilité* $U((x, Id), .)$ *et* S_x *le plus petit fermé de* $Gl(d, \mathbb{R})$ *tel que* $U((x, Id); E\times S_x)=1$. *Pour tous* x, y *de* E *on pose*

$$S_x(y)=\{M\in Gl(d, \mathbb{R}); (y, M)\in D_x\}.$$

DÉFINITION 1.5. — *On dit qu'un sous ensemble* S *de* $Gl(d, \mathbb{R})$ *est*

p-contractant *si il existe une suite* $\{A_n, n\in\mathbb{N}\}$ *de* S *telle que* $A_n/\|A_n\|$ *converge vers une matrice de rang inférieur ou égal à* p;

fortement irréductible *si il n'existe pas de réunion finie* W *de sous-espaces vectoriels propres de* $\mathbb{R}^d$ *telle que* $MW=W$ *pour tout* M *de* S.

Un système multiplicatif $\{(x_t, M_t), t\in T; \pi\}$ *sur* $E\times Gl(d, \mathbb{R})$ *est dit*

p-contractant *si* $\pi(x\in E;$ S_x est p-contractant) *est non nul*;

fortement irréductible *si, pour tout* $r<d$, *il n'existe pas de famille finie* $\{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ *d'applications mesurables de* E *dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension* r *de* $\mathbb{R}^d$, *telle que si* $W(x)=\bigcup_{i=1,\ldots,k} V_i(x)$, $M_t W(x_0)=W(x_t)$, $\mathbb{P}_\pi$-p. s., *pour tout* $t\in T$.

On prendra garde au fait que la définition d'un sous ensemble p-contractant diffère légèrement de celle de [7] (un sous-ensemble est p-contractant au sens de la définition IV.1.1 de [7] si il contient une suite A_n telle que $A_n/\|A_n\|$ converge vers une matrice de rang exactement égal à p).

Énonçons alors nos deux résultats principaux. Ils donnent des critères pour que γ_1 soit différent d'un autre exposant. En appliquant ces critères aux matrices $\Lambda^p M_t$, on en déduit une condition pour que γ_p soit différent d'un exposant d'indice plus élevé.

THÉORÈME 1.6. — *Considérons un système multiplicatif non singulier fortement irréductible sur* $E \times Gl(d, \mathbb{R})$. *Alors les exposants de Lyapounov* γ_1 *et* γ_{p+1} *sont différents si et seulement si le système est p-contractant.*

Cette condition peut être difficile à vérifier directement. C'est pourquoi nous la précisons sous l'hypothèse (H) de nature topologique.

THÉORÈME 1.7. — *Soit* $\{(x_t, M_t), t \in T; \pi\}$ *un système multiplicatif sur* $E \times Gl(d, \mathbb{R})$ *vérifiant l'hypothèse* (H). *Si il existe un élément x de* E *tel que* $S_x(x)$ *est p-contractant et opère de façon fortement irréductible sur* $\mathbb{R}^d$, *alors les exposants de Lyapounov* γ_1 *et* γ_{p+1} *sont différents. Réciproquement, si le système est fortement irréductible et si* $\gamma_1 \neq \gamma_{p+1}$, *alors* $S_x(x)$ *opère de façon fortement irréductible sur* $\mathbb{R}^d$ *et est p-contractant pour π-presque tout x.*

L'un des intérêts de ce deuxième théorème est que nous verrons que sous l'hypothèse (H), les ensembles $S_x(x)$ sont des semi-groupes fermés. Or il est souvent facile de vérifier si un semi-groupe est p-contractant ou non (en utilisant par exemple les travaux récents de Guivarc'h, Raugi [23] et de Goldsheid, Margulis [20]). Une condition élémentaire suffisante pour qu'il soit 1-contractant est qu'il contienne une matrice ayant une seule valeur propre de plus grand module, cette valeur propre étant simple.

Il est remarquable que ces conditions ne portent que sur les valeurs prises par les matrices M_t et non sur leur loi, puisqu'elles ne font intervenir que le support des probabilités $U((x, Id), .)$ associées à la résolvante. On voit que plus ces supports sont grands, plus grandes sont les chances que les exposants soient distincts. En particulier, un système multiplicatif étant donné, on peut toujours en trouver une perturbation arbitrairement petite dont tous les exposants sont différents. Notons enfin que le second théorème généralise les résultats connus pour les produits de matrices indépendantes de Guivarc'h, Raugi [22].

Décrivons maintenant le plan de l'article.

Les paragraphes 2, 3 et 4 sont consacrés à la démonstration du théorème 1.6. Dans le paragraphe 2, après quelques généralités, nous montrons qu'il suffit de l'établir pour une classe très particulière de processus multiplicatifs felleriens à base compacte. Nous présentons au paragraphe 3 un critère très général, inspiré de Guivarc'h [21], assurant que deux exposants d'indice donné sont distincts. Tel quel, ce critère est inapplicable et il ne constitue qu'une étape vers le théorème 1.6. Ce théorème est prouvé au paragraphe 4. Nous y donnons aussi une condition simple pour que les exposants ne soient pas tous égaux (corollaire 4.9).

Dans le paragraphe 5, nous prouvons le théorème 1.7. Nous montrons aussi une condition pour que tous les exposants soient distincts et examinons le cas des matrices symplectiques. Le paragraphe 6 précise ces résultats sur un certain nombre d'exemples.

Au paragraphe 6.1 nous examinons le cas où, pour une application $M: E \to Gl(d, \mathbb{R})$,

$$M_n = M(x_n) M(x_{n-1}) \dots M(x_1)$$

et où le noyau de transition de la chaîne x_n admet une densité strictement positive par rapport à la probabilité invariante π. Le critère est alors particulièrement simple et généralise les résultats de Guivarc'h [21] et Virtser [46].

Au paragraphe 6.2, nous étudions le cas des équations différentielles stochastiques (1.1)-(1.2). L'hypothèse (H) est alors généralement vérifiée. Nous donnons des conditions d'hypoellipticité assurant d'une part que le système considéré est fortement irréductible, d'autre part que tous les exposants sont différents. Nous examinons en détail l'exemple très important où les mouvements browniens intervenant dans l'équation définissant M_t sont indépendants du processus x_t. Ce cas est celui qui est en général considéré pour modéliser un système mécanique soumis à des perturbations aléatoires (*cf.* Arnold *et al.* [2], [3], [4]). Dans ce cadre nos critères deviennent très simples et sont aisément vérifiables.

Au paragraphe 6.3, nous commençons par adapter le théorème 1.7 à l'étude des flots linéaires arbitraires sur les fibrés vectoriels. Ce cadre s'introduit de façon tout à fait naturelle dans l'étude des processus multiplicatifs. On peut même dire que les résultats antérieurs ne se comprennent bien que si on considère $E \times \mathbb{R}^d$ comme un fibré vectoriel et M_t comme une application de la fibre au dessus de x_0 dans la fibre au-dessus de x_t. Seul le souçi de ne pas ennuyer tout de suite le lecteur avec la terminologie des fibrés nous à fait choisir de travailler au départ avec des processus sur $E \times Gl(d, \mathbb{R})$. Enfin, nous étudions le flot dérivé d'un flot stochastique de difféomorphismes d'une variété. Utilisant l'article récent de Arnold, San Martin [4], nous montrons qu'on peut décrire explicitement au moins une partie de grande taille des sous-ensembles $S_x(x)$. Nous examinons aussi le cas important des flots de transformations canoniques sur une variété symplectique. Nous terminons par l'exemple explicite du flot gradient brownien sur une hypersurface compacte V de $\mathbb{R}^{d+1}$. Son importance vient du fait que le mouvement d'un point de V sous ce flot est le mouvement brownien canonique sur V, muni de la métrique induite. Nous montrons que

PROPOSITION 1.8. — *Tous les exposants de Lyapounov du flot gradient brownien sur une hypersurface compacte* V *sont distincts, sauf si* V *est une sphère* (*auquel cas ils sont tous égaux*).

Les résultats de cet article ont été présentés au congrès mondial de la société Bernoulli à Tachkent en septembre 1986 (*cf.* [8]).

2. RÉDUCTION AU CAS DES PROCESSUS FELLERIENS A BASE COMPACTE

Après quelques généralités, nous montrons dans cette section qu'il suffit de montrer le théorème 1.6 pour une classe très particulière de processus multiplicatifs.

Précisons d'abord quelques notations. Nous noterons $M(d, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à coefficients réels d'ordre d et $Gl(d, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles. La matrice identité est notée Id. Si $M \in M(d, \mathbb{R})$ et $u \in \mathbb{R}^d$, Mu désigne l'élément de $\mathbb{R}^d$ égal au produit de la matrice M par le vecteur colonne u, et, si V est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$, $MV = \{ Mu;\ u \in V \}$. Si $p \in \{1, \ldots, d\}$, $\Lambda^p M$ désigne l'opérateur (ou une matrice le représentant dans une base fixée) sur $\Lambda^p \mathbb{R}^d$ défini par, si $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sont dans $\mathbb{R}^d$,

$$(\Lambda^p M)(u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p) = M u_1 \wedge M u_2 \wedge \ldots \wedge M u_p.$$

Nous munissons $\Lambda^p \mathbb{R}^d$ de la norme euclidienne associée au produit scalaire vérifiant

$$\langle u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p, v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_p \rangle = \operatorname{Det} \{ \langle u_i, v_j \rangle \}_{1 \leq i, j \leq p},$$

et l'ensemble des matrices $\Lambda^p M$ de la norme d'opérateurs associée.

Montrons d'abord l'existence des exposants de Lyapounov associés à un système multiplicatif. Considérons un processus markovien multiplicatif $\{ (x_t, M_t),\ t \in T \}$ sur $E \times Gl(d, \mathbb{R})$ défini sur un espace Ω. Notons $\mathscr{F}$ la tribu engendrée par les variables aléatoires (x_t, M_t), $t \in T$. Rappelons que nous supposons que E est un borélien d'un espace métrique séparable complet et, lorsque $T = \mathbb{R}^+$, que ce processus est mesurable. Quitte à travailler avec $\Omega = (E \times Gl(d, \mathbb{R}))^T$, nous pouvons supposer qu'il existe une famille $\{ \theta_t, t \in T \}$ d'applications mesurables de Ω dans Ω telles que, pour tout (t, s) de T^2,

$$\theta_s \circ \theta_t = \theta_{s+t}, \qquad x_s \circ \theta_t = x_{s+t} \qquad \text{et} \qquad M_s \circ \theta_t = M_{s+t} M_t^{-1}. \tag{2.1}$$

On prendra garde au fait que θ_t n'est pas le shift usuel des processus de Markov. Nous noterons $\mathscr{F}_t$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $\{ (x_s, M_s),\ s \leq t \}$, $\mathbb{P}_{(x, M)}$ la loi du processus $\{ (x_t, M_t), t \in T \}$ lorsque $(x_0, M_0) = (x, M)$ et $\mathbb{P}_x$ cette loi lorsque $M = \text{Id}$.

LEMME 2.1. — *Soit* Z *une variable aléatoire bornée sur* Ω. *Pour tout* $(x, M) \in E \times Gl(d, \mathbb{R})$ *et* $t \in T$,

$$\mathbb{E}_{(x, M)}(Z \circ \theta_t / \mathscr{F}_t) = \mathbb{E}_{x_t}(Z).$$

Démonstration. — Pour tout borélien U (resp. V) de E [resp. $\mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$] et tout $s \in \mathrm{T}$ nous avons, en utilisant la définition d'un processus markovien multiplicatif (*cf.* définition 1.1),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{(x,\mathrm{M})}((x_s, \mathrm{M}_s) \circ \theta_t \in \mathrm{U} \times \mathrm{V}/\mathscr{F}_t) &= \mathbb{E}_{(x,\mathrm{M})}(x_{s+t} \in \mathrm{U}, \mathrm{M}_{s+t}\mathrm{M}_t^{-1} \in \mathrm{V}/\mathscr{F}_t)\\ &= \mathbb{E}_{(x,\mathrm{M})}(x_{s+t} \in \mathrm{U}, \mathrm{M}_{s+t} \in \mathrm{VM}_t/\mathscr{F}_t) = \mathrm{R}_s((x_t, \mathrm{M}_t); \mathrm{U} \times \mathrm{VM}_t)\\ &= \mathrm{R}_s((x_t, \mathrm{Id}); \mathrm{U} \times \mathrm{V}) = \mathbb{P}_{x_t}((x_s, \mathrm{M}_s) \in \mathrm{U} \times \mathrm{V}).\end{aligned}$$

Il en résulte que pour toute fonction borélienne bornée f sur $\mathrm{E} \times \mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$,

$$\mathbb{E}_{(x,\mathrm{M})}(f(x_s, \mathrm{M}_s) \circ \theta_t/\mathscr{F}_t) = \mathbb{E}_{x_t}(f(x_s, \mathrm{M}_s)).$$

Si s, t, $k \in \mathrm{T}$, nous avons $x_{s+k} \circ \theta_t = x_s \circ \theta_{t+k}$ et $\mathrm{M}_{s+k} \circ \theta_t = (\mathrm{M}_s \circ \theta_{t+k})$ ($\mathrm{M}_k \circ \theta_t$). Ceci implique, d'après la relation précédente, que si $\mathrm{A} = \mathrm{M}_k \circ \theta_t$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{(x,\mathrm{M})}(f(x_{s+k}, \mathrm{M}_{s+k}) \circ \theta_t/\mathscr{F}_{t+k}) &= \mathbb{E}_{(x,\mathrm{M})}(f(x_s, \mathrm{M}_s\mathrm{A}) \circ \theta_{t+k}/\mathscr{F}_{t+k})\\ &= \mathbb{E}_{x_{t+k}}(f(x_s, \mathrm{M}_s\mathrm{A})) = \mathbb{E}_{(x_{t+k}, \mathrm{A})}(f(x_s, \mathrm{M}_s)) = \mathbb{E}_{(x_k, \mathrm{M}_k)}(f(x_s, \mathrm{M}_s)) \circ \theta_t.\end{aligned}$$

On en déduit par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ (en conditionnant par rapport à $\mathscr{F}_{t_{p-1}}$ et en utilisant la propriété de Markov) que si $t_p \geqq t_{p-1} \geqq \ldots \geqq t_1 \geqq t$, et si $f_1, f_2, \ldots, f_p$ sont des fonctions boréliennes bornées sur $\mathrm{E} \times \mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$, alors

$$\mathbb{E}_{(x,\mathrm{M})}\left(\prod_{i=1}^{p} f_i(x_{t_i}, \mathrm{M}_{t_i})/\mathscr{F}_t\right) = \mathbb{E}_{x_t}\left(\prod_{i=1}^{p} f_i(x_{t_i}, \mathrm{M}_{t_i})\right),$$

ce qui implique le lemme.

PROPOSITION 2.2. — *Soit* $\{(x_t, \mathrm{M}_t),\ t \in \mathrm{T}; \pi\}$ *un système multiplicatif sur* $\mathrm{E} \times \mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$. *Il existe* d *réels* $\gamma_1 \geqq \gamma_2 \geqq \ldots \geqq \gamma_d$ *tels que, pour tout* $p = 1, 2, \ldots, d$, *lorsque* $n \in \mathbb{N}$ *tend vers l'infini,*

$$\lim_{n \to +\infty} n^{-1} \operatorname{Log} \| \Lambda^p \mathrm{M}_n \| = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i.$$

$\mathbb{P}_\pi$-*presque sûrement et dans* L^1, *pour tout* $p = 1, 2, \ldots, d$. *Si de plus* $\{\mathrm{M}_t, t \in \mathrm{T}\}$ *est un processus séparable et*

$$\mathbb{E}_\pi(\sup_{t \leqq 1} \operatorname{Log}^+ \| \mathrm{M}_t \| + \operatorname{Log}^+ \| \mathrm{M}_t^{-1} \|)$$

est fini, lorsque $t \in \mathrm{T}$ *tend vers l'infini,*

$$\lim_{t \to +\infty} t^{-1} \operatorname{Log} \| \Lambda^p \mathrm{M}_t \| = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i.$$

Démonstration. — Le lemme précédent entraîne immédiatement que les transformations θ_t conservent $\mathbb{P}_\pi = \int \mathbb{P}_x \, d\pi(x)$. De plus le système $(\Omega, \mathscr{F}, \theta_t, t \in \mathrm{T}, \mathbb{P}_\pi)$ est ergodique. En effet si Z est une variable aléatoire bornée vérifiant, pour tout $t \geqq 0$, $Z \circ \theta_t = Z$, on a $\mathbb{P}_\pi$-presque sûrement

$$Z = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}_\pi(Z/\mathcal{F}_n) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}_\pi(Z \circ \theta_n/\mathcal{F}_n) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}_{x_n}(Z).$$

Ceci entraîne que Z est mesurable par rapport à la tribu engendrée par $\{x_t, t \geqq 0\}$; ce processus étant ergodique Z est constante $\mathbb{P}_\pi$-presque sûrement. Si m, $n \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{Log} \| \Lambda^p M_{m+n} \| \leqq \operatorname{Log} \| \Lambda^p M_m \| \circ \theta_n + \operatorname{Log} \| \Lambda^p M_n \|,$$

et il résulte du théorème ergodique sous additif de Kingman [32] qu'il existe une variable aléatoire Z_p telle que lorsque $n \in \mathbb{N}$ tend vers l'infini, $\mathbb{P}_\pi$-p. s. et dans L^1,

$$\lim_{n \to +\infty} n^{-1} \operatorname{Log} \| \Lambda^p M_n \| = Z_p.$$

Par ailleurs, nous vérifions facilement que

$$\begin{aligned} &| \operatorname{Log} \| \Lambda^p M_t \| - \operatorname{Log} \| \Lambda^p M_{[t]} \| | \\ &\qquad \leqq p (\sup_{0 \leqq s \leqq 1} \operatorname{Log}^+ \| M_s \| + \operatorname{Log}^+ \| M_s^{-1} \|) \circ \theta_{[t]}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Nous en déduisons, en utilisant le lemme de Borel Cantelli, que pour tout t fixé, $\mathbb{P}_\pi$-p. s.,

$$\begin{aligned} Z_p = \lim_{n \to +\infty} n^{-1} \operatorname{Log} \| \Lambda^p M_n \| &= \lim_{n \to +\infty} n^{-1} \operatorname{Log} \| \Lambda^p M_{n+t} \| \\ &= \lim_{n \to +\infty} n^{-1} \operatorname{Log} \| \Lambda^p M_n \circ \theta_t \| = Z_p \circ \theta_t. \end{aligned}$$

Par ergodicité, Z_p doit être constante. Pour tout M de $\mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$, la suite $\| \Lambda^{p+1} M \| / \| \Lambda^p M \|$, $p = 0, 1, \ldots, d-1$ est décroissante. Z_p est donc de la forme $\sum_{i=1}^{p} \gamma_i$ où $\gamma_1 \geqq \gamma_2 \geqq \ldots \geqq \gamma_d$. La deuxième assertion de la proposition est une conséquence immédiate de (2.2) et du lemme de Borel Cantelli.

Nous allons montrer qu'il suffit d'établir le théorème 1.6 pour les systèmes multiplicatifs vérifiant la condition suivante.

CONDITION (D). — *On dit qu'un système multiplicatif à temps discret* $\{(x_n, M_n), n \in \mathbb{N}; \pi\}$ *sur* $E \times \mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$ *vérifie la condition* (D) *si*:

(D_1) E *est un espace métrique compact.*

(D_2) *il existe deux réels* $c > 0$, $0 < \Delta < 1$, *tels que les itérés du noyau de transition* P *de la chaîne de Markov* $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ *vérifient pour tout borélien* A *de* E

$$\| P^n(x, A) - \pi(A) \| \leqq c \Delta^n, \qquad \forall x \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(D_3) *Le processus* (x_n, M_n) *est fellerien.*

(D_4) *Le support de* π *est égal à* E.

LEMME 2.3. — *Soit* $\{(x_n, M_n), n \in \mathbb{N}; \pi\}$ *un système multiplicatif sur* $E \times Gl(d, \mathbb{R})$ *vérifiant la condition* (D_2).

On peut plonger de façon mesurable E *dans un espace métrique compact* C *de telle sorte que* E *soit un borélien dense de* C *et que ce système se prolonge en un système multiplicatif sur* $C \times Gl(d, \mathbb{R})$, *possédant les propriétés* (D_1), (D_2) *et* (D_3). *Si de plus le processus est fellerien, on peut supposer que* C *induit sur* E *sa propre topologie.*

Démonstration. — Considérons une distance d sur E, compatible avec sa topologie, pour laquelle l'ensemble C_u des fonctions uniformément continues bornées forme une algèbre séparable (*cf.* Parthasaraty [41], preuve du théorème II.6.2). Soit $\{\varphi_n, n \geqq 1\}$ un sous-ensemble dénombrable dense de l'ensemble des fonctions continues à support compact sur $Gl(d, \mathbb{R})$ et φ_0 la fonction identiquement égale à 1. Si f est une fonction borélienne bornée sur E, posons $T_n f(x) = R(f \otimes \varphi_n)(x, Id)$, pour $x \in E$. Notons A la plus petite sous-algèbre fermée de l'ensemble des fonctions boréliennes bornées sur E, stable par conjugaison, contenant C_u, telle que si $f \in A$, alors $T_n f \in A$, pour tout entier n. D'après le théorème IV.6.18 de Dunford, Schwartz [18], il existe un espace compact C et une injection $i: E \to C$ tels que A soit l'ensemble des fonctions $f \circ i$, lorsque f parcoure l'ensemble des fonctions continues sur C. Il est clair que i est une application borélienne et que C est un espace séparable. Puisque l'on a supposé que E est un borélien d'un espace métrique complet, i envoie chaque borélien de E sur un borélien de C (*cf.* Parthasaraty [41], Corollary 1.3.3). On peut donc identifier E à un borélien dense de C et supposer que i est l'injection canonique. Si f est une fonction sur C, on note f^i sa restriction à E. L'application $f \to f_i$ est alors une isométrie de l'ensemble des fonctions continues sur C sur l'ensemble A.

Notons R le noyau de transition du processus (x_n, M_n). Soient $f_0, f_1, \ldots, f_r$ des fonctions continues sur C. Si $g = \sum_{k=0}^{r} f_k \otimes \varphi_k$, la fonction qui à $x \in E$ associe $R g(x, Id) = \sum_{k=0}^{r} T_k(f_k^i)(x)$ est dans A. Elle se prolonge donc en une fonction continue sur C, notée encore $R g(x, Id)$, telle que

$$|R g(x, Id)| \leqq \sup_{x \in E} |g(x)|, \qquad \forall x \in C.$$

L'ensemble des fonctions g de cette forme contient un ensemble dense des fonctions continues à support compact sur $C \times Gl(d, \mathbb{R})$. Nous définissons ainsi, pour tout x de C, une probabilité $R((x, Id), .)$ sur $C \times Gl(d, \mathbb{R})$ telle que $R g(x, Id)$ est une fonction continue de $x \in C$ lorsque g est une fonction continue à support compact. Nous construisons alors un noyau multiplicatif fellerien sur $C \times Gl(d, \mathbb{R})$, prolongeant le noyau initial sur $E \times Gl(d, \mathbb{R})$, en posant, si U est un borélien de C et V un borélien de $\mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$,

$$\mathrm{R}((x, \mathrm{M}); \mathrm{U}\times\mathrm{V}) = \mathrm{R}((x, \mathrm{Id}); \mathrm{U}\times\mathrm{VM}^{-1}), \qquad \forall x\in \mathrm{C}, \quad \mathrm{M}\in \mathrm{Gl}(d, \mathbb{R}).$$

Remarquons enfin que si P est la projection de R sur C, alors, d'après (D_2) pour toute fonction continue f sur C majorée par 1,

$$\begin{aligned}\mathrm{Sup}\{\,|\mathrm{P}^n f(x) - \pi(f)|; x\in\mathrm{C}\} &= \mathrm{Sup}\{\,|\mathrm{P}^n f(x) - \pi(f)|; x\in\mathrm{E}\}\\ &= \mathrm{Sup}\{\,|\mathrm{P}^n f^i(x) - \pi(f^i)|; x\in\mathrm{E}\} \leqq c\,\Delta^n.\end{aligned}$$

Ce qui montre que le noyau R sur $\mathrm{C}\times\mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$ vérifie les conditions (D_1), (D_2) et (D_3).

Si de plus R est un noyau fellerien, l'algèbre A est formée de fonctions continues, ce qui entraîne que l'injection i est continue. D'autre part, pour tout $x\in\mathrm{E}$, la fonction $d(x, .)$ est uniformément continue et se prolonge donc en une fonction continue sur C, il en résulte que C induit sur E sa propre topologie.

PROPOSITION 2.4. — *Considérons un système multiplicatif non singulier* $\{(x_t, \mathrm{M}_t),\ t\in\mathrm{T}; \pi\}$ *sur* $\mathrm{E}\times\mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$ *de résolvante d'ordre* 1 *notée* U *et d'exposants de Lyapounov* $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$. *Il existe alors un borélien* F *de* E *portant* π, *un espace métrique compact* C *dont* F *est un sous ensemble borélien et un système multiplicatif* $\{(y_n, \mathrm{N}_n),\ n\in\mathbb{N}; \pi'\}$ *sur* $\mathrm{C}\times\mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$ *vérifiant la condition* (D), *d'exposants de Lyapounov* γ'_i, $1\leqq i\leqq d$, *et de résolvante* U′ *ayant les propriétés suivantes*:

(i) π' *est équivalente à* π.

(ii) *il existe* $\alpha>0$ *tel que* $\gamma'_i = \alpha\gamma_i$ *pour tout* $1\leqq i\leqq d$.

(iii) *Pour tout* (x, M) *de* $\mathrm{F}\times\mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$, *les probabilités* $\mathrm{U}((x, \mathrm{M}), .)$ *et* $\mathrm{U}'((x, \mathrm{M}), .)$ *sont équivalentes.*

Démonstration. — (*a*) Considérons une suite de variables aléatoires $\{\beta_n, n\geqq 1\}$ indépendantes entre elles et indépendantes du processus (x_t, M_t), $t\in\mathrm{T}$, ayant toutes lorsque $\mathrm{T}=\mathbb{R}^+$ (resp. $\mathrm{T}=\mathbb{N}$) une loi exponentielle (resp. géométrique) d'espérance 1. Posons $\xi(n) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$, $z_n = x_{\xi(n)}$ et $\mathrm{B}_n = \mathrm{M}_{\xi(n)}$. Alors, $\{(z_n, \mathrm{B}_n),\ n\in\mathbb{N}; \pi\}$ est un système multiplicatif à temps discret sur $\mathrm{E}\times\mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$ dont la probabilité de transition est égale à la résolvante U. De plus, $\mathbb{P}_\pi$-p. s.

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-1}\,\mathrm{Log}\,\|\Lambda^p \mathrm{B}_n\| = \lim_{n\to+\infty} (\xi(n)/n)\,\xi(n)^{-1}\,\mathrm{Log}\,\|\Lambda^p \mathrm{M}_{\xi(n)}\| = \sum_{i=1}^{p}\gamma_i$$

ce qui montre que $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_d$ sont encore les exposants de Lyapounov de ce nouveau système.

(*b*) La résolvante d'ordre 1, $\mathrm{K}(x, dy)$, du processus x_t est le noyau de transition de la chaîne de Markov z_n. Puisque π est une probabilité invariante ergodique ce noyau induit une contraction conservative ergodique de $L^1(\pi)$. On déduit donc de l'hypothèse de non-singularité et du théorème IV.4.6 de Revuz [42] qu'il existe un borélien F de E portant π, tel que $K(x, F)=1$ sur F et tel que la restriction de la chaîne z_n à F ait la propriété de Harris. Considérons une fonction mesurable bornée h sur F et introduisons le noyau multiplicatif U_h sur $F \times Gl(d, \mathbb{R})$ défini par

$$U_h f(x, M) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}_{(x, M)}(f(z_n, B_n)(1-h(z_1))(1-h(z_2)) \times \ldots$$
$$\times (1-h(z_{n-1}))\, h(z_n))$$

lorsque f est une fonction borélienne bornée. La projection de U_h sur F est le noyau $K_h = \sum_{n \geq 0} (K I_{1-h})^n K I_h$ où I_h est l'opérateur de multiplication par h. Nous pouvons choisir h de telle sorte que $0<h(x)<1$ pour tout x de E et qu'il existe un réel $0<\Delta<1$ tels que K_h est un noyau markovien vérifiant, pour tout borélien A de F,

$$|(K_h)^n(x, A) - \nu(A)| \leq 2\Delta^n, \qquad \forall x \in F, \quad n \in \mathbb{N},$$

où ν est la probabilité $h\pi/\left(\int h\, d\pi\right)$ (*cf.* la démonstration du théorème III.2.5 de Revuz [42]). Dans ce cas, U_h est un noyau multiplicatif sur $F \times Gl(d, \mathbb{R})$. Calculons les exposants associés à U_h. Notons $\Xi = ([0, 1] \times F \times Gl(d, \mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$, (u_n, z_n, B_n), $n \in \mathbb{N}$, les applications coordonnées et τ l'opérateur de décalage sur Ξ défini par

$$\tau((u_n, z_n, B_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (u_{n+1}, z_{n+1}, B_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Soit $\mathbb{P}_x$ la probabilité sur Ξ pour laquelle (z_n, B_n) est une réalisation de la chaîne de Markov de probabilité de transition U vérifiant $(z_0, B_0) = (x, \mathrm{Id})$ et $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur [0, 1], indépendante de la suite (z_n, B_n).

Définissons une suite de temps d'arrêt $T(n)$, $n \in \mathbb{N}$, par rapport à la filtration naturelle de Ξ en posant $T(0)=0$,

$$T(1) = \inf\{n \geq 1; (1-h(z_1))(1-h(z_2)) \ldots (1-h(z_n)) < u_0\},$$

et

$$T(n+1) = T(n) + T(1) \circ \tau^{T(n)}.$$

On vérifie facilement que $(z_{T(n)}, B_{T(n)})$ est sous tout $\mathbb{P}_x$ une chaîne de Markov de noyau U_h. Soit φ une fonction borélienne positive sur F et $\Phi = \varphi\,(1-h)/h$. Nous avons

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{E}_x(\varphi(z_n)\, 1_{\{T(1)>n\}}) = \varphi(x) + \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}_x(\varphi(z_n)\, 1_{\{(1-h(z_1)) \ldots (1-h(z_n))>u_0\}})$$
$$= \varphi(x) + \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}_x(\varphi(z_n)(1-h(z_1)) \ldots (1-h(z_n)) = \varphi(x) + K_h \Phi(x).$$

Nous en déduisons en utilisant que $\nu K_h = \nu$ que, si $\mathbb{E}_\nu = \int \mathbb{E}_x \, d\nu(x)$,

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{E}_\nu (\varphi(z_n) 1_{\{T(1) > n\}}) = \int \{ \varphi(x) + K_h \Phi(x) \} \, d\nu(x)$$
$$= \int (\varphi + \Phi) \, d\nu = \int \varphi \, d\pi / \int h \, d\pi.$$

Choisissons d'abord $\varphi(x) = \mathbb{E}_x (\text{Log}^+ \| B_1 \|)$. En utilisant le fait que $T(1)$ est un temps d'arrêt et le lemme 2.1, nous voyons que

$$\mathbb{E}_\nu (\text{Log}^+ \| B_{T(1)} \|) \leq \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}_\nu (1_{\{T(1) > n\}} \text{Log}^+ \| B_{n+1} B_n^{-1} \|)$$
$$\leq \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}_\nu (\varphi(z_n) 1_{\{T(1) > n\}}) = \mathbb{E}_\pi (\text{Log}^+ \| B_1 \|) / \int h \, d\pi < +\infty.$$

On montre de la même façon que $\mathbb{E}_\nu (\text{Log}^+ \| B_{T(1)}^{-1} \|)$ est fini. En prenant φ identiquement égale à 1, nous obtenons que $\mathbb{E}_\nu (T(1)) = \alpha$, où $\alpha = 1 / \int h \, d\pi$. On déduit donc du théorème ergodique que $\mathbb{P}_\nu$-p. s, $T(n)/n$ tend vers α, d'où si $1 \leq p \leq d$,

$$\lim_{n \to +\infty} n^{-1} \text{Log} \| \Lambda^p B_{T(n)} \|$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \{ T(n)/n \} T(n)^{-1} \text{Log} \| \Lambda^p B_{T(n)} \| = \alpha \sum_{i=1}^{p} \gamma_i.$$

En conclusion, $\{ (z_{T(n)}, B_{T(n)}), n \in \mathbb{N}; \nu \}$ est un système multiplicatif vérifiant (D_2) sur $F \times Gl(d, \mathbb{R})$ d'exposants de Lyapounov $\alpha\gamma_i$, $1 \leq i \leq d$, dont la probabilité de transition $U_h((x, M); .)$ est équivalente à $U((x, M); .)$, pour tout $x \in F$ et $M \in Gl(d, \mathbb{R})$. D'après le lemme 2.3 nous pouvons donc plonger F dans un espace métrique compact C tel que ce système se prolonge en un système multiplicatif sur $C \times Gl(d, \mathbb{R})$ vérifiant (D_1), (D_2), (D_3) et les conditions (i), (ii) et (iii) de la proposition. Soit S le support de π' dans C. Quitte à remplacer C par $C \cap S$ et F par $F \cap S$, on obtient alors la proposition.

PROPOSITION 2.5. — *Pour établir le théorème* 1.6 *en toute généralité, il suffit de le montrer pour les systèmes multiplicatifs vérifiant la condition* (D).

Démonstration. — Considérons un système multiplicatif non singulier $\{ (x_t, M_t), t \in T; \pi \}$ sur $E \times Gl(d, \mathbb{R})$ et le système $\{ (y_n, N_n), n \in \mathbb{N}; \pi' \}$ sur $C \times Gl(d, \mathbb{R})$, vérifiant (D), qui lui est associé par la proposition 2.4. La propriété (iii) implique que ces systèmes définissent les mêmes ensembles

S_x pour presque tout x. Montrons que ces deux systèmes sont fortement irréductibles en même temps, ce qui entraînera la proposition. C'est clair lorsque $T=\mathbb{N}$. Si $T=\mathbb{R}$, il suffit de démontrer que le système multiplicatif $\{(x_t, M_t),\ t\in\mathbb{R}^+;\pi\}$ est fortement irréductible dès que pour tout $r<d$, il n'existe pas de famille finie $\{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ d'applications mesurables de E dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension r de $\mathbb{R}^d$, telle que pour π-presque tout x de E, si $W(x)=\bigcup_{i=1,\ldots,k} V(x)$,

$$MW(x)=W(y), \qquad U((x, \mathrm{Id}); dy\otimes dM)\text{-p. s.}$$

Supposons qu'une telle famille existe. Nous pouvons alors trouver un borélien B de $\mathbb{R}^+$ de complémentaire négligeable pour la mesure de Lebesgue tel que, $\mathbb{P}_\pi$-p. s., pour tout t de B, $M_t W(x_0)=W(x_t)$. Fixons un réel $s>0$. Choisissons un $t\in B$ tel que $t+s\in B$. Nous avons alors $\mathbb{P}_\pi$-p. s., $M_t W(x_0)=W(x_t)$ et $M_{t+s}W(x_0)=W(x_{t+s})$, ce qui implique que $M_{t+s}M_t^{-1}W(x_t)=W(x_{t+s})$. Cette relation s'écrit aussi

$$M_s W(x_0)\circ\theta_t=W(x_s)\circ\theta_t.$$

Utilisant le lemme 2.1 nous en déduisons que $\mathbb{P}_{x_t}(M_s W(x_0)=W(x_s))=1$, $\mathbb{P}_\pi$-p. s. Puisque x_t est de loi π nous avons donc $M_s W(x_0)=W(x_s)$, $\mathbb{P}_\pi$-p. s., ce qui montre que le système n'est pas fortement irréductible.

La proposition suivante qui nous sera utile pour l'étude des systèmes felleriens.

PROPOSITION 2.6. — *Si le système multiplicatif sur* $E\times Gl(d, \mathbb{R})$ *vérifie la condition* (H), *il est non singulier, on peut dans la proposition* 2.4 *choisir* F *égal à* E *et supposer que* C *induit sur* E *sa propre topologie. Pour tout* $(x, y)\in E^2$, *les ensembles* $S_x(y)$ *associés à ce système et au système* $\{(y_n, N_n),\ n\in\mathbb{N};\pi'\}$ *sur* $C\times Gl(d, \mathbb{R})$ *sont alors égaux.*

Démonstration. — Indiquons les modifications à apporter à la démonstration de la proposition 2.4 pour obtenir la première partie de l'énoncé. Si A est un borélien de E chargé par π, considérons la fonction φ définie sur E par

$$\varphi(x)=\mathbb{P}_x\left(\sum_{n=0}^{\infty} 1_A(z_n)=+\infty\right).$$

On vérifie immédiatement que $K\varphi=\varphi$, donc que φ est continue d'après l'hypothèse (H). Par ailleurs, il résulte du théorème ergodique que $\varphi(x)=1$, π-p. s. Donc φ est identiquement égale à 1. Ceci montre que le système est non singulier et que la chaîne de Markov z_n est π-récurrente au sens de Harris sur E tout entier. Nous pouvons donc choisir $F=E$. Comme le noyau K est fellerien, il résulte des propositions VIII.4.2 et VI.4.8 de Revuz [42] que la fonction h peut être choisie continue. Soit f une fonction continue bornée sur $E\times Gl(d, \mathbb{R})$. Si a est la norme uniforme de f, les fonctions $U_h(a-f)$ et $U_h(a+f)$ sont semi-continues inférieurement car elles sont définies par des séries de fonctions continues positives. $U_h f$ est donc continue, c'est-à-dire que le noyau U_h est fellerien. On obtient alors la première partie de l'énoncé en appliquant la dernière assertion du lemme 2.3 à ce noyau U_h. La seconde partie en est une conséquence immédiate.

3. UN CRITÈRE GÉNÉRAL ASSURANT QUE DEUX EXPOSANTS SONT DIFFÉRENTS

Un deuxième outil important pour la démonstration du théorème 1.6 est le critère général établi dans cette partie (corollaire 3.8) en s'inspirant d'idées développées par Guivarc'h dans [21]. Nous ne considérerons ici que des processus à temps discret. Dans ce cas nous travaillerons avec la version définie ci-dessous sauf mention explicite du contraire.

NOTATIONS 3.1. — *Considérons un processus markovien multiplicatif à temps discret sur* $E \times Gl(d, \mathbb{R})$ *de probabilité de transition* R.

(i) *Nous notons* Ω *l'ensemble des suites* $\omega = \{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$ *d'éléments de* $E \times Gl(d, \mathbb{R})$ *muni de l'opérateur de translation* θ *défini par* $\theta(\omega)_n = \omega_{n+1}$. *Notant* $\omega_n = (\omega_n^1, \omega_n^2)$, $\omega_n^1 \in E$, $\omega_n^2 \in Gl(d, \mathbb{R})$, *on pose*

$$x_n(\omega) = \omega_n^1, \qquad M_n(\omega) = \omega_{n-1}^2 \omega_{n-2}^2 \dots \omega_1^2 \omega_0^2.$$

(ii) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n$ *désigne la tribu engendrée par* $\{(x_m, M_m); m \leqq n\}$, *et* $\mathcal{F}$ *la tribu engendrée par la réunion des* $\mathcal{F}_n$, $n \geqq 0$.

(iii) *Pour tout* x *de* E, $\mathbb{P}_x$ *est la probabilité sur* Ω *pour laquelle* $\{(x_n, M_n), n \in \mathbb{N}\}$ *est un processus de Markov de probabilité de transition* R *vérifiant* $x_0 = x$ *et* $M_0 = \mathrm{Id}$.

Remarquons que $x_m \circ \theta^n = x_{m+n}$ et $M_m \circ \theta^n = M_{m+n} M_n^{-1}$ pour tous n, $m \in \mathbb{N}$. Nous pourrons donc utiliser le lemme 2.1.

NOTATION ET DÉFINITION 3.2. — *On note* $P(\mathbb{R}^d)$ *l'espace projectif de dimension* $d-1$, *i.e. l'espace des directions de droite de* $\mathbb{R}^d$. *Soient* $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ *et* $M \in Gl(d, \mathbb{R})$. *On désigne par* $\bar{u}$ *la classe de* u *dans* $P(\mathbb{R}^d)$ *et par* $M.\bar{u}$ *la classe de* Mu. *Si* ν *est une probabilité sur* $P(\mathbb{R}^d)$, *on note* $M\nu$ *la mesure sur* $P(\mathbb{R}^d)$ *définie par* $\int f\, d(M\nu) = \int f(M.\bar{u})\, d\nu(\bar{u})$ *lorsque* f *est une fonction borélienne bornée.*

On dit que ν *est propre si pour tout sous-espace vectoriel propre* H *de* $\mathbb{R}^d$,

$$\nu\{\bar{u} \in P(\mathbb{R}^d); u \in H\} = 0.$$

Nous allons montrer la proposition suivante. On peut remarquer que sa démonstration n'utilise pas l'hypothèse d'intégrabilité. Nous notons M* la matrice transposée de la matrice M et utilisons les ensembles S_x définis notation 1.4.

PROPOSITION 3.3. — *Considérons un système multiplicatif* $\{(x_n, M_n), n \in \mathbb{N}; \pi\}$ *sur* $E \times Gl(d, \mathbb{R})$ *et un entier* $p \in \{1, \ldots, d\}$ *vérifiant les deux conditions suivantes*:

(C_1) *il existe une famille mesurable* $\{\nu_x, x \in E\}$ *de probabilité sur* $P(\mathbb{R}^d)$ *contenue dans un compact formé de mesures propres et vérifiant, π-p. s.*

$$\nu_x = \mathbb{E}_x(M_1^* \nu_{x_1}) \tag{3.1}$$

(C_2) *Pour π-presque tout x de* E *et tout vecteur non nul* $u \in \mathbb{R}^d$, S_x *contient une suite* A_n, $n \in \mathbb{N}$, *telle que* $A_n/\| A_n \|$ *converge vers une matrice* A *de rang* $\leqq p$ *vérifiant* $A u \neq 0$.

Il existe alors un entier $q \in \{1, \ldots, p\}$ *tel que, pour π-presque tout x de* E:

(i) $\mathbb{P}_x$*-presque surement, toutes les valeurs d'adhérence quand n tend vers l'infini de* $M_n/\| M_n \|$ *sont des matrices de rang q.*

(ii) *Si u est un vecteur non nul de* $\mathbb{R}^d$, $\liminf_{n \to +\infty} \| M_n u \| / \| M_n \| > 0$, $\mathbb{P}_x$*-presque sûrement.*

Commençons par établir trois lemmes. La démonstration du premier est immédiate. Le second montre en particulier que l'événement considéré au (i) de la proposition est mesurable. Rappelons que nous notons $M(d, \mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les matrices réelles carrées d'ordre *d*.

LEMME 3.4. — *Soit m une mesure propre sur* $P(\mathbb{R}^d)$ *et* A *une matrice non nulle de* $M(d, \mathbb{R})$. *On peut alors définir une probabilité* A *m sur* $P(\mathbb{R}^d)$ *par*

$$\int f d(A\, m) = \int f(A \,.\, \bar{u})\, dm(\bar{u})$$

lorsque f est une fonction borélienne bornée sur $P(\mathbb{R}^d)$. *Le plus petit sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^d$ *dont l'image dans* $P(\mathbb{R}^d)$ *porte* A *m est égal à l'image de* A.

LEMME 3.5. — *Pour tout* $p = 1, 2, \ldots, d-1$, *il existe une famille dénombrable* F_p *d'applications mesurables de* $Gl(d, \mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que, pour toute suite* $A_n \in Gl(d, \mathbb{R})$ *vérifiant* $\| A_n \| = 1$, *les deux assertions suivantes sont équivalentes*:

(*a*) *Toutes les valeurs d'adhérence de la suite* A_n, $n \in \mathbb{N}$, *dans* $M(d, \mathbb{R})$ *sont de rang* $\leqq p$.

(*b*) *Pour tout* $f \in F_p$, $\lim_{n \to +\infty} f(A_n) = 0$.

Démonstration. — Pour tout $k = 1, 2, \ldots, d-1$ notons P_k l'ensemble des probabilités sur l'espace projectif $P(\Lambda^k \mathbb{R}^d)$ des directions de droite dans

$\Lambda^k \mathbb{R}^d$. Considérons un sous-ensemble dénombrable dense C_k de P_k formé de mesures propres et une distance d_k sur P_k compatible avec la topologie faible.

Définissons F_p comme l'ensemble des applications f: $\mathrm{Gl}(d, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ de la forme

$$f(A) = \operatorname*{Inf}_{k=1,\ldots,p} d_k(\Lambda^k A\, m_k, \Lambda^k A\, \lambda_k)$$

où $(m_1, \lambda_1, m_2, \lambda_2, \ldots, m_p, \lambda_p)$ parcoure $C_1 \times C_1 \times C_2 \times C_2 \times \ldots \times C_p \times C_p$.

Pour montrer que (*a*) implique (*b*), on peut sans perte de généralité supposer que la suite A_n converge vers une matrice A de rang $q \leqq p$. Dans ce cas $\Lambda^q A$ est de rang un et envoie tout $P(\Lambda^q \mathbb{R}^d)$ sauf un sous-espace projectif propre sur l'élément $\bar{u}$ de $P(\Lambda^q \mathbb{R}^d)$ correspondant à l'image de A.

Pour toute mesure propre m de C_q, $\Lambda^q A\, m$ est alors égale à la masse de Dirac en $\bar{u}$ et il en résulte que

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname*{Inf}_{k=1,\ldots,p} d_k(\Lambda^k A_n m_k, \Lambda^k A_n \lambda_k) \leqq d_q(\Lambda^q A\, m_q, \Lambda^q A\, \lambda_q) = 0.$$

Réciproquement supposons que la condition (*b*) est vérifiée. On peut aussi supposer que A_n tend vers une matrice A et qu'il existe un élément g de F_{p-1} tel que $g(A_n)$ soit minoré par une constante strictement positive. Dans ce cas, d'après la première partie de la démonstration A n'est pas de rang $<p$, donc $\Lambda^p A$ est non nul. Pour tous m_p, $\lambda_p \in C_p$, par hypothèse,

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{Inf}(g(A_n), d_p(\Lambda^p A_n m_p, \Lambda^p A_n \lambda_p)) = 0,$$

donc $d_p(\Lambda^p A_n m_p, \Lambda^p A_n \lambda_p)$ tend vers 0, ce qui entraîne que $\Lambda^p A\, m_p = \Lambda^p A\, \lambda_p$. Considérons deux éléments u, v de $\Lambda^p \mathbb{R}^d$ tels que $\Lambda^p A\, u$ et $\Lambda^p A\, u$ soient non nuls. Par densité, C_p contient deux suites m_p^n et λ_p^n, $n \in \mathbb{N}$, telles que m_p^n (resp. λ_p^n) converge vers la masse de Dirac en $\bar{u}$ (resp. en $\bar{v}$). Il résulte alors des égalités $\Lambda^p A\, m_p^n = \Lambda^p A\, \lambda_p^n$ et du lemme 1.3 de Guivarc'h [21] que $\Lambda^p A \delta_{\bar{u}} = \Lambda^p A \delta_{\bar{v}}$, c'est-à-dire $\Lambda^p A . \bar{u} = \Lambda^p A . \bar{v}$. Alors $\Lambda^p A$ est de rang 1 et donc A de rang p.

LEMME 3.6. — *Si* $\{\nu_x, x \in E\}$ *est une solution de l'équation* (3.1), *la famille aléatoire de probabilités* $\{M_n^* \nu_{x_n}, n \in \mathbb{N}\}$ *sur* $P(\mathbb{R}^d)$ *est une martingale sous* $\mathbb{P}_\pi$.

Démonstration. — Nous devons montrer que pour toute fonction continue bornée sur $P(\mathbb{R}^d)$, $\int f(\bar{u})\, d(M_n^* \nu_{x_n})(\bar{u})$ est une martingale. Ceci est immédiat car on a en utilisant le lemme 2.1 et en posant $A=M_n$,

$$\mathbb{E}_\pi\left(\int fd(M^*_{n+1}\nu_{x_{n+1}})/\mathcal{F}_n\right)=\mathbb{E}_\pi\left(\int fd(M^*_n(M^*_1\nu_{x_1}\circ\theta^n))/\mathcal{F}_n\right)$$
$$=\mathbb{E}_{x_n}\left(\int fd(A^*(M^*_1\nu_{x_1}))\right)=\int fd(A^*\nu_{x_n})=\int fd(M^*_n\nu_{x_n}).$$

Démonstration de la proposition 3.3. — L'idée générale de la démonstration est de montrer que $M^*_n\nu_{x_n}$ converge p. s. vers une probabilité aléatoire portée par un sous-espace projectif de dimension inférieure à p.

Utilisons les notations 3.1. Puisque la probabilité $\mathbb{P}_\pi$ est invariante sous θ il existe une probabilité $\mathbb{Q}$ sur l'ensemble des suites $\omega=\{\omega_n, n\in\mathbb{Z}\}$ à valeurs dans $E\times Gl(d,\mathbb{R})$, invariante sous le shift encore noté θ, dont la projection sur les suites $\{\omega_n, n\in\mathbb{N}\}$ est égale à $\mathbb{P}_\pi$. Notons $\mathbb{Q}_x$ la loi conditionelle de $\mathbb{Q}$ sachant que $x_0=x$. Remarquons que pour tout m, $n\in\mathbb{N}$, si A_{-m}, $A_{-m+1},\ldots,A_n$ sont des boréliens de $E\times Gl(d,\mathbb{R})$ et si B est un borélien de E nous avons (en utilisant le lemme 2.1 et l'invariance sous θ)

$$\int\mathbb{Q}_x(\omega_{-m}\in A_{-m},\ldots,\omega_0\in A_0,\omega_1\in A_1,\ldots,\omega_n\in A_n)\,1_B(x)\,d\pi(x)$$
$$=\mathbb{Q}(\omega_{-m}\in A_{-m},\ldots,\omega_0\in A_0,x_0\in B,\omega_1\in A_1,\ldots,\omega_n\in A_n)$$
$$=\mathbb{Q}(\omega_0\in A_{-m},\ldots,\omega_m\in A_0,x_m\in B,\omega_{m+1}\in A_1,\ldots,\omega_{n+m}\in A_n)$$
$$=\mathbb{P}_\pi(\omega_0\in A_{-m},\ldots,\omega_{m-1}\in A_{-1},\theta^m(\omega)_0\in A_0,$$
$$x_0\circ\theta^m\in B,\theta^m(\omega)_1\in A_1,\ldots,\theta^m(\omega)_n\in A_n)$$
$$=\mathbb{E}_\pi(1_{\{\omega_0\in A_{-m},\ldots,\omega_{m-1}\in A_{-1}\}}\mathbb{P}_{x_m}(\omega_0\in A_0,x_0\in B,\omega_1\in A_1,\ldots,\omega_n\in A_n))$$
$$=\int 1_{\{\omega_{-m}\in A_{-m},\ldots,\omega_{-1}\in A_{-1}\}}\mathbb{P}_{x_0}(\omega_0\in A_0,x_0\in B,\omega_1\in A_1,\ldots,\omega_n\in A_n))\,d\mathbb{Q}$$
$$=\int\mathbb{Q}_x(\omega_{-m}\in A_{-m},\ldots,\omega_{-1}\in A_{-1})\,\mathbb{P}_x(\omega_0\in A_0,\ldots,\omega_n\in A_n)\,1_B(x)\,d\pi(x).$$

Ceci implique que pour π-presque tout x, les variables aléatoires $\omega^+=(\omega_0,\omega_1,\ldots)$ et $\omega^-=(\ldots,\omega_{-2},\omega_{-1})$ sont indépendantes sous $\mathbb{Q}_x$ et que l'image de $\mathbb{Q}_x$ par ω^+ est égale à $\mathbb{P}_x$.

Considérons la famille $\{\nu_x, x\in E\}$ donnée par la condition (C_1). Il résulte du théorème de convergence des martingales bornées que pour $\mathbb{P}_\pi$-presque tout ω, $M^*_n\nu_{x_n}(\omega)$ converge faiblement vers une probabilité λ_ω. En particulier, si $d(.,.)$ est une distance sur l'ensemble des mesures de probabilité sur $P(\mathbb{R}^d)$ compatible avec la topologie faible, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\ \operatorname*{Sup}_{m\in\mathbb{N}} d(M^*_{n+m}\nu_{x_{n+m}},M^*_n\nu_{x_n})=0$$

$\mathbb{P}_\pi$-p. s. et donc aussi $\mathbb{Q}$-p. s. (car $\mathbb{P}_\pi$ et $\mathbb{Q}$ coïncident sur les coordonnées d'indice positif). Puisque θ^{-1} préserve la mesure $\mathbb{Q}$, nous en déduisons qu'il existe une sous suite J de $\mathbb{N}$ telle que lorsque $n \in J$ tend vers $+\infty$,

$$\lim_{n \to +\infty} \operatorname*{Sup}_{m \in \mathbb{N}} d((M_n^* \circ \theta^{-n}) M_m^* \nu_{x_m}, (M_n^* \circ \theta^{-n}) \nu_{x_0}) = 0$$

$\mathbb{Q}$-presque sûrement, i. e. $\mathbb{Q}_x$-p. s. pour π-presque tout x de E. Fixons un x de E pour lequel ceci est vrai. Remarquons que $M_n(\omega)$ ne dépend que de $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$, donc que $(M_n^* \circ \theta^{-n})(\omega)$ est une fonction de ω^-, alors que $M_m^* \nu_{x_m}(\omega)$ est une fonction de ω^+. Soit $D(\omega^-)$ une valeur d'adhérence dans $M(d, \mathbb{R})$ de la suite

$$\{(M_n^* \circ \theta^{-n})(\omega)/\|(M_n^* \circ \theta^{-n})(\omega)\|; n \in J\}.$$

A l'aide de la condition (C_2), choisissons une suite A_n dans S_x telle que $A_n/\|A_n\|$ converge vers une matrice A de rang $\leqq p$ pour laquelle $D(\omega^-) A^*$ n'est pas la matrice nulle. Puisque les probabilités $\{\nu_x, x \in E\}$ varient dans un compact formé de mesures propres que nous noterons K, on voit que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$D(\omega^-) M_m^*(\omega^+) \nu_{x_m}(\omega^+) = D(\omega^-) \nu_x.$$

Utilisant que sous $\mathbb{Q}_x$ les variables aléatoires ω^+ et de ω^- sont indépendantes et ω^+ de loi $\mathbb{P}_x$, nous en déduisons que pour tout entier n, il existe une probabilité m_n de K telle que $D(\omega^-) A_n^* m_n = D(\omega^-) \nu_x$. Considérons une valeur d'adhérence faible m de la suite $\{m_n, n \in \mathbb{N}\}$, m est propre. Le sous-espace vectoriel $H = \{u \in \mathbb{R}^d; D(\omega^-) A^* u = 0\}$ est différent de $\mathbb{R}^d$ et pour tout $u \notin H$,

$$\lim_{n \to +\infty} D(\omega^-) A_n^* . \bar{u} = D(\omega^-) A^* . \bar{u}.$$

Appliquant le lemme 1.3 de Guivarc'h [21], on en déduit que $D(\omega^-) A^* m = D(\omega^-) \nu_x$. D'après le lemme 3.4, la probabilité $D(\omega^-) \nu_x$ est donc portée par un sous-espace projectif de dimension $< p$, ce qui entraîne que le rang de $D(\omega^-)$ est $\leqq p$.

Nous avons donc montré que $\mathbb{Q}$-p. s. les valeurs d'adhérence de la suite $M_n^* \circ \theta^{-n}/\|M_n^* \circ \theta^{-n}\|$, $n \in J$, sont des matrices de rang $\leqq p$. Soit F_p la famille de fonctions introduite dans le lemme 3.5. Pour tout $f \in F_p$, $f(M_n^* \circ \theta^{-n}/\|M_n^* \circ \theta^{-n}\|)$ tend vers zéro $\mathbb{Q}$-p. s. quand $n \in J$ tend vers l'infini. On déduit que $f(M_n^*/\|M_n^*\|)$ tend en probabilité vers zéro, puis, à l'aide d'un procédé diagonal, qu'il existe un sous-ensemble I de J tel que, pour tout $f \in F_p$, $f(M_n^*/\|M_n^*\|)$ tend vers zéro p. s. quand n tend vers l'infini dans I. Il en résulte que, $\mathbb{P}_\pi$-p. s., toutes les valeurs d'adhérence de la suite $M_n^*/\|M_n^*\|$, $n \in I$, sont de rang $\leqq p$. Utilisons alors à nouveau la convergence de $M_n^* \nu_{x_n}(\omega)$ vers la probabilité λ_ω. Notons $V(\omega)$ le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ dont l'image dans $P(\mathbb{R}^d)$ porte λ_ω et $C(\omega)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\{M_n^*(\omega)/\|M_n^*(\omega)\|, n \in \mathbb{N}\}$ dans $M(d, \mathbb{R})$. Pour toute matrice A de C (ω) il existe une mesure propre m telle que $A m = \lambda_\omega$. On en déduit (*cf.* lemme 3.4) que l'image de tout élément de $C(\omega)$ est égale à $V(\omega)$. Comme on vient de voir que $\mathbb{P}_\pi$-p. s., $C(\omega)$ contient une matrice de rang $\leqq p$, la dimension de $V(\omega)$ est $\leqq p$. D'autre part, la relation $M_1^*(\omega)\lambda_{\theta(\omega)}=\lambda_\omega$ entraîne que $\dim V(\theta(\omega))=\dim V(\omega)$. Utilisant l'ergodicité on en déduit que la dimension de $V(\omega)$ est p. s. égale à une constante $q\leqq p$. Ceci démontre l'assertion (i).

Pour établir (ii) considérons l'ensemble E_0 des x de E pour lesquels à la fois $M_n^*\nu_{x_n}$ converge $\mathbb{P}_x$-p. s. vers λ_ω et $\nu_x=\mathbb{E}_x(M_n^*\nu_{x_n})$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Il est clair que $\pi(E_0)=1$. Soit u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$ et H le sous-espace projectif de $P(\mathbb{R}^d)$ correspondant au sous-espace vectoriel orthogonal à u. Pour tout $x\in E_0$, $\nu_x(H)=\mathbb{E}_x(\lambda_\omega(H))$ et comme ν_x est propre $\lambda_\omega(H)=0$, $\mathbb{P}_x$-p. s. On a donc

$$\mathbb{P}_x(\omega;\operatorname{Supp}\lambda_\omega\subset H)=\mathbb{P}_x(\omega;\lambda_\omega(H)=1)=0.$$

Si $A(\omega)$ est une valeur d'adhérence de la suite $M_n^*(\omega)/\|M_n^*(\omega)\|$, $A^*(\omega)u=0$ si et seulement si u est orthogonal à l'image de $A(\omega)$, i. e., si $\operatorname{Supp}\lambda_\omega$ est contenu dans H. Cet événement étant négligeable, il en résulte que $\liminf_{n\to+\infty}\|M_n(\omega)u\|/\|M_n(\omega)\|>0$, $\mathbb{P}_x$-p. s.

La démonstration du corollaire suivant est directement inspirée de Guivarc'h [21].

COROLLAIRE 3.8. — *Soit* $\{(x_n, M_n), n\in\mathbb{N};\pi\}$ *un système multiplicatif sur* $E\times Gl(d,\mathbb{R})$, *vérifiant pour un entier* $p\in\{1,\ldots,d-1\}$ *les conditions* (C_1) *et* (C_2). *Alors* γ_{p+1} *est différent de* γ_1.

Démonstration. — Introduisons quelques notations. Soit q l'élément de $\{1,\ldots,p\}$ donné par la proposition 3.3 et $k=q+1$. Si $a\in\Lambda^k\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ et $M\in Gl(d,\mathbb{R})$, notons $\bar{a}$ l'image de a dans l'espace projectif $P(\Lambda^k\mathbb{R}^d)$ des directions de $\Lambda^k\mathbb{R}^d$ et $\Lambda^k M.\bar{a}$ l'image de $(\Lambda^k M)a$. Posons $K=P(\mathbb{R}^d)\times P(\Lambda^k\mathbb{R}^d)$, $\Omega'=\Omega\times K$ et si $(\omega,\bar{u},\bar{a})\in\Omega'$,

$$\tau(\omega,\bar{u},\bar{a})=(\theta(\omega), M_1(\omega).\bar{u}, \Lambda^k M_1(\omega).\bar{a})$$

et

$$H_n(\omega,\bar{u},\bar{a})=\operatorname{Log}\{\|(\Lambda^k M_n(\omega))a\|/\|a\|\}-k\operatorname{Log}\{\|M_n(\omega)u\|/\|u\|\}$$

où a, resp. u, est un représentant de $\bar{a}$, resp. $\bar{u}$. On a pour tous m, $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
H_{n+m}(\omega,\bar{u},\bar{a}) &= \operatorname{Log}\{\|(\Lambda^k M_n\circ\theta^m)(\Lambda^k M_m)a\|/\|a\|\}\\
&\qquad -k\operatorname{Log}\{\|(M_n\circ\theta^m)M_m u\|/\|u\|\}\\
&= \operatorname{Log}\{\|(\Lambda^k M_n\circ\theta^m)(\Lambda^k M_m)a\|/\|\Lambda^k M_m a\|\}+\operatorname{Log}\{\|\Lambda^k M_m a\|/\|a\|\}\\
&\qquad -k\operatorname{Log}\{\|(M_n\circ\theta^m)M_m u\|/\|M_m u\|\}-k\operatorname{Log}\{\|M_m u\|/\|u\|\}\\
&= (H_n\circ\tau^m)(\omega,\bar{u},\bar{a})+H_m(\omega,\bar{u},\bar{a}).
\end{aligned}$$

Nous allons construire une probabilité λ sur Ω', préservée par τ, pour laquelle λ-p. s.

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{H}_n = -\infty \tag{3.2}$$

et

$$\int \mathrm{H}_1 \, d\lambda = \sum_{i=1}^{k} (\gamma_i - \gamma_1).$$

Un lemme connu de théorie ergodique (*voir* par exemple le lemme II.2.3 de Bougerol, Lacroix [7]) entraîne en effet qu'alors $\int \mathrm{H}_1 \, d\lambda$ est strictement positif donc que γ_{p+1} est différent de γ_1.

En appliquant le lemme 2.2 de Guivarc'h [21] aux matrices $\Lambda^k \mathrm{M}_n$, on voit qu'il existe un élément non nul a_0 de $\Lambda^k \mathbb{R}^d$ pour lequel, $\mathbb{P}_\pi$-p. s.

$$\lim_{n \to +\infty} n^{-1} \operatorname{Log} \| (\Lambda^k \mathrm{M}_n) \, a_0 \| / \| a_0 \| = \lim_{n \to +\infty} n^{-1} \operatorname{Log} \| \Lambda^k \mathrm{M}_n \| = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i.$$

D'autre part, d'après l'assertion (ii) de la proposition 3.3, si u_0 est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{P}_\pi$-p. s.,

$$\lim_{n \to +\infty} n^{-1} \operatorname{Log} \| \mathrm{M}_n u_0 \| / \| u_0 \| = \lim_{n \to +\infty} n^{-1} \operatorname{Log} \| \mathrm{M}_n \| = \gamma_1.$$

Nous avons donc

$$\lim_{n \to +\infty} n^{-1} \mathrm{H}_n (\omega, \bar{u}_0, \bar{a}_0) = \sum_{i=1}^{k} (\gamma_i - \gamma_1),$$

et, en utilisant le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \to +\infty} n^{-1} \mathbb{E}_\pi [\mathrm{H}_n (\omega, \bar{u}_0, \bar{a}_0)] = \sum_{i=1}^{k} (\gamma_i - \gamma_1). \tag{3.4}$$

Notons $\mathrm{M}^b(\mathrm{K})$, resp. $\mathrm{M}^1(\mathrm{K})$, resp. $\mathrm{C}(\mathrm{K})$, l'ensemble des mesures bornées, resp. des probabilités, resp. des fonctions continues, sur K. Si ν est une probabilité sur $\mathrm{E} \times \mathrm{K}$ se projetant sur π, elle admet une désintégration de base E de la forme $\nu = \int \delta_x \otimes \nu_x \, d\pi(x)$. Ceci permet d'identifier ν à un élément de $\mathrm{L}_\pi^\infty(\mathrm{E}; \mathrm{M}^b(\mathrm{K}))$. Puisque $\mathrm{L}_\pi^\infty(\mathrm{E}; \mathrm{M}^b(\mathrm{K}))$ est le dual de $\mathrm{L}_\pi^1(\mathrm{E}; \mathrm{C}(\mathrm{K}))$, $\mathrm{L}_\pi^\infty(\mathrm{E}; \mathrm{M}^1(\mathrm{K}))$ est un sous-ensemble faiblement compact de $\mathrm{L}_\pi^\infty(\mathrm{E}; \mathrm{M}^b(\mathrm{K}))$. Considérons une valeur d'adhérence ν pour la topologie faible de la suite des probabilités $\{ \nu_n, n \in \mathbb{N} \}$ sur $\mathrm{E} \times \mathrm{K}$ définies par, si f est une fonction mesurable bornée sur $\mathrm{E} \times \mathrm{K}$,

$$\int f \, d\nu_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_\pi [f(x_i, \mathrm{M}_i . \bar{u}_0, \Lambda^k \mathrm{M}_i . \bar{a}_0)].$$

Si $f(x, \bar{u}, \bar{a}) = \mathbb{E}_x[\mathrm{H}_1(\omega, \bar{u}, \bar{a})]$ on a, pour tout entier i,

$$\mathbb{E}_\pi[f(x_i, \mathrm{M}_i . \bar{u}_0, \Lambda^k \mathrm{M}_i . \bar{a}_0)] \\ = \mathbb{E}_\pi[\mathbb{E}_{x_i}(\mathrm{H}_1(\omega, \mathrm{M}_i . \bar{u}_0, \Lambda^k \mathrm{M}_i . \bar{a}_0)] = \mathbb{E}_\pi((\mathrm{H}_1 \circ \tau^i)(\omega, \bar{u}_0, \bar{a}_0))$$

d'où

$$\int f d\nu_n = n^{-1} \mathbb{E}_\pi(\mathrm{H}_n(\omega, \bar{u}_0, \bar{a}_0)).$$

Comme f s'identifie à un élément de $\mathrm{L}^1_\pi(\mathrm{E}, \mathrm{C}(\mathrm{K}))$, on obtient en écrivant que $\int f d\nu$ est la limite de $\int f d\nu_n$ suivant une sous-suite et en utilisant (3.4) que

$$\int \mathbb{E}_x[\mathrm{H}_1(\omega, \bar{u}, \bar{a})] d\nu(x, \bar{u}, \bar{a}) = \lim_{n \to \infty} n^{-1} \mathbb{E}_\pi[\mathrm{H}_n(\omega, \bar{u}_0, \bar{a}_0)] = \sum_{i=1}^{k} (\gamma_i - \gamma_1).$$

Notons λ la probabilité $\int \mathbb{P}_x \otimes \delta_{\bar{u}} \otimes \delta_{\bar{a}} d\nu(x, \bar{u}, \bar{a})$ sur Ω'. La relation précédente est alors (3.3). On vérifie facilement que ν est une probabilité invariante de la chaîne de Markov $(x_n, \mathrm{M}_n . \bar{u}, \Lambda^k \mathrm{M}_n(\omega) . \bar{a})$ sur $\mathrm{E} \times \mathrm{K}$. Il en résulte que si Φ une fonction mesurable bornée sur Ω' et f la fonction sur $\mathrm{E} \times \mathrm{K}$ définie par $f(x, \bar{u}, \bar{a}) = \mathbb{E}_x(\Phi(\,.\,, \bar{u}, \bar{a}))$, alors

$$\begin{aligned} \int \Phi \circ \tau \, d\lambda &= \int \mathbb{E}_x(\Phi(\theta(\omega), \mathrm{M}_1(\omega) . \bar{u}, \Lambda^k \mathrm{M}_1(\omega) . \bar{a}) d\nu(x, \bar{u}, \bar{a}) \\ &= \int \mathbb{E}_x\{ \mathbb{E}_x[\Phi(\theta(\omega), \mathrm{M}_1(\omega) . \bar{u}, \Lambda^k \mathrm{M}_1(\omega) . \bar{a})/\mathscr{F}_1] d\nu(x, \bar{u}, \bar{a}) \\ &= \int \mathbb{E}_x(f(x_1, \mathrm{M}_1 . \bar{u}, \Lambda^k \mathrm{M}_1 . \bar{a})) d\nu(x, \bar{u}, \bar{a}) \\ &= \int f(x, \bar{u}, \bar{a}) d\nu(x, \bar{u}, \bar{a}) = \int \Phi \, d\lambda. \end{aligned}$$

Autrement dit λ est τ-invariante. Pour conclure vérifions la relation (3.2). En utilisant que la projection de λ sur Ω est égale à $\mathbb{P}_\pi$ et les deux assertions de la proposition 3.3, nous voyons que λ-p. s., d'une part

$$\liminf_{n \to +\infty} \mathrm{Log}\{ \| \mathrm{M}_n(\omega) u \| / \| \mathrm{M}_n(\omega) \| \} > -\infty,$$

et d'une part, puisque les valeurs d'adhérence de $\mathrm{M}_n / \| \mathrm{M}_n \|$ sont $\mathbb{P}_\pi$-p. s. de rang q, que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{Log}\{ \| \Lambda^k \mathrm{M}_n \| / \| \mathrm{M}_n \|^k \} = -\infty.$$

En écrivant que, si u est un représentant de $\bar{u}$ de norme 1,

$$\begin{aligned} H_n(\omega, \bar{u}, \bar{a}) &\leqq \operatorname{Log} \| \Lambda^k M_n(\omega) \| - k \operatorname{Log} \| M_n(\omega) u \| \\ &\leqq \operatorname{Log} \{ \| \Lambda^k M_n(\omega) \| / \| M_n(\omega) \|^k \} - k \operatorname{Log} \{ \| M_n(\omega) u \| / \| M_n(\omega) \| \} \end{aligned}$$

nous en déduisons que H_n tend λ-p. s. vers $-\infty$, c'est-à-dire (3.2).

4. LE CAS DES SYSTÈMES NON SINGULIERS

Le théorème 1.6 sera une conséquence facile des propositions 2.5 et 3.8 si nous montrons qu'un système multiplicatif fortement irréductible et p-contractant, satisfaisant (D), vérifie les conditions (C_1) et (C_2). Commençons par étudier la validité de la condition (C_1). Rappelons que par définition, cette condition est satisfaite lorsqu'il existe une famille mesurable $\{ \nu_x, x \in E \}$ de probabilités sur $P(\mathbb{R}^d)$ portée par un compact formé de mesures propres vérifiant l'équation

$$\nu_x = \mathbb{E}_x(M_1^* \nu_{x_1}), \qquad d\pi(x)\text{-p. p.} \tag{4.1}$$

LEMME 4.1. — *Pour tout système multiplicatif* $\{(x_t, M_t), t \in T; \pi\}$ *sur* $E \times Gl(d, \mathbb{R})$, *l'équation* (4.1) *admet au moins une solution.*

Démonstration. — Notons M^b, resp. C, l'ensemble des mesures bornées, resp. des fonctions continues, sur $P(\mathbb{R}^d)$. Si $\{ \nu_x, x \in E \}$ est dans $L_\pi^\infty(E; M^b)$, posons $(\Gamma\nu)_x = \mathbb{E}_x(M_1^* \nu_{x_1})$ et si $f \in L_\pi^1(E; C)$ posons

$$\varphi(x, \bar{u}) = \mathbb{E}_\pi(f(x_0, M_1^* . \bar{u}) / x_1) \qquad \text{si} \quad x_1 = x.$$

Alors $\varphi \in L_\pi^1(E; C)$ et

$$\begin{aligned} \int \left\{ \int f(x, \bar{u})\, d(\Gamma\nu)_x(\bar{u}) \right\} d\pi(x) &= \mathbb{E}_\pi \left[\int f(x_0, M_1^* . \bar{u})\, d\nu_{x_1}(\bar{u}) \right] \\ &= \mathbb{E}_\pi \left[\int \varphi(x_1, \bar{u})\, d\nu_{x_1}(\bar{u}) \right] \\ &= \int \left\{ \int \varphi(x, \bar{u})\, d\nu_x(\bar{u}) \right\} d\pi(x). \end{aligned}$$

Il en résulte que Γ est une transformation continue de $L_\pi^\infty(E; M^b)$ muni de la topologie faible pour la dualité avec l'espace $L_\pi^1(E; C)$. Puisque Γ conserve le convexe faiblement compact de $L_\pi^\infty(E; M^b)$ formé des applications à valeurs dans les probabilités, elle y admet un point fixe d'après le théorème de Markov-Kakutani, ce qui donne une solution de (4.1).

On dit que $Gl(d, \mathbb{R})$ opère à droite sur un espace topologique B s'il existe une application continue $(b, M) \to b . M$ de $B \times Gl(d, \mathbb{R})$ dans B vérifiant $(b . M_1) . M_2 = b . (M_1 M_2)$, pour tous $b \in B$, M_1, $M_2 \in Gl(d, \mathbb{R})$.

Dans l'énoncé suivant, nous supposons que B est homéomorphe à un borélien d'un espace métrique complet séparable.

LEMME 4.2. — *Soit* $\{(x_n, M_n), n \in \mathbb{N}; \pi\}$ *un système multiplicatif sur* $E \times Gl(d, \mathbb{R})$, *vérifiant la condition* (D). *Supposons que* $Gl(d, \mathbb{R})$ *opère à droite sur l'espace topologique* B. *Si g est une application mesurable de* E *dans* B *et f une application continue bornée de* B *dans* $\mathbb{R}$ *telles que l'ensemble*

$$E_0 = \{x \in E; f(g(x)) = \mathbb{E}_x(f(g(x_n) . M_n)), \forall n \in \mathbb{N}\}$$

vérifie $\pi(E_0) = 1$, *il existe une fonction continue* $h: E \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(g(x)) = h(x)$ *pour tout* $x \in E_0$.

Démonstration. — Puisque g est mesurable, il résulte du théorème de Lusin (*cf.* Parthasarathy [41], lemme II.4.2) et du fait que B est homéomorphe à un borélien de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ (*cf.* Dellacherie, Meyer [15], III.20) que pour tout entier n, il existe un fermé C_n de E tel que $\pi(C_n) > 1 - 1/n$ et tel que g soit continu sur C_n. La fonction $F(x, M) = f(g(x) . M)$ est alors continue sur $C_n \times Gl(d, \mathbb{R})$. D'après le théorème de Tietze, il existe donc une fonction F_n continue sur $E \times Gl(d, \mathbb{R})$, coïncidant avec F sur $C_n \times Gl(d, \mathbb{R})$ et de module majoré comme F par $\alpha = \operatorname{Sup}\{|f(b)|, b \in B\}$. Si r_n est la fonction définie sur $E \times Gl(d, \mathbb{R})$ par $r_n(x, M) = 1_{C_n}(x)$, nous voyons en utilisant la condition (D_2) qu'il existe $c > 0$ et $0 < \Delta < 1$ tels que

$$R^n r_n(x, \mathrm{Id}) \geqq \pi(C_n) - c\,\Delta^n \geqq 1 - (c\,\Delta^n + 1/n)$$

Pour $x \in E_0$ nous avons $f(g(x)) = R^n F(x, \mathrm{Id})$ et

$$\begin{aligned} |f(g(x)) - R^n F_n(x, \mathrm{Id})| &\leqq |R^n F(x, \mathrm{Id}) - R^n F_n(x, \mathrm{Id})| \\ &\leqq |R^n(r_n F)(x, \mathrm{Id}) - R^n(r_n F_n)(x, \mathrm{Id})| \\ &\quad + 2\alpha R^n(1 - r_n)(x, \mathrm{Id}) \\ &\leqq 2\alpha(c\,\Delta^n + 1/n). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc que $f(g(x))$ est la limite uniforme sur E_0 des fonctions $R^n F_n(x, \mathrm{Id})$ qui sont continues d'après l'hypothèse (D_3). Puisque E_0 est dense dans E, les fonctions $R^n F_n(x, \mathrm{Id})$ convergent uniformément sur E vers une fonction continue $h(x)$ vérifiant $h(x) = f(g(x))$ si $x \in E_0$.

LEMME 4.3. — *Sous l'hypothèse* (D) *toute solution de l'équation* (4.1) *admet une version continue.*

Démonstration. — Notons B l'espace des probabilités sur $P(\mathbb{R}^d)$ et $g: E \to B$ l'application mesurable définie par $g(x) = \nu_x$, où $\{\nu_x, x \in E\}$ est solution de (4.1). Le groupe $Gl(d, \mathbb{R})$ opère à droite sur B en posant, si $\nu \in B$ et $M \in Gl(d, \mathbb{R})$, $\nu . M = M^* \nu$. Fixons une fonction continue φ sur $P(\mathbb{R}^d)$ et considérons l'application $f: B \to \mathbb{R}$ définie par

$f(\nu)=\int \varphi(\bar{u})\, d\nu(\bar{u})$. Puisque $\nu_x=\mathbb{E}_x(\mathrm{M}_1^* \nu_{x_1})$, π-p. s., l'ensemble

$$\mathrm{E}_0=\{x\in \mathrm{E}; f(\nu_x)=\mathbb{E}_x(f(\mathrm{M}_n^* \nu_{x_n})), \forall n\in\mathbb{N}\}$$

vérifie $\pi(\mathrm{E}_0)=1$. Il résulte donc du lemme précédent qu'il existe une fonction continue h sur E telle que $h(x)=\int \varphi(\bar{u})\, d\nu_x(\bar{u})$ si $x\in \mathrm{E}_0$. En appliquant ceci à un ensemble dénombrable dense de telles fonctions φ, nous en déduisons que la fonction g admet une version continue.

PROPOSITION 4.4. — *La condition* (C_1) *est satisfaite pour tout système fortement irréductible vérifiant l'hypothèse* (D).

Démonstration. — D'après le lemme 4.3, l'équation (4.1) admet une solution continue $\{\nu_x, x\in \mathrm{E}\}$. Par hypothèse E est compact, donc l'ensemble $\{\nu_x, x\in \mathrm{E}\}$ est aussi compact. Montrons que pour tout $x\in \mathrm{E}$, ν_x est propre, ce qui établira (C_1). Remarquons d'abord que puisque E est le support de π et puisque le processus (x_n, M_n) est fellerien, $\nu_x=\mathbb{E}_x(\mathrm{M}_1^* \nu_{x_1})$ pour tout x de E. Notons $\Gamma(p)$ l'ensemble des sous-espaces projectifs de dimension p de $\mathrm{P}(\mathbb{R}^d)$. Posons pour tout x de E,

$$p(x)=\inf\{p\in\{0,\ldots,d-1\}; \exists \mathrm{H}\in\Gamma(p), \nu_x(\mathrm{H})\neq 0\},$$
$$r(x)=\max\{\nu_x(\mathrm{H}); \mathrm{H}\in\Gamma(p(x))\},$$
$$\mathrm{L}(x)=\{\mathrm{H}\in\Gamma(p(x)), \nu_x(\mathrm{H})=r(x)\}.$$

On vérifie immédiatement que pour tout $\varepsilon>0$, la fonction $p_\varepsilon(x)=\inf\{p\in\mathbb{N}; \exists \mathrm{H}\in\Gamma(p), \nu_x(\mathrm{H})\geqq\varepsilon\}$ est semi-continue inférieurement. Il en résulte que p et r sont des applications mesurables car d'une part $p=\operatorname*{Inf}_{\varepsilon>0} p_\varepsilon$ et d'autre part $\{x\in \mathrm{E}; r(x)\geqq\varepsilon\}=\{x\in \mathrm{E}; p(x)=p_\varepsilon(x)\}$. Posons $q=\operatorname*{Inf}_{x\in \mathrm{E}} p(x)$. Il faut démontrer que $q=d-1$. Considérons la fonction $f=r\, 1_{\{p=q\}}$. Si H est un sous-espace projectif de dimension q, alors pour tout x de E, $\nu_x(\mathrm{H})$ est inférieur à $f(x)$. Lorsque $p(x)=q$ nous avons donc, si $\mathrm{H}\in \mathrm{L}(x)$,

$$f(x)=\nu_x(\mathrm{H})=\mathbb{E}_x[\nu_{x_1}((\mathrm{M}_1^*)^{-1}\mathrm{H})]\leqq\mathbb{E}_x(f(x_1))=\mathrm{P}f(x).$$

Ceci implique que pour tout $x\in \mathrm{E}$ et $n\in\mathbb{N}$, $f(x)\leqq \mathrm{P}^n f(x)$. D'après (D_2), $\mathrm{P}^n f(x)$ tend vers $\alpha=\int f\, d\pi$, donc $f(x)\leqq\alpha$ partout. Il en résulte que α est non nul et que $f(x)=\alpha$, π-p. s. L'ensemble

$$\mathrm{F}=\{x\in \mathrm{E}; \mathrm{P}r(x)=\mathrm{P}f(x)=f(x)=\alpha, p(x)=q \text{ et } \mathbb{P}_x(p(x_1)=q)=1\}$$

vérifie $\pi(F)=1$. Soit $x \in F$ et $H \in L(x)$. Alors $\mathbb{P}_x$-p. s., $(M_1^*)^{-1} H \in \Gamma(p(x_1))$ d'où

$$\nu_{x_1}((M_1^*)^{-1} H) \leqq r(x_1).$$

Comme d'autre part

$$\mathbb{E}_x[\nu_{x_1}((M_1^*)^{-1} H) - r(x_1)] = \nu_x(H) - Pr(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

nous avons donc $\nu_{x_1}((M_1^*)^{-1} H) = r(x_1)$. c'est-à-dire que $H \in M_1^* L(x_1)$. Ceci montre que, $\mathbb{P}_\pi$-p. s., $L(x_0)$ est contenu dans $M_1^* L(x_1)$. On en déduit d'abord que le cardinal $g(x)$ de l'ensemble $L(x)$ vérifie $g(x_0) \leqq g(x_1)$, donc que g est constant p. s. (la fonction g est s. c. s. sur F, donc mesurable quitte à la modifier hors d'un ensemble négligeable), et ensuite que $\mathbb{P}_\pi$-p. s., $L(x_0) = M_1^* L(x_1)$. Autrement dit, si $W(x)$ est la réunion des sous-espaces orthogonaux des sous-espaces formant $L(x)$, $M_1 W(x_0) = W(x_1)$, $\mathbb{P}_\pi$-p. s. Vu l'hypothèse de forte irréductibilité ceci n'est possible que si $q = d-1$. [On vérifie qu'on peut sur F choisir de façon mesurable les espaces formant $L(x)$ en remarquant que l'application qui à un élément x de F et à un sous-espace projectif H de dimension α associe $\nu_x(H)$ est s. c. s. et donc que $\{(x, H) \text{ t. q. } x \in F, H \in L(x)\}$ est mesurable.]

Nous allons maintenant étudier la condition (C_2). Montrons d'abord les lemmes généraux suivants. Rappelons (*cf.* notations 1.4) que si U désigne la résolvante d'ordre 1 du processus multiplicatif considéré, une matrice M appartient à $S_x(y)$ lorsque (y, M) est dans le support D_x de $U((x, \mathrm{Id}), .)$ et que S_x est le support de la projection de $U((x, \mathrm{Id}), .)$ sur $\mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$.

LEMME 4.5. — *Considérons un processus markovien multiplicatif fellerien sur* $E \times \mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$. *Alors*

(i) *Pour tous* x, y, z *de* E, $S_y(z) S_x(y)$ *est contenu dans* $S_x(z)$ *et* $S_y S_x(y)$ *est contenu dans* S_x.

(ii) *Pour tout entier* p, $1 \leqq p \leqq d$, *l'ensemble* $\{x \in E; S_x \text{ est } p\text{-contractant}\}$ *est mesurable.*

Démonstration. — Notons (z_n, N_n) la chaîne de Markov admettant la résolvante U comme probabilité de transition. Soient $A \in S_y(z)$ et $B \in S_y(x)$. Pour montrer que $AB \in S_x(z)$ il suffit de vérifier que (z, AB) est dans le support de $U^2((x, \mathrm{Id}), .)$ car cette probabilité est équivalente à $U((x, \mathrm{Id}), .)$. Considérons un voisinage $V(z)$ de z et un voisinage $V(AB)$ de AB. Il existe des voisinages $V(A)$ et $V(B)$ de A et B tels que $V(A) V(B)$ soit contenu dans $V(AB)$. Nous avons

$$\begin{aligned} U^2((x, \mathrm{Id}), V(z) \times V(AB)) &= \mathbb{P}_x(z_2 \in V(z), N_2 \in V(AB)) \\ &\geqq \mathbb{P}_x(z_2 \in V(z), N_2 \in V(A) V(B)) \\ &\geqq \mathbb{P}_x(z_1 \circ \theta \in V(z), N_1 \circ \theta \in V(A), N_1 \in V(B)) \\ &\geqq \mathbb{E}_x[1_{V(B)}(N_1) U((z_1, \mathrm{Id}), V(z) \times V(A))]. \end{aligned}$$

Puisque (z, A) appartient à D_y, $U((y, \mathrm{Id}), V(z) \times V(A))$ est non nul. Le processus étant fellerien, nous en déduisons qu'il existe un voisinage $V(y)$ de y et un réel $\alpha > 0$ tels que pour tout a de $V(y)$, $U((a, \mathrm{Id}), V(z) \times V(A)) \geqq \alpha$. Il en résulte que

$$\mathbb{P}_x(z_2 \in V(z), N_2 \in V(AB)) \geqq \alpha\, \mathbb{P}_x(z_1 \in V(y), N_1 \in V(B)).$$

Le terme de droite est non nul car (y, B) est dans D_x. On voit donc que (z, AB) est dans D_x, ce qui prouve la première assertion de (i). La seconde se montre de la même façon.

Notons $M^1(d, \mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les matrices d'ordre d de norme 1. Pour tout x de E, considérons la probabilité τ_x sur $M^1(d, \mathbb{R})$, image de $U((x, \mathrm{Id}); .)$ par l'application qui à $(y, M) \in E \times \mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$ associe $M/\| M \| \in M^1(d, \mathbb{R})$. Le support de τ_x est égal à l'adhérence de $\{ M/\| M \|; M \in S_x \}$ et τ_x dépend continûment de $x \in E$. Remarquons que si C_p désigne l'ensemble des matrices de $M^1(d, \mathbb{R})$ de rang $\leqq p$ alors l'ensemble $\{ x \in E; S_x$ est p-contractant$\}$ est égal à $\{ x \in E;\ \mathrm{Supp}\, \tau_x \cap C_p \neq \varnothing \}$. Puisque C_p est compact, cet ensemble est aussi égal à $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{ x \in E; \tau_x(V_n) \neq 0) \}$, où V_n est une suite d'ouverts d'intersection égale à C_p. Il est donc mesurable, ce qui montre (ii).

LEMME 4.6. — *Considérons un système vérifiant la condition* (D). *Alors*

(i) *Pour tout x de* E, $\pi \{ y \in E;\ S_x(y) \neq \varnothing \} = 1$.

(ii) *L'ensemble* $A = \{ x \in E;\ \pi \{ y \in E;\ S_y(x) \neq \varnothing \} = 1 \}$ *vérifie* $\pi(A) = 1$ *et si* $x \in A$, $S_x(y)$ *est non vide pour tout y de* E.

(iii) *Si le système est fortement irréductible* $S_x(x)$ *est fortement irréductible pour tout x de* A.

Démonstration. — On vérifie sans difficulté que l'ensemble $\{ (x, y) \in E^2; S_x(y) \neq \varnothing \}$ est mesurable. Posons $A_x = \{ y \in E; S_x(y) \neq \varnothing \}$. Par définition $U((x, \mathrm{Id}); D_x) = 1$ et $D_x = \bigcup_{y \in E} \{ y \} \times S_x(y)$. Nous avons donc $U((x, \mathrm{Id});\ A_x \times \mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})) = 1$ d'où $\pi(A_x) = 1$ d'après la condition (D_2). Nous en déduisons en appliquant le théorème de Fubini que $\pi(A) = 1$. Si $x \in A$ et $y \in E$, choisissons un élément z de l'ensemble $\{ z \in E;\ S_z(y) \neq \varnothing$ et $S_x(z) \neq \varnothing \}$, qui est de complémentaire négligeable. Alors $S_z(y) S_x(z)$ est contenu dans $S_x(y)$ et $S_x(y)$ est non vide.

Pour montrer (iii), fixons un x de A. Il existe un sous-ensemble mesurable B de E, vérifiant $\pi(B) = 1$, et une application mesurable $M : B \to \mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$ telle que $M(y) \in S_x(y)$ pour tout $y \in B$ (*cf.* Dellacherie, Meyer [15], III.45). Comme $x \in A$, nous pouvons aussi supposer que $S_y(x)$ est non vide pour $y \in B$. Si $S_x(x)$ n'est pas fortement irréductible, il existe un nombre fini de sous-espaces vectoriels propres $V_1, \ldots, V_k$ de $\mathbb{R}^d$ tels que si $W = \bigcup_{i = 1, \ldots, k} V_i$, $S_x(x) W = W$. Posons, pour tout y de B,

$V_i(y)=M(y)V_i$ et $W(y)=\bigcup_{i=1,\ldots,k} V_i(y)$. Remarquons que si $y\in B$, $S_x(y)W=W(y)$. En effet, si N est un élément de $S_y(x)$ et M un élément de $S_x(y)$, NM est dans $S_x(x)$, d'où

$$NMW=W=NM(y)W=NW(y),$$

et $MW=W(y)$. Enfin si y et z sont dans B, $S_y(z)W(y)=S_y(z)S_x(y)W$ est contenu dans $S_x(z)W=W(z)$, d'où $S_y(z)W(y)=W(z)$. Ceci contredit la forte irréductibilité du système car $\pi(B)=1$.

PROPOSITION 4.7. — *Un système multiplicatif fortement irréductible et p-contractant satisfaisant à la condition* (D) *vérifie la condition* (C_2).

Démonstration. — Rappelons que la condition (C_2) est satisfaite si pour π-presque tout x de E et pour tout vecteur non nul $u\in\mathbb{R}^d$, il existe une suite $\{N_n, n\in\mathbb{N}\}$ de S_x telle que $N_n/\|N_n\|$ converge vers une matrice N de rang inférieur ou égal à p vérifiant $Nu\neq\{0\}$. Par hypothèse, $\pi\{y\in E;\ S_y$ est p-contractant$\}$ est non nul. Fixons un élément x de l'ensemble A défini au lemme précédent. Il existe $y\in E$ tel que $S_x(y)$ est non vide et tel que S_y est p-contractant. D'après le lemme 4.5, $S_y S_x(y)$ est contenu dans S_x donc S_x est p-contractant et il contient une suite $\{M_n, n\in\mathbb{N}\}$ telle que $M_n/\|M_n\|$ converge vers une matrice M de rang inférieur ou égal à p. Si $N\in S_x(x)$, $M_n N$ est dans S_x et $M_n N/\|M_n N\|$ converge vers $MN/\|MN\|$. Soit u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$. Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ engendré par $\{Nu; N\in S_x(x)\}$ est stable par $S_x(x)$. Il est égal à $\mathbb{R}^d$ d'après le lemme 4.6. Il existe donc $N\in S_x(x)$ tel que MNu soit non nul. Alors $M_n N$ est une suite d'éléments de S_x telle que $M_n N/\|M_n N\|$ converge vers la matrice $MN/\|MN\|$ de rang inférieur ou égal à p, vérifiant $MNu\neq 0$. Comme $\pi(A)=1$ ceci montre que la condition (C_2) est vérifiée.

Nous pouvons alors montrer le théorème 1.6. Rappellons son énoncé:

THÉORÈME 4.8. — *Considérons un système multiplicatif non singulier et fortement irréductible sur* $E\times Gl(d,\mathbb{R})$. *Alors les exposants de Lyapounov* γ_1 *et* γ_{p+1} *sont différents si et seulement si le système est p-contractant.*

Démonstration. — D'après la proposition 2.5, il suffit de considérer les systèmes à temps discret vérifiant (D). Par définition, pour π-presque tout x,

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-1}\,\mathrm{Log}(\|\Lambda^{p+1}M_n\|/\|M_n\|^{p+1})=\sum_{i=1}^{p+1}(\gamma_i-\gamma_1),\quad \mathbb{P}_x\text{-p. s.}$$

Nous en déduisons que si γ_{p+1} est différent de γ_1,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Log}(\|\Lambda^{p+1}M_n\|/\|M_n\|^{p+1})=-\infty.$$

La suite M_n est donc p-contractante. Puisque $M_n \in S_x$, $\mathbb{P}_x$-p. s., S_x est p-contractant. Ceci montre que le système est p-contractant. La réciproque est la conséquence des propositions 3.3, 4.4 et 4.7.

Si le système n'est pas fortement irréductible, il est possible que tous les exposants soient égaux, même si le système est contractant de tous ordres et est irréductible au sens où il n'existe pas de famille mesurable V_x de sous-espaces vectoriels propres de $\mathbb{R}^d$ vérifiant $M_t V_{x_0} = V_{x_t}$ p. p. (*voir* e. g. Bougerol, Lacroix [7], théorème III.6.1 et exercice II.6.6).

Donnons maintenant une condition pour que tous les exposants soient égaux, i. e. pour que $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_d$. On trouvera, dans un cadre un peu différent, un énoncé analogue dans Baxendale [5]. Nous notons dt la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$ ou la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ et nous disons qu'une famille de formes quadratiques définies positives $\{Q_x, x \in E\}$ sur $\mathbb{R}^d$ est bornée si il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que, pour tout u de $\mathbb{R}^d$ et tout x de E, $\beta \|u\|^2 \leqq Q_x(u) \leqq \alpha \|u\|^2$.

COROLLAIRE 4.9. — *Soit* $\{(x_t, M_t); t \in T; \pi\}$ *un système multiplicatif non singulier et fortement irréductible sur* $E \times Gl(d, \mathbb{R})$. *Alors tous les exposants de Lyapounov sont égaux si et seulement si il existe une famille mesurable bornée de formes quadratiques définies positives* $\{Q_x, x \in E\}$ *sur* $\mathbb{R}^d$ *telle que*

$$Q_{x_0}(u) = (\det M_t)^{-2/d} Q_{x_t}(M_t u), \qquad \forall u \in \mathbb{R}^d, \quad dt \otimes \mathbb{P}_\pi\text{-p. s.}$$

Démonstration. — Si une telle famille de formes quadratiques existe, il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$(\beta/\alpha) \|u\|^2 \leqq (\det M_t)^{-2/d} \|M_t u\|^2 \leqq (\alpha/\beta) \|u\|^2.$$

Les matrices $|\det M_t|^{-1/d} M_t$ varient donc dans un compact de $Gl(d, \mathbb{R})$ ce qui assure que les exposants sont tous égaux.

Pour établir la réciproque, remarquons d'abord que la conclusion peut s'exprimer en disant que, pour π-presque tout $x \in E$,

$$U((x, \mathrm{Id}); \{(y, M); Q_x(u) = (\det M)^{-2/d} Q_y(M u), \forall u \in \mathbb{R}^d\}) = 1.$$

Il suffit donc, d'après la proposition 2.4, de montrer ce corollaire pour les systèmes vérifiant l'hypothèse (D). Nous pouvons aussi supposer (quitte à remplacer M_n par $|\det M_n|^{-1/d} M_n$) que $\det M_n = \pm 1$. Dans ce cas les ensembles S_x sont formés de matrices de déterminant égal à ± 1. Il résulte du théorème précédent que si $\gamma_1 = \gamma_d$, il existe au moins un élément x de E pour lequel S_x n'est pas contractant d'ordre $d-1$. Nous pouvons alors extraire de toute suite d'éléments de S_x une sous-suite $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ telle que $A_n/\|A_n\|$ converge vers une matrice inversible A. En utilisant la relation

$$\lim_{n \to +\infty} \|A_n\|^{-d} = \lim_{n \to +\infty} |\det(A_n/\|A_n\|)| = |\det A|$$

on voit que $\|A_n\|$ converge, donc que la suite A_n elle-même converge. Ceci montre que S_x est compact. Alors D_x est compact. Sa projection sur E est donc égale à E, autrement dit $S_x(y)$ est non vide pour tout $y \in E$. En utilisant le lemme 4.5, nous voyons que $S_x(x)$ est un semi-groupe compact contenu dans $Gl(d, \mathbb{R})$. D'après Hewitt, Ross ([26], (9.16) et (22.23)), $S_x(x)$ est un groupe et il existe une forme quadratique définie positive Q sur $\mathbb{R}^d$ telle que $Q(u)=Q(Mu)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ et tout $M \in S_x(x)$. Choisissons de façon mesurable pour π-presque tout y de E une matrice $A(y)$ dans $S_x(y)$ (*cf.* Dellacherie, Meyer [15], III.81). Définissons la forme quadratique Q_y par $Q_y(u)=Q(A(y)^{-1}u)$ si $u \in \mathbb{R}^d$. Puisque $A(y)$ appartient au compact S_x, la famille Q_y est bornée. Soient y et z deux éléments de E et M une matrice de $S_y(z)$. Utilisons de façon répétée le lemme 4.5. L'ensemble $S_z(x)S_x(z)$ est un semi-groupe compact, donc un groupe, et il existe une matrice A de $S_x(z)$ telle que $A^{-1} \in S_z(x)$. Pour tout B de $S_x(z)$, $A^{-1}B$ appartient au groupe $S_x(x)$ d'où $B^{-1}A \in S_x(x)$ et $B^{-1}=B^{-1}AA^{-1}$ appartient à $S_x(x)S_z(x)$ donc à $S_z(x)$. Ceci montre que $S_x(z)^{-1}$ est contenu dans $S_z(x)$. En particulier $A(z)^{-1}MA(y)$ est dans $S_z(x)S_y(z)S_x(y)$ donc dans $S_x(x)$. Nous en déduisons que, pour π-presque tous $y, z \in E$,

$$\begin{aligned} Q_z(Mu) &= Q(A(z)^{-1}Mu) = Q(A(z)^{-1}MA(y)A(y)^{-1}u) \\ &= Q(A(y)^{-1}u) = Q_y(u). \end{aligned}$$

d'où $Q_{x_0}(u)=Q_{x_n}(M_n u)$, $\mathbb{P}_\pi$-p. s.

5. LE CAS DES PROCESSUS FELLERIENS

Dans cette partie, nous considérons des systèmes multiplicatifs vérifiant l'hypothèse (H) et démontrons en particulier le théorème 1.7.

DÉFINITION 5.1. — *On dit qu'une famille* $\{V_1(x), V_2(x), \ldots, V_k(x); x \in E\}$ *de sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^d$ *de dimension r est continue si pour tout* $x \in E$, *il existe un voisinage* O *de x et k applications continues* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k$ *de* O *dans la variété grassmanienne* G^r *des sous-espaces de dimension r de* $\mathbb{R}^d$ *tels que, pour tout y de* O,

$$\{\Phi_1(y), \Phi_2(y), \ldots, \Phi_k(y)\} = \{V_1(y), V_2(y), \ldots, V_k(y)\}.$$

PROPOSITION 5.2. — *Un système multiplicatif vérifiant l'hypothèse* (H) *est fortement irréductible s'il n'existe pas de famille finie continue* $\{V_1(x), V_2(x), \ldots, V_k(x); x \in E\}$ *de sous-espaces propres de* $\mathbb{R}^d$ *de même dimension, telle que pour tout* $x \in E$, *et tout* $(y, M) \in D_x$,

$$\{MV_1(x), MV_2(x), \ldots, MV_k(x)\} = \{V_1(y), V_2(y), \ldots, V_k(y)\}.$$

En particulier, si il existe un élément x de E *pour lequel* $S_x(x)$ *est fortement irréductible, le système est fortement irréductible.*

Démonstration. — Il suffit de montrer cette proposition pour les systèmes satisfaisant à la condition (D) (*cf.* preuve de la proposition 2.5 et proposition 2.6). Supposons que le système n'est pas fortement irréductible. Il existe par définition une famille finie $\{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ d'applications mesurables de E dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels propres de même dimension r telle que, $\mathbb{P}_\pi$-p. s.,

$$\{M_1 V_1(x_0), M_1 V_2(x_0), \ldots, M_1 V_k(x_0)\} = \{V_1(x_1), V_2(x_1), \ldots, V_k(x_1)\} \quad (5.1)$$

Montrons que cette famille admet une version continue. Pour cela remarquons d'abord que le nombre $n(x)$ de $V_i(x)$ distincts vérifie $n(x_1)=n(x_0)$. Il est donc constant π-p. s. et on peut supposer qu'il est égal à k. Notons G^{d-r} la variété grassmanienne formée des sous-espaces de dimension $d-r$ de $\mathbb{R}^d$. Considérons l'élément $w_i(x)$ de G^{d-r} correspondant au sous-espace vectoriel orthogonal à $V_i(x)$. Les probabilités m_x sur G^{d-r} donnant la masse $1/k$ à chaque point $w_i(x)$ vérifient $m_{x_0}=M_1^* m_{x_1}$, $\mathbb{P}_\pi$-p. s. On déduit donc du lemme 4.3 que cette gamille admet une version continue, que nous noterons encore $\{m_x, x\in E\}$, telle que $m_x=\mathbb{E}_x(M_1^* m_{x_1})$ pour tout $x\in E$. En utilisant la compacité de G^{d-r}, on voit que chaque application w_i admet une version, encore notée w_i, telle que $m_x=k^{-1}\sum_{i=1}^{k}\delta_{w_i(x)}$, pour tout $x\in E$. Notons $A(x)$ le support de m_x. On a $M_1^* m_{x_1}(A(x))=1$, $\mathbb{P}_x$-p. s., donc $A(x_1)$ est contenu dans $M_1^* A(x)$. Le cardinal $c(x)$ de $A(x)$ vérifie donc $Pc\leqq c$ partout. Puisque c est majoré par k et puisque $P_n c$ tend vers $\int c\,d\pi=k$, il en résulte que $c=k$ partout. Autrement dit, pour tout $x\in E$, les espaces $w_1(x), \ldots, w_k(x)$ sont distincts. Soit x_0 un point de E fixé et $U_1, \ldots, U_k$ des ouverts 2 à 2 disjoints tels que $w_i(x_0)\in U_i$. La famille $\{m_x, x\in E\}$ étant continue, il existe un voisinage 0 de x_0 tel que pour tout x de 0, chaque $w_i(x)$ appartient à un seul ouvert de la famille $\{U_1, \ldots, U_k\}$. Quitte à changer la numérotation on peut supposer que $w_i(x)\in U_i$. On vérifie facilement qu'alors chaque application w_i est continue sur 0, ce qui montre que la famille $\{V_i(x), i=1, \ldots, k\}$ admet une version continue [que nous noterons encore $V_i(x)$].

Soit F un borélien de E de complémentaire négligeable tel que pour tout $x\in F$, la relation (5.1) est satisfaite $\mathbb{P}_x$-p. s. La continuité des espaces $V_i(.)$ entraîne que pour tout $x\in F$ et tout $(y, M)\in D_x$,

$$\bigcup_{i=1,\ldots,k} MV_i(x) = \bigcup_{i=1,\ldots,k} V_i(y). \quad (5.2)$$

Fixons un x arbitraire de E et un élément (y, M) de D_x. Soit O_n une suite d'ouverts de $E\times Gl(d, \mathbb{R})$ d'intersection égale à (y, M). Chaque O_n est chargé par la résolvante $U((x, Id);.)$ qui dépend continûment de x. Il existe donc une suite x_n d'éléments de F tendant vers x telle que $U((x_n, \mathrm{Id}); O_n) \neq 0$ et on peut trouver $(y_n, M_n) \in D_{x_n}$ tel que (y_n, M_n) converge vers (y, M) quand n tend vers l'infini. Puisque, d'après (5.2),

$$\bigcup_{i=1, \ldots, k} M_n V_i(x_n) = \bigcup_{i=1, \ldots, k} V_i(y_n),$$

on obtient, à la limite, que (5.2) est vérifié pour l'élément (x, y, M) que nous avions fixé. En particulier, $S_x(x)$ n'est pas fortement irréductible car il conserve la réunion des espaces $V_i(x)$.

Remarque. — Si le système n'est pas fortement irréductible posons $C = \{(x, V_i(x)) \in E \times G^r; 1 \leqq i \leqq k\}$ où $\{V_1(x), V_2(x), \ldots, V_k(x); x \in E\}$ est la famille continue de sous-espaces de dimension r, distincts 2 à 2, construite dans la démonstration ci-dessus. On voit facilement que si $p: E \times G^r \to E$ désigne la première projection, (C, E, p) est un revêtement topologique d'ordre k de E. On peut en déduire que si E est connexe et simplement connexe, et si les trajectoires (x_t, M_t) sont continues, il existe une famille continue $\{V(x), x \in E\}$ de sous-espaces de dimension r telle que pour tout $x \in E$, et tout $(y, M) \in D_x$, $MV(x) = V(y)$. En particulier, $S_x(x)$ n'opère pas de façon irréductible sur $\mathbb{R}^d$.

Le théorème suivant est un peu plus précis que le théorème 1.7 [car $S_x(x)$ est contenu dans S_x et $\pi(A) = 1$]. L'ensemble A a été défini au lemme 4.6.

THÉORÈME 5.3. — *Considérons un système multiplicatif vérifiant la condition* (H). *Alors*:

(i) *S'il existe un élément* $x \in E$ *pour lequel* $S_x(x)$ *est fortement irréductible et* S_x *p-contractant, les exposants* γ_{p+1} *et* γ_1 *sont différents.*

(ii) *Si le système est fortement irréductible et si* γ_{p+1} *est différent de* γ_1, $S_x(x)$ *est fortement irréductible et p-contractant pour tout* x *de* A.

Démonstration. — D'après la proposition 2.6 il suffit de démontrer ce théorème lorsque le système vérifie la condition (D). Supposons que $S_x(x)$ est fortement irréductible et que S_x est p-contractant. Montrons que pour tout $y \in E$, S_y est p-contractant. Considérons une suite O_n, $n \in \mathbb{N}$, de boules de E de centre x dont le rayon tend vers 0. Pour chaque entier n, O_n est chargé par π et nous pouvons trouver un élément z_n de O_n pour lequel $S_y(z_n)$ est non vide (*cf.* Lemme 4.6). Choisissons une matrice N_n de $S_y(z_n)$. Quitte à remplacer la suite O_n par une suite extraite, nous pouvons supposer que $N_n/\|N_n\|$ converge vers une matrice non nulle N. Il existe une suite B_n d'éléments de S_x telle que $B_n/\|B_n\|$ converge vers une matrice B de rang p pour laquelle BN n'est pas la matrice nulle (*cf.* démonstration de la proposition 4.7). Posons

$$C_n = \{M \in \mathrm{Gl}(d, \mathbb{R}); \| M/\|M\| - B_n/\|B_n\| \| < 1/n\}.$$

Puisque $B_n \in S_x$, $U((x, \mathrm{Id}); E \times C_n) > 0$. Le processus étant fellerien, nous voyons que quitte à extraire une sous-suite de la suite O_n on peut supposer que $U((z_n, \mathrm{Id}); E \times C_n) > 0$. Il existe donc une matrice P_n de C_n telle que $P_n \in S_{z_n}$. Alors $P_n N_n \in S_y$ et $P_n N_n / \| P_n N_n \|$ converge vers la matrice $BN/\| BN \|$ de rang $\leqq p$. L'ensemble S_y est donc p-contractant. L'assertion (i) résulte alors de la proposition 5.2 et du théorème 4.8.

Pour montrer (ii), fixons un élément x de A. Nous avons déjà vu (lemme 4.6) que lorsque le système est fortement irréductible, $S_x(x)$ est fortement irréductible. Montrons que $S_x(x)$ est p-contractant lorsque $\alpha = \gamma_{p+1} - \gamma_1$ est strictement négatif. Puisque $\pi\{ y \in E;\ S_y(x) \neq \varnothing \}$ est non nul, il existe un compact K de $\mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$ pour lequel l'ensemble $F = \{ y \in E; S_y(x) \cap K \neq \varnothing \}$ vérifie $\pi(F) \neq 0$. Posons $\Omega_0 = \{ \omega \in \Omega;\ \lim_{n \to +\infty} n^{-1} \operatorname{Log} \| M_n \| = \gamma_1 \}$. Par définition $\mathbb{P}_\pi(\Omega_0) = 1$ et on voit immédiatement que $\Omega_0 = \theta^{-m}(\Omega_0)$. Ceci implique, en utilisant le lemme 2.1 et la condition (D_2), que

$$\mathbb{P}_x(\Omega_0) = \lim_{m \to +\infty} \mathbb{P}_x(\theta^{-m}(\Omega_0)) = \lim_{m \to +\infty} \mathbb{E}_x(\mathbb{P}_{x_m}(\Omega_0)) = \mathbb{P}_\pi(\Omega_0) = 1.$$

On voit de la même façon que, $\mathbb{P}_x$-*p. s.*

$$\lim_{n \to +\infty} n^{-1} \operatorname{Log} \| \Lambda^{p+1} M_n \| / \| M_n \|^{p+1} = \sum_{i=1}^{p+1} (\gamma_i - \gamma_1) \leqq \alpha$$

et, en utilisant le théorème ergodique, que

$$\lim_{n \to +\infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} 1_F(x_i) = \pi(F) > 0.$$

On peut donc trouver une suite $n(r) \in \mathbb{N}$ telle que

$$\mathbb{P}_x(x_{n(r)} \in F, \| \Lambda^{p+1} M_{n(r)} \| / \| M_{n(r)} \|^{p+1} \leqq \exp(n(r)\alpha/2)) > 0.$$

Ceci implique qu'il existe pour tout $r \in \mathbb{N}$, un élément (y_r, N_r) de D_x tel que $y_r \in F$ et tel que

$$\| \Lambda^{p+1} N_r \| / \| N_r \|^{p+1} \leqq \exp(n(r)\alpha/2).$$

Pour tout y de F, il existe un élément $M(y)$ de $S_y(x) \cap K$. Puisque $N_r \in S_x(y_r)$, $M(y_r) N_r \in S_x(x)$. Comme $M(y)$ varie dans un compact, l'inégalité précédente implique que la suite $M(y_r) N_r$ est p-contractante.

Disons qu'un sous-ensemble S de $\mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$ opère de façon fortement irréductible sur $\Lambda^p \mathbb{R}^d$ si il n'existe pas de réunion finie W de sous-espaces vectoriels propres de $\Lambda^p \mathbb{R}^d$ telle que $(\Lambda^p M) W = W$, pour tout $M \in S$.

COROLLAIRE 5.4. — *Considérons un système multiplicatif vérifiant l'hypothèse* (H). *Supposons qu'il existe un élément x de* E *tel que le plus petit sous-groupe fermé* G_x *de* $Gl(d, \mathbb{R})$ *contenant* $S_x(x)$ *est p-contractant et opère de façon fortement irréductible sur* $\Lambda^p \mathbb{R}^d$ *pour tout entier* $p \in \{1, \ldots, d-1\}$. *Alors tous les exposants de Lyapounov sont distincts.*

Démonstration. — Nos hypothèses entraînent, d'après Guivarc'h, Raugi [23], que pour tout p, l'ensemble $\{\Lambda^p M \in Gl(\Lambda^p \mathbb{R}^d); M \in S_x(x)\}$ opère de façon fortement irréductible sur $\Lambda^p \mathbb{R}^d$ et contient une suite 1-contractante. Le théorème 5.3 appliqué au système multiplicatif $\{(x_t, \Lambda^p M_t), t \in T; \pi\}$ sur $E \times Gl(\Lambda^p \mathbb{R}^d)$ entraîne donc que les deux plus grands exposants de ce système sont distincts. Ces exposants étant égaux à $\sum_{r=1}^{p} \gamma_r$ et $\sum_{r=1}^{p-1} \gamma_r + \gamma_{p+1}$, il en résulte que γ_p est différent de γ_{p+1}.

Ce corollaire ne permet pas de traiter directement le cas des matrices symplectiques. Cette situation est pourtant importante. Elle se rencontre par exemple dans l'étude des équations linéaires du second ordre sur $\mathbb{R}^d$ de la forme $y_t'' + A_t y_t = 0$, où A_t est un processus stationnaire à valeurs dans les matrices carrées symétriques et dans l'étude des flots hamiltoniens (*cf.* § 6.3). Donnons donc un critère concernant les systèmes multiplicatifs sur $E \times Sp(d, \mathbb{R})$. Rappellons que le groupe symplectique $Sp(d, \mathbb{R})$ est le sous-groupe de $Gl(2d, \mathbb{R})$ formé des matrices conservant la forme bilinéaire alternée $\eta(x, y) = \sum_{i=1}^{d} x_i y_{d+i} - x_{d+i} y_i$ sur $\mathbb{R}^{2d}$. Si $1 \leqq p \leqq d$, notons L_p le sous-espace vectoriel de $\Lambda^p \mathbb{R}^{2d}$, engendré par les p-vecteurs $u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p$ vérifiant $\eta(u_i, u_j) = 0$, pour tout $1 \leqq i, j \leqq p$. Le groupe $Sp(d, \mathbb{R})$ opère de façon naturelle sur L_p. On dit qu'un sous-ensemble S de $Sp(d, \mathbb{R})$ opère de façon fortement irréductible sur L_p si il n'existe pas de réunion finie de sous-espcaes vectoriels de L_p invariante sous l'action de S. Le corollaire suivant résulte du théorème 5.3 et de la section A.IV.3 de Bougerol, Lacroix [7]. Les exposants de Lyapounov d'un système multiplicatif sur $E \times Sp(d, \mathbb{R})$ vérifient $\gamma_p = -\gamma_{2d+1-p}$, si $1 \leqq p \leqq d$. En appliquant donc ce corollaire à $p = d$, on obtient un critère pour qu'aucun des exposants soit nul. Il peut être un outil fondamental pour montrer que le spectre d'un opérateur de Schrödinger sur un ruban à coefficients markoviens est purement ponctuel (*cf.* Bougerol, Lacroix [7], § B.4, et Delyon, Levy, Souillard [16]).

COROLLAIRE 5.5. — *Considérons un système multiplicatif sur* $E \times Sp(d, \mathbb{R})$ *vérifiant l'hypothèse* (H). *Si pour un* $p \in \{1, \ldots, d\}$, *il existe un élément x de* E *tel que* $S_x(x)$ *est p-contractant et opère de façon fortement irréductible sur* L_p, *les exposants* γ_p *et* γ_{p+1} *sont différents.*

Remarque. — Si il existe un élément x de E pour lequel le groupe fermé G_x engendré par $S_x(x)$ est algébriquement dense dans $Sp(d, \mathbb{R})$, on sait d'après Goldsheid, Margulis ([20], théorème 3) que pour tout p, $S_x(x)$ est p-contractant et opère de façon fortement irréductible sur L_p. Dans ce cas, les $2d$ exposants sont donc distincts.

La proposition suivante est une conséquence immédiate du corollaire 4.9 et du lemme 4.2 en utilisant le même argument que dans la fin de la preuve de la proposition 5.2.

PROPOSITION 5.6. — *Considérons un système multiplicatif fortement irréductible sur* $E \times Gl(d, \mathbb{R})$, *vérifiant l'hypothèse* (H). *Alors tous les exposants de Lyapounov sont égaux si et seulement si il existe une famille continue bornée de formes quadratiques définies positives* $\{Q_x, x \in E\}$ *sur* $\mathbb{R}^d$ *telle que*

$$Q_x(u) = (\det M)^{-2/d} Q_y(M u),$$
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall M \in S_x(y), \quad \forall u \in \mathbb{R}^d.$$

6. EXEMPLES

6.1 Fonctionnelles multiplicatives d'une chaîne de Markov

Le résultat suivant généralise le théorème 2 de Guivarc'h [21]:

PROPOSITION 6.1.1. — *Considérons une chaîne de Markov* $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ *sur* E *de probabilité de transition* P, *admettant une probabilité invariante ergodique* π *telle que* $P(x, dy) = k(x, y) d\pi(y)$, *où* $k(x, y) > 0$, $\pi \otimes \pi$-*p. s. Soit* M *une application mesurable de* E *dans* $Gl(d, \mathbb{R})$ *telle que* $\int \{\mathrm{Log}^+ \|M(x)\| + \mathrm{Log}^+ \|M(x)^{-1}\|\} d\pi$ *soit fini. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *posons*

$$M_n = M(x_n) M(x_{n-1}) \ldots M(x_1).$$

Supposons que le plus petit semi-groupe fermé $S(\pi)$ *de* $Gl(d, \mathbb{R})$ *portant l'image de* π *par* M *est fortement irréductible. Alors, pour tout entier* p, $1 \leq p \leq d$, *les deux exposants de Lyapounov* γ_1 *et* γ_{p+1} *du système multiplicatif* $\{(x_n, M_n), n \in \mathbb{N}; \pi\}$ *sont distincts si et seulement si* $S(\pi)$ *est p-contractant.*

Démonstration. — Il est clair que $\{(x_n, M_n); \pi\}$ est un système multiplicatif non singulier. Vérifions qu'il est fortement irréductible. Supposons qu'il existe une famille mesurable $\{W(x); x \in E\}$ de réunions finies de sous-espaces vectoriels propres de $\mathbb{R}^d$ telle que $M_1 W(x_0) = W(x_1)$, $\mathbb{P}_\pi$-p. s. Alors

$$\pi \otimes \pi \{(x, y); W(x) = M(y)^{-1} W(y)\} = 1.$$

Ceci implique d'abord qu'il existe une réunion finie W de sous-espaces propres telles que $W(x)=W$, π-p. s., et ensuite que $M(y)W=W$, π-p. s. Mais alors, $MW=W$ pour tout M de $S(\pi)$, ce qui contredit la forte irréductibilité de $S(\pi)$. Puisque la loi de $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ sous $\mathbb{P}_\pi$ est équivalente à celle de n variables aléatoires indépendantes de loi π, S_x est égal à $S(\pi)$ pour tout x de E. La proposition est donc une conséquence immédiate du théorème 1.6.

6.2. Équations différentielles stochastiques linéaires à coefficients markoviens

Soit V une variété riemanienne de classe C^∞, $X_0, X_1, \ldots, X_m$ des champs de vecteurs sur V et $A_0, A_1, \ldots, A_m$ des applications de V dans l'ensemble $M(d, \mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre d.

Considérons un processus (x_t, M_t) à valeurs dans $V\times M(d, \mathbb{R})$, solution de l'équation différentielle stochastique (au sens de Stratonovitch) suivante:

$$\begin{aligned} dx_t &= X_0(x_t)\,dt + \sum_{i=1}^m X_i(x_t)\circ d B_t^i \\ d M_t &= A_0(x_t)\,M_t\,dt + \sum_{i=1}^m A_i(x_t)\,M_t\circ d B_t^i \end{aligned} \tag{6.1}$$

où $B^1, \ldots, B^m$ sont m mouvements browniens réels indépendants. Nous supposerons que pour tout $0\leqq i\leqq m$, le champ X_i et l'application A_i sont de classe C^∞, bornés et à différentielle bornée. Ceci assure que cette équation admet pour toute condition initiale une unique solution, définie sur $\mathbb{R}^+$ tout entier. Remarquons que si N_t est le processus sur $M(d, \mathbb{R})$ vérifiant

$$d N_t = -N_t A_0(x_t)\,dt - \sum_{i=1}^m N_t A_i(x_t)\circ d B_t^i$$

alors $d(N_t M_t)=(d N_t) M_t + N_t (d M_t)=0$. Donc si $M_0=N_0=\mathrm{Id}$, N_t est l'inverse de M_t. Ceci montre en particulier que si M_0 est inversible, M_t est dans $Gl(d, \mathbb{R})$. Dans la suite nous considérons (6.1) comme une équation sur $V\times Gl(d, \mathbb{R})$. En utilisant cette remarque et le lemme de Gronwall on montre facilement que:

LEMME 6.2.1. — *Soit* (x_t, M_t) *la solution de* (6.1). *Alors:*

(i) $\{(x_t, M_t), t\in\mathbb{R}^+\}$ *est un processus markovien multiplicatif fellerien sur* $V\times Gl(d, \mathbb{R})$.

(ii) *La fonction* $E_x[\sup_{t\leqq 1}\|M\|^2 + \sup_{t\leqq 1}\|M_t^{-1}\|^2]$ *est bornée sur* V.

Nous utiliserons la notation suivante :

NOTATION 6.2.2. — *Soit* Z *une famille de champs de vecteurs* C^∞ *sur une variété* V. *Nous notons* $\mathbf{LA}(Z)$ *l'algèbre de Lie de champs de vecteurs engendrée par les éléments de* Z *et pour tout* $x \in V$ *nous posons*

$$\mathbf{LA}(Z)(x) = \{X(x) \in T_x V;\ X \in \mathbf{LA}(Z)\},$$

où $T_x V$ *désigne l'espace tangent en* x.

Considérons un système multiplicatif $\{(x_t, M_t); \pi\}$ où (x_t, M_t) est solution de (6.1). Nous noterons $E(\pi)$ le support de π. Puisque le processus (x_t, M_t) est fellerien, l'ensemble $E(\pi) \times Gl(d, \mathbb{R})$ est invariant par ce processus. Les exposants du système sur $V \times Gl(d, \mathbb{R})$ et de sa restriction à $E(\pi) \times Gl(d, \mathbb{R})$ sont les mêmes. La proposition suivante résulte du fait que l'hypothèse assure que la résolvante d'ordre 1 du processus x_t est fortement fellerienne (*cf.* Kotani [34]). Rappellons que si pour tout $x \in V$, $\mathbf{LA}\{X_1, \ldots, X_m\}(x) = T_x V$, x_t admet au plus une probabilité invariante π, qui sera donc ergodique, et qu'alors le support de π est V (*cf.* proposition 6.1 de Ichihara, Kunita [26])

PROPOSITION 6.2.3. — *Si pour tout* $x \in V$,

$$\mathbf{LA}\{X_0, X_1, \ldots, X_m\}(x) = T_x V,$$

la restriction du système $\{(x_t, M_t); \pi\}$ *à* $E(\pi) \times Gl(d, \mathbb{R})$ *satisfait à la condition* (H).

Afin d'appliquer nos critères permettant de comparer les exposants il est important de pouvoir identifier le support D_x de la résolvante $U((x, Id), .)$. A cet effet on peut utiliser le lemme suivant qui découle immédiatement du théorème du support de Stroock et Varadhan ([44] et Kunita[35], théorème 3.1).

LEMME 6.2.4. — *Considérons un processus markovien multiplicatif solution de* (6.1). *Pour toutes applications* C^∞ *par morceaux* $u_1, \ldots, u_m$ *de* $\mathbb{R}^+$ *dans* $\mathbb{R}$, *(appelées contrôles), la solution* $\{(y_t, N_t), t \in \mathbb{R}^+\}$ *de l'équation différentielle ordinaire sur* $V \times M(d, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} dy_t &= \left\{X_0(y_t) + \sum_{i=1}^m u_i(t) X_i(y_t)\right\} dt \\ dN_t &= \left\{A_0(y_t) N_t + \sum_{i=1}^m u_i(t) A_i(y_t) N_t\right\} dt, \end{aligned} \tag{6.2}$$

avec condition initiale $y_0 = x$, $N_0 = \mathrm{id}$, *est contenue dans* D_x.

Remarque. — Si pour tout x de V, $\mathbf{LA}\{X_1, \ldots, X_m\}(x) = T_x V$ il résulte de ce lemme et de Kunita ([35], proposition 4.3) que pour tout $(x, y) \in V^2$, $S_x(y)$ est non vide. L'ensemble A introduit au lemme 4.6 est donc égal à V.

Pour tout $i=0, 1, \ldots, m$, associons à l'équation (6.1) les champs de vecteurs Y_i sur la variété $V \times S^{d-1}$, où S^{d-1} est la spère unité de $\mathbb{R}^d$, et Z_i sur $V \times \mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$, définis par

$$Y_i(x, s) = (X_i(x). A_i(x)s - \langle s, A_i(x)s \rangle s), \qquad x \in V, \quad s \in S^{d-1},$$

et

$$Z_i(x, M) = (X_i(x), A_i(x)M - (d^{-1}\operatorname{trace} A_i(x))M), \qquad x \in V, \quad M \in \mathrm{Sl}(d, \mathbb{R}).$$

PROPOSITION 6.2.5. — *Soit* $\{(X_t, M_t); \pi\}$ *un système multiplicatif sur* $V \times \mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$, *où* (x_t, M_t) *est solution de* (6.1). *On suppose que* $\mathbf{LA}(X_0, X_1, \ldots, X_m)(x) = T_x V$ *pour tout* $x \in V$, *Alors*

(i) *Ce système est fortement irréductible dès qu'il existe un* $x \in E(\pi)$ *tel que pour tout* $s \in S^{d-1}$

$$\mathbf{LA}(Y_0, Y_1, \ldots, Y_m)(x, s) = T_{(x,s)}(V \times S^{d-1}).$$

(ii) *S'il existe un élément* $(x, M) \in E(\pi) \times \mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$ *pour lequel*

$$\mathbf{LA}(Z_0, Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)(x, M) = T_{(x, M)}(V \times \mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})).$$

les exposants de Lyapounov $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_d$ *sont tous distincts.*

Démonstration. — Soit (x_t, M_t) une solution vérifiant $x_0 = x$ et $M_0 = \mathrm{Id}$. Posons, pour tout vecteur unitaire s de $\mathbb{R}^d$, $s_t = M_t s / \| M_t s \|$. La formule d'Ito-Stratonovitch montre que $z_t = (x_t, s_t)$ est une diffusion sur $V \times S^{d-1}$, solution de l'équation différentielle stochastique

$$dz_t = Y_0(z_t)\,dt + \sum_{i=1}^{m} Y_i(z_t) \circ d B_t^i.$$

Par semi-continuité de la dimension de l'espace vectoriel $\mathbf{LA}(Y_0, Y_1, \ldots, Y_m)(x, s)$, l'hypothèse entraîne qu'il existe un ouvert O de V rencontrant $E(\pi)$ tel que si $(x, s) \in O \times S^{d-1}$, cet espace coïncide avec l'espace tangent. Nous savons (*voir* e. g. Sussmann [45], théorème 3.2.1) que ceci assure que pour tout (x, s) de $O \times S^{d-1}$ le support de $U'((x, s); .)$ contient un ouvert de $V \times S^{d-1}$, où U' désigne la résolvante d'ordre 1 du processus z_t. Si le système n'était pas fortement irréductible, il existerait d'après les propositions 5.2 et 6.2.3 un famille continue de sous-espaces vectoriels propres $\{V_1(x), \ldots, V_k(x); x \in E(\pi)\}$ telle que si $x \in E(\pi)$, si $W(x) = \bigcup_{i=1, \ldots, k} V_i(x)$, et si $s \in W(x)$, $U'((x, s), .)$ soit porté par l'adhérence de $\bigcup_{y \in E} \{y\} \times W(y)$. La famille $V_i(x)$ étant continue, cet ensemble ne contient pas d'ouvert de $E(\pi) \times S^{d-1}$, et nous arrivons à une contradiction.

Si on pose $N_t = (\det M_t)^{-1/d} M_t$, le processus multiplicatif (x_t, N_t) vérifie l'équation (6.1) dans laquelle on remplace les matrices $A_i(x)$ par les matrices $A_i(x)$-(d^{-1} trace $A_i(x)$). Nous pouvons donc, pour vérifier (ii), supposer sans perte de généralité que toutes les matrices $A_i(x)$ sont de trace nulle. Nous savons d'après le lemme 4.6 qu'il existe un borélien A de E tel que $\pi(A)=1$ et tel que pour tout $(x, y)\in A^2$, $S_y(x)$ n'est pas vide. Comme plus haut, l'hypothèse sur l'algèbre de Lie entraîne qu'il existe un ouvert O de V tel que, pour tout x de O, le support de $U(x, M), .)$ contient un ouvert de $V\times Sl(d, \mathbb{R})$, ce qui entraîne que D_x contient un ouvert. Choisissons un tel x dans A. Nous pouvons alors trouver un élément y de A pour lequel $S_x(y)$ contient un ouvert de $Sl(d, \mathbb{R})$. L'ensemble $S_x(x)$, contenant $S_y(x)\,S_x(y)$, contient donc un ouvert. L'assertion (ii) résulte alors du corollaire 5.4 (on peut aussi éviter d'avoir recours à Guivarc'h, Raugi [23], en utilisant directement le théorème 5.3 appliqué aux systèmes $(x_t, \Lambda^p M_t)$, $t\geqq 0$, et la proposition A.II.3 de Bougerol, Lacroix [7]).

On montre de la même façon que si les matrices $A_i(x)$ sont dans l'algèbre de Lie du groupe symplectique une condition suffisante pour que tous les exposants soient distincts est qu'il existe un élément (x, M) de $E(\pi)\times Sp(d, \mathbb{R})$ pour lequel

$$\mathrm{LA}(Z_0, Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)(x, M)=T_{(x,\,\mathrm{Id})}(V\times Sp(d, \mathbb{R})).$$

Considérons maintenant le cas particulier important où les mouvements browniens intervenant dans l'équation définissant M_t sont indépendants du processus x_t. Nous obtenons dans ce cas des résultats à peu près complets qui nous permettrons en particulier de déterminer dans [9] quelles sont les équations dont les solutions sont stables. Ce type d'équation intervient par exemple pour modéliser des phénomènes mécaniques dans un milieu turbulent. Il a déjà fait l'objet de nombreuses études dans certains cas particuliers (*voir* par exemple Arnold, Kliemann, Oejelklaus [2], Arnold, Oejelklaus, Pardoux [3], Bougerol, Lacroix [7], Hashminski [24]). Par exemple l'équation $dM_t=A_0(x_t)\,M_t\,dt$ est de ce type. Rappelons qu'on dit qu'un sous-ensemble T de $M(d, \mathbb{R})$ opère de façon irréductible sur $\mathbb{R}^d$ si il n'existe pas de sous-espace vectoriel propre H de $\mathbb{R}^d$ tel que MH est contenu dans H, pour tout $M\in T$.

THÉORÈME 6.2.6. — *Supposons qu'il existe un sous-ensemble* J *de* $\{1, \ldots, m\}$ *tel que pour* $i\in J$, A_i *est identiquement nul alors que pour* $i\notin J$, X_i *est identiquement nul. Supposons aussi que pour tout* x *de* V, $\mathrm{LA}(X_1, \ldots, X_m)(x)=T_x V$. *Alors,*

(i) *Le système* $\{(x_t, M_t);\ \pi\}$ *est fortement irréductible si et seulement si l'ensemble des matrices* $\{A_i(x);\ x\in V,\ 0\leqq i\leqq m\}$ *opère de façon irréductible sur* $\mathbb{R}^d$.

(ii) *Le système est p-contractant dès que le plus petit semigroupe fermé* S *de* $Gl(d, \mathbb{R})$ *contenant les matrices* $\{\mathrm{Exp}\, t\, A_0(x);\ t\in\mathbb{R}^+,\ x\in V\}$ *et les matrices* $\{\mathrm{Exp}\, t\, A_i(x);\ t\in\mathbb{R},\ 1\leqq i\leqq m\}$ *est p-contractant.*

LEMME 6.2.7. — *Sous les hypothèses du théorème précédent,* $S_x(x)$ *contient le semigroupe* S, *pour tout* $x\in V$.

Démonstration. — L'hypothèse sur $\mathrm{LA}(X_1, \ldots, X_m)$ entraîne (*cf.* Kunita [35], théorème 3.2) que pour tout y de V et tout $s>0$ fixés, il existe une suite de fonctions continues $y^k : \mathbb{R} \to E$, $k \in \mathbb{N}$, telle que

(*a*) $y^k(0) = y^k(s) = x$, pour tout $k \in \mathbb{N}$;

(*b*) $\lim_{k \to +\infty} y^k(t) = y$, pour tout t vérifiant $0 < t < s$;

(*c*) chaque fonction y^k est solution de l'équation (6.2), pour une famille de contrôles $\{u_i, i \in J\}$ bien choisie.

Notons N_t^k la solution de l'équation différentielle ordinaire sur $M(d, \mathbb{R})$

$$d N_t^k = \{A_0(y^k(t)) N_t^k + \sum_{i \notin J} u_i(t) A_i(y^k(t)) N_t^k\} dt, \qquad N_0^k = \mathrm{Id},$$

où $\{u_i, i \notin J\}$ sont des contrôles arbitraires fixés. Quand k tend vers l'infini, N_t^k converge si $t \leqq s$ vers la solution N_t de l'équation

$$dN_t = \{A_0(y) N_t + \sum_{i \notin J} u_i(t) A_i(y) N_t\} dt, \qquad N_0 = \mathrm{Id}.$$

D'après le lemme 6.2.4, $(y^k(s), N_s^k)$ est dans D_x, donc N_s^k est dans $S_x(x)$ car $y^k(s) = x$. Il en résulte, puisque D_x est fermé, que $N_s \in S_x(x)$. L'ensemble $S_x(x)$ contient donc l'ensemble des matrices que l'on peut obtenir comme solution de cette équation pour des contrôles $\{u_i, i \notin J\}$ arbitraires. Or on sait que cet ensemble est égal à S (*cf.* Jurdjevic, Sussmann [30], lemmes 4.5 et 6.4).

Démonstration du théorème 6.2.6. — D'après la proposition 6.2.3 et la remarque qui le précède, $\{(x_t, M_t); \pi\}$ est un système multiplicatif sur $V \times \mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$ vérifiant la condition (H). Considérons le groupe de Lie connexe G dont l'algèbre de Lie est celle engendrée par les matrices $\{A_i(x), x \in V, 0 \leqq i \leqq m\}$. On peut considérer l'équation différentielle stochastique (6.1) comme une équation sur $V \times G$. Lorsque $M_0 = \mathrm{Id}$, M_t est donc p. s. porté par G. Si il existe un sous-espace vectoriel H tel que $A_i(x) H \subset H$, pour tout $x \in E$ et $0 \leqq i \leqq m$, alors $M_t H = H$ et le système ne peut pas être fortement irréductible.

Réciproquement, si le système n'est pas fortement irréductible, il existe, d'après la proposition 5.2, un élément x de V et des sous-espaces vectoriels propres $V_1, \ldots, V_k$ de $\mathbb{R}^d$ de même dimension r, tels que pour M de $S_x(x)$, $M(\bigcup_{i=1, \ldots, k} V_i) = (\bigcup_{i=1, \ldots, k} V_i)$. L'ensemble des matrices M vérifiant cette propriété est un sous-groupe fermé de $\mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$ contenant S, donc contenant G. Puisque G est connexe, l'orbite GV_1 de V_1 dans la variété grassmanienne des sous-espaces de dimension r est connexe. Elle doit donc être réduite à un point, c'est-à-dire que $MV_1 = V_1$ pour tout

$M \in G$. Ceci implique que AV_1 est contenu dans V_1 pour toute matrice A de l'algèbre de Lie de G. En particulier, $A_i(y) V_1$ est contenu dans V_1 pour tout i et tout $y \in V$, ce qui montre que $\{A_i(y);\ y \in E,\ 0 \leqq i \leqq m\}$ n'opère pas de façon irréductible sur $\mathbb{R}^d$. L'assertion (ii) du théorème est une conséquence immédiate du lemme 6.2.7 et du théorème 5.3.

La proposition suivante précise et généralise des résultats de Molchanov [39], Arnold, Kliemann, Œjelklaus [2], Arnold, Œjelklaus, Pardoux [3] et Bougerol, Lacroix [7].

PROPOSITION 6.2.8. — *Sous les hypothèses du théorème* 6.2.6, *supposons que l'ensemble des matrices* $\{A_i(x);\ x \in V,\ 0 \leqq i \leqq m\}$ *opère de façon irréductible sur* $\mathbb{R}^d$. *Alors tous les exposants de Lyapounov* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_d$ *sont égaux si et seulement si il existe une matrice inversible* P *telle que, pour tout* x *de* V *et tout* $i = 0, \ldots, m$, *les matrices*

$$P A_i(x) P^{-1} - d^{-1} \operatorname{trace} A_i(x)) \operatorname{Id}$$

sont antisymétriques.

Démonstration. — Remarquons d'abord que si on remplace $A_i(x)$ par $A_i(x) - (d^{-1} \operatorname{trace} A_i(x)) \operatorname{Id}$, on change M_t en $(\det M_t)^{-1/d} M_t$. Nous pouvons donc sans perte de généralité supposer que toutes les matrices $A_i(x)$ sont de trace nulle. Supposons que tous les exposants sont égaux. D'après la proposition 5.6, il existe alors un élément x de V et une forme quadratique définie positive Q_x telles que $Q_x(u) = Q_x(M u)$, pour tous $M \in S_x(x)$ et $u \in \mathbb{R}^d$. Notons Q la matrice définie positive pour laquelle $Q_x(u) = u^* Q u$ (où u^* est le transposé de u). On obtient que $u^* M^* Q M u = u^* Q u$ pour tout M de $S_x(x)$, donc pour tout M du semi-groupe S (*cf.* lemme 6.2.7). Si $y \in V$ et $0 \leqq i \leqq m$, S contient les matrices $\operatorname{Exp} t A_i(y)$, $t \geqq 0$, donc $A_i(y)^* Q + Q A_i(y) = 0$. Alors $\sqrt{Q} A_i(x) \sqrt{Q^{-1}}$ est antisymétrique.

Réciproquement si une telle matrice P existe, les matrices $P A_i(x) P^{-1}$ peuvent être considérées comme des vecteurs tangents au groupe orthogonal $SO(d)$. Les matrices $P M_t P^{-1}$ sont alors orthogonales et tous les exposants de Lyapounov sont égaux.

6.3. Flots stochastiques sur les espaces fibrés vectoriels

Le but essentiel de ce paragraphe est d'indiquer rapidement comment on peut appliquer nos critères pour comparer les exposants associés à un flot de difféomorphismes aléatoires. Il est intéressant de se placer d'abord dans une situation plus générale et d'étudier les flots stochastiques linéaires sur un fibré vectoriel. Ce cadre, considéré déjà par Kifer [31], est par exemple indispensable pour étudier les processus markoviens multiplicatifs non irréductibles.

Considérons un espace fibré vectoriel topologique riemannien W de base E, de fibres de dimension d. Essentiellement, W est un espace topologique de la forme $\bigcup_{x\in E} \{x\}\times W_x$ où chaque fibre W_x est un espace vectoriel de dimension d muni d'un produit scalaire $\langle\,.,.\,\rangle_x$ variant continûment avec x. Il existe un recouvrement de E par des ouverts O_i et des applications continues φ_i de $O_i\times\mathbb{R}^d$ dans $\bigcup_{x\in O_i}\{x\}\times W_x$ s'écrivant $\varphi_i(x, u)=(x, \Phi_i(x)u))$ où $\Phi_i(x)$ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^d$ sur W_x. Nous supposerons pour simplifier que E est un espace localement compact à base dénombrable.

NOTATION 6.3.1. — *Soit* W *un fibré vectoriel de base* E, *de fibres de dimension d. Nous notons* Gl(W) *l'ensemble des applications bijectives* continues $F: W\to W$, *pour lesquelles il existe une application* $f: E\to E$ *et une famille* $F(x)$, $x\in E$, *d'isomorphismes linéaires de* W_x *sur* $W_{f(x)}$ *telles que*

$$F(x, u)=(f(x), F(x)u), \qquad x\in E, \quad u\in W_x.$$

DÉFINITION 6.3.2.. — *On appelle* flot stochastique linéaire *sur le fibré vectoriel* W, *une famille* $\{F_t;\ t\in T=\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}^+\}$ *d'applications mesurables d'un espace* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *dans* Gl(W) *telle que pour tout* t, $s\in T$, $F_{t+s}\circ F_s^{-1}$ *est indépendant de* $\{F_r;\ r\leqq s\}$ *et de même loi que* F_t.

On pose $F_t(x, u)=(f_t(x), F_t(x)u)$ si $x\in E$ et $u\in W_x$.

DÉFINITION 6.3.3. — *On appelle trivialisation mesurable bornée du fibré vectoriel* W, *une famille mesurable* $\{\Gamma(x);\ x\in E\}$, *où* $\Gamma(x)$ *est un isomorphisme linéaire de* W_x *sur* $\mathbb{R}^d$ *pour laquelle il existe* $\alpha>0$ *tel que, pour tout* x *de* E *et tout* u *de* W_x

$$\alpha\|u\|_x\leqq\|\Gamma(x)u\|\leqq\alpha^{-1}\|u\|_x.$$

Dans la suite, nous identifions un automorphisme linéaire de $\mathbb{R}^d$ avec la matrice le représentant dans la base canonique.

DÉFINITION 6.3.4. — *Soit* $\{F_t,\ t\in T\}$ *un flot stochastique linéaire sur le fibré vectoriel* W *de base* E *et de fibres de dimension d et une trivialisation mesurable bornée* Γ *de ce fibré. Considérons le processus markovien multiplicatif* $\{(x_t, M_t),\ t\in T\}$ *sur* $E\times Gl(d, \mathbb{R})$ *défini par*

$$x_t=f_t(x_0), \quad M_t=\Gamma(f_t(x_0))\,F_t(x_0)\,\Gamma(x_0)^{-1}M_0, \qquad t\in T.$$

Si π *est une probabilité invariante ergodique du processus de Markov* $\{x_t,\ t\in E\}$ *on dit que* $\{F_t,\ t\in T;\ \pi\}$ *est un système multiplicatif fortement irréductible (resp. p-contractant, resp. d'exposants de Lyapounov* $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$) *si les propriétés correspondantes sont vérifiées par le système* $\{(x_t, M_t),\ t\in T;\ \pi\}$.

On vérifie facilement que ces propriétés sont indépendantes de la trivialisation mesurable bornée choisie. Lorsque W n'admet pas de trivialisation continue, les processus markoviens multiplicatifs introduits dans la définition précédente ne sont pas felleriens (bien que nous ayons supposé que les applications F_t sont continues). Montrons que les résultats du paragraphe 5 s'adaptent néanmoins facilement à cette situation.

Introduisons des sous-ensembles intrinsèques $\Sigma_x(y)$ de $\mathrm{Isom}(W_x, W_y)$ qui jouent un rôle analogue à celui des ensembles $S_x(y)$. Soit $R(W)$ le fibré des repères associé à W. Par définition un élément de $R(W)$ est un couple $(x, \underline{e})$ où x est un élément de E et $\underline{e}=(e_1, e_2, \ldots, e_d)$ est une base de W_x. Notons U la résolvante d'ordre 1 du processus de Markov $\{G_t(x, \underline{e}), t \geqq 0\}$ sur $R(W)$ défini par

$$G_t(x, \underline{e})=(f_t(x), (F_t(x) e_1, F_t(x) e_2, \ldots, F_t(x) e_d)).$$

DÉFINITION 6.3.5. — *Pour $x, y \in E$ on pose*

$$\Sigma_x(y)=\{M \in \mathrm{I\,som}(W_x, W_y); (y, M\underline{e}) \in \mathrm{Supp}\, U((x, \underline{e}), .)\}.$$

On vérifie que $\Sigma_x(y)$ ne dépend pas de la base $\underline{e}$ de W_x. A titre d'exemple, indiquons les étapes essentielles de la démonstration du théorème suivant:

THÉORÈME 6.3.6. — *Soit $\{F_t, t \in T; \pi\}$ un système multiplicatif sur le fibré vectoriel* W *où F_t, $t \in T$, est un flot stochastique linéaire. Nous supposons que le processus $\{f_t(x), t \in T\}$ sur la base* E *vérifie la condition* (H_3). *S'il existe un élément x de* E *pour lequel $\Sigma_x(x)$ est fortement irréductible et p-contractant, les exposants γ_1 et γ_{p+1} sont différents.*

Étapes de la preuve. — (*a*) En reprenant la démonstration de la proposition 5.2, on montre d'abord que si le système $\{F_t, t \in T; \pi\}$ n'est pas fortement irréductible il existe un entier r, $0<r<d$, et une famille continue $\{V_1(x), V_2(x), \ldots, V_k(x), x \in E\}$ formée de sous-espaces vectoriels de dimension r de W_x, telle que, pour tout $t \in T$ et $x \in E$, $F_t(x)\{\bigcup_{1 \leqq i \leqq k} V_i(x)\} = \bigcup_{1 \leqq i \leqq k} V_i(f_t(x))$, $\mathbb{P}$-p.s. En particulier, $\Sigma_x(x)$ n'est pas fortement irréductible.

(*b*) On montre ensuite que si Γ est une trivialisation mesurable de W continue au point y, et si $S_x(y)$ est l'ensemble associé au processus multiplicatif $(f_t(x), \Gamma(f_t(x)) F_t(x) \Gamma(x)^{-1})$, alors $\Gamma(y) \Sigma_x(y) \Gamma(x)^{-1}=S_x(y)$, et que pour tout x, y, $z \in E$, $\Sigma_y(z) \Sigma_x(y)$ est contenu dans $\Sigma_x(z)$. On adapte alors sans difficulté la démonstration de (i) du théorème 5.3 en choisissant une trivialisation continue au voisinage de x et en montrant que le processus multiplicatif associé est p-contractant.

Considérons maintenant un flot aléatoire de difféomorphismes sur une variété riemannienne V de dimension d.

DÉFINITION 6.3.7. — *On dit qu'une famille* $\{f_t,\ t\in \mathrm{T}\}$ *de difféomorphismes aléatoires de classe* C^1 *de* V *est un flot de difféomorphismes si pour tous* t, $s\in\mathrm{T}$, $f_{t+s}\circ f_s^{-1}$ *est indépendant de* $\{f_r,\ r\leqq s\}$ *et de même loi que* f_t. *Le flot stochastique linéaire* $\{\mathrm{F}_t,\ t\in\mathrm{T}\}$ *sur le fibré tangent* T(V) *défini par*

$$\mathrm{F}_t(x,\,u)=(f_t(x),\mathrm{D}f_t(x)\,u),\qquad x\in\mathrm{V},\quad u\in\mathrm{T}_x\mathrm{V},$$

est appelé flot dérivé du flot $\{f_t\}$. *Lorsque* $\mathrm{T}=\mathbb{R}^+$, *nous supposerons que p. s. les applications* $t\to f_t(\omega)$ *sont continues à droite.*

Par définition, les exposants de Lyapounov du flot $\{f_t\}$ sont les exposants du flot dérivé (*cf.* définition 6.3.4). Ces exposants ont déjà été largement étudiés dans la littérature (*voir* par exemple les articles d'exposition de Caverhill [12] et Caverhill, Chappell, Elworthy [13] et le livre de Kifer [31]). Plutôt que de reprendre dans ce cadre tous nos résultats précédents, nous avons choisi de ne donner que quelques exemples significatifs.

Notons Σ le plus petit semi-groupe fermé de l'ensemble $\mathrm{Diff}_1(\mathrm{V})$ des difféomorphismes de V de classe C^1 tel que $\mathbb{P}(f_t\in\Sigma,\ \forall t\in\mathrm{T})=1$. Pour chaque $(x,\,y\}\in\mathrm{V}^2$, l'ensemble $\Sigma_x(y)$ associé au flot dérivé est l'ensemble des éléments M de $\mathrm{Isom}(\mathrm{T}_x\mathrm{V},\ \mathrm{T}_y\mathrm{V})$ pour lesquels il existe une suite $f_n\in\Sigma$ telle que $f_n(x)$ tend vers y et $\mathrm{D}f_n(x)$ tend vers M quand n tend vers l'infini. On vérifie par exemple facilement que

$$\{\mathrm{D}f(x)\in\mathrm{Isom}(\mathrm{T}_x\mathrm{E},\ \mathrm{T}_y\mathrm{E})\ t.\,q.\,f\in\Sigma \text{ et } f(x)=y\} \text{ est contenu dans } \Sigma_x(y).$$

Soit f un difféomorphisme de V et ν une probabilité sur V, invariante sous f et ergodique. Nous dirons que $(f;\ \nu)$ est p-contractant si $\int \mathrm{Log}^+\|\mathrm{D}f(x)\|\,d\nu(x)$ est fini et si λ_1 est différent de λ_{p+1} (où $\lambda_1\geqq\lambda_2\geqq\ldots\geqq\lambda_d$ sont les exposants de Lyapounov associés à $(f;\ \nu)$ par le théorème d'Osseledets, *cf.* Ledrappier [36]). Notons $f^{(n)}$ le n-ième itéré de f, défini par récurrence par $f^{(1)}=f$, $f^{(n+1)}=f\circ f^{(n)}$, et Γ une trivialisation du fibré tangent. Si $(f;\ \nu)$ est p-contractant, pour ν-presque tout x la suite $\{\Gamma(f^{(n)}(x))\,\mathrm{D}f^{(n)}(x)\,\Gamma(x)^{-1},\ n\in\mathbb{N}\}$ est p-contractante au sens de la définition 1.5. On déduit donc du théorème 1.6 que :

PROPOSITION 6.3.8. — *Considérons un flot de difféomorphismes aléatoires* $\{f_t,\ t\in\mathrm{T}\}$ *de classe* C^1. *Supposons que* $\{(f_t(x),\ \mathrm{D}f_t(x)),\ t\in\mathrm{T};\ \pi\}$ *soit un système non singulier fortement irréductible et qu'il existe un élément* f *de* Σ *possédant une probabilité invariante ergodique* ν *non étrangère à* π *tel que* $(f;\ \nu)$ *est p-contractant. Alors* γ_1 *est différent de* γ_{p+1}.

A titre d'exemple, étudions maintenant les exposants d'un flot de difféomorphismes aléatoires $\{f_t,\ t\in\mathrm{T}\}$ formé de transformations canoniques d'une variété symplectique compacte $(\mathrm{V},\ \omega)$ de dimension $d=2\ m$. Rappelons que, par définition, ω est une 2-forme fermée non dégénérée et qu'un difféomorphisme $f:\mathrm{V}\to\mathrm{V}$ est une transformation canonique si il conserve

ω, i. e.

$$\omega_{f(x)}(\mathrm{D}f(x)u, \mathrm{D}f(x)v) = \omega_x(u, v), \qquad \forall x \in \mathrm{V}, \quad \forall u, v \in \mathrm{T}_x\mathrm{V}.$$

Un exemple typique de tel flot est celui associé aux diffusions symplectiques étudiées en détail par Bismut [6]. En utilisant le théorème de Darboux et la compacité de V, on voit qu'il existe une trivialisation mesurable bornée $\{\Gamma(x), x \in \mathrm{V}\}$ du fibré tangent TV pour laquelle $\Gamma(x): \mathrm{T}_x\mathrm{V} \to \mathbb{R}^d$ envoie la forme ω_x sur la 2-forme $\eta = \sum_{i=1}^{m} de_i^* \wedge de_{i+m}^*$ (où $e_1^*, \ldots, e_d^*$ est la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^d$). Ceci implique que le processus markovien multiplicatif $x_t = f_t(x)$, $\mathrm{M}_t = \Gamma(x_t)\mathrm{D}f_t(x)\Gamma(x)^{-1}$ prend ses valeurs dans $\mathrm{V} \times \mathrm{S}p(d, \mathbb{R})$. En particulier les exposants de Lyapounov vérifient $\gamma_i = -\gamma_{d+1-i}$, pour $1 \leqq i \leqq m$. Identifions $\Sigma_x(x)$ avec un semi-groupe de $\mathrm{S}p(d, \mathbb{R})$ à l'aide de $\Gamma(x)$. Rappellons (*cf.* paragraphe 5) que nous notons L_p le sous-espace vectoriel de $\Lambda^p \mathbb{R}^d$, engendré par les p-vecteurs $u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p$ vérifiant $\eta(u_i, u_j) = 0$ si $1 \leqq i, j \leqq p$, et nous notons $\mathrm{E}(\pi)$ le support de π.

PROPOSITION 6.3.9. — *Considérons un flot* $\{f_t, t \in \mathrm{T}\}$ *de transformations canoniques aléatoires d'une variété symplectique compacte* (V, ω) *de dimension* $2m$. *Nous supposons que le processus* $\{f_t(x), t \in \mathrm{T}\}$ *sur* V *admet une probabilité invariante ergodique* π *et que la restriction de ce processus à* $\mathrm{E}(\pi)$ *vérifie la condition* (H_3). *Si, pour un entier p vérifiant* $1 \leqq p \leqq m$, *il existe un élément x de* $\mathrm{E}(\pi)$ *tel que* $\Sigma_x(x)$ *opère de façon fortement irréductible sur* L_p *et soit p-contractant, les exposants* γ_p *et* γ_{p+1} *sont différents.*

Démonstration. — Pour chaque $x \in \mathrm{V}$, notons $\mathrm{L}_p(x)$ le sous-espace vectoriel de $\Lambda^p \mathrm{T}_x\mathrm{V}$ engendré par

$$\{u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p \text{ t. q. } u_i \in \mathrm{T}_x\mathrm{V} \text{ et } \omega_x(u_i, u_j) = 0 \text{ si } 1 \leqq i, j \leqq p\}.$$

Considérons le fibré vectoriel $\mathrm{L}_p(\mathrm{E}(\pi))$ de base $\mathrm{E}(\pi)$ dont la fibre au-dessus de x est $\mathrm{L}_p(x)$. En utilisant la trivialisation Γ de $\mathrm{T}(\mathrm{V})$ introduite au-dessus et la preuve de la proposition A.IV.3.4 de Bougerol, Lacroix [7], nous voyons que γ_p est différent de γ_{p+1} dès que les deux plus grands exposants du flot stochastique linéaire $\{\mathrm{F}_t^{(p)}, t \in \mathrm{T}\}$ sur $\mathrm{L}_p(\mathrm{E}(\pi))$ défini par

$$\mathrm{F}_t^{(p)}(x, u) = (f_t(x), \Lambda^p \mathrm{D}f_t(x)u), \qquad x \in \mathrm{E}, \quad u \in \mathrm{L}_p(x),$$

sont distincts. En utilisant le théorème 6.3.6, on voit facilement que ceci est vérifié si $\Sigma_x(x)$ opère de façon fortement irréductible sur L_p et est p-contractant.

Remarque. — Appliquant cette proposition à $p = m$ on obtient un critère pour qu'aucun des exposants ne soit nul, c'est-à-dire pour que le flot $\{f_t, t \in \mathrm{T}\}$ soit hyperbolique. On sait que cette condition joue un rôle important dans l'étude des propriétés ergodiques de ce flot (*cf.* Ledrappier, Young [38]).

Considérons maintenant une équation différentielle stochastique

$$dx_t = X_0(x_t)\,dt + \sum_{i=1}^{m} X_i(x_t) \circ d\,B_t^i \tag{6.3}$$

sur une variété riemanienne V de dimension d, où $X_0, X_1, \ldots, X_m$ sont des champs de vecteurs de classe C^∞. Pour simplifier nous supposerons que V est compacte. Il existe alors un flot $\{f_t, t \geqq 0\}$ de difféomorphismes aléatoires de classe C^1, continu en t, tel que $\{f_t(x), t \geqq 0\}$ est la solution de cette équation partant de x (*cf.* Ikeda, Watanabe [28], chapitre V).

Montrons rapidement que l'on peut facilement identifier certaines parties des semi-groupes $\Sigma_x(x)$, $x \in V$, associés au flot dérivé de ce flot. Fixons un repère $p = (x, \underline{e})$, où $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_d)$ est une base de $T_x V$. Si X est un champ de vecteur sur V tel que $X(x) = 0$, notons N(X) la matrice $\{n_{i,j}, 1 \leqq i, j \leqq d\}$ définie par $[X, e_i](x) = \sum_{j=1}^{d} n_{i,j} e_j$. Posons

$$C(x) = \{X \in \mathbf{LA}(X_1, \ldots, X_m);\ X(x) = 0\}$$
$$K(x) = \{X \in \mathbf{LA}(X_0, X_1, \ldots, X_m);\ X(x) = 0\}.$$

Dans l'énoncé suivant, nous identifions $\Sigma_x(x)$ à une partie de $Gl(d, \mathbb{R})$ à l'aide de la base $\underline{e}$.

PROPOSITION 6.3.10. — *Pour tout x de* V, $\Sigma_x(x)$ *contient le groupe de Lie connexe dont l'algèbre de Lie est* $\{N(X), X \in C(x)\}$. *Si de plus, pour tout y de* V, $\mathbf{LA}(X_1, \ldots, X_m)(y) = T_y V$, *alors le groupe engendré par* $\Sigma_x(x)$ *contient le groupe de Lie connexe dont l'algèbre de Lie est* $\{N(X), X \in K(x)\}$.

Démonstration. — Montrons d'abord la seconde assertion. Reprenons les notations introduites dans Arnold, San Martin [4]. Posons $\sigma = \left\{X_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i X_i, u_i \in \mathbb{R}\right\}$, et notons G (resp. S) le sous-groupe (resp. le sous semi-groupe) de $\mathrm{Diff}_1(V)$ engendré par $\{\mathrm{Exp}\, t Y, t \in \mathbb{R}, Y \in \sigma\}$ (resp. $\{\mathrm{Exp}\, t Y, t \in \mathbb{R}^+, Y \in \sigma\}$). Pour tout repère $p = (x, \underline{e})$, notons $G(p)$, resp. $S(p)$, l'ensemble des transformations $Df(p)$ obtenues lorsque f parcoure l'ensemble des éléments de G, resp. de S, tels que $f(x) = x$. A l'aide du repère p, nous identifions $G(p)$, $S(p)$ et $\Sigma_x(x)$ à des sous-ensembles de $Gl(d, \mathbb{R})$. En utilisant le théorème du support ([35] ou [44]) on voit que $S(p)$ est contenu dans $\Sigma_x(x)$. Si X est un champ de vecteur sur V de groupe à un paramètre $\{\varphi_t, t \in \mathbb{R}\}$ notons BX le champ sur R(V) de groupe à un paramètre $\{D\varphi_t, t \in \mathbb{R}\}$. Nous savons, d'après Arnold, San Martin [4], que $G(p)$ est un groupe de Lie (non nécessairement connexe) dont l'algèbre de Lie contient $\{BX(p), X \in K(x)\}$. Un calcul en coordonnées locales montre que cet ensemble s'identifie à $\{N(X), X \in K(x)\}$. Le groupe de Lie connexe H_x d'algèbre de Lie $\{N(X), X \in K(x)\}$ est donc contenu dans la composante connexe de $G(p)$. Si pour tout y de V, $\mathbf{LA}(X_1, \ldots, X_m)(y) = T_y V$, le groupe engendré par $S(p)$ contient la composante connexe de $G(p)$ (*cf.* le théorème 5 et le début de la preuve du théorème 4 de Arnold, San Martin [4]). Il en résulte que le groupe engendré par $\Sigma_x(x)$ contient H_x.

Pour prouver la première assertion posons $\sigma' = \left\{ \sum_{i=1}^{m} u_i X_i, u_i \in \mathbb{R} \right\}$. Notons G′ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}_1(V)$) engendré par $\{\mathrm{Exp}\, Y;\ Y \in \sigma'\}$ et si $p = (x, \underline{e})$, notons $G'(p)$ le groupe des transformations $Df(p)$ obtenues lorsque f parcoure l'ensemble des éléments de G′ tels que $f(x) = x$. Comme au-dessus on sait que $G'(p)$ s'identifie à un groupe de Lie dont l'algèbre contient $\{N(X), X \in C(x)\}$. Puisque G′ est contenu dans l'adhérence de S, $G'(p)$ est contenu dans $S(p)$ donc dans $\Sigma_x(x)$.

Notons SL (V) le fibré principal spécial, dont la fibre $SL(V)_x$ est l'ensemble des applications linéaires de déterminant ± 1 de $\mathbb{R}^d$ sur $T_x V$. Si X est un champ de vecteurs sur V de groupe à un paramètre $\{\varphi_t, t \in \mathbb{R}\}$, introduisons le champ SL(X) sur SL(V), défini par, si $(x, g) \in SL(V)$,

$$SL(X)(x, g) = d/dt\,(\varphi_t(x), \left|\det D\varphi_t(x)\right|^{-1/d} D\varphi_t(x) \circ g)_{t=0}.$$

On trouvera dans Caverhill ([10], [11]) l'expression locale de ces champs. Le théorème suivant améliore sensiblement le théorème 3.2 de Caverhill [11]. Sa démonstration est analogue à celle de l'assertion (ii) de la proposition 6.2.5 en utilisant les arguments développés au début de cette partie. Nous supposons toujours que π est une probabilité invariante ergodique du processus x_t.

THÉORÈME 6.3.11. — *Considérons le flot de difféomorphismes aléatoires* $\{f_t, t \geq 0\}$ *associé à l'E.D.S.* (6.3). *Si pour tout* x *de* V, $\mathbf{LA}(X_1, \ldots, X_m)(x) = T_x V$, *et si il existe un élément* (x, g) *de* SL(V) *tel que*

$$\mathbf{LA}(SL(X_0), SL(X_1), \ldots, SL(X_m))(x, g) = T_{(x, g)} SL(V),$$

alors les d exposants de Lyapounov du flot dérivé sont distincts.

Pour terminer, étudions un exemple concret. Supposons que V est une hypersurface compacte de $\mathbb{R}^{d+1}$. Si $\{e_1, \ldots, e_{d+1}\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{d+1}$, notons $X_i(x)$ la projection orthogonale de e_i sur $T_x V$. Le flot stochastique associé à l'équation différentielle stochastique sur V

$$dx_t = \sum_{i=1}^{d} X_i(x_t) \circ d B_t^i$$

est appelé « flot gradient brownien ». Le générateur du processus de Markov $\{x_t, t \geq 0\}$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur V, muni de la métrique induite de celle de $\mathbb{R}^{d+1}$ (*voir* par exemple Elworthy [19], IX.10.C ou Caverhill, Chappell, Elworthy [13]). La mesure riemanienne normalisée est l'unique probabilité invariante.

PROPOSITION 6.3.12. — *Si* V *est une hypersurface compacte de* $\mathbb{R}^{d+1}$, *tous les exposants de Lyapounov du « flot gradient brownien » sont distincts, sauf si* V *est une sphère. Lorsque* V *est une sphère de rayon* r, *tous les exposants sont égaux à* $-d/2r^2$.

Démonstration. — Reprenons les notations de la preuve de la proposition 6.3.10. Pour tout repère $p=(x, \underline{e})$, identifions $G(p)$ et $\Sigma_x(x)$ à des sous-groupes de $Gl(d, \mathbb{R})$ à l'aide de p. Remarquons que l'équation n'ayant pas de terme de la forme $X_0\,dt$, $G(p)$ est égal à $S(p)$ et est donc contenu dans $\Sigma_x(x)$. Arnold et San Martin ont démontré (*cf.* [4], 2. Exemple 4) que pour tout repère orthonormal p, $G(p)$ contient le groupe d'holonomie. Or nous savons d'une part que le groupe d'holonomie d'une hypersurface compacte contient $SO(d)$ (*cf.* Koyabashi, Nomizu [33], note 18), d'autre part qu'un sous-groupe de $Gl(d, \mathbb{R})$ contenant $SO(d)$, soit contient $Sl(d, \mathbb{R})$ soit est contenu dans le groupe conforme des matrices inversibles proportionnelles à une isométrie (*cf.* Helgason [25], Ex. VI. A.3).

Supposons d'abord qu'il existe un repère $p=(x, \underline{e})$ tel que $G(p)$ contient $Sl(d, \mathbb{R})$. Alors $\Sigma_x(x)$ contient $Sl(d, \mathbb{R})$ et tous les exposants sont différents d'après le théorème 6.3.6.

Dans le cas contraire $G(p)$ est contenu dans le groupe conforme pour tout repère orthonormal p. Ceci revient à dire que si f est dans le groupe G engendré par les difféomorphismes $\left\{\operatorname{Exp}\sum_{i=1}^{m} u_i X_i,\ u_i\in\mathbb{R}\right\}$, et si $f(x)=x$, alors $Df(x)$ est proportionnel à une isométrie de $T_x V$. Montrons qu'alors chaque difféomorphisme de G est conforme. Soit g un élément de G et x un élément de V. Fixons un vecteur unitaire u de $T_x V$ et posons $\alpha=\|Dg(x)u\|_y$. Si f est un élément de G tel que $f(x)=x$, $g\circ f\circ g^{-1}$ est un élément de G laissant fixe y, il existe donc un réel $\lambda>0$ tel que $\lambda D(g\circ f\circ g^{-1})(y)$ soit une isométrie de $T_y V$. En particulier,

$$\lambda\|Dg(x)Df(x)u\|_y=\|\lambda D(g\circ f\circ g^{-1})(y)Dg(x)u\|_y=\alpha.$$

Soit v un vecteur unitaire arbitraire de $T_x V$. Puisque $G(p)$ contient $SO(d)$ on peut trouver un élément f de G tel que $f(x)=x$ et tel que $Df(x)u=v$. On en déduit que $\lambda\|Dg(x)v\|_y=\alpha$. Ceci montre que $\alpha^{-1}\lambda Dg(x)$ est une isométrie, donc que g est une application conforme. Prenant g de la forme $\operatorname{Exp} t X_i$, nous voyons que les champs gradients X_i sont conformes. On sait (*cf.* e. g. Obata [40]) que ceci implique que V est une sphère. Dans notre cas la démonstration est élémentaire. En effet, notons g la métrique euclidienne sur V, ∇ la connexion riemannienne sur V et D la connexion riemannienne sur $\mathbb{R}^{d+1}$. Par définition $X_1(x)=e_1-\langle e_1, \xi(x)\rangle \xi(x)$, où $\xi(x)$ un vecteur unitaire normal à V en x. Soit Y un champ tangent à V. On a, en utilisant les formules de Gauss et Weingarten pour une hypersurface (*cf.* Koyabashi, Nomizu [33], t. 2, p. 30),

$$\begin{aligned}(L_{X_1}g)(Y, Y) &= 2g(\nabla_Y X_1, Y) = 2g(D_Y X_1, Y) = 2g(D_Y(\langle e_1, \xi\rangle \xi), Y)\\ &= -2\langle e_1, \xi\rangle g(D_Y(\xi), Y) = 2\langle e_1, \xi\rangle g(AY, Y),\end{aligned}$$

où A est la transformation linéaire symétrique correspondant à la deuxième forme fondamentale. Il en résulte que X est conforme si et seulement si il existe des réels $\lambda(x)$ tels que $A_x=\lambda(x)\,\mathrm{Id}$. D'après le théorème VII.5.1 de Koyabashi, Nomizu [33] ceci implique que V est une sphère.

Le calcul des exposants de la sphère de rayon r est donné par exemple dans Caverhill, Chappell, Elworthy [13].

RÉFÉRENCES

[1] L. Arnold et V. Wihstutz éd., *Lyapunov Exponents, Proceedings*, Bremen, 1984. *Lecture Notes in Math*, n° **1186**, 1986, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[2] L. Arnold, W. Kliemann et E. Oejelklaus, Lyapunov Exponents of Linear Stochastic systems, *in* [1], 1986, p. 85-125.

[3] L. Arnold, E. Oejelklaus et E. Pardoux, Almost Sure and Moment Stability for Linear Ito Equations, *in* [1], 1986, p. 129-159.

[4] L. Arnold et L. San Martin, A Control Problem Related to the Lyapunov Spectrum of Stochastic Flows, *Matematica Aplicada e computational*, vol. 5, n° 1, 1986, p. 31-64.

[5] P. H. Baxendale, *Lyapunov Exponents and Relative Entropy for a Stochastic Flow of Diffeomorphisms*, Preprint, 1986.

[6] J. M. Bismut, Mécanique Aléatoire, *Lecture Notes in Math.*, n° **866**, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[7] P. Bougerol et J. Lacroix, *Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger Operators*, 1985, Birkhäuser, P. P. M., Boston, Basel, Stuttgart.

[8] P. Bougerol, Limit Theorem for Products of Random Matrices with Markovian Dependence, *Proceedings of the First International Congress of the Bernoulli Society*, 1986 (à paraître).

[9] P. Bougerol, Théorèmes limites pour les systèmes linéaires à coefficients markoviens, *Probab. Th. Rel. Fields*, vol. **78**, 1988, p. 193-221.

[10] A. Caverhill, A Formula for the Lyapunov Numbers of a Stochastic Flow. Application to a Perturbation Theorem, *Stochastics*, vol. **14**, 1985, p. 209-226.

[11] A. Caverhill, Furstenberg's Theorem for Nonlinear Stochastic Systems, *Probab. Th. Rel. Fields*, vol. **74**, 1987, p. 529-534.

[12] A. Caverhill, Lyapunov Exponents for Stochastic Flows on Manifolds, *in* [1], 1986, p. 292-307.

[13] A. Caverhill, M. Chappell et K. Elworthy, Characteristic Exponents for Stochastic Flows, *Stochastic Processes. Mathematics and Physics*, S. Albeverio *et al.* éd., *Lecture Notes in Math*, n° **1158**, 1987, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, p. 52-72.

[14] P. Chassaing, *Convergence d'un produit semi markovien de matrices et simplicité du spectre de la limite*, Preprint, 1986.

[15] C. Dellacherie et P. A. Meyer, *Probabilités et Potentiels*, tome **1**, 1975, Hermann, Paris.

[16] F. DELYON, Y. LEVY et B. SOUILLARD, Anderson Localization for One- and Quasi One-Dimensional systems, *J. Stat. Phys.*, vol. **41**, 1985, p. 375.

[17] F. DELYON, B. SIMON et B. SOUILLARD, Localization for Off-diagonal Disorder and for Continuous Schrödinger Operators, *Commun. Math. Phys.*, vol. **109**, 1987, p. 157-165.

[18] N. DUNFORD et J. SCHWARTZ, *Linear Operators*, vol. **1**, 1958, Interscience Publishers, Wiley, New York.

[19] K. ELWORTHY, Stochastic Differential Equations on Manifolds, *L. M. S. Lecture notes*, 1982, Cambridge University Press.

[20] I. J. GOLDSHEID et G. A. MARGULIS, *La condition de simplicité du spectre des exposants de Lyapounov*, 1987 (à paraître).

[21] Y. GUIVARC'H, Exposants caractéristiques des produits de matrices aléatoires en dépendance markovienne, in *Probability measures on group* 7, H. HEYER éd., *Lecture Notes in Math*, n° **1064**, 1984, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, p. 161-181.

[22] Y. GUIVARC'H et A. RAUGI, Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence, *Zeit. für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, vol. **69**, 1985, p. 187-242.

[23] Y. GUIVARC'H et A. RAUGI. Quelques remarques sur les produits de matrices aléatoires indépendantes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **304**, série I, 1987, p. 199-208.

[24] R. Z. HASHMINSKI, *Stochastic Stability of Differential Equations*, Alphen, Sijthoff and Noordhoff, 1980.

[25] S. HELGASON, *Differential Geometry, Lie groups, and Symmetric spaces*, Academic press, New York, San Francisco, London, 1978.

[26] K. HEWITT et A. ROSS, *Abstract Harmonic Analysis* 1, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1963.

[27] K. ICHIHARA et H. KUNITA, A Classification of the Second Order Degenerate Elliptic Operators and its Probabilistic Characterization, *Zeit. für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, vol. **30**, 1974, p. 235-254.

[28] N. IKEDA et S. WATANABE, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North Holland-Kodansha, Amsterdam, Tokyo, 1981.

[29] I. ISCOE, P. NEY et E. NUMMELIN, Large Deviations of Uniformly Recurrent Markov Additive Processes, *Adv. in Appl. Proba.*, vol. **6**, p. 373-412.

[30] V. JURDJEVIC et H. SUSSMANN, Control Systems on Lie Groups, *J. Diff. Equs.*, vol. **12**, 1972, p. 313-329.

[31] Y. KIFER, *Ergodic Theory of Random Transformations*, Birkhäuser, P. P. M., Boston, Basel, Stuttgart, 1986.

[32] J. F. C. KINGMAN, Subadditive Ergodic Theory, *Ann. Proba.*, vol. **1**, 1973, p. 883-909.

[33] S. KOBAYASHI et K. NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience Publishers, Wiley, New York, 1969.

[34] S. KOTANI, Limit Theorems of Hypoelliptic Diffusion Processes, in *Probability Theory and Mathemetical Statistics*, K. ITO et J. V. PROKHOROV éd., *Lecture Notes in Math.*, n° **1021**, 1983, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, p. 333-338.

[35] H. KUNITA, Supports of Diffusion Processes and Controllability Problems, *Proceed. Intern. Symp. Stochastic Diff. Equs.*, Kyoto, 1976, p. 163-185, Wiley, New York, 1978.

[36] F. LEDRAPPIER, Quelques Propriétés des Exposants Caractéristiques, in *École d'été de Saint-Flour* 12, 1982, P. L. HENNEQUIN éd., *Lecture Notes in Math.*, n° **1097**, 1984, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[37] F. LEDRAPPIER, Positivity of the Exponent for Stationary Sequences of Matrices, in [1], 1986, p. 56-73.

[38] F. LEDRAPPIER et K. L. YOUNG, *Entropy Formula for Random Transformations*, Preprint, 1986.

[39] S. A. MOLCHANOV, The Structure of Eigenfunctions of One-Dimensional Unordered Structures, *Math. U.S.S.R. Izvestija*, vol. **12**, 1978, p. 69-101.

[40] M. OBATA, The Conjectures About Conformal Transformations, *J. Diff. Geom.*, vol. **6**, 1971, p. 247-258.

[41] K. R. PARTHASARATHY, *Probability Measures on Metric Spaces*, Academic Press, New York, London, 1967.

[42] D. REVUZ, *Markov Chains*, North Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1984.

[43] G. ROYER, Croissance exponentielle de produits markoviens de matrices aléatoires, *Ann. I.H.P.*, vol. **16**, 1980, p. 49-62.

[44] D. STROOCK et S. R. S. VARADHAN, On the Support of Diffusion Processes with Applications to the Strong Maximum Principle, *Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. III*, 1972, p. 333-368.

[45] H. J. SUSSMAN, Lie Brackets, Real Analyticity and Geometric Control Theory, in *Differential geometric control theory*, Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1983, p. 1-176.

[46] A. D. VIRTSER, On the Simplicity of the Spectrum of the Lyapunov Characteristic Indices of a Product of Random Matrices, *Theor. Proba. Appl.*, vol. **28**, 1984, p. 122-135.

(*Manuscrit reçu le* 6 *avril* 1987)
(*corrigé le* 20 *janvier* 1988.)