ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

RÉMI LÉANDRE

Régularité de processus de sauts dégénérés

Annales de l'I. H. P., section B, tome 24, nº 2 (1988), p. 209-236

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1988__24_2_209_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 24, n° 2, 1988, p. 209-236. *Probabilités et Statistiques*

Régularité de processus de sauts dégénérés (II)

par

Rémi LÉANDRE

Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences de Franche-Comté, 25030 Besançon, France

RÉSUMÉ. — On généralise le théorème de Hörmander au cas de processus de sauts. On met en évidence des interactions entre différentes mesures de Lévy très dégénérées et des interactions à l'intérieur d'une unique mesure de Lévy, si bien que la loi du processus possède une densité.

Mots clés : Calcul de Malliavin, densité, mesure de Lévy.

ABSTRACT. — We generalize the Hörmander's theorem for jump processes and find interactions between degenerate Lévy measures or interactions in the Lévy measure itself, such the law of the processes has got a density.

Cet article est la suite de (L_1), où l'on mettait en évidence un processus de sauts x_t à valeurs dans R^d, qui bien que très dégénéré possédait une densité $C^\infty p_t$ grâce à des interactions intervenant entre son drift et son noyau de Lévy.

Nous considérons ici le cas où les différents noyaux de Lévy interagissent entre eux, les interactions étant beaucoup plus faibles que celles qui apparaissent dans le cas du théorème de Hörmander pour les diffusions:

Classification A.M.S. : 60 J 25, 60 J 75.

cela provient en grande partie du fait que nous utilisons des quantités qui n'ont pas de signification intrinsèque.

D'un autre côté, il y a un certain nombre de limitations dans la généralisation du théorème de Hörmander que nous effectuons dans cet article: pour obtenir des densités C^∞, on doit effectuer des hypothèses globales sur R^d; il est ainsi impossible de mettre en évidence des théorèmes locaux d'existence de densité C^∞, contrairement au cas des diffusions. En effet, les grands sauts du processus peuvent détruire la régularité C^∞ du processus, si bien que le comportement hors de la diagonale du générateur $K(x, y)$ du semi-groupe associé au processus intervient dans la régularité de la loi du processus. Ceci est très insatisfaisant du point de vue de la théorie des équations aux dérivées partielles (Tr). Enfin, partant d'un noyau de Lévy, on ne sait pas si on peut représenter le semi-groupe correspondant au moyen de la solution d'une équation différentielle stochastique aux coefficients assez réguliers pour qu'on puisse appliquer le calcul des variations stochastiques sur les processus de sauts. Celui-ci, en effet, constitue notre principal instrument, les références principales étant constituées d'un article de Bismut (B_1) et d'un article de Bichteler-Gravereaux-Jacod (B.G.J.).

Cet article est repris sur la deuxième partie de notre thèse de 3[e] cycle (L_2). Nous remerçions J. M. Bismut et J. Jacod qui ont bien voulu nous aider.

I. GÉNÉRALITÉS

Soient $z \to g_j(z)$ m fonctions de classe C^1, définies sur R^*, à valeurs dans R^+, telles que:

$$\int z^2 g_j(z)\, dz < \infty \tag{1.1}$$

$$\int_{|z|>\varepsilon} \frac{|g_j'(z)|^2}{g_j(z)}\, dz < \infty \tag{1.2}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Considérons m' mesures σ-finies positives sur R^*, $\bar{\mu}_j$, telles que:

$$\int |z|_2 \, |z| \, d\bar{\mu}_j(z) < \infty \tag{1.3}$$

Introduisons l'espace canonique $D[R^+, R^{m+m'}]$ des fonctions continues à droites limitées à gauche de R^+ dans $R^{m+m'}$. Munissons le de la filtration F_t engendrée par le processus canonique $(z_1, \ldots, z_m, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_{m'})$. On construit l'unique probabilité P qui fasse des processus z_j et $\bar{z}_j$ des P.A.I.S. indépendants de fonction caractéristiques $\Psi_j(\alpha)$ et $\bar{\Psi}_j(\alpha)$ telles que:

$$\psi_j(\alpha)=\exp\left[t\int(\exp\langle i\alpha z\rangle-1-i\alpha z)\,g_j(z)\,dz\right] \tag{1.4}$$

$$\bar{\psi}_j(\alpha)=\exp\left[t\int(\exp\langle i\alpha z\rangle-1-i\alpha z)\,d\bar{\mu}_j(z)\right] \tag{1.5}$$

On notera que z_j et $\bar{z}_j$ sont alors des martingales.

Soient D, $X_1, \ldots, X_m$, $\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_m$, $m+m'+1$ champs de vecteurs sur R^d dont toutes les dérivées de tous ordres sont bornées.

Considérons le semi-groupe P_t dont le générateur agit sur l'ensemble des fonctions C^∞ de R^d dans R à support compact par:

$$\begin{aligned} Lf(x)&=\langle D(x), \operatorname{grad} f(x)\rangle \\ &+\sum_{j=1}^{m}\int(f(x+X_j(x)z)-f(x))-z(\langle X_j(x), \operatorname{grad} f(x)\rangle)\,g_j(z)\,dz \\ &+\sum_{j=1}^{m'}\int(f(x+\bar{X}_j(x)z)-f(x)-z(\langle \bar{X}_j(x), \operatorname{grad} f(x)\rangle)\,d\bar{\mu}_j(z) \end{aligned} \tag{1.6}$$

On augmente la filtration F_t de façon habituelle (J).

P_j se réalise au moyen de l'équation différentielle stochastique suivante (J):

$$dx_t(x)=D(x_t(x))\,dt+\sum_{j=1}^{m} X_j(x_{t^-}(x))\,dz_j+\sum_{j=1}^{m'} X_j(x_{t^-}(x))\,d\bar{z}_j \tag{1.7}$$

$$x_0(x)=x$$

Lorsque x décrit $R^{d'}$ (1.7) possède une version C^∞ de solutions (M): il existe un ensemble Ω', de probabilité 1, tel que la fonction φ_t de R^d dans R^d:

$$x \overset{\varphi_t}{\rightarrow} x_t(x) \tag{1.8}$$

est C^∞ pour tout t et tout ω de Ω'.

Rappelons que lorsque ξ_t est un processus à valeurs dans un espace normé, $|\xi_t|^*$ désigne la quantité $\operatorname{Sup}_{s\leq t}|\xi_s|$. Soit (α) un multi-indice sur R^d. Il existe une constante $C((\alpha),p,t)$ qui ne dépend que du multi-indice (α), du réel $p>1$, et des normes uniformes de toutes les dérivées des champs de vecteurs D, X_i, $\bar{X}_j$ $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, m'$ telle que:

$$\mathrm{E}\left[\left|\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}}\varphi_t(x)\right|^{*p}\right] \leqq \mathrm{C}((\alpha), p, t) \tag{1.9}$$

On a alors la proposition suivante dont la démonstration se trouve dans (B.G.J.) ou dans (L_2):

PROPOSITION I1. — *Supposons qu'il existe une constante* $\mathrm{C}>0$ *telle que pour tout* $j=1\ldots m$, *et tout* $j'=1\ldots m'$:

$$\begin{aligned}&\operatorname*{Inf}_{x\in\mathbb{R}^d,\, z\in \text{support de } g_j}\left|\det\left(\mathrm{I}+\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{X}_j(x)\,z\right)\right|>\mathrm{C}\\ &\operatorname*{Inf}_{x\in\mathbb{R}^d,\, z\in \text{support de } \bar{\mu}_j}\left|\det\left(\mathrm{I}+\frac{\partial}{\partial x}\bar{\mathrm{X}}_j(x)\,z\right)\right|>\mathrm{C}\end{aligned} \tag{1.10}$$

Alors il existe un ensemble de probabilité 1, *tel que pour tout temps t, tout x de* R^d, $\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_t(x)\right)^{-1}$ *existe. De plus, il existe une constante* $\mathrm{C}((\alpha), p, t)$ *qui ne dépend que du multi-indice* (α) *sur* R^d, *de l'entier* $p>1$, *du temps t et des normes uniformes de toutes les dérivées des champs de vecteurs* D, $\mathrm{X}_1\ldots\mathrm{X}_m$, $\bar{\mathrm{X}}_1\ldots\bar{\mathrm{X}}_m$, *telles que*:

$$\mathrm{E}\left[\left|\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_t(x)\right)^{-1}\right]\right|^{*p}\right] \leqq \mathrm{C}((\alpha), p, t) \tag{1.11}$$

Remarque. — (1.10) est réalisé dès que les sauts des processeurs z_j sont assez petits par rapport à $\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{X}_j$ et dès que ceux de $\bar{z}_j$ sont assez petits par rapport à ceux de $\frac{\partial}{\partial x}\bar{\mathrm{X}}_j$. De plus, si (1.10) est réalisé, on peut montrer que φ_t est un flot (L_3).

PROPOSITION I2. — *Supposons que pour tout x et pour tout* $j=1\ldots m'$, *on a*:

$$\bar{\mu}_j\left\{\det\left(\mathrm{I}+\frac{\partial}{\partial x}\bar{\mathrm{X}}_j(x)\,z\right)=0\right\}=0 \tag{1.12}$$

Dans ce cas, il existe un ensemble Ω_x de probabilité 1 *tel que sur Ω_x, $\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_t(x)\right)^{-1}$ existe pour tout temps t.*

Preuve. — Elle repose sur le fait que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_t(x)\right)^{-1}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{t_-}(x)\right)^{-1}\left\{\sum_{j=1}^{m}\left(\mathrm{I}+\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{X}_j(x_{t_-}(x))\,\Delta z_j(t)\right)^{-1}\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{m'}\left(\mathrm{I}+\frac{\partial}{\partial x}\bar{\mathrm{X}}_j(x_{t_-}(x))\,\Delta \bar{z}_j(t)\right)^{-1}\right\} \quad (1.13)$$

(1.12) nous dit que le terme dans l'accolade est fini.

Supposons que l'on puisse trouver un entier q tel que pour $j=1,\ldots,m$:

$$\int_{|z|<1}\frac{|d/dz\,(z^{2q}g_j(z))|}{g_j(z)}\,dz<\infty. \quad (1.14)$$

Soit ν une fonction C^∞ de R dans [0, 1], à support compact, égale à z^{2q} sur un voisinage de 0. On peut faire le calcul des variations sur les processus z_j *uniquement*, en procédant comme dans (B_1), (2.30). On obtient le théorème suivant analogue au théorème (4.25) de (B_1):

THÉORÈME I 3. — *Supposons que les hypothèses de la proposition* I 1 *soient vérifiées. Considérons le processus croissant de formes quadratiques défini par:*

$$\mathrm{K}_t(x)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s\leq t}\nu(\Delta z_j(s))\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_s(x)\right)^{-1}\mathrm{X}_j(x_{s_-}(x)),\,.\,\right\rangle^2 \quad (1.15)$$

Soit $t_0>0$. Pour que la loi de $x_{t_0}(x)$ possède une densité C^∞, il suffit que pour tout $p>1$:

$$\mathrm{E}[|(\mathrm{K}_{t_0}(x))^{-1}|^p]<\infty \quad (1.16)$$

Ce théorème constitue l'analogue dans notre cas particulier des résultats obtenus dans les parties 10 et 11 de (B.G.J.).

Dans le cas où l'on ne dispose pas de version C^∞ en x de $\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_t(x)\right)^{-1}$, on ne peut « dériver » la forme quadratique $\mathrm{K}_t(x)$ que dans des formules d'intégration « par parties tronquées ». Nous obtenons seulement :

THÉORÈME I 4. — *Supposons que les hypothèses de la proposition* I 2 *soient vérifiées. La forme quadratique* $K_t(x)$ *existe dans ce cas presque sûrement. Pour que la loi de* $x_{t_0}(x)$ *possède une* densité, *il suffit que* $K_{t_0}(x)$ *soit* presque sûrement inversible.

L'analogue de ce théorème se trouve dans les parties 8 et 9 de (B.G.J.).

II. EXISTENCE DE DENSITÉ

Soit $3m+1$ champs de vecteurs sur R^d, D, $X_1, \ldots, X_m$, $\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_m$, $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_1$ dont toutes les dérivées de tous ordres sont bornées. Introduisons $3m$ processus à accroissements indépendants de sauts purs $z_1, \ldots, z_m, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m, \tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_m$, indépendants entre eux, à valeurs dans R.

On suppose que la mesure de Lévy d'un processus z_j est de la forme $g_j(z)\,dz$, chaque fonction g_j vérifiant (1.2), (1.4) et (1.14), et est telle que :

$$\operatorname*{Inf}_{g_j(z)\neq 0,\ x\in R^d}\left|\det\left(I+\frac{\partial}{\partial x}X_j(x)\,z\right)\right|>C>0 \tag{2.1}$$

On suppose que la mesure de Lévy $\bar{\mu}_j$ d'un processus $\bar{z}_j$ vérifie :

$$\operatorname*{Inf}_{z\in \text{support de } \bar{\mu}_j,\ x\in R^d}\left|\det\left(I+\frac{\partial}{\partial x}\bar{X}_j(x)\,z\right)\right|>C>0 \tag{2.2}$$

De plus $\bar{\mu}_j$ et g_j sont à rapport compact dans R, et pour tout j :

$$\int g_j(z)\,dz=\int d\bar{\mu}_j(z)=\infty \tag{2.3}$$

La mesure de Lévy des processus $\tilde{z}_j$, notée $\tilde{\mu}_j$, est par contre de *masse finie*, et vérifie, pour tout x :

$$\tilde{\mu}_j\left\{\det\left(I+\frac{\partial}{\partial x}\tilde{X}_j(x)\,z\right)\right\}=0 \tag{2.4}$$

De plus, on suppose que $\tilde{z}_j$ *est la somme de ses sauts.*

Notons $x'_t(x)$ la solution de l'équation différentielle stochastique:

$$dx'_t(x) = D(x'_t(x))\,dt + \sum_{j=1}^{m} X_j(x'_{t-}(x))\,dz_j$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} \bar{X}_j(x'_{t-}(x))\,d\bar{z}_j + \sum_{j=1}^{m} \tilde{X}_j(x'_{t-}(x))\,d\tilde{z}_j \quad (2.5)$$
$$x_0(x) = x$$

Il résulte de la première partie, que l'application $x \to \varphi'_t(x) = x'_t(x)$ est C^∞, et que, *si x est fixé*, $\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi'_t(x)\right)^{-1}$ existe presque sûrement. Posons:

$$\left.\begin{aligned} E_1(x) &= (X_1, \ldots, X_m)(x) \\ E_{l+1}(x) &= [E_l, (D, X_1, \ldots, X_m, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_m)](x) \end{aligned}\right\} \quad (2.6)$$

Cela signifie que $E_{l+1}(x)$ est égale à l'ensemble des crochets de Lie des vecteurs de E_l avec les vecteurs $D, X_1, \ldots, \bar{X}_m$ et que l'on prend la valeur de ces crochets de Lie en x.

On a le théorème:

THÉORÈME II 1. — *Supposons que*:

$$\operatorname{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E(x)\right) = R^d \quad (2.7)$$

La loi de $x'_{t_0}(x)$ possède alors une densité pour $t_0 > 0$.

Preuve. — La proposition I 2 implique que le processus croissant de formes quadratiques:

$$K'_t(x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s \leq t} \nu(\Delta z_j(s)) \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi'_s(x)\right)^{-1} X_j(x'_{s-}(x)), . \right\rangle^2 \quad (2.8)$$

existe. Le théorème I 4 montre qu'il suffit de prouver que $K'_{t_0}(x)$ est presque sûrement inversible.

Soit $x_t(x)$ la solution de l'équation différentielle stochastique:

$$dx_t(x) = D(x_t(x))\,dt + \sum_{j=1}^{m} X_j(x_{t-}(x))\,dz_j + \sum_{j=1}^{m} \bar{X}_j(x_{t-}(x))\,d\bar{z}_j \quad (2.9)$$
$$x_0(x) = x$$

On lui associe un processus croissant de formes quadratiques:

$$\mathrm{K}_t(x)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s\leqq t}\nu(\Delta z_j(s))\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_s(x)\right)^{-1}\mathrm{X}_j(x_{s-}(x)),\,.\,\right\rangle^2 \tag{2.10}$$

l'application $x\to\varphi_t(x)$ étant cette fois un difféomorphisme. De plus, chaque $\tilde{z}_j$ est somme de ces sauts et possède une mesure de Lévy de masse finie. Comme les processus $\tilde{z}_j$ sont indépendants des processus z_j, $\bar{z}_j$, on en déduit que $\mathrm{K}_t(x)$ est égal à $\mathrm{K}'_t(x)$ avant le premier temps de saut de chaque processus $\tilde{z}_j$. Comme le processus $t\to\mathrm{K}'_t(x)$ est un processus *croissant* de formes quadratiques, on en déduit qu'il suffit de montrer que $\mathrm{K}_t(x)$ est presque sûrement inversible lorsque t est non nul pour prouver le théorème.

Notons $\mathrm{V}_t(x)$ le noyau de $\mathrm{K}_t(x)$. Si $t\leqq t'$, $\mathrm{V}'_t(x)\subset\mathrm{V}_t(x)$ car $\mathrm{K}_t(x)$ est un processus *croissant* de formes quadratiques. Posons $\mathrm{V}_0^+(x)=\bigcup_{t>0}\mathrm{V}_t(x)$. $\mathrm{V}_0^+(x)$ est donc F_0^+ mesurable pour la filtration engendrée par les processus z_j, $\bar{z}_j$. Si $\mathrm{V}_0^+(x)$ n'est pas réduit à 0 P-presque sûrement, on peut en utilisant la loi du 0-1 de Blumenthal trouver un vecteur f de R^d, *déterministe et non nul*, appartenant à $\mathrm{V}_0^+(x)$.

Ceci équivaut à la propriété suivante: il existe un temps d'arrêt T, presque sûrement non nul pour P_1, tel que sur $]0,\mathrm{T}[$, $\mathrm{K}_s(x)(f)$ est nul.

Soit $\mathrm{F}_{j,t}$ la fonction de R dans R définie par:

$$z\to\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{t-}(x)\right)^{-1}\right|^2 \times\left\langle f,\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{t-}(x)\right)^{-1}\left(\mathrm{I}+\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{X}_j(x_{t-}(x))\,z\right)^{-1}\mathrm{X}_j(x_{t-}(x))\right\rangle^2 \tag{2.11}$$

Posons:

$$\tilde{\mathrm{K}}_t(x)(f)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s\leqq t}\nu(\Delta z_j(s))\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{s-}(x)\right)^{-1}\right|^2\left\langle f,\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{s-}(x)\right)^{-1} \times\left(\mathrm{I}+\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{X}_j(x_{s-}(x))\,\Delta z_j(s)\right)^{-1}\mathrm{X}_j(x_{s-}(x))\right\rangle^2 \tag{2.12}$$

Soit β un réel >0. Le processus $\tilde{Y}_t(\beta)$ défini par:

$$\tilde{Y}_t(\beta)=\exp\left[-\beta\tilde{K}_t(f)+\int_0^t ds\int\sum_{j=1}^m\{(1-\exp[-\beta F_{j,s}(z)\nu(z)])g_j(z)\}\,dz\right] \quad (2.13)$$

est alors une martingale positive. La remarque essentielle est que $\tilde{K}_t(x)(f)=0$ équivaut à $K_t(x)(f)=0$. De plus la formule (1.13) nous permet de passer de la forme $K_t(x)$ à la forme $\tilde{K}_t(x)$. On a donc lorsque $t<T$:

$$\tilde{Y}_t(\beta)=\exp\left[\int_0^t ds\sum_{j=1}^m\int(1-\exp[-\beta F_{j,s}(z)\nu(z)])g_j(z)\,dz\right] \quad (2.14)$$

Si $t<T$, on a donc:

$$\lim_{\beta\to\infty}\tilde{Y}_t(\beta)=\exp\left[\int_0^t ds\sum_{j=1}^m\int_{F_{j,s}(z)\nu(z)\neq 0}g_j(z)\,dz\right] \quad (2.15)$$

De plus,

$$E[\tilde{Y}_t(\beta)\,1_{]t,\infty[}(T)]\leqq 1 \quad (2.16)$$

L'inégalité de Fatou implique que:

$$E\left[\exp\left[\int_0^t ds\sum_{j=1}^m\int_{F_{j,s}(z)\nu(z)\neq 0}g_j(z)\,dz\right]1_{]t,\infty[}(T)\right]\leqq 1 \quad (2.17)$$

Si $F_{j,s}(0)$ est non nul, $F_{j,s}(z)\ \nu(z)$ est non nul sur un voisinage de 0. Puisque $\int g_j(z)\,dz=\infty$, $F_{j,s}(0)=0$ sur $]\!]0,T[\![$, et donc f appartient à l'orthogonal de $E_1(x)$.

Cela signifie aussi que pour tout j, on a sur $]\!]0,T[\![$:

$$\left\langle f,\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_t(x)\right)^{-1}X_j(x_t(x))\right\rangle=0 \quad (2.18)$$

La mesure de Lévy de chaque processus $t\to\left\langle f,\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_t(x)\right)^{-1}X_j(x_t(x))\right\rangle$ doit donc être de masse finie sur $[\![0,T[\![$.

Décomposons la en la somme de deux mesures de Lévy $d\bar{\nu}_j(z)$ et $d\nu_j(z)$:

– $d\nu_j(z)$ est la somme des transformées des mesures $g_i(z)\,dz$ par les applications $G_{i,j,t}(z)$ de R dans R:

$$z \to \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{t-}(x)\right)^{-1}\left(I+\frac{\partial}{\partial x}X_i(x_{t-}(x))\,z\right)^{-1} \times X_j(x_{t-}(x)+X_i(x_{t-}(x))\,z), f\right\rangle - \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{t-}(x)\right)^{-1} X_j(x_{t-}(x)), f\right\rangle \quad (2.19)$$

– $d\bar{\nu}_j(z)$ est la somme des transformées des mesures $d\bar{\mu}_i(z)$ par les applications $\bar{G}_{i,j,t}(z)$ de R dans R:

$$z \to \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{t-}(x)\right)^{-1}\left(I+\frac{\partial}{\partial x}\bar{X}_i(x_{t-}(x))\,z\right)^{-1} \times X_j(x_{t-}(x)+\bar{X}_i(x_{t-}(x))\,z), f\right\rangle - \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{t-}(x)\right)^{-1} X_j(x_{t-}(x)), f\right\rangle \quad (2.20)$$

Comme les mesures $g_j(z)\,dz$ et $\bar{\mu}_j$ sont de masse infinie (de façon plus précise, la masse de tout voisinage compacte de 0 est infinie), $G_{i,j,t}(z)$ et $\bar{G}_{i,j,t}(z)$ non nulles presque sûrement en $t<T$, sur un voisinage de 0 en z. Ceci montre que sur $[\![0, T[\![$, on a:

$$\frac{\partial}{\partial z}G_{i,j,t}(0)=\frac{\partial}{\partial z}\bar{G}_{i,j,t}(0)=0 \quad (2.21)$$

car $\int_{-1}^{1} g_j(z)\,dz=\int_{-1}^{1} d\bar{\mu}_j(z)=\infty$. Cela signifie que sur $[\![0, T[\![$,

$$\begin{aligned}&\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_t(x)\right)^{-1}[X_i, X_j](x_t(x)), f\right\rangle = 0\\ &\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_t(x)\right)^{-1}[\bar{X}_i, X_j](x_t(x)), f\right\rangle = 0\end{aligned} \quad (2.22)$$

Montrons maintenant que sur $[\![0, T[\![$,

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_t(x)\right)^{-1}[D, X_j](x_t(x)), f\right\rangle = 0 \quad (2.23)$$

[;] désignant le crochet droit associé à un couple de semi-martingales (J), la formule d'Ito implique que:

$$d\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_s(x)\right)^{-1} X_j(x_s(x))\right\}$$

$$=d\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_s(x)\right)^{-1} . X_j(x_{s-}(x))+\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{s-}(x)\right)^{-1} dX_j(x_s(x))$$

$$+d\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_s(x)\right)^{-1} ; X_j(x_s(x))\right] \quad (2.23)$$

D'après (L_2), p. 30 ou (B.G.J.), nous obtenons:

$$d\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_s(x)\right)^{-1}=-\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{s-}(x)\right)^{-1}$$

$$\times\left\{\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial}{\partial x}X_i(x_{s-}(x))\,dz_i+\frac{\partial}{\partial x}\bar{X}_i(x_{s-}(x))\,d\bar{z}_i\right]+\frac{\partial}{\partial x}D(x_s(x))\,ds\right\}$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{s-}(x)\right)^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left[\left(I+\frac{\partial}{\partial x}X_i(x_{s-}(x))\,\Delta z_i(s)\right)^{-1}-I\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial x}X_i(x_{s-}(x))\,\Delta z_i(s)\right]\right\}$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{s-}(x)\right)^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left[\left(I+\frac{\partial}{\partial x}\bar{X}_i(x_{s-}(x))\,\Delta\bar{z}_i(s)\right)^{-1}-I\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial x}\bar{X}_i(x_{s-}(x))\,\Delta\bar{z}_i(s)\right]\right\} \quad (2.24)$$

Nous obtenons aussi:

$$dX_j(x_s(x))=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x}X_j(x_{s-}(x))$$

$$\times\{X_i(x_{s-}(x))\,dz_i+\bar{X}_i(x_{s-}(x))\,d\bar{z}_i\}+\frac{\partial}{\partial x}X_j(x_{s-}(x))\,D(x_{s-}(x))\,ds$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left\{X_j(x_{s-}(x)+X_i(x_{s-}(x))\,\Delta z_i(s))\right.$$

$$\left.-X_j(x_{s-}(x))-\frac{\partial}{\partial x}X_j(x_{s-}(x))\,X_i(x_{s-}(x))\,\Delta z_i(s)\right\}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left\{\mathrm{X}_j(x_{s-}(x)+\bar{\mathrm{X}}_i(x_{s-}(x))\Delta\bar{z}_i(s))-\mathrm{X}_j(x_{s-}(x))\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{X}_j(x_{s-}(x))\bar{\mathrm{X}}_i(x_{s-}(x))\Delta\bar{z}_i(s)\right\} \quad (2.25)$$

Les sauts des processus z_i, $\bar{z}_i$ sont indépendants, car ces processus sont indépendants. L'opérateur de somme compensée $\sum^{c}$ ayant été défini dans (J), nous obtenons alors:

$$\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_t(x)\right)^{-1}\mathrm{X}_j(x_t(x)), f\right\rangle$$

$$=\langle \mathrm{X}_j(x), f\rangle+\sum_{s\leqq t}^{c}\left\langle f, \Delta\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_s(x)\right)^{-1}\mathrm{X}_j(x_s(x))\right\}\right\rangle$$

$$+\int_0^t\left\langle f, \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_s(x)\right)^{-1}[\mathrm{D}, \mathrm{X}_j](x_s(x))\right\rangle ds+\int_0^t \mathrm{A}_s(\mathrm{X}_j, f)\, ds \quad (2.26)$$

avec:

$$\mathrm{A}_s(\mathrm{X}_j, f)=\int\left\langle f, \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{s-}(x)\right)^{-1}\right.$$

$$\times\sum_{i=1}^{m}\left\{\left(\mathrm{I}+\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{X}_i(x_{s-}(x))z\right)^{-1}\mathrm{X}_j(x_{s-}(x)+\mathrm{X}_i(x_{s-}(x))z)\right.$$

$$\left.\left.-\mathrm{X}_j(x_{s-}(x))-[\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j](x_{s-}(x))z\right\}\right\rangle g_i(z)\,dz$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left\langle f, \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{s-}(x)\right)^{-1}.\int\left\{\left(\mathrm{I}+\frac{\partial}{\partial x}\bar{\mathrm{X}}_i(x_{s-}(x))z\right)^{-1}\right.\right.$$

$$\times \mathrm{X}_j(x_{s-}(x)+\bar{\mathrm{X}}_i(x_{s-}(x))z)-\mathrm{X}_j(x_{s-}(x))$$

$$\left.\left.-[\bar{\mathrm{X}}_i, \mathrm{X}_j](x_{s-}(x))z\right\}\right\rangle d\bar{\mu}_i(z) \quad (2.27)$$

Rappelons que le processus $\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_t(x) \right)^{-1} X_j(x_t(x)), f \right\rangle$ ne saute pas sur $[\![0, T[\![$, et que sur $[\![0, T[\![$, on a:

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_t(x) \right)^{-1} [X_i, X_j](x_t(x)), f \right\rangle &= 0 \\ \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_t(x) \right)^{-1} [\bar{X}_i, X_j](x_t(x)), f \right\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Dans la somme compensée qui apparaît dans (2.26) ne subsiste donc que les termes de compensation qui du fait de (2.28) s'annulent avec $\int_0^t A_s(X_j, f)\, ds$. On a donc sur $[\![0, T[\![$:

$$\left\langle f, \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_s(x) \right)^{-1} [X_j, D](x_s(x))\, ds \right\rangle = 0 \tag{2.29}$$

Donc sur $[\![0, T[\![$

$$\left\langle f, \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_t(x) \right)^{-1} [X_j, D](x_t(x)) \right\rangle = 0 \tag{2.30}$$

On achève la démonstration par récurrence. Si Y est un champ de vecteurs appartenant à E_l, on a encore $\left\langle f, \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_t(x) \right)^{-1} Y(x_t(x)) \right\rangle = 0$ sur $[\![0, T[\![$. On obtient alors sur $[\![0, T[\![$:

$$\begin{aligned} \left\langle f, \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_t(x) \right)^{-1} [Y, X_i](x_t(x)) \right\rangle &= 0 \\ \left\langle f, \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_t(x) \right)^{-1} [Y, \bar{X}_i](x_t(x)) \right\rangle &= 0 \\ \left\langle f, \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_t(x) \right)^{-1} [Y, D](x_t(x)) \right\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Donc f est orthogonal à tous les $E_l(x)$, ce qui est en contradiction avec le fait que $V_0^+(x)$ est presque sûrement non nul. □

Remarque. — On voit que les hypothèses (2.1) et (2.2) jouent un rôle purement technique dans la preuve du théorème II 1 [passage de $K'_{t_0}(x)$ à $K_{t_0}(x)$].

L'argument développé est ici beaucoup plus simple que dans le cas des diffusions, et laisse prévoir un type d'interactions non triviales différentes. Il faudrait en effet annuler toutes les dérivées de $G_{i,j,t}$ dans (2.19). C'est l'objet du théorème suivant. Pour simplifier nous ne conserverons dans l'équation (2.5) qu'un processus z_j. Nous considérerons donc l'équation:

$$\begin{aligned} dx_t(x) &= D(x_t(x))\,dt + X(x_{t-}(x))\,dz_t \\ x_0(x) &= x \end{aligned} \tag{2.32}$$

La mesure de Lévy $g(z)\,dz$ du processus z_t vérifie encore (1.2) et (1.14), mais nous ne supposerons pas cette fois que les champs X vérifient (2.1).

Introduisons la famille de champs de vecteurs E_l^n, construite par récurrence:

$$E_l^n = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} X\right)^j X; \right.$$

$$\left. \sum_{p+|q|=j} \frac{(-1)^p}{q!} \left(\frac{\partial}{\partial x} X\right)^p \frac{\partial^{(q)}}{\partial x^{(q)}} X.(X, \ldots, X), j=0, \ldots, n \right\} \tag{2.33}$$

$$E_{l+1}^n = \left\{ \sum_{p+|q|=j} \frac{(-1)^p}{q!} \left(\frac{\partial}{\partial x} X\right)^p \frac{\partial^{(q)}}{\partial x^{(q)}} Y.(X, \ldots, X), j=0, \ldots, n, Y \in E_l^n \right\}$$

PROPOSITION II 2. — *Supposons qu'au point x de R^d, $\bigcup_{l \in N} \bigcup_{n \in N} E_l^n(x)$ engendre tout l'espace R^d. La loi de $x_{t_0}(x)$ possède alors* une densité *lorsque $t_0 > 0$.*

Preuve. — Comme la mesure de Lévy du processus z_s ne possède pas d'atomes, la forme quadratique suivante est bien définie:

$$K_{t_0}(x) = \sum_{s \leqq t_0} \nu(\Delta z(s))$$

$$\times \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{s-}(x)\right)^{-1} \left(I + \frac{\partial}{\partial x} X(x_{s-}(x))\,\Delta z(s)\right)^{-1} X(x_{s-}(x)), . \right\rangle^2 \tag{2.34}$$

D'après le théorème I 4, il suffit de démontrer que $K_{t_0}(x)$ est presque sûrement inversible lorsque $t_0 > 0$ pour en déduire que la loi de $x_{t_0}(x)$ possède une densité. Supposons que $K_{t_0}(x)$ ne soit pas presque sûrement inversible: en raisonnant comme dans la proposition précédente, on montre qu'il existe un temps d'arrêt T presque sûrement non nul et un vecteur déterministe f non nul, tel que $K_t(x)(f)$ soit nulle sur l'intervalle stochastique $]\!]0, T[\![$. Posons :

$$F_t(z) = \left\langle f, \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{t-}(x)\right)^{-1}\left(I + \frac{\partial}{\partial x}X(x_{t-}(x))z\right)^{-1} X(x_{t-}(x))\right\rangle \quad (2.35)$$

En raisonnant comme dans le théorème précédent, on montre que sur $]\!]0, T[\![$, on a pour tout entier k, $\frac{\partial^{(k)}}{\partial z^{(k)}} F_t(0) = 0$, puisque l'on doit avoir sûr $]\!]0, T[\![$:

$$\int_{F_t(z) \neq 0} g(z)\, dz < \infty \quad (2.36)$$

Cela signifie que sur $]\!]0, T[\![$:

$$\left\langle f, \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{t-}(x)\right)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}X(x_{t-}(x))^k X(x_{t-}(x))\right)\right\rangle = 0 \quad (2.37)$$

Or

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_t(x)\right)^{-1} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{t-}(x)\right)^{-1}\left(I + \frac{\partial}{\partial x}X(x_{t-}(x))\Delta z_t\right)^{-1} \quad (2.38)$$

De plus l'hypothèse que $\nu(\Delta z_t)\, F_t(\Delta z_t)$ est nul sur $]\!]0, T[\![$ implique que $F_t(\Delta z_t)$ est nulle sur un ensemble partout dense de $]\!]0, T[\![$. Un argument de continuité à droite montre que sur $]\!]0, T[\![$:

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_t(x)\right)^{-1} X(x_t(x)), f\right\rangle = 0 \quad (2.39)$$

La mesure de Lévy de ce processus doit être de mesure finie sur $]\!]0, T[\![$. En appliquant (2.38), on voit que c'est l'image de $g(z)\, dz$ par l'application G_t :

$$z \to \left\langle f, \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{t-}(x)\right)^{-1}\left(I + \frac{\partial}{\partial x}X(x_{t-}(x))z\right)^{-1} X(x_{t-}(x) + X(x_{t-}(x))z)\right\rangle$$
$$- \left\langle f, \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{t-}(x)\right)^{-1} X(x_{t-}(x))\right\rangle. \quad (2.40)$$

Pour tout entier k, on doit donc avoir sur $]\!]0, T[\![$:

$$\frac{\partial^{(k)}}{\partial z^{(k)}} G_t(0) = 0 \tag{2.41}$$

car $\int_{-1}^{1} g(z)\,dz = \infty$. Sur $[\![0, T[\![$, on a donc pour tout entier k :

$$\sum_{p+|q|=k} \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{t-}(x) \right)^{-1} \frac{(-1)^p}{q!} \left(\frac{\partial}{\partial x} X(x_{t-}(x)) \right)^p \right.$$
$$\left. \times \frac{\partial^{(q)}}{\partial x^{(q)}} X(x_{t-}(x)).(X(x_{t-}(x)), \ldots, X(x_{t-}(x))), f \right\rangle = 0 \tag{2.42}$$

Cela signifie que pour tout Y de $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_1^n$, on a sur $]\!]0, T[\![$:

$$\left\langle f, \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{t-}(x) \right)^{-1} Y(x_{t-}(x)) \right\rangle = 0 \tag{2.43}$$

Supposons maintenant que pour tout Y de $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_l^n$, on aie encore (2.43) sur $[\![0, T[\![$. Par continuité à droite, on a encore sur $[\![0, T[\![$:

$$\left\langle f, \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_t(x) \right)^{-1} Y(x_t(x)) \right\rangle = 0 \tag{2.43$'$}$$

Donc la mesure de Lévy du processus $t \to \left\langle f, \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_t(x) \right)^{-1} Y(x_t(x)) \right\rangle$ est de masse finie sur $[\![0, T[\![$. Or c'est la transformée de la mesure $g(z)\,dz$ par l'application H_t :

$$z \to \left\langle f, \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{t-}(x) \right)^{-1} \left(I + \frac{\partial}{\partial x} X(x_{t-}(x))\,z \right)^{-1} Y(x_{t-}(x) + X(x_{t-}(x))\,z) \right\rangle$$
$$- \left\langle f, \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{t-}(x) \right)^{-1} Y(x_{t-}(x)) \right\rangle \tag{2.44}$$

Comme $\int_1^1 g(z)\,dz=\infty$, $\frac{\partial^{(k)}}{\partial z^{(k)}} \mathrm{H}_t(0)$ est nul sur $[\![0, \mathrm{T}[\![$ pour tout entier k, ce qui signifie que pour tout entier k, on a sur $[\![0, \mathrm{T}[\![$:

$$\left\langle f, \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_t(x)\right)^{-1} \sum_{p+|q|=k} \frac{(-1)^p}{p!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{X}(x_t(x))\right)^p \frac{\partial^{(q)}}{\partial x^{(q)}}\mathrm{Y}(x_t(x)) \times (\mathrm{X}(x_{t\_}(x))\ldots\mathrm{X}(x_t(x)))\right\rangle = 0 \quad (2.45)$$

On donc encore (2.43) pour tout Y de $\bigcup_{n=0} \mathrm{E}^n_{l+1}$. □

Remarque. — Supposons que z'_t est un processus de Poisson (en particulier ses sauts sont égaux à -1), et considérons l'équation linéaire sur R :

$$\begin{aligned} dx'_t &= x'_{t\_}\, dz_t + x'_{t\_}\, dz'_t \\ x'_0 &= 1 \end{aligned} \quad (2.46)$$

$\mathrm{P}\{x'_t=0\}$ est non nul, et donc la loi de x'_t ne possède pas de densité alors que la loi de la solution x_t de l'équation non perturbée en possède une :

$$\begin{aligned} dx_t &= x_{t\_}\, dz_t \\ x_0 &= 1 \end{aligned} \quad (2.46)'$$

Nous sommes en présence d'un phénomène de type nouveau, très génant du point de vue de la théorie des équations aux dérivées partielles (Tr), pour laquelle l'hypoellipticité d'un opérateur pseudo-différentiel se déduit de son comportement le long de la diagonale (c'est-à-dire dans ce cas de la structure des petits sauts du processus). Le théorème suivant va nous permettre d'éviter la condition génante (2.4) : nous revenons à la situation du théorème II 1, à la seule différence que nous ne supposons plus que (2.4) est vérifiée :

THÉORÈME II 3. — *Supposons* qu'en tout x de R^d, $\bigcup_{l=1}^{\infty} \mathrm{E}_l(x)$ *engendre* R^d. *Alors, pour tout x et tout $t_0>0$, la loi de la solution $x'_{t_0}(x)$ de l'équation* (2.5) *possède une densité.*

Preuve. — Appelons T le dernier temps de saut d'un des processus $\tilde{z}_j$ avant t_0. Remarquons que T *est indépendant des processus* z_j, $\bar{z}_j$. Donc pour $t>\mathrm{T}$, le processus $x'_t(x)$ a même loi que le processus $x_{t-t_1}(y)$ conditionnellement à $\mathrm{T}=t_1$ et à $x'_{\mathrm{T}}(x)=y$. D'après le théorème II 1, la loi de

$x_{t_0-t_1}(y)$ possède pour tout y de R^d une densité si $t_0 > t_1$. Comme $P\{T=t_0\}=0$, on en déduit que la loi de $x'_{t_0}(x)$ en possède une. □

III. RÉGULARITÉ DES DENSITÉS

Dans le souci de simplifier les calculs, nous ne mettrons en évidence que des interactions entre des mesures de Lévy. En effet, estimer la forme quadratique de Malliavin présente, lorsqu'il y a des interactions entre un champ de vecteurs et des noyaux de Lévy des difficultés techniques semblables à celles déjà rencontrées dans (L_2) et (B_2).

Nous considérons dans cette partie une équation stochastique plus simple que (2.5) :

$$\begin{gathered} dx_t(x) = D(x_t(x))\,dt + \sum_{j=1}^{m} X_j(x_{t-}(x))\,dz_j \\ x_0 = x \end{gathered} \tag{3.1}$$

les champs de vecteurs d, $X_1, \ldots, X_m$ et les processus z_j vérifiant toutes les conditions de la deuxième partie (en particulier (2.1)). Posons alors :

$$\begin{gathered} F_1(x) = (X_1, \ldots, X_m)(x) \\ F_l(x) = [F_{l-1}(X_1 \ldots X_m)](x) \cup F_{l-1}(x) \end{gathered} \tag{3.2}$$

THÉORÈME III 1. — *Supposons qu'il existe un entier l tel que :*

$$\operatorname*{Inf}_{x \in R^d,\, \|f\|=1} \sum_{Y \in F_l(x)} \langle Y, f \rangle^2 > 0 \tag{3.3}$$

Supposons qu'il existe un réel α appartenant à $]0, 2[$ tel que :

$$\varliminf_{z \to 0} |z|^{1+\alpha} g_j(z) > 0 \tag{3.4}$$

La loi de $x_{t_0}(x)$ possède alors une densité C^∞ pour $t_0 > 0$.

Avant d'effectuer la démonstration de ce théorème, qui constitue l'objet de cette partie, on remarquera que comme dans (B_2), (B.G.J.) et (L_1), on doit supposer que la condition de Hörmander est vérifiée globalement sur R^d pour que le semi-groupe soit régularisant, ce qui est insuffisant du point de vue de la théorie des équations aux dérivées partielles (Tr).

Avant de commencer la démonstration, donnons quelques notations : soit $f_i(\varepsilon)$ une famille d'applications de R dans R, paramétrée par un paramètre i appartenant à un ensemble I. Nous dirons que $f_i(\varepsilon)=o_i(1)$ dès que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_i(\varepsilon)=0$ uniformément en i, et que $f_i(\varepsilon)=o_i(\varepsilon^\infty)$ si pour tout $p>1, \dfrac{f_i(\varepsilon)}{\varepsilon^p}=o_i(1)$.

Dans le cas où $f_i(\varepsilon)$ est une variable aléatoire dépendant de ω appartenant à l'ensemble probabilisé (Ω, P), nous dirons que $f_i(\varepsilon)=o_i(\varepsilon)$ s'il existe un ensemble Ω_1 de probabilité 1 tel que $\sup\limits_{\omega \in \Omega_1,\, i \in I} |f_i(\varepsilon)|$ tende vers 0 quand ε tend vers 0. On donne alors une signification évidente au fait que $f_i(\varepsilon)=o_i(\varepsilon^\infty)$.

Nous pouvons maintenant évoquer le principe de la preuve du théorème III 1: en utilisant le théorème I 3, on se ramène à montrer que l'inverse d'une certaine forme quadratique est dans tous les L^p. Pour ce faire, on trouve un processus critère qui permet d'assurer que la forme quadratique n'est pas trop petite si le processus critère est assez grand sur un intervalle de temps assez grand; pour ce faire, on détermine un nouveau processus critère, et ainsi de suite...

Preuve du théorème:

Première réduction. — Utilisons le théorème I 3: il suffit de prouver que pour $\|f\|=1$:

$$P\{K_{t_0}(x)(f)<\varepsilon\}=o_f(\varepsilon^\infty) \tag{3.5}$$

$K_t(x)$ étant le processus croissant de formes quadratiques:

$$\sum_{s \leq t} \sum_{j=1}^{m} \nu(\Delta z_j(s)) \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{s-}(x)\right)^{-1} \times \left(I+\frac{\partial}{\partial x}X_j(x_{s-}(x))\,\Delta z_j(s)\right)^{-1} X_j(x_s(x)), \right\rangle^2 \tag{3.6}$$

D'après (1.11), on a pour $k \leq \dfrac{t_0}{\varepsilon}$, entier:

$$P\left\{\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{k\varepsilon}(x)\right)^{-1}\right|^* > \varepsilon^{-1}\right\}=o_k(\varepsilon^\infty) \tag{3.7}$$

Donc il suffit de montrer que pour $k \leqq \frac{t_0}{\varepsilon}$, $\|f\|=1$, on a:

$$P\{K_{(k+1)\varepsilon}(x)(\bar{f})-K_{k\varepsilon}(x)(\bar{f})<\varepsilon^r \mid F_{k\varepsilon}\}=o_{f,k}(1) \tag{3.8}$$

pour

$$\bar{f}=\left|{}^t\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{k\varepsilon}(x)\right)^{-1}\right|^{-1} f \tag{3.9}$$

et pour un entier r convenablement choisi.

Notons $\nu_t(f,k,\varepsilon)$ la mesure de Lévy de $K_t(x)(\bar{f})$ par rapport à la loi conditionnelle de P par rapport à $F_{k,\varepsilon}$: cela signifie que $dt \otimes \nu_t(f,k,\varepsilon)$ est le compensateur de la mesure des sauts de $K_t(x)(\bar{f})$ par rapport à cette loi conditionnelle. Pour montrer (3.8), il suffit de prouver

$$P\left\{\left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} dt\,_{]\varepsilon^{-r_1},\infty[}\left(\int_{|u|>\varepsilon^r}^{\infty} d\nu_t(f,k,\varepsilon)\right)>\varepsilon^{r_2} \mid F_{k\varepsilon}\right\}=o_{f,k}(1) \tag{3.10}$$

pour $r_1>r_2$ et r convenablement choisis. En effet, introduisons le processus défini à partir du temps $k\varepsilon$:

$$Y_t(f,k,\varepsilon)=\exp\Big[-\sum_{k\varepsilon\leqq s\leqq t} 1_{]\varepsilon^r.,+\infty[}(\Delta K_s(x)(\bar{f}))\Big]$$

$$\exp\left[\int_{k\varepsilon}^{t} ds\int_{|u|>\varepsilon^r}(1-e^{-1})\,d\nu_s(f,k,\varepsilon)(u)\right] \tag{3.11}$$

C'est une martingale par rapport à la loi conditionnelle de P suivant $F_{k\varepsilon}$ (J). Nous avons donc:

$$E[Y_{(k+1)\varepsilon}(f,k,\varepsilon) \mid F_{k\varepsilon}]=1 \tag{3.12}$$

(3.11) implique donc que

$$P\{\sum_{k\varepsilon\leqq s\leqq(k+1)\varepsilon} 1_{]\varepsilon^r,\infty[}(\Delta K_s(x)(\bar{f}))=0 \mid F_{k\varepsilon}\}$$

$$=o_{f,k}(1)+\exp\langle(e^{-1}-1)\varepsilon^{r_2-r_1}\rangle=o_{f,k}(1) \tag{3.13}$$

car $r_1>r_2$. Donc:

$$P\{K_{(k+1)\varepsilon}(x)(\bar{f})-K_{k\varepsilon}(x)(\bar{f})<\varepsilon^r \mid F_{k\varepsilon}\}=o_{f,k}(1) \tag{3.14}$$

car $K_t(x)(\bar{f})$ possède avec une probabilité tendant vers 1 uniformément quand ε tend vers 0 un saut en module plus grand que ε^r sur $[k\,\varepsilon, (k+1)\,\varepsilon]$, et car le processus $t \to K_t(x)(\bar{f})$ est croissant positif.

Deuxième réduction. — Nous nous sommes ramenés à l'étude de la «concentration» en petits sauts de la mesure de Lévy du processus $K_t(x)(\bar{f})$ sur $[k\,\varepsilon, (k+1)\,\varepsilon]$, conditionnée par rapport à $F_{k\,\varepsilon}$. Or nous possédons un *critère numérique* nous permettant d'estimer cette concentration. En effet, remarquons que l'on peut choisir γ, γ_1 et α_1 trois réels positifs pour que si le processus critère $\mathrm{Cr}(t, f, k, \varepsilon)$ défini par

$$\mathrm{Cr}(t_-, f, k, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{m} \left| \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{t-}(x) \right)^{-1} X_j(x_{t-}(x)), \bar{f} \right\rangle \right| \geqq \eta \quad (3.15)$$

est supérieur à η et si $\left| \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{t-}(x) \right| \leqq \eta^{\gamma}$, l'on ait:

$$\int_{|u|>\varepsilon} d\nu_t(f, k, \varepsilon)(u) \geqq C\,\varepsilon^{-\alpha_1} \quad (3.16)$$

pour $\varepsilon \leqq \eta^{\gamma_1}$. Cela provient d'abord du fait que $\nu_t(f, k, \varepsilon)$ est la somme des transformées des mesures de Lévy $g_j(z)\,dz$ par les applications $F_{j,t}$:

$$z \to \nu(z) \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{t-}(x) \right)^{-1} \left(I + \frac{\partial}{\partial x} X_j(x_{t-}(x))\,z \right)^{-1} X_j(x_{t-}(x)), \bar{f} \right\rangle^2 \quad (3.17)$$

qui sont supérieures à $\nu(z)\,\eta^{-\gamma} \left| \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{t-}(x) \right)^{-1} X_j(x_{t-}(x)), \bar{f} \right\rangle^2 \right.$ dès que z est inférieur à une certaine constante positive C. De plus $\nu(z)$ est égal à z^{2q} sur un voisinage de 0. On a donc:

$$\int_{|u|>\varepsilon} \int d\nu_t(f, k, \varepsilon)(u) \geqq C_1 \int_{(\varepsilon/\eta)^{1/2q}}^{C_2} g_j(z)\,dz \quad (3.18)$$

pour un j convenable. Il ne reste plus qu'à appliquer (3.4) dans (3.18) pour en déduire (2.16).

Quitte à poser le cas échéant $\varepsilon'=\varepsilon^{p_1}$ pour p_1 bien choisi, on se ramène grâce à (3.7), (3.15) et (3.16) à montrer que:

$$P\left\{\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} 1_{]\varepsilon^n,\infty[}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{s-}(x_{s-}(x))\right)^{-1},\bar{f}\right\rangle\right|\right)ds\right|<\varepsilon^{n_1}\mid F_{k\varepsilon}\right\}$$

$$=o_{f,k}(1) \quad (3.19)$$

pour n et n_1 deux entiers positifs bien choisis.

Troisième réduction. — Grâce à la formule (3.19), nous nous sommes ramenés à un problème analogue à celui des diffusions (St). Or

$$\sum_{j=1}^{m}\left|\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{t-}(x)\right)^{-1}X_j(x_{t-}(x)),\bar{f}\right\rangle\right|=\sum_{j=1}^{m}\left|\mathrm{Cr}(t_-,X_j,f,k,\varepsilon)\right| \quad (3.20)$$

avec

$$\mathrm{Cr}(t,Y,f,k,\varepsilon)=\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_t(x)\right)^{-1}Y(x_t(x)),\bar{f}\right\rangle \quad (3.21)$$

si Y est un champ de vecteurs dont toutes les dérivées de tous ordres sont bornées et si t appartient à $[k\varepsilon,(k+1)\varepsilon]$.

Appliquons maintenant la formule d'Ito: conditionnellement à $F_{k\varepsilon}$, nous obtenons sur $[k\varepsilon,(k+1)\varepsilon[$:

$$d\mathrm{Cr}(s,Y,f,k,\varepsilon)=\left\langle\bar{f},d\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{s-}(x)\right)^{-1}\right\}Y(x_{s-}(x))\right\rangle$$

$$+\left\langle\bar{f},\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{s-}(x)\right)^{-1}d\{Y(x_s(x))\}\right\rangle$$

$$+\left\langle\bar{f},d\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_s(x)\right)^{-1};Y(x_s(x))\right]\right\rangle \quad (3.22)$$

[;] étant le crochet droit associé à un couple de semi-martingales (J). La formule d'Ito implique que:

$$d\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_s(x)\right)^{-1}\right\}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{s-}(x)\right)^{-1}\left\{\left(-\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x}X_j(x_{s-}(x))\,dz_j\right)\right.$$
$$+\left(\sum_{j=1}^{m}\left[\left(I+\frac{\partial}{\partial x}X_j(x_{s-}(x))\,\Delta z_j(s)\right)^{-1}\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-I+\frac{\partial}{\partial x}X_j(x_{s-}(x))\,\Delta z_j(s)\right]\right)-\frac{\partial}{\partial x}D(x_{s-}(x))\right\}\quad(3.23)$$

et

$$d\{Y(x_s(x))\}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x}Y(x_{s-}(x))\,X_j(x_{s-}(x))\,dz_j$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}Y(x_{s-}(x))\,D(x_{s-}(x))\,ds$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\left[Y(x_{s-}(x)+X_j(x_{s-}(x))\,\Delta z_j(s))\right.$$
$$\left.-Y(x_{s-}(x))-\frac{\partial}{\partial x}Y(x_{s-}(x))\,X_j(x_{s-}(x))\,\Delta z_j(s)\right]\quad(3.24)$$

Les processus z_j étant indépendants, les sauts de ces processus sont disjoints, et en reportant (3.22) et (3.23) dans (3.24), on obtient:

$$\mathrm{Cr}(t,Y,f,k,\varepsilon)=\mathrm{Cr}(k\varepsilon,Y,f,k,\varepsilon)+\sum_{k\varepsilon\leqq s\leqq t}^{c}\Delta\mathrm{Cr}(s,Y,f,k,\varepsilon)$$
$$+\int_{k\varepsilon}^{t}\left\{A(s,Y,f,k,\varepsilon)\right.$$
$$\left.+\left\langle \bar{f},\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_s(x)\right)^{-1}[D,Y](x_s(x))\right\rangle\right\}ds\quad(3.25)$$

avec

$$A(s, Y, f, k, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{m} \left\langle \bar{f}, \int \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{s-}(x) \right)^{-1} \left\{ \left(I + \frac{\partial}{\partial x} X_j(x_{s-}(x)) z \right)^{-1} \right. \right.$$

$$Y(x_{s-}(x) + X_j(x_{s-}(x) z) - Y(x_{s-}(x))$$

$$\left. \left. - [X_j, Y](x_{s-}(x)) z \right\} g_j(z)\, dz \right\rangle \quad (3.26)$$

ceci de façon analogue aux calculs menés dans (2.24), (2.26) et (2.27) / t appartenant à $[k\varepsilon, (k+1)\varepsilon]$, notons $\nu'_t(Y, f, k, \varepsilon)$ la mesure de Lévy du processus $\mathrm{Cr}(t, Y, f, k, \varepsilon)$ par rapport à la loi conditionnelle de P suivant $F_{k\varepsilon}$. Remarquons alors que si $p > 0$, on a:

$$P\{ |A((k+1)\varepsilon, Y, f, k, \varepsilon)|^* > \varepsilon^{-p} | F_{k\varepsilon} \} = o_{f,k}(1) \quad (3.27)$$

De plus si $\sum_{j=1}^{m} |\mathrm{Cr}(t, [Y, X_j], f, k, \varepsilon)| \geqq \eta$, on peut choisir γ', γ'_1, α'_1 réels positifs indépendants de η pour que:

$$\int_{|u| \geqq \varepsilon} d\nu'_t(Y, f, k, \varepsilon)(u) > C\varepsilon^{-\alpha_1} \quad (3.28)$$

dès que $\varepsilon \leqq \eta^{\gamma'_1}$ et dès que

$$\left| {}^t\left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{t-}(x) \right)^{-1} \right| \cdot \left| {}^t\left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{k\varepsilon}(x)' \right)^{-1} \right|^{-1} \leqq \eta^{-\gamma} \quad (3.29)$$

En effet, $\nu'_t(Y, f, k, \varepsilon)$ est la somme des images des mesures $g_j(z)\, dz$ par les applications $F'_{j,t}$:

$$z \to \left\langle \bar{f}, \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{t-}(x) \right)^{-1} \left\{ \left(I + \frac{\partial}{\partial x} X_j(x_{t-}(x)) z \right)^{-1} \right. \right.$$

$$\left. \left. \times Y(x_{t-}(x)) + X_j(x_{t-}(x)) z \right) - Y(x_{t-}(x)) \right\} \right\rangle \quad (3.30)$$

dont les dérivées en $z = 0$ vérifient:

$$\frac{\partial}{\partial z} F_j(0) = \left\langle \bar{f}, \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{t-}(x) \right)^{-1} [X_j, Y](x_{t-}(x)) \right\rangle \quad (3.31)$$

(3.29) permettant de borner la dérivée seconde de $F'_{j,t}$, (3.28) résulte immédiatement de l'hypothèse (3.4) et de (3.31).

Donnons nous maintenant un temps d'arrêt T à valeurs dans $[k\varepsilon, (k+1)\varepsilon]$, et posons

$$f_T = \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_T(x) \right)^{-1} \right|^{-1} f \tag{3.32}$$

Soit Y un crochet de Lie de longueur 1. Considérons le processus $\left\langle f_{T'} \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_t(x) \right)^{-1} Y(x_t(x)) \right\rangle$ définit sur $[T, (k+1)\varepsilon]$ pour la loi conditionnelle de P suivant F_T, les lemmes III 2 et III 3 permettront de montrer que si il existe deux entiers n et n_1 indépendants de f de norme 1 et si il existe un temps d'arrêt $T(k, f, \varepsilon)$ à valeurs dans $[k\varepsilon, (k+1)\varepsilon]$ tel que

$$\begin{aligned} P\Bigg\{ \forall t \in [\![T(k,f,\varepsilon), T(k,f,\varepsilon)+\varepsilon^{n_1}]\!] \\ \sum_{j=1}^{m} \left| \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_t \right)^{-1} [X_j, Y](x_t(x)), f_{T(k,f,\varepsilon)} \right\rangle \right| \geqq \varepsilon^n; \\ T(k,f,\varepsilon)+\varepsilon^{n_1} \leqq (k+1)\varepsilon \,\Big|\, F_{T(k,f,\varepsilon)} \Bigg\} = 1 - o_{f,k}(\varepsilon) \end{aligned} \tag{3.33}$$

alors il existe un temps d'arrêt $T'(k, f, \varepsilon)$ tel que:

$$\begin{aligned} P\Bigg\{ \forall t \in [\![T'(k,f,\varepsilon), T'(k,f,\varepsilon)+\varepsilon^{n'_1}]\!] \\ \left| \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_t(x) \right)^{-1} Y(x_t(x)), f_{T(k,f,\varepsilon)} \right\rangle \right| \geqq \varepsilon^{n'} \,\Big|\, F_{T(k,f,\varepsilon)} \Bigg\} = 1 - o_{f,k}(\varepsilon) \end{aligned} \tag{3.34}$$

et tel que:

$$\begin{aligned} P\{ [\![T'(k,f,\varepsilon), T'(k,f,\varepsilon)+\varepsilon^{n'_1}]\!] \\ \subset [\![T(k,f,\varepsilon), T(k,f,\varepsilon)+\varepsilon^{n_1}]\!] \} = 1 - o_{k,f}(\varepsilon) \end{aligned} \tag{3.35}$$

les conditions d'applications de ces deux lemmes étant satisfaites par (3.25), (3.26), (3.28) et (3.29).

On obtient ainsi une suite d'intervalles emboîtés de longueur assez grande sur lesquels l'un des processus $\left\langle f_{T'} \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_t(x) \right)^{-1} Y(x_t(x)) \right\rangle$ n'est pas trop petit, T étant le début de l'un de ces intervalles. Ceci nous permet de montrer (3.19).

LEMME III 2. — *Supposons que i décrive un ensemble de paramètre* I *et que* ε *décrive* [0, 1]. *Considérons une famille de semi-martingales spéciales* $x_{i,\varepsilon}(t)$ *à valeurs réelles définies sur un espace filtré* $(\Omega_{i,\varepsilon}, P_{i,\varepsilon}, F_{i,\varepsilon})$, *la filtration* $F_{i,\varepsilon}$ *vérifiant les conditions habituelles* (J). *La décomposition canonique de* $x_{i,\varepsilon}(t)$ *étant*:

$$x_{i,\varepsilon}(t)=x_{i,\varepsilon}(0)+M_{i,\varepsilon}(t)+\int_0^t A_{i,\varepsilon}(s)\,ds \tag{3.36}$$

avec

$$d\langle M_{i,\varepsilon}, M_{i,\varepsilon}\rangle(t)=B_{i,\varepsilon}(t)\,dt \tag{3.37}$$

supposons que pour tout entier $p>0$, *on a*:

$$P_{i,\varepsilon}\{|A_{i,\varepsilon}(1)|^*>\varepsilon^{-p}\}=o_i(\varepsilon^\infty) \tag{3.38}$$

$$\operatorname*{Sup}_{i\,I\in[0,1]} E_{i,\varepsilon}[|B_{i,\varepsilon}|^{*2}]<\infty \tag{3.39}$$

Si

$$|x_{i,\varepsilon}(0)|\geqq\varepsilon^n \tag{3.40}$$

$P_{i,\varepsilon}$ *presque-sûrement, alors*

$$P_{i,\varepsilon}\{\exists\, t\leqq\varepsilon^{3n}/|x_{i,\varepsilon}(t)|\leqq 2^{-1}\varepsilon^n\}=o_i(1) \tag{3.41}$$

LEMME III 3. — *Supposons que la famille de semi-martingales* $x_{i,\varepsilon}$ *vérifie encore* (3.35), (3.36), (3.37) *et* (3.38), *et qu'il existe un processus* $Cr_{i,\varepsilon}(t)$ *et un processus* $C_{i,\varepsilon}(t)$ *possédant la propriété suivante*: *il existe trois réels positifs* γ, γ_1 *et* α *tels que si* $|C_{i,\varepsilon}(t)|\leqq\varepsilon^{-\gamma}$ *et si* $|Cr_{i,\varepsilon}(t)|\geqq\varepsilon^n$, *la mesure de Lévy* $\nu_{i,\varepsilon}(t)$ *de* $M_{i,\varepsilon}(t)$ *vérifie*:

$$\int_{|u|\geqq\varepsilon} d\nu_{i,\varepsilon}(u)>C\,\varepsilon^{-\alpha} \tag{3.42}$$

pour $\varepsilon\leqq\eta^{\gamma_1}$.

Supposons de plus que pour tout p.

$$P_{i,\varepsilon}\{|C_{i,\varepsilon}(1)|^*>\varepsilon^{-p}\}=o_i(\varepsilon^\infty) \tag{3.43}$$

$$P_{i,\varepsilon}\{\exists\, t\in[0,\varepsilon^{n_1}]/|Cr_{i,\varepsilon}(t)|\leqq\varepsilon^{n_1}\}=o_i(\varepsilon) \tag{3.44}$$

pour un certain entier n_1. *Notons* $T(n', \varepsilon, i)$ *le temps d'arrêt*:

$$T(n', \varepsilon, i) = \operatorname{int}\{t > 0/ |x_{i,\varepsilon}(t)| \geqq \varepsilon^{n'}\} \tag{3.45}$$

Alors pour tout $p > 0$, *il existe un entier* n' *tel que*:

$$P\{T(n', \varepsilon, i) \geqq \varepsilon^p\} = o_i(1) \tag{3.46}$$

Preuve du lemme III 2. — En raison de (3.38),

$$P_{i,\varepsilon}\{\varepsilon^{3n} |A_{i,\varepsilon}(\varepsilon^{3n})|^* \geqq 4^{-1}\varepsilon^n\} = o_i(1) \tag{3.47}$$

Par l'inégalité de Burkholder-Davies-Gundy, on a:

$$P_{i,\varepsilon}\{|M_{i,\varepsilon}(\varepsilon^{3n})|^* \geqq 4^{-1}\varepsilon^n\}$$
$$\leqq C\varepsilon^{-n} E_{i,\varepsilon}[\varepsilon^{3n/2'} |B_{i,\varepsilon}(1)|^*)] = o_i(1) \quad \square \tag{3.48}$$

Preuve du lemme III 3. — Quitte à conditionner par rapport à l'ensemble $F_{0,\varepsilon,i}$ mesurable $\{|x_{i,\varepsilon}(0)| \geqq \varepsilon^{n''}\}$, on peut suppose que $P_{\varepsilon,i}$ presque sûrement $|x_{i,\varepsilon}(0)| \leqq \varepsilon^{n''}$. On choisira n'' ci-dessous. Soit le processus:

$$z_{i,\varepsilon}(t) = \sum_{s \leqq t} 1_{[2\varepsilon^{n'}, \infty[}(|\Delta M_{i,\varepsilon}(s)|) \tag{3.49}$$

et soit la martingale de carré intégrable associée:

$$Y_{i,\varepsilon}(t) = \exp\left[-z_{i,\varepsilon}(t) + \int_0^t ds\,(1 - e^{-1}) \int_{|u| > 2\varepsilon^{n'}} d\nu_{i,\varepsilon}(s)(u)\right] \tag{3.50}$$

On a donc:

$$E_{i,\varepsilon}[Y_{i,\varepsilon}(\varepsilon^p)\, 1_{[0]}(z_{i,\varepsilon}(\varepsilon^p))] \leqq 1 \tag{3.51}$$

Choisissons $p > n_1$ et $n' > n_1 \gamma_1$. Comme

$$P_{i,\varepsilon}\{|C_{i,\varepsilon}(1)|^* \geqq \varepsilon^{-n_1}\gamma_1\} = o_i(\varepsilon^\infty) \tag{3.52}$$

(3.51) implique que:

$$P_{i,\varepsilon}\{z_{i,\varepsilon'}(\varepsilon^p) = 0\} \leqq \exp[\varepsilon^p(e^{-1} - 1).\, C\varepsilon^{-\alpha n'}] + o_i(1) \tag{3.53}$$

Donc il suffit de choisir n' pour que $\alpha n' > p$ pour que:

$$P_{i,\varepsilon}\{z_{i,\varepsilon}(\varepsilon^p) = 0\} = o_i(1) \tag{3.54}$$

Donc avec une probabilité tendant uniformément vers 1, $x_{i,\varepsilon}(t)$ possède au mais un saut de module supérieur à $2\varepsilon^{n'}$ sur $[0, \varepsilon^p]$. Il ne reste plus qu'à choisir $n'' > n'$ pour que (3.46) soit vérifiée. □

RÉFÉRENCES

(B_1) J. M. BISMUT, Calcul des variations stochastiques et processus de sauts, *Z. W.*, vol. **63**, 1983, p. 147-235.

(B_2) J. M. BISMUT, The Calculus of Boundary Processes, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, vol. **XVII,** 1984.

(B.G.J.) K. BICHTELER, J. B. GRAVEREAUX et J. JACOD, *Malliavin Calculus for Processes with Jumps* (à paraître).

(J) J. JACOD, Calcul stochastique et problèmes des martingales, *Lect. in Math.*, n° **714**, Springer, 1975.

(L_1) R. LÉANDRE, Régularité de processus de sauts dégénérés, *Ann. I.H.P. Probabilités*, vol. **21**, n° 2, 1985, p. 125-146.

(L_2) R. LÉANDRE, *Thèse de troisième cycle*, Université de Besançon, 1984.

(L_3) R. LÉANDRE, Flot d'une équation différentielle stochastique avec semi-martingale directrice discontinue, *Séminaire de Proba*, n° **XIX**, p. 271-275; *Lect. in Math*, n° **1123**, Springer, 1984.

(M) P. A. MEYER, Flot d'une équation différentielle stochastique, *Séminaire de Proba.*, n° **XV**, p. 103-117: *Lect. in Math.*, n° **850**, Springer, 1981.

(S) D. STROOCK, *The Malliavin Calculus and its Applications.* In *Stochastic Integrals*, D. WILLIAMS éd., *Lect. in Math.*, n° **851**, p. 394-432, Springer, 1981.

(Tr) F. TRÊVES, *Introduction to Pseudo-Differential Operators*, vol. **I**, Plenum Press, 1981.

(*Manuscrit reçu le* 24 *octobre* 1986)
(*corrigé le* 21 *mai* 1987.)