ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. B. GRAVEREAUX

Calcul de Malliavin et probabilité invariante d'une chaîne de Markov

Annales de l'I. H. P., section B, tome 24, nº 2 (1988), p. 159-188
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1988__24_2_159_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 24, n° 2, 1988, p. 159-188. *Probabilités et Statistiques*

Calcul de Malliavin et probabilité invariante d'une chaîne de Markov

par

J. B. GRAVEREAUX

I.R.M.A.R., Institut de Recherche Mathématiques de Rennes,
Université de Rennes-I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

RÉSUMÉ. — On considère une chaîne de Markov d-dimensionnelle admettant une probabilité invariante η et on donne, en utilisant une forme simple du calcul de Malliavin, des conditions entraînant l'absolue continuité de η relativement à la mesure de Lebesque de $\mathbb{R}^d$.

Mots clés : Calcul de Malliavin, chaîne de Markov, processus markovien de sauts, équations aux différences aléatoires.

ABSTRACT. — We consider a Markov chain with state space $\mathbb{R}^d$ and which have an invariant probability η and we stay, by a simple utilisation of Malliavin calculus, sufficient conditions of absolute continuity for η.

I. INTRODUCTION

On considère, sur un espace de probabilité $(\Omega, \underline{F}, P)$, une suite $(Z_n)_{n \geqq 1}$ de v. a. indépendantes à valeurs dans E, ouvert borné de $\mathbb{R}^\beta$, de même loi uniforme sur E.

Classification A.M.S. : 60 J 10, 60 G 30.

On suppose, pour simplifier que $\lambda(E)=1$, où λ est la mesure de Lebesgue sur E. Soit également $\varphi: \mathbb{R}^d \times E \to \mathbb{R}^d$, mesurable.

A $(Z_n)_{n \geqq 1}$ et φ on associe la chaîne de Markov $(X_n^x)_{n \geqq 0}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, définie par :

$$(1.1) \qquad \begin{cases} X_0^x = x \\ \text{et, pour } n \geqq 1, \\ X_n^x = \varphi(X_{n-1}^x, Z_n). \end{cases}$$

Il s'agit de la forme la plus générale de chaîne de Markov, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, à probabilité de transition stationnaire.

On notera $D_x \varphi$ (resp.: $D_z \varphi$) la différentielle de l'application partielle $x \to \varphi(x, z)$ [resp. : $z \to \varphi(x, z)$].

On définit de la même manière $D_{xz}^2 \varphi$, $D_{zx}^2 \varphi$, $D_{x^2}^2 \varphi$ et $D_{z^2}^2 \varphi$.

On fait les hypothèses (H.1) et (H.2) suivantes :

(H.1) φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^d \times E$, $D_x \varphi$ et $D_{x^2}^2 \varphi$ sont bornées et, de plus, il existe $\theta \geqq 0$ et $K > 0$, telles que : $|D_z \varphi(x, z)| \leqq K(1+|x|^\theta)$,

$$|D_{xz}^2 \varphi(x, z)| \leqq K(1+|x|^\theta) \qquad \text{et} \qquad |D_{z^2}^2 \varphi(x, z)| \leqq K(1+|x|^\theta).$$

(H.2) La chaîne de Markov $(X_n^x)_{n \geqq 0}$ admet une probabilité invariante η, et de plus, pour la valeur θ introduite dans (H.1), on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^{2\, l(d)\, \theta} \eta(dx) < +\infty, \qquad \text{où} \quad l(d) = \max(4, 4d-4).$$

(H.2) signifie encore qu'il existe une probabilité η sur $(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d))$ telle que l'on ait :

$$(1.2) \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \int_E f(\varphi(x, z))\, \lambda(dz)\, \eta(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \eta(dx),$$

pour toute fonction $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, continue bornée,

et de plus avec un moment d'ordre $2\, l(d) . \theta$ si $\theta > 0$, et pas de condition supplémentaire lorsque $\theta = 0$.

On va donner, au moyen du calcul de Malliavin, des conditions qui, rajoutées à (H.1) et (H.2), entraineront que η a une densité (relativement à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$).

On fixe une fois pour toutes une fonction ρ telle que :

$$(1.3) \qquad \begin{cases} \rho: \quad E \to]0, \infty[, \quad \text{de classe } C_b^1, \\ \text{avec} \\ \rho(z) \to 0 \text{ quand } z \text{ tend vers la frontière de E,} \end{cases}$$

et on associe, à la chaîne $(X_n^x)_{n \geqq 0}$, le processus $(U_n^x)_{n \geqq 0}$ suivant, à valeurs dans l'espace $M(d)_s$ des matrices $d \times d$ (réelles) symétriques de type positif :

$$(1.4)\quad \begin{cases} U_0^x = 0 \\ \text{et, pour } n \geqq 1, \\ U_n^x = D_x \varphi(X_{n-1}^x, Z_n) U_{n-1}^x (D_x \varphi(X_{n-1}^x, Z_n))^T \\ \qquad + \rho(Z_n) D_z \varphi(X_{n-1}^x, Z_n)(D_z \varphi(X_{n-1}^x, Z_n))^T \end{cases}$$

(A^T désigne la transposée de A).

On verra, au paragraphe II, qu'on peut associer à la suite $(Z_n)_{n \geqq 1}$ un opérateur de Malliavin L (au sens de [1], chapitre IV) tel que, si Γ est l'opérateur carré du champ associé à L, le terme $U_n^{x,(i,j)}$ de la matrice U_n^x ne soit autre que $\Gamma(X_n^{x,i}, X_n^{x,j})$. Toujours au II on obtient directement, sans utiliser les résultats de [1] et par des intégrations par parties simples dans $\mathbb{R}$, des formules classiques de calcul de Malliavin (par exemple la formule (7) de [3]).

Dans toute la suite on se place sur l'espace $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{P})$, où $\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}^d$, $\tilde{F} = F \otimes B(\mathbb{R}^d)$ et où $\tilde{P} = P \otimes \eta$.

Notant $\tilde{X}_n(\omega, x) = X_n^x(\omega)$ et $\tilde{U}_n(\omega, x) = U_n^x(\omega)$, on verra (aux paragraphes III et IV) que l'on a la proposition suivante :

(1.5) PROPOSITION. — *Sous* (H.1) *et* (H.2) *et si de plus il existe* $n_0 \geqq 1$, *tel que* $\tilde{U}_{n_0}$ *soit* $\tilde{P}$*-p. s. inversible,* η *a une densité.*

Remarques :

1° Si, pour $\eta \times \lambda$-presque tout (x, z), on a : $\det[(D_z \varphi)(D_z \varphi)^T(x, z)] \neq 0$, alors par (1.4), $\tilde{U}_1$ est $\tilde{P}$-p. s. inversible.

2° *Cas où* $d = 2$, $\beta = 1$.

$D_z \varphi(x, z)$ est un vecteur colonne à deux composantes et on a :

$$\det[(D_z \varphi)(D_z \varphi)^T(x, z)] = 0, \quad \text{pour tous les couples } (x, z).$$

La condition du 1° n'est donc pas réalisée. On donnera plus loin une condition simple entraînant que $\tilde{U}_2$ est $\tilde{P}$-p. s. inversible.

3° On voit facilement que la condition $U_{n_0}^x$ P-p. s. inversible exprime que $n_0 . \beta \geqq d$ et que le rang de la différentielle de l'application de $\mathbb{R}^{n_0 \cdot \beta}$ dans $\mathbb{R}^d$: $(z_1, \ldots, z_{n_0}) \to X_{n_0}^x$ est d en presque tout point. (On a une « submersion ».) Ce qui entraîne l'existence d'une densité pour la loi de $X_{n_0}^x$ [et qui donne une autre méthode pour obtenir (1.5)].

On verra, au paragraphe III, que si on a :

$$(1.6)\quad \begin{cases} \text{(i)} & (\tilde{X}_n, \tilde{U}_n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (\tilde{X}_\infty, \tilde{U}_\infty) \\ \text{avec } \tilde{U}_\infty \text{ telle que :} & \\ \text{(ii)} & \tilde{P}[\det(\tilde{U}_\infty) \neq 0] = 1 \\ \text{(iii)} & \sup_{n \geq 1} \tilde{E}[\| \tilde{U}_n \|^{4d-4}] < +\infty. \end{cases}$$

et avec une condition supplémentaire d'intégrabilité du même type que (1.6) (iii) faisant intervenir deux processus auxiliaires, on obtient encore l'existence d'une densité pour η [théorème (3.7)].

Voici maintenant, les conditions (H.3), (B) et (C) qui vont intervenir dans le théorème principal de cet article (notation (B) en référence à la condition correspondante de [1]).

$$\text{(H.3)}\quad \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_E \| D_x \varphi(x, z) \|^{2l(d)} \lambda(dz) < 1, \quad \text{avec } \| \,.\, \| : \text{norme opérateur,}$$

et si on pose :

$$(1.7)\quad C(x, z) = \begin{cases} (D_x \varphi)^{-1}(x, z)(D_z \varphi)(x, z)(D_z \varphi)^T(x, z)(D_x \varphi)^{-1, T}(x, z) \\ \qquad\qquad \text{si } \det(D_x \varphi(x, z)) \neq 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

(B) s'écrit, en notant S_{d-1} la sphère unité centrée en 0 de $\mathbb{R}^d$:

(B) Il existe un ouvert D de $\mathbb{R}^d$ vérifiant $\eta(D) > 0$ et tel que, pour tout $x \in D$ et pour tout $y \in S_{d-1}$, on ait :

$$\lambda(\{z : C(x, z)(y) \neq 0\}) > 0.$$

Enfin (C) s'écrit :

(C) On a det $(D_x \varphi(x, z)) \neq 0$, pour η-presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour λ-presque tout $z \in E$.

(1.8) THÉORÈME. — *Sous les conditions* (H.1), (H.2), (H.3), (B) *et* (C) *la probabilité* η *a une densité et il n'y a pas d'autre probabilité invariante.*

(H.1), (H.2) et (H.3) entraînent (1.6) (i) et (iii) et la condition supplémentaire non énoncée (*voir* les paragraphes IV et VI); il suffirait d'ailleurs de (H.1), (H.2) et de la condition (H'.3) suivante [bien plus faible que (H.3)] pour obtenir (1.6) (i) :

$$\text{(H'.3)}\qquad \int_{\mathbb{R}^d} \int_E \operatorname{Log}(\| D_x \varphi(x, z) \|) \eta(dx) \lambda(dz) < 0.$$

On verra au paragraphe V que (H. 1), (H. 2) et (H. 3) entraînent l'unicité de la probabilité invariante et qu'en rajoutant (B) et (C) aux hypothèses (H. i), $i=1, 2, 3$, on obtient (1.6) (ii). On aura ainsi prouvé le théorème (1.8).

Remarques :

4° (B) est intéressante essentiellement lorsque $d > 1$; elle exprime que η charge un ensemble ouvert de x pour lequel $C(x, z)$ n'est « pas trop dégénérée » lorsque z appartient à des ensembles éventuellement petits, dépendants de x et de y, dont la mesure est strictement positive. La matrice $C(x, z)$ et les conditions (B) et (C) interviennent de manière très simple au V dans la comparaison de $\mathrm{rg}(\tilde{U}_n)$ et de $\mathrm{rg}(\tilde{U}_{n-1})$ [$\mathrm{rg}(M)$ signifie rang de M]. [*Voir* le début du V (a) et l'appendice pour des conditions équivalentes à (B).]

5° Le théorème (1.8) est encore vrai si on remplace (B) par la condition plus générale (B.0) qui suit dans laquelle $C_l(x, z_1, \ldots, z_l)$ désigne la matrice obtenue en remplaçant dans (1.7) z par $(z_1, \ldots, z_l)$, C par C_l et les dérivées partielles de φ par celles de φ_l définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad \varphi_1(x, z_1)=\varphi(x, z_1) \\ \text{et, pour } l \geqq 1, \\ \varphi_l(x, z_1, \ldots, z_l)=\varphi(\varphi_{l-1}(x, z_1, \ldots, z_{l-1}), z_l). \end{array}\right.$$

(B.0) Il existe un ouvert D de $\mathbb{R}^d$ vérifiant $\eta(D) > 0$ et un entier $l \geqq 1$ tels que, pour tout $x \in D$ et pour tout $y \in S_{d-1}$, on ait :

$$\lambda(\{z_1, \ldots, z_l): C_l(x, z_1, \ldots, z_l)(y) \neq 0\}) > 0.$$

6° *Cas où* $d=1$.

La condition (B) se réduit évidemment à la condition (B.1) suivante :

(B.1) Il existe un ouvert D de $\mathbb{R}^d$ vérifiant $\eta(D) > 0$ et tel que, pour tout $x \in D$, on ait :

$$\lambda(\{z: C(x, z) \neq 0\}) > 0.$$

[ou encore à la condition équivalente obtenue en remplaçant, dans (B.1), $C(x, z)$ par $D_z \varphi(x, z)(D_z \varphi(x, z))^T$].

7° Dans le cas général on note encore (B.1) la condition obtenue en remplaçant $C(x, z)$ par $\det(C(x, z))$ dans ce qui précède. Lorsque $d > 1$, (B.1) est plus forte que (B) et on a vu dans la remarque 2 un cas où (B.1) ne peut être réalisée. Dans tous les cas il est facile de déduire (1.6) (ii) de (B.1), (C), (H.1), (H.2) et (H'. 3). [Là encore on a une condition équivalente à (B.1) si $(D_z \varphi(x, z))(D_z \varphi(x, z))^T$ remplace $C(x, z)$.]

8° *Retour au cas* $d=2$, $\beta=1$.

On a déjà vu que det $(C(x, z))=0$ pour tout (x, z).

La condition (B.2) suivante est, lorsque $d=2$ et $\beta=1$, plus forte que la condition obtenue en remplaçant dans (B) le mot ouvert par le mot borélien.

(B.2) Pour η-presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, l'image de la mesure de Lebesgue sur E, par l'application $z \to C(x, z)$, ne charge aucun ensemble de matrices de la forme $C=\{\alpha . M : \alpha \geqq 0\}$, où M est une matrice dégénérée.

[(B.2) est équivalente ici à la condition suivante: pour η-p. s. tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $y \in S_{d-1}$ $\lambda(\{z : C(x, z)(y) \neq 0\})=1$; en particulier on a $\det(D_x \varphi(x, z)) \neq 0$, pour $\lambda \times \eta$-presque tout (x, z).]

(B.2) entraîne, de manière immédiate, que $\tilde{P}[\operatorname{rg}(\tilde{U}_1)=1]=1$.

On va voir que (B.2) entraîne que $\tilde{U}_2$ est $\tilde{P}$-p. s. inversible, ce qui donnera, si on a aussi (H.1) et (H.2), que η a une densité. [Par (1.5).]

$\tilde{U}_2(\tilde{\omega})$ est, pour $\tilde{P}$-p. s. tout $\tilde{\omega}$, inversible en même temps que: $\tilde{U}_1(\tilde{\omega})+(\rho(Z_2) . C(\tilde{X}_1, Z_2))(\tilde{\omega})$ par (1.4), (1.7) et car $D_x \varphi(x, z)$ est inversible pour $\eta \times \lambda$-presque tout (x, z). En conditionnant par rapport à $\tilde{X}_0=x$, $Z_1=z$, on est ramené à une somme $M+\rho(Z_2) . C(\tilde{X}_1, Z_2)$, avec M déterministe de rang 1.

(B.2) entraîne alors que la loi conditionnelle de $\tilde{U}_1+\rho(Z_2) . C(\tilde{X}_1, Z_2)$, sachant $\tilde{X}_0=x$, $Z_1=z$, est concentrée sur l'ensemble des matrices inversibles (car il s'agit de matrices 2×2 symétriques.) D'où aussi:

$$1=\tilde{P}[\det(\tilde{U}_1+\rho(Z_2) . C(\tilde{X}_1, Z_2)) \neq 0]=\tilde{P}[\det(\tilde{U}_2) \neq 0]).$$

Applications

1° *Processus markoviens de sauts.*

On considère un processus markovien de saut $(Y_t)_{t \geqq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, solution d'une équation stochastique de la forme:

$$Y_t^x=x+(c(Y_-^x) * \mu)_t \tag{1.9}$$

avec $c: \mathbb{R}^d \times E \to \mathbb{R}^d$, E ouvert borné de $\mathbb{R}^\beta$ et μ mesure de Poisson sur $\mathbb{R}^+ \times E$ de compensateur: $\nu(dt \times dz)=dt \times \lambda(dz)$. On supposera encore pour simplifier que $\lambda(E)=1$.

On associe à c l'application $\varphi: \mathbb{R}^d \times E \to \mathbb{R}^d$ suivante:

$$\varphi(x, z)=x+c(x, z) \tag{1.10}$$

et on suppose que φ vérifie (H.1).

On fait l'hypothèse (H'2) suivante :

(H'2) Le processus de Markov $(Y_t^x)_{t \geqq 0}$ a une probabilité invariante η, et pour la valeur θ introduite dans (H.1), on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^{2\,l(d).\theta} . \eta(dx) < +\infty.$$

[on rappelle que $l(d) = \max(4, 4d-4)$].

On a alors le résultat suivant :

(1.11) COROLLAIRE. — *Sous* (H.1), (H'.2), (H.3), (B) *et* (C) η *a une densité et il n'y a pas d'autre probabilité invariante.*

Pour obtenir ce corollaire, à partir du théorème (1.8), il suffit d'associer à $(Y_t)_{t \geqq 0}$ la chaîne de Markov $(X_n^x)_{n \geqq 0}$ définie par : $X_0^x = x$ et $X_n^x = Y_{T_n}^x$, où $(T_n)_{n \geqq 1}$ est la famille des temps de saut de μ; η introduite dans (H'2) est alors aussi probabilité invariante pour la chaîne $(X_n^x)_{n \geqq 0}$ et on a le résultat par (1.8).

Remarquons, pour terminer, que la condition (B) introduite ici est un peu du même type que l'hypothèse (B) de [1] lue dans le cas où il n'y a pas de partie brownienne et plusieurs mesures de Poisson (associées à des directions); les ensembles de mesure strictement positives remplacent ici les ensembles de mesure infinie de (B) de [1] et on ne demande plus l'inversibilité d'une certaine matrice sur un tel ensemble mais une condition plus faible portant sur le noyau de cette matrice.

2° *Équations aux différences aléatoires.*

On considère le cas particulier de (1.1) où φ est de la forme :

$$(1.12) \quad \begin{cases} \varphi(x, z) = A(z).x + B(z) \\ \text{avec } A : E \to M(d),\ B : E \to \mathbb{R}^d \text{ et } A, B \text{ mesurables.} \end{cases}$$

[$M(d)$ désigne l'espace des matrices $d \times d$ à coefficients réels].

(1.1) s'écrit alors :

$$(1.1') \quad \begin{cases} X_0^x = x \\ \text{et, pour } n \geqq 1, \\ X_n^x = A(Z_n).X_{n-1}^x + B(Z_n). \end{cases}$$

(1.1') est une « équation aux différences aléatoires » et il s'agit du cas où il y a indépendance : la suite de v.a., à valeurs dans $M(d) \times \mathbb{R}^d$, $(A(Z_n), B(Z_n))_{n \geqq 1}$ est formée de termes indépendants (et de même loi). Il s'agit d'ailleurs, dans (1.1'), de la forme la plus générale d'une telle équation aux différences avec termes indépendants de même loi.

(Pour une étude détaillée de (1.1′) lorsque $d=1$, *voir* [4] et [8]; *voir* [5] par exemple pour le cas général.)

Introduisons l'hypothèse (H′.1) suivante :

(H′.1) A et B sont de classe C^2 sur E, avec dérivées partielles premières et secondes bornées.

Remarquons que, comme E est borné, (H′.1) entraîne que A et B sont bornées (on a donc A, B de classe C_b^2).

(1.12) et (H′.1) entraînent qu'on a (H.1) avec $\theta=1$, de manière évidente.

D'autre part, la condition (H.3), dans le cas considéré ici, s'écrit :

$$\text{(H}''\text{.3)}\qquad \int_E \|A(z)\|^{2l(d)}.\lambda(dz) < 1 \quad \text{(norme opérateur).}$$

On montre facilement que (H′.1) et (H″.3) entraînent (H.2) et l'unicité de η. $\Big($Comme dans [5], chapitre 3, on associe à $(X_n^0)_{n\geqq 0}$ une série de v. a. d-dimensionnelles convergente ici dans $L^{2l(d)}(P)$ et on en déduit que X_n^0 converge en loi, quand $n\to\infty$, vers une v. a. X_∞, dont la loi η vérifie $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^{2l(d)}.\eta(dx) < +\infty$. En considérant $X_n^x - X_n^0$, on obtient, avec (H″.3), que X_n^x converge aussi en loi, quand $n\to\infty$, vers X_∞. D'où le résultat.$\Big)$

[Ne sont intervenus que (H″.3) et la condition B bornée. Pour l'unicité on écrit: $\eta'(f)=\eta' P_n(f)$ et on applique le théorème de convergence dominée, d'où $\eta'(f)=\eta(f)$, pour toute f continue bornée; on a noté $P_n(x, dy)$ la loi de X_n^x.]

La condition (B) devient ici :

(B′) Il existe un ouvert D de $\mathbb{R}^d$ vérifiant $\eta(D)>0$ tel que, pour tout $x\in D$ et pour tout $y\in S_{d-1}$, on ait :

$$\lambda(\{z : \det(A(z)) \neq 0 \text{ et } C(x, z)(y) \neq 0\}) > 0,$$

avec

$$C(x, z) = A(z)^{-1}.(DA(z)x + DB(z))(DA(z)x + DB(z))^T.A(z)^{-1, T}.$$

La condition (C) devient ici :

(C′) $\det(A(z)) \neq 0$ pour λ-presque tout $z\in E$.

On peut alors énoncer le corollaire de (1.8) suivant :

(1.13) COROLLAIRE. — *Si* φ *vérifie* (1.12) *et si on a* (H′.1), (H″.3), (B′) *et* (C′), *alors la chaîne* $(X_n^x)_{n\geqq 0}$ *a une probabilité invariante* η *et une seule et* η *a une densité.*

[C'est une conséquence immédiate de ce qui précède et de (1.8).]

Remarquons qu'il est prouvé dans [4] et lorsque $d=1$ que si φ vérifie (1.12), si la chaîne a une probabilité invariante et si de plus on a: $\det(\mathrm{A}(z)) \neq 0$, pour λ-presque tout z, alors η a une loi de type pur (i. e. : loi qui est soit atomique, soit absolument continue, soit diffuse et étrangère à la mesure de Lebesgue).

Lorsque A ou B ne dépend pas de z, on a évidemment une expression plus simple de (B').

Cas où A ne dépend pas de z

(H''.3) s'écrit : $\|\mathrm{A}\| < 1$. Les conditions (H'.1) et: $\|\mathrm{A}\| < 1$ assurent donc l'existence d'une probabilité invariante ayant des moments de tous ordres et, par la remarque 1° et la proposition (1.5), on obtient si on a de plus: $\det((\mathrm{DB})(\mathrm{DB})^{\mathrm{T}}(z)) \neq 0$ pour λ-presque tout z, que $\tilde{\mathrm{U}}_1$ est $\tilde{\mathrm{P}}$-p. s. inversible et donc que η a une densité.

(B') est équivalente ici à :

(B'') A est inversible et l'on a,

$$\text{pour tout } y \in \mathrm{S}_{d-1}: \quad \lambda(\{z: \mathrm{DB}(z)\mathrm{DB}(z)^{\mathrm{T}}(y) \neq 0\}) > 0.$$

et (B'') entraîne (C').

On a alors :

(1.14) COROLLAIRE. — *Si* φ *vérifie* (1.12) *avec* A *matrice constante, si* $\|\mathrm{A}\| < 1$ (*norme opérateur*), *si* B *est de classe* C_b^2 *et si on a* (B''), *alors il y a une probabilité invariante et une seule* η *ayant des moments de tous ordres et absolument continue* (*par rapport à la mesure de Lebesgue de* $\mathbb{R}^d$).

C'est une application immédiate du corollaire (1.13) et du fait que $\mathrm{A}=\mathrm{Cte}$.

Remarquons que l'hypothèse $\|\mathrm{A}\| < 1$ signifie que les valeurs propres λ de A (réelles ou complexes) sont telles que $|\lambda| < 1$.

Lorsque A n'est pas inversible et est non nulle, il existe p entier $\geqq 1$ tel que $\mathbb{R}^d$ se décompose en : $\mathbb{R}^d = (\operatorname{Ker} \mathrm{A}^p) \oplus \mathrm{F}$ avec F sous-espace vectoriel stable par A, et en considérant la réduction par blocs correspondante de A, on obtient facilement encore des conditions rendant η absolument continue.

Remarque. — Toujours dans le cas où A est constant, lorsque $\mathrm{DB}(z)$ est nulle pour presque tout z, il est encore possible que η ait une densité comme le montrent des exemples classiques. On ne peut plus alors utiliser le calcul de Malliavin. Par contre si A dépend de z, si $\mathrm{DA}(z)$ n'est pas presque par tout nulle et si $\mathrm{DB}(z)=0$ presque partout, on peut utiliser le corollaire (1.13).

II. INTÉGRATIONS PAR PARTIES ET OPÉRATEUR CARRÉ DU CHAMP

Rappelons d'abord le résultat classique suivant qui permet de comprendre pourquoi, en calcul de Malliavin, on cherche à établir des « formules d'intégration par parties » (en général dans des espaces très généraux; ici dans un cadre relativement simple).

(2.1) PROPOSITION. — *Soient* $\Phi=(\Phi^i)_{i\leqq d}$ *une v. a. d-dimensionnelle,* Ψ *une v. a. positive* P-*intégrale. On suppose qu'il existe* $\mathrm{K}>0$ *tel que, pour toute* $f\in \mathrm{C}_b^1$ *et pour tout* $i=1, 2, \ldots, d$, *on ait :*

$$\left|\mathrm{E}\left[(\partial f/\partial x^i)(\Phi).\Psi\right]\right| \leqq \mathrm{K}.\|f\|_\infty; \tag{2.2}$$

alors la loi de Φ *relativement à la mesure* $\Psi.d\mathrm{P}$ *a une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue de* $\mathbb{R}^d$*).*

Ce résultat s'obtient aisément, lorsque $d=1$, au moyen des fonctions caractéristiques. (*Voir* [9] par exemple.) Dans le cas général on utilise la théorie des distributions. (*Voir* [6], [7].)

On utilisera la proposition (2.1) au III ainsi que la « formule d'intégration par parties » prouvée vers la fin de cette partie [proposition (2.15)]. Pour établir cette formule directement (sans utiliser les résultats de [1] et [3]), on procède par étapes (très simples).

On considère tout d'abord les familles R_1 et R_2 définies par :

(2.3) R_i est l'ensemble des classes de v. a. r. Φ de la forme: $\Phi=\mathrm{F}(\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_n)$, avec $n\in\mathbb{N}^*$ et $\mathrm{F}: \mathrm{E}^n\to\mathbb{R}$ de classe C_b^i.

Remarques :

1° R_i est « stable par C_p^i » [*idem :* si $m\in\mathbb{N}^*$, si $\Phi\in(\mathrm{R}_i)^m$ et si $f: \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ est de classe C_p^i, c'est-à-dire de classe C^i, avec dérivées partielles à croissance polynomiale, alors $f(\Phi)\in\mathrm{R}_i$].

2° On a $\mathrm{X}_n^{x,i}\in\mathrm{R}_2$ (si $n\in\mathbb{N}^*$, $x\in\mathbb{R}^d$ et $i=1, 2, \ldots, d$; $\mathrm{X}_n^{x,i}$ désignant la i-ième composante de X_n^x).

Ce résultat s'obtient facilement, par récurrence sur n et en utilisant le fait que E est borné et (H.1).

En faisant une seule intégration par parties, on obtient :

(2.4) PROPOSITION. — *Soit* $\Phi=(\Phi^i)_{i\leq d}\in(\mathrm{R}_1)^d$, *avec* $\Phi^i=\mathrm{F}^i(\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_n)$, *soit* $\Theta\in\mathrm{R}_1$, *avec* $\Theta=\rho(\mathrm{Z}_l)\,\mathrm{G}(\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_{n'})$, *où* $1\leqq l\leqq n\leqq n'$, *soit* m *avec* $1\leqq m\leqq\beta$, *soit enfin* $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$, *de classe* C_p^1, *on a alors :*

$$(2.5)\quad \mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{d}(\partial f/\partial x^i)(\Phi)(\partial \mathrm{F}^i/\partial z_l^m)(\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_n)\Theta\right]\right.$$

$$= -\mathrm{E}[f(\Phi).\{\partial\rho/\partial z^m)(\mathrm{Z}_l).\mathrm{G}(\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_{n'})$$

$$\left.+\rho(\mathrm{Z}_l)(\partial\mathrm{G}/\partial z_l^m)(\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_{n'})\}\right].$$

(z_l^m) *désigne la m-ième composante de* z_l.

Preuve. — Les termes à comparer sont des intégrales multiples en dz_j^k [$(n'.\beta)$ intégrations]. On commence par intégrer par rapport à z_l^m [avec les z_j^k fixés pour $(j, k)\neq(l, m)$].

Notant $\mathrm{E}(z_l^j: j\neq m)$ l'ouvert de $\mathbb{R}$ parcouru par la composante z_l^m, on a, en intégrant par parties sur les compacts de $\mathrm{E}(z_l^j: j\neq m)$ et en passant à la limite :

$$(2.6)\quad \int_{\mathrm{E}(z_l^j\,:\,j\neq m)}(\partial/\partial z_l^m).(f\circ\mathrm{F})\,\rho.\mathrm{G}.dz_l^m$$

$$= -\int_{\mathrm{E}(z_l^j\,:\,j\neq m)}(f\circ\mathrm{F}).\partial(\rho.\mathrm{G}/\partial z_l^m)\,dz_l^m.$$

En effet, il n'y a pas de troisième terme car $(f\circ\mathrm{F}).\ \rho.\mathrm{G}$ tend vers 0 lorsque z_l tend vers la frontière de E [par (1.3)]. En intégrant alors les deux membres de (2.6) par rapport aux autres variables z_j^k, on obtient (2.5).

(2.7) DÉFINITION (Opérateur carré du champ Γ). — Soient Φ, $\Psi\in\mathrm{R}_1$, avec $\Phi=\mathrm{F}(\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_n)$ et $\psi=\mathrm{G}(\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_{n'})$; on pose :

$$(2.8)\quad \Gamma(\Phi, \Psi)=\sum_{l=1}^{\min(n, n')}\rho(\mathrm{Z}_l)\,\mathrm{D}_{z_l}\mathrm{F}(\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_n).(\mathrm{D}_{z_l}\mathrm{G}(\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_{n'}))^{\mathrm{T}}$$

[$\mathrm{D}_{z_l}\mathrm{F}$ désigne la différentielle de l'application $z_l\to\mathrm{F}(z_1, \ldots, z_n)$, identifiée au vecteur ligne correspondant.]

Γ est une application de $\mathrm{R}_1\times\mathrm{R}_1$ dans $\mathrm{L}_\infty(\mathrm{P})$; elle est bilinéaire et symétrique.

Par extension, si $\Phi=(\Phi^i)_{i\leq m}\in(\mathrm{R}_1)^m$ et $\Psi=(\Psi^j)_{j\leq m'}\in(\mathrm{R}_1)^{m'}$, on notera encore $\Gamma(\Phi, \Psi)$ la matrice $m\times m'$ $(\Gamma(\Phi^i, \Psi^j))_{i\leqq m,\, j\leqq m}$.

On notera également, si $\Phi \in (R_1)^m$:

(2.9) $$U(\Phi)=\Gamma(\Phi, \Phi).$$

U (Φ) est une matrice symétrique, de type positif.

On va appliquer (2.5) avec $\Theta=\Theta_{l,m}=\rho(Z_l).(\partial F^j/\partial z_l^m)(Z_1, \ldots, Z_n).\Psi$, où $j=1, 2, \ldots, d$, $F^j(Z_1, \ldots, Z_n)=\Phi^j \in R_2$ et avec $\Psi=H(Z_1, \ldots, Z_{n'}) \in R_1$ et $l \leqq n \leqq n'$; en sommant sur $l(=1, 2, \ldots, n)$ et $m(=1, 2, \ldots, \beta)$, on obtient, comme somme des termes de gauche et, par (2.8) :

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{d} (\partial f/\partial x^i)(\Phi).\Gamma(\Phi^i, \Phi^j)\right).\Psi\right].$$

La somme des termes de droite est plus compliquée; elle s'écrit, au moyen de l'opérateur carré du champ Γ et de l' « opérateur de Malliavin » L associé à Γ qui est défini comme suit :

(2.10) Définition [Opérateur de Malliavin (L, R_2)]. — Soit $\Phi \in R_2$, avec $\Phi=F(Z_1, \ldots, Z_n)$. On pose :

(2.11) $$L(\Phi)=1/2 \sum_{l=1}^{n} [\rho(Z_l)\Delta_{z_l} F(Z_1, \ldots, Z_n) + D_z \rho(Z_l) D_{z_l} F(Z_1, \ldots, Z_n))^T]$$

[Δ_{z_l} désigne le laplacien de l'application : $z_l \to F(z_1, \ldots, z_n)$], (L, R_2) est un opérateur linéaire à valeurs dans $L_\infty(P)$. Il est facile de voir que c'est un opérateur de Malliavin au sens de [1] (ou [3]]) et que la restriction de Γ à $R_2 \times R_2$ est son opérateur carré du champ. [*Idem* que : $\Gamma(\Phi, \Psi)=L(\Phi.\Psi)-\Phi.L\Psi-\Psi.L\Phi$, pour $\Phi, \Psi \in R_2$.)

Par extension, pour $\Phi=(\Phi^i)_{i \leqq m} \in (R_2)^m$, on notera encore $L(\Phi)$ le vecteur colonne $(L(\Phi^i))_{i \leqq m}$.

En explicitant les termes de droite, on obtient :

(2.12) Proposition. — *Soient* $\Phi=(\Phi^i)_{i \leqq d} \in (R_2)^d$, $\Psi \in R_1$ *et* f: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *de classe* C_p^1. *On a alors, pour* $j=1, \ldots, d$:

(2.13) $$E\left[\left(\sum_{i=1}^{d} (\partial f/\partial x^i)(\Phi).\Gamma(\Phi^i, \Phi^j)\right).\Psi\right] = -E[f(\Phi).\{2\Psi.L\Phi^j+\Gamma(\Psi, \Phi^j)\}].$$

Preuve. — Notant

$$\Phi^i = F^i(Z_1, \ldots, Z_n) \qquad [\text{avec } F^i \in C_b^2(E^n)]$$

et

$$\Psi = H(Z_1, \ldots, Z_n) \qquad [\text{avec } H \in C_b^1(E^{n'})]$$

on obtient, en prenant

$$\Theta = \Theta_{l,m} = \rho(Z_l)(\partial F^j/\partial z_l^m)(Z_1, \ldots, Z_n).\Psi$$

dans (2.5).

$$\begin{aligned}(2.14)\quad & E\left[\left(\sum_{i=1}^{d} (\partial f/\partial x^i)(\Phi)(\partial F^i/\partial z_l^m)(Z_1, \ldots, Z_n)\right.\right.\\ & \qquad\left.\left. \times \rho(Z_l)(\partial F^j/\partial z_l^m)(Z_1, \ldots, Z_n)\right).\Psi\right]\\ & = -E[f(\Phi).\{\Psi.((\partial\rho/\partial z_l^m)(Z_l)(\partial F^j/\partial z_l^m)(Z_1, \ldots, Z_n)\\ & \qquad + \rho(Z_l)(\partial^2 F^j/(\partial z_l^m)^2)(Z_1, \ldots, Z_n))\\ & \qquad + \rho(Z_l)(\partial F^j/\partial z_l^m)(Z_1, \ldots, Z_n)(\partial H/\partial z_l^m)(Z_1, \ldots, Z_{n'})].\end{aligned}$$

On somme alors (2.14) en $l=1, 2, \ldots, d$ et $m=1, \ldots, \beta$ et on obtient immédiatement (2.13), vues les définitions (2.7) et (2.10).

Remarquons qu'on retrouve, dans la proposition (2.12), la formule 7 de [3] (avec une condition plus faible sur Ψ et évidemment dans un cadre très particulier et très simple).

Voici maintenant la « formule d'intégration par parties » classique qu'on peut déduire de (2.12) et qu'on utilisera dans toute la suite.

On note $\mathscr{T}_3(d)$ l'ensemble des « tableaux T à trois indices » : $T=(t_{i,j,k})_{i,j,k \leq d}$ (isomorphe à $\mathbb{R}^{d^3}$). On a le résultat suivant :

(2.15) PROPOSITION. — *Soient* $\Phi=(\Phi^i)_{i \leq d} \in (R_2)^d$, $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, *de classe* C_p^1 *et* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, *de classe* C_b^1, *telle que* $g(\alpha)/\alpha^2 \to a \in \mathbb{R}$ *et* $g'(\alpha)/\alpha \to b \in \mathbb{R}$ *quand* $\alpha \to 0$. *On a alors, pour* $i=1, 2, \ldots, d$:

$$\begin{aligned}(2.16)\quad & E[\partial f/\partial x^i(\Phi).g(\det(U(\Phi)))]\\ & = E[f(\Phi).G^i(U(\Phi), L(\Phi), \Gamma(U(\Phi), \Phi))]\end{aligned}$$

avec $G^i: M(d) \times \mathbb{R}^d \times \mathscr{T}_3(d) \to \mathbb{R}$, *vérifiant :*

$$(2.17)\qquad |G^i(u, v, w)| \leq L(1 + \|u\|^{d-1}.|v| + \|u\|^{2d-2}.|w|)$$

[$\det(M)$ *désigne le déterminant de* M, $|\,.\,|$ *une norme quelconque et* $\|\,.\,\|$ *la norme opérateur*].

Preuve. — On applique la formule (2.13) avec $\Psi=k(\mathrm{U}(\Phi))$ et $k: \mathrm{M}(d)\to\mathbb{R}$ de classe C_p^1. [C'est possible car les composantes de $\mathrm{U}(\Phi)$ sont dans R_1 et car R_1 est stable par C_p^1.] On obtient :

$$(2.18)\quad \mathrm{E}\left[\left(\sum_{m=1}^{d}(\partial f/\partial x^m)(\Phi).\mathrm{U}(\Phi)^{m,j}\right).k(\mathrm{U}(\Phi))\right] = -\mathrm{E}\left[f(\Phi).\left\{2k(\mathrm{U}(\Phi))\,\mathrm{L}(\Phi^j) + \sum_{p,q=1}^{d}(\partial k/\partial u^{p,q})\,\mathrm{P}(\mathrm{U}(\Phi)^{p,q},\Phi^j)\right\}\right].$$

Considérons maintenant l'application h de $\mathrm{M}(d)$ dans $\mathrm{M}(d)$ suivante :

$$(2.19)\qquad h(u)=\begin{cases} g(\det(u))\,u^{-1} & \text{si } \det(u)\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

h est de classe C_p^1. On peut donc appliquer la formule (2.18) avec $k(u)=(h(u))^{j,i}$. On obtient alors, en sommant sur j entre 1 et d, la formule (2.16) avec :

$$(2.20)\quad \mathrm{G}^i(u,v,w)=-\sum_{j=1}^{d}\left[2(h(u))^{j,i}.v^j+\sum_{p,q=1}^{d}(\partial h^{j,i}/\partial u^{p,q})(u).w^{p,q,j}\right].$$

Comme, lorsque $\det(u)\neq 0$, $h(u)=(g(\det(u))/\det(u)).\mathrm{C}(u)^{\mathrm{T}}$ [$\mathrm{C}(u)=$ transposée de la matrice des cofacteurs associée à u] et comme $\|\mathrm{C}(u)\|\leqq \mathrm{L}_1\|u\|^{d-1}$ et comme $g(\alpha)/\alpha$ est bornée sur $\mathbb{R}-\{0\}$, les termes $2h(u)^{j,i}.v^j$ sont majorés en norme par $\mathrm{L}_2.\|u\|^{d-1}.|v^j|$. On a de même $|(\partial h^{j,i}/\partial u^{p,q})(u)|\leqq \mathrm{L}_3(1+\|u\|^{2d-2})$, d'où l'inégalité (2.17) et la proposition (2.15).

On a déjà vu, dans la remarque 2°, que : $\mathrm{X}_n^{x,i}\in\mathrm{R}_2$, pour tout $x\in\mathbb{R}^d$, tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $i=1,\ldots,d$ [par (H.1) et car E est bornée]. On peut donc appliquer à $\Phi=\mathrm{X}_n^x$ la proposition (2.15). On pose :

$$(2.21)\qquad \mathrm{V}_n^x=\mathrm{L}(\mathrm{X}_n^x)\quad\text{et}\quad \mathrm{W}_n^x=\Gamma(\mathrm{U}_n^x,\mathrm{X}_n^x).$$

[U_n^x est définie en (1.4)].

On a alors :

(2.22) Proposition. — *(a) On a :* $\mathrm{U}(\mathrm{X}_n^x)=\mathrm{U}_n^x$ *(pour* $n\in\mathbb{N}$ *et* $x\in\mathbb{R}^d$*)*;

(b) et si $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$*, de classe* C_p^1*,* $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$*, de classe* C_b^1*, avec* $g(\alpha)/\alpha^2\to a\in\mathbb{R}$ *et* $g'(\alpha)/\alpha\to b\in\mathbb{R}$*, quand* $\alpha\to 0$:

$$(2.23)\qquad \mathrm{E}[(\partial f/\partial x^i)(\mathrm{X}_n^x)\,g(\det(\mathrm{U}_n^x))]=\mathrm{E}[f(\mathrm{X}_n^x).\mathrm{G}^i(\mathrm{U}_n^x,\mathrm{V}_n^x,\mathrm{W}_n^x)]$$

avec $G^i : M(d) \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{T}_3(d) \to \mathbb{R}$ *vérifiant* (2.17).

Preuve. — (*a*) Si on pose $X_n^x = F_n^x(Z_1, \ldots, Z_n)$, on a :

$$(2.24) \quad \begin{cases} D_{z_1} F_1^x(z) = D_z \varphi(x, z) \\ \text{et, pour } n \geqq 2, \\ D_{z_p} F_n^x(z_1, \ldots, z_n) = \begin{cases} D_x \varphi(F_{n-1}^x(z_1, \ldots, z_{n-1}), z_n) \\ \quad \times D_{z_p} F_{n-1}^x(z_1, \ldots, z_{n-1}) \text{ si } l \leqq n-1 \\ D_z \varphi(F_{n-1}^x(z_1, \ldots, z_{n-1}), z_n) \text{ si } l = n. \end{cases} \end{cases}$$

Par suite, on obtient, par récurrence sur $n \geqq 1$, que :

$$U_n^x = \sum_{l=1}^{n} \rho(Z_l)(D_{z_l} F_n^x)(D_{z_l} F_n^x)^T (Z_1, \ldots, Z_n) = U(X_n^x).$$

(C'est immédiat si $n = 1$.)

(*b*) Il suffit d'appliquer le (*a*) et la proposition (2.15).

Remarque. — On verra au VI que $(V_n^x)_{n \geqq 0}$ et $(W_n^x)_{n \geqq 0}$ vérifient des équations aux différences aléatoires du même type que (1.4) [mais faisant intervenir $(X_n^x, U_n^x)_{n \geqq 0}$ à la place de $(X_n^x)_{n \geqq 0}$].

III. RÉSULTATS GÉNÉRAUX SUR L'EXISTENCE D'UNE DENSITÉ POUR η

On suppose que (H.1) est vérifiée et que la chaîne de Markov $(X_n^x)_{n \geqq 0}$ a une probabilité invariante (non nécessairement unique) η. [Si $\theta = 0$ dans (H.1), cela correspond à (H.1) et (H.2).] On se place sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{\underline{F}}, \tilde{P})$ où :

$$(3.1) \quad \begin{cases} \tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}^d, \qquad \tilde{\underline{F}} = \underline{F} \otimes B(\mathbb{R}^d) \\ \text{et} \\ \tilde{P}(d\omega \times dx) = P(d\omega) \times \eta(dx). \end{cases}$$

On note :

$$(3.2) \quad \begin{cases} \tilde{X}_n(\omega, x) = X_n^x(\omega), \qquad \tilde{U}_n(\omega, x) = U_n^x(\omega) \\ \tilde{V}_n(\omega, x) = V_n^x(\omega), \qquad \tilde{W}_n(\omega, x) = W_n^x(\omega) \end{cases}$$

$(\tilde{X}_n)$ est une chaine de Markov stationnaire sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{\underline{F}}, \tilde{P})$, de probabilité invariante η.

Si, pour (tout) $n \geqq 1$, $|\tilde{U}_n|^{4d-4}$, $|\tilde{V}_n|^2$ et $|\tilde{W}_n|^2$ sont $\tilde{P}$-intégrables, on peut intégrer la formule (2.23) par rapport à η et on obtient (avec les hypothèses sur f et g données en 2.22 (b) pour (tout) $n \geqq 1$ et pour tout $i=1, 2, \ldots, d$:

(3.3) $$\tilde{\mathrm{E}}[(\partial f/\partial x^i)(\tilde{\mathrm{X}}_n) g(\det(\tilde{\mathrm{U}}_n))] = \tilde{\mathrm{E}}[f(\tilde{\mathrm{X}}_n) . \mathrm{G}^i(\tilde{\mathrm{U}}_n, \tilde{\mathrm{V}}_n, \tilde{\mathrm{W}}_n)]$$

[par (2.17) et le théorème de Fubini].

Fixons $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les conditions données en 2.22 (b) et telle que l'on ait de plus : $g(\alpha) > 0$ si $\alpha \neq 0$.

$$\left(\text{Par exemple} : g(\alpha) = \begin{cases} \exp(-1/\alpha^2) \text{ si } \alpha \neq 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}\right)$$

On a tout d'abord le résultat suivant :

(3.4) Proposition. — *Si on a* (H.1), *s'il y a une probabilité invariante* η *et s'il existe* $n_0 \geqq 1$ *tel que* $|\tilde{\mathrm{U}}_{n_0}|^{4d-4}$, $|\tilde{\mathrm{V}}_{n_0}|^2$ *et* $|\tilde{\mathrm{W}}_{n_0}|^2$ *soient* $\tilde{\mathrm{P}}$*-intégrables avec de plus* $\tilde{\mathrm{U}}_{n_0}$ $\tilde{\mathrm{P}}$*-p. s. inversible, alors* η *a une densité.*

Remarque. — On verra au IV (resp. : VI) que, sous (H.1) et (H.2), $|\tilde{\mathrm{U}}_n|^{4d-4}$ est $\tilde{\mathrm{P}}$-intégrable pour tout $n \geqq 1$ (resp. : $|\tilde{\mathrm{V}}_n|^2$ et $|\tilde{\mathrm{W}}_n|^2$ sont $\tilde{\mathrm{P}}$-intégrables pour tout $n \geqq 1$).

Preuve de (3.4). — D'après (3.3) et (2.17) on obtient, à cause de la $\tilde{\mathrm{P}}$-intégrabilité de $|\tilde{\mathrm{U}}_{n_0}|^{4d-4}$, $|\tilde{\mathrm{V}}_{n_0}|^2$ et $|\tilde{\mathrm{W}}_{n_0}|^2$, par l'inégalité de Schwarz, et en prenant $f \in \mathrm{C}_b^1$ (quelconque) :

(3.5) $$|\tilde{\mathrm{E}}[(\partial f/\partial x^i)(\tilde{\mathrm{X}}_{n_0}) . g(\det(\tilde{\mathrm{U}}_{n_0}))]| \leqq \mathrm{K}_n . \| f \|_\infty.$$

(3.5) étant vraie pour tout $i=1, 2, \ldots, d$, on obtient, par la proposition (2.1), que la loi de $\tilde{\mathrm{X}}_{n_0}$, relativement à la probabilité $\tilde{\mathrm{P}}_{n_0}$ définie par : $\tilde{\mathrm{P}}_{n_0}(d\tilde{\omega}) = g(\det(\tilde{\mathrm{U}}_{n_0}(\tilde{\omega})) . \mathrm{P}(d\tilde{\omega}))$, a une densité. Comme $\tilde{\mathrm{U}}_{n_0}$ est $\tilde{\mathrm{P}}$-p. s. inversible et comme on a $g(\alpha) > 0$ si $\alpha \neq 0$, $\tilde{\mathrm{P}}_{n_0}$ est équivalente à $\tilde{\mathrm{P}}$. Donc la loi de $\tilde{\mathrm{X}}_{n_0}$ sous $\tilde{\mathrm{P}}$, qui est η par définition de $\tilde{\mathrm{P}}$, a une densité.

Introduisons maintenant la condition suivante :

(3.6) $$\sup_{n \geqq 1} \tilde{\mathrm{E}}(|(\tilde{\mathrm{V}}_n, \tilde{\mathrm{W}}_n)|^2) < +\infty.$$

On a alors le théorème suivant qui sera utilisé avec les résultats des IV, V et VI pour obtenir le théorème (1.8).

(3.7) Théorème. — *Si on a* (H.1), *s'il y a une probabilité invariante* η, *si les conditions* (1.6) (i), (ii) *et* (iii) *sont vérifiées et si de plus on a* (3.6), *alors* η *a une densité.*

Preuve. — De (3.3), (2.17), (1.6) (iii) et (3.6), on déduit que :

(3.8) $$|\tilde{\mathrm{E}}[(\partial f/\partial x^i)(\tilde{\mathrm{X}}_n) . g(\det(\tilde{\mathrm{U}}_n))]| \leqq \mathrm{K}' . \| f \|_\infty, \qquad \text{pour tout } n \geqq 1.$$

D'autre part, (1.6) (i) entraîne que: $\tilde{\mathrm{E}}[(\partial f/\partial x^i)(\tilde{\mathrm{X}}_n).g(\det(\tilde{\mathrm{U}}_n))]$ tend vers $\tilde{\mathrm{E}}[(\partial f/\partial x^i)(\tilde{\mathrm{X}}_\infty)\,g(\det(\tilde{\mathrm{U}}_\infty))]$, quand $n \to +\infty$. On a donc:

$$(3.9) \qquad |\tilde{\mathrm{E}}[(\partial f/\partial x^i)(\tilde{\mathrm{X}}_\infty)\,g(\det(\tilde{\mathrm{U}}_\infty))]| \leqq \mathrm{K}'.\|f\|_\infty,$$

pour tout $i=1, \ldots, n$ et toute $f \in \mathrm{C}_b^1(\mathbb{R}^d)$. Donc, par la proposition (2.1), la loi de $\tilde{\mathrm{X}}_\infty$ sous $\tilde{\mathrm{P}}'$, où $\tilde{\mathrm{P}}'(d\tilde{\omega}) = g\,(\det(\tilde{\mathrm{U}}_\infty(\tilde{\omega}))).\tilde{\mathrm{P}}(d\tilde{\omega})$, a une densité. D'où le résultat car $\tilde{\mathrm{U}}_\infty$ étant $\tilde{\mathrm{P}}$-p.s. inversible [et $g(\alpha) > 0$ si $\alpha \neq 0$], $\tilde{\mathrm{P}}'$ est équivalente à $\tilde{\mathrm{P}}$ et enfin car la loi de $\tilde{\mathrm{X}}_\infty$ sous $\tilde{\mathrm{P}}$ est η. (Puisque $\tilde{\mathrm{X}}_n$ a la loi η, pour tout $n \in \mathbb{N}$.)

IV. ÉTUDE DU COMPORTEMENT DE $(\tilde{\mathrm{X}}_n, \tilde{\mathrm{U}}_n)$ QUAND η TEND VERS L'INFINI

On suppose, comme au III, que (H.1) est vérifiée et que la chaîne $(\mathrm{X}_n^x)_{n \geqq 0}$ admet une probabilité invariante η. Avec les notations du III, (1.4) devient, si on pose,

$$(4.1) \qquad \begin{cases} \mathrm{A}^{(i,j),(k,l)}(x, z) = (\mathrm{D}_x\varphi)^{i,k}(x, z)\,(\mathrm{D}_x\varphi)^{j,l}(x, z) \\ \text{et} \\ \qquad \mathrm{B}(x, z) = \rho(z)\,(\mathrm{D}_z\varphi)\,(\mathrm{D}_z\varphi)^{\mathrm{T}}(x, z) \end{cases}$$

$$(4.2) \qquad \begin{cases} \qquad \tilde{\mathrm{U}}_0 = 0 \\ \text{et, pour } n \geqq 1, \\ \tilde{\mathrm{U}}_n = \mathrm{A}(\tilde{\mathrm{X}}_{n-1}, \mathrm{Z}_n)\,\tilde{\mathrm{U}}_{n-1} + \mathrm{B}(\tilde{\mathrm{X}}_{n-1}, \mathrm{Z}_n). \end{cases}$$

[Si $\mathrm{M} \in \mathscr{M}(d)$, AM est la matrice N suivante:

$$\mathrm{N}^{i,j} = \sum_{k,\,l=1}^{d} \mathrm{A}^{(i,j),(k,l)}.\mathrm{M}^{k,l}\Bigg].$$

De (4.2) on déduit un premier résultat, complétant la proposition (3.4):

(4.3) Proposition. — *Si on a* (H.1) *et* (H.2), *alors* $|\tilde{\mathrm{U}}_n|^{l(d)}$ *est* $\tilde{\mathrm{P}}$-*intégrable. En particulier* $|\tilde{\mathrm{U}}_n|^{4d-4}$ *est intégrable pour* $\tilde{\mathrm{P}}$.

Preuve. — On va utiliser les inégalités suivantes, sur A et B définies en (4.1), qui se déduisent immédiatement de (H.1) :

$$(4.4)\quad \begin{cases} \text{(i)} & \|A(x, z)\| \leqq K'' \\ \text{et} & \\ \text{(ii)} & |B(x, z)| \leqq K''(1+|x|^{2\theta}) \quad (\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^d \text{ et tout } z \in E). \end{cases}$$

($\|\,.\,\|$: norme opérateur.)

On fait une récurrence sur n pour obtenir la proposition (4.3). Si $n=1$, on a :

$$\tilde{U}_1(\omega, x) = B(x, Z_1(\omega)) \qquad \text{et} \qquad |B(x, Z_1)| \leqq K''(1+|x|^{2\theta}).$$

Donc $|\tilde{U}_1|^{l(d)}$ est $\tilde{P}$-intégrable par (H.2).

Si $|\tilde{U}_n|^{l(d)}$ est $\tilde{P}$-intégrable, on a alors, par (4.2) :

$$|\tilde{U}_{n+1}| \leqq \|A(\tilde{X}_n, Z_{n+1})\| . |\tilde{U}_n| + |B(\tilde{X}_n, Z_{n+1})|$$

et donc, par (4.4), on obtient $|\tilde{U}_{n+1}| \leqq K''.(|\tilde{U}_n| + |\tilde{X}_n|^{2\theta} + 1)$. D'où le résultat car $\tilde{X}_n$ a la loi η, par (H.2) et par l'hypothèse de récurrence.

L'équation (4.2) est une « équation aux différences aléatoires dans le cas markovien »; on en a une résolution immédiate par une récurrence sur n. On obtient :

$$(4.5)\quad \begin{cases} \tilde{U}_0 = 0, \qquad \tilde{U}_1 = B(\tilde{X}_0, Z_1), \\ \text{et, pour } n \geqq 2 \\ \tilde{U}_n = B(\tilde{X}_{n-1}, Z_n) + \sum_{k=1}^{n-1} A(\tilde{X}_{n-1}, Z_n) \times \dots \\ \qquad\qquad \times A(\tilde{X}_{n-k}, Z_{n-k+1})\, B(\tilde{X}_{n-k-1}, Z_{n-k}). \end{cases}$$

On en déduit le résultat suivant qui sera utilisé pour prouver le résultat principal de cette partie (théorème 4.10) :

(4.6) PROPOSITION. — *Si on a* (H.1), (H.2) *et* (H.3), *alors il existe* $L > 0$ *et* $a \in [0, 1[$ *tels que, pour* k *et* n *vérifiant* $1 \leqq k \leqq n-1$:

$$(4.7)\quad \tilde{E}[\|A(\tilde{X}_{n-1}, Z_n) \dots A(\tilde{X}_{n-k}, Z_{n-k+1})\, B(\tilde{X}_{n-k-1}, Z_{n-k})\|^{l(d)}] \leqq L . a^k.$$

Preuve. — Posons $H(x) = \int_E \|D_x \varphi(x, z)\|^{2\,l(d)} . \lambda(dz)$ et $a = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} H(x)$.

On a, par (H.3) : $a < 1$. D'autre part, par (4.1), on a, pour $l = 1, \dots, n-1$:

$$(4.8)\quad \tilde{E}(\|A(\tilde{X}_{n-l}, Z_{n-l+1})\|^{l(d)} / \sigma(\tilde{X}_0, \dots, \tilde{X}_{n-l})) \leqq H(\tilde{X}_{n-l}).$$

[Puisque Z_{n-l+1} est indépendante de $\sigma(\tilde{X}_0, \ldots, \tilde{X}_{n-l})$.]

En majorant $\| A(\tilde{X}_{n-1}, Z_n) \ldots A(\tilde{X}_{n-k}, Z_{n-k+1}) B(\tilde{X}_{n-k-1}, Z_{n-k}) \|$ par le produit des normes et en conditionnant d'abord par rapport à $\sigma(\tilde{X}_0, \ldots, \tilde{X}_{n-1})$ la puissance $l(d)$-ième de ce produit, ensuite par rapport à $\sigma(\tilde{X}_0, \ldots, \tilde{X}_{n-2}), \ldots$ enfin par rapport à $\sigma(\tilde{X}_0, \ldots, \tilde{X}_{n-k})$, on obtient :

$$\mathrm{E}[\| A(\tilde{X}_{n-1}, Z_n) \ldots A(\tilde{X}_{n-k}, Z_{n-k+1}) B(\tilde{X}_{n-k-1}, Z_{n-k}) \|^{l(d)}]$$
$$\leqq a^k . \mathrm{E}[\| B(\tilde{X}_{n-k-1}, Z_{n-k}) \|^{l(d)}].$$

D'où le résultat par (4.4) (ii) et (H.2).

(4.6) entraîne de manière immédiate que $\sup_{n \geqq 1} \tilde{\mathrm{E}}[\| \tilde{U}_n \|^{l(d)}] < +\infty$; en particulier on obtient (1.6) (iii).

En vue de prouver (1.6) (i), sous les hypothèses (H.1), (H.2) et (H.3), on associe à la chaîne de Markov stationnaire $(\tilde{X}_n, Z_{n+1})_{n \geqq 0}$ sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{P})$ une chaîne à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ indexée par $\mathbb{Z}$, sur un espace auxiliaire $(\Omega^*, \underline{F}^*, P^*)$, stationnaire, de même probabilité de transition et admettant $\eta \times \lambda$ comme probabilité invariante. (Par le théorème de Kolmogorov.)

On note $(X_n^*, Z_{n+1}^*)_{n \in \mathbb{Z}}$ cette nouvelle chaine de Markov. On aura, pour $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$(4.9) \quad \mathscr{L}((\tilde{X}_l, Z_{l+1})_{0 \leqq l \leqq m}) = \mathscr{L}((X_l^*, Z_{l+1}^*)_{0 \leqq l \leqq m})$$
$$= \mathscr{L}((X_{l-n}^*, Z_{l-n+1}^*)_{0 \leqq l \leqq m}).$$

[On a l'inégalité de gauche car les deux chaînes ont même probabilité de transition et celle de droite par stationnarité de la chaîne $(X_n^*, Z_{n+1}^*)_{n \in \mathbb{Z}}$.]

(4.10) THÉORÈME. — *Sous* (H.1), (H.2) *et* (H.3), *on a* (1.6) (i) *et* (1.6) (iii).

Preuve. — On vient de montrer (1.6) (iii) comme conséquence de la proposition (4.6). Pour obtenir (1.6) (i), on pose :

$$(4.11) \quad \begin{cases} B(X_{-1}^*, Z_0^*) \quad \text{si} \quad n=1 \\ \text{et, pour } n \geqq 2, \\ U_n^* = B(X_{-1}^*, Z_0^*) + \sum_{k=1}^{n-1} A(X_{-1}^*, Z_0^*) \times \ldots \\ \qquad \times A(X_{-k}^*, Z_{-k+1}^*) B(X_{-k-1}^*, Z_{-k}^*). \end{cases}$$

U_n^* est la n-ième somme partielle d'une série dont le terme général, premier terme non compris, a même loi, par (4.9), que :

$$A(\tilde{X}_{n-1}, Z_n) \ldots A(\tilde{X}_{n-k}, Z_{n-k+1}) B(\tilde{X}_{n-k-1}, Z_{n-k}).$$

Par suite, d'après la proposition (4.6), la suite (U_n^*) est convergente dans $L^{l(d)}(P^*)$.

De (4.9) on déduit encore, avec (4.5) et (4.11), que $\tilde{U}_n$ a même loi que U_n^*, pour tout $n \geqq 1$. Par suite $(\tilde{U}_n)_{n \geqq 1}$ converge en loi quand $n \to +\infty$.

Pour obtenir (1.6) (i) on considère le couple (X_0^*, U_n^*).

Notant U_∞^* la limite dans $L^{l(d)}(P^*)$ des U_n^*, (X_0^*, U_n^*) converge dans $L^{l(d)}(P^*)$, donc en probabilité et aussi en loi vers (X_0^*, U_∞^*). Or, par (4.9) avec $m=n$ et par (4.5) et (4.11), on a :

$$\mathscr{L}((X_0^*, U_n^*)) = \mathscr{L}((\tilde{X}_n, \tilde{U}_n)). \tag{4.12}$$

D'où la propriété (1.6) (i).

V. ÉTUDE DE L'INVERSIBILITÉ DE $\tilde{U}_\infty$

(a) Préliminaires

La condition (B) introduite au I est équivalente, de manière simple, à la condition (B.c) suivante. (*Voir* l'Appendice.)

(B.c) Il existe une constante $c \in]0, 1]$ et un ouvert D' de $\mathbb{R}^d$, vérifiant $\eta(D') > 0$, tels que, pour tout $x \in D'$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^d - \{0\}$, on ait :

$$\lambda(\{z : C(x, z)(y) \neq 0\}) \geqq c.$$

[La condition plus faible obtenue en remplaçant dans (B.c), pour tout $x \in D'$ par : pour η-p. s. tout $x \in D'$, serait suffisante pour l'étude faite du V(b).]

D'autre part, pour obtenir l'unicité de la probabilité invariante, il suffit de montrer que $X_n^x - X_n^y$ converge en probabilité vers 0 quand $n \to +\infty$, pour tout couple x, y. [En effet, si φ est continue à support compact et si η_1 et η_2 sont deux probabilités invariantes, on a :

$$\eta_1(\varphi) - \eta_2(\varphi) = \iint E[\varphi(X_n^x) - \varphi(X_n^y)] \, \eta_1(dx) \otimes \eta_2(dy)$$

et on conclut en considérant pour x et y fixés l'ensemble $\{|X_n^x - X_n^y| > \varepsilon\}$ et son complémentaire. $\rbrack$

Les hypothèses (H. 1) et (H. 3) vont permettre d'obtenir la propriété plus forte suivante :

(P) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a $X_n^x - X_n^y \xrightarrow{P-p.s.} 0$ quand $n \to +\infty$.

On démontre (P) en considérant, pour $x_0 \in \mathbb{R}^d$ fixé, l'application $x \to X_n^x - X_n^{x_0}$. L'hypothèse (H. 1) et une récurrence sur n permettent d'obtenir que, pour tout $n \geqq 1$, $X_n^x - X_n^{x_0}$ appartient à tous les $L^p(P)$ $(p \geqq 1)$. On obtient également pour p fixé, que l'application précédente considérée comme transformation de $\mathbb{R}^d$ dans $L^p(P)$ rst différentiable en tout point. Prenant $p = 2l(d)$, le théorème des accroissements finis et l'hypothèse (H. 3) entraînent l'inégalité (I) suivante :

$$
\text{(I)} \quad \left\{
\begin{array}{l}
E[|X_n^x - X_n^y|^{2l(d)}] \leqq \delta^n . |x-y|^{2l(d)} \to 0, \quad \text{quand } n \to +\infty \\
\text{avec } \delta = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^d} \displaystyle\int \|D_x \varphi(x, z)\|^{2l(d)} . \lambda(dz) \ [< 1 \text{ par (H. 3)}].
\end{array}
\right.
$$

D'où la propriété (P) par (I) et le lemme de Borel-Cantelli.

On va montrer maintenant la propriété (P′) suivante qu'on utilisera au (*b*).

(P′) Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, (X_n^x) passe P-p. s. une infinité de fois dans tout ouvert C tel que $\eta(C) > 0$.

Puisque η est probabilité invariante, pour toute partie C de $\mathbb{R}^d$, on sait que, pour η-p. s. tout $x \in C$, X_n^x passe P-p. s. une infinité de fois dans C. Si on a $\eta(C) > 0$, on en déduit qu'il existe un $y \in \mathbb{R}^d$ tel que (X_n^y) passe P-p. s. une infinité de fois dans C. Supposant de plus que C est ouvert, on obtient, au moyen de (P) la propriété (P′).

Sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}})$ on notera : $\tilde{\mathscr{F}}_n = \sigma(\tilde{X}_0, Z_1, \ldots, Z_n)$ et, pour T un $(\tilde{\mathscr{F}}_n)$-temps d'arrêt, $\tilde{\mathscr{F}}_T$ sera définie de la manière habituelle.

Toujours sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}})$, on note $S_0 = 0$ et on pose, pour $k \geqq 1$: $S_k = \inf\{l > S_{k-1} : \tilde{X}_l \in D'\}$, avec D′ vérifiant (B. *c*) (avec la convention $\inf \varnothing = +\infty$). Chaque S_k est un $(\tilde{\mathscr{F}}_n)$-temps d'arrêt et on a : $\tilde{P}[S_k < +\infty] = 1$ pour tout $k \geqq 0$. [Comme conséquence de (P′)]. On pose également, pour $k \geqq 0$, $T_k = S_k + 1$.

(b) On suppose qu'on a (H. 1), (H. 2), (H. 3). On va étudier la suite aléatoire $(\text{rg}(\tilde{U}_{T_k}))_{k \geqq 0}$ [rg(M) désigne le rang de M]. Remarquons tout d'abord que (1.4), la définition (1.7) de C et le passage à $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{P})$ donnent, pour $n \geqq 1$:

(5.1) $\tilde{U}_{n-1}+\rho(Z_n).C(\tilde{X}_{n-1}, Z_n)$

$$=\begin{cases} \tilde{U}_{n-1} & \text{si } \det(D_x\varphi(\tilde{X}_{n-1}, Z_n))=0 \\ (D_x\varphi(\tilde{X}_{n-1}, Z_n))^{-1}.\tilde{U}_n(D_x\varphi(\tilde{X}_{n-1}, Z_n))^{-1,T} & \text{sinon} \end{cases}$$

On obtient par suite, si on a (C) :

(5.2) $$\operatorname{rg}(\tilde{U}_n) \underset{\tilde{P}-p.s.}{=} \operatorname{rg}(\tilde{U}_{n-1}+\rho(Z_n)C(\tilde{X}_{n-1}, Z_n)) \geqq \operatorname{rg}(\tilde{U}_{n-1})$$

(pour tout $n \geqq 1$)

Rappelons d'autre part le résultat classique suivant : si M et N sont des matrices symétriques de type positif on a :

(5.3) $$\operatorname{rg}(M+N)=\operatorname{rg}(M) \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(M) \subset \operatorname{Ker}(N).$$

On déduit alors de (5.3) et du fait que ρ est strictement positive :

(5.4) Si on a (B.c), alors, pour $k \geqq 1$ et $n \geqq k+1$, on a :

$$\lambda(\{z: \operatorname{rg}(\tilde{U}_{n-1}+\rho(z)C(\tilde{X}_{n-1}, z)) =\operatorname{rg}(\tilde{U}_{n-1})\}).1_{\{S_k=n-1,\, \operatorname{rg}(\tilde{U}_{n-1})<d\}} \leqq (1-c).1_{\{S_k=n-1,\, \operatorname{rg}(\tilde{U}_{n-1})<d\}}.$$

[En effet, pour $\tilde{\omega}$ fixé tel que $\operatorname{Ker}(\tilde{U}_{n-1}(\tilde{\omega})) \neq \{0\}$, on a, si on note $M=\tilde{U}_{n-1}(\tilde{\omega})$ et $x=\tilde{X}_{n-1}(\tilde{\omega})$:

$$\{z: \operatorname{Ker}(M) \subset \operatorname{Ker}(C(x, z))\} = \bigcap_{y \in \operatorname{Ker}(M)} \{z: C(x, z)(y)=0\}.$$

D'autre part $\tilde{\omega}$ est tel que $x \in D'$.]

Des résultats précédents on déduit la proposition suivante :

(5.5) PROPOSITION. — *Sous les hypothèses* (B.c) *et* (C) [*en plus de* (H.1), (H.2) *et* (H.3)], *on a, pour tout* $k \geqq 1$:

(5.6) $$\tilde{P}[S_k<+\infty,\, \operatorname{rg}(\tilde{U}_{T_k})=\operatorname{rg}(\tilde{U}_{S_k})<d/\tilde{\mathscr{F}}_{S_k}] \underset{\tilde{P}-p.s.}{\leqq} (1-c).1_{\{S_k<+\infty,\, \operatorname{rg}(\tilde{U}_{S_k})<d\}}.$$

Preuve. — On rappelle qu'on a posé $T_k=S_k+1$ et que S_k est le k-ième temps de passage dans D'. De (5.2) on déduit que l'espérance conditionnelle à majorer est égale à la somme sur $n \geqq k+1$ des probabilités conditionnelles suivantes :

$$\tilde{P}[S_k=n-1,\, \operatorname{rg}(\tilde{U}_{n-1}+\rho(Z_n).C(\tilde{X}_{n-1}, Z_n))=\operatorname{rg}(\tilde{U}_{n-1})<d/\tilde{\mathscr{F}}_{n-1}].$$

Comme Z_n est indépendante de $\sigma(\tilde{X}_0, Z_1, \ldots, Z_{n-1})$ et a la loi uniforme sur E, cette dernière espérance conditionnelle s'écrit encore :

$$\lambda(\{z : \mathrm{rg}(\tilde{U}_{n-1} + \rho(z) C(\tilde{X}_{n-1}, z)) = \mathrm{rg}(\tilde{U}_{n-1})\}).1_{\{S_k = n-1,\, \mathrm{rg}(\tilde{U}_{n-1}) < d\}}.$$

D'où le résultat par (5.4).

Remarque. — Lorsqu'on a les hypothèses de la proposition (5.5) et que $c=1$ dans (B.c), on déduit, de manière évidente, de (5.5) que $\tilde{P}[\det(\tilde{U}_{T_d}) \neq 0] = 1$.

Voici maintenant le résultat principal du V qui se déduira aisément de la proposition (5.5)

(5.7) THÉORÈME. — *Sous* (H.1), (H.2), (H.3), (B) *et* (C) *la v. a.* $\tilde{U}_\infty$, *limite en loi des* $\tilde{U}_n$, *est* $\tilde{P}$-*p. s. inversible.*

Preuve. — Il suffit de montrer que $\tilde{P}[T_k < +\infty, \mathrm{rg}(\tilde{U}_{T_k}) < d] \to 0$ quand $k \to +\infty$ (car on a :

$$\tilde{P}[\det(\tilde{U}_\infty) = 0] = \tilde{P}[\mathrm{rg}(\tilde{U}_\infty) < d] \leqq \tilde{P}[T_k < +\infty, \mathrm{rg}(\tilde{U}_{T_k}) < d].$$

Pour le voir on utilise (P'), (4.9), une famille $T^*_{k,n}$ de temps aléatoires sur l'espace auxiliaire et les U^*_n définis en (4.11) pour étudier $\tilde{P}[T_k \leqq n, \mathrm{rg}(\tilde{U}_{T_k}) < d]$. *Voir* l'Appendice.)

On va prouver que l'on a :

$$\text{(5.8)}\quad \tilde{P}[T_k < +\infty, \mathrm{rg}(\tilde{U}_{T_k}) < d] \leqq C_k^{d-1} (1-c)^{k-d+1} \qquad (\text{pour } k \geqq d-1 \text{ et } k \neq 0)$$

[ce qui donnera le résultat car $c \in]0, 1]$ et donc $C_k^{d-1}.(1-c)^{k-d+1} \to 0$ quand $k \to +\infty$].

Pour obtenir (5.8), il suffit de montrer que l'on a, si $m = 1, 2, \ldots, k$, si on a $0 \leqq l_1 < l_2 < \ldots < l_m \leqq k-1$:

$$\text{(5.9)}\quad \tilde{P}[S_{l_m} < +\infty, \mathrm{rg}(\tilde{U}_{T_{l_1}}) = \mathrm{rg}(\tilde{U}_{S_{l_1}}), \ldots, \mathrm{rg}(\tilde{U}_{T_{l_m}}) = \mathrm{rg}(\tilde{U}_{S_{l_m}}) < d] \leqq (1-c)^m.$$

En effet, si $T_k < +\infty$ et si $\mathrm{rg}(\tilde{U}_{T_k}) \leqq d-1$, on ne peut avoir $\mathrm{rg}(\tilde{U}_{T_j}) > \mathrm{rg}(\tilde{U}_{S_j})$ qu'en au plus $d-1$ valeurs de j entre 1 et k et il reste au moins $m = k-d+1$ autres valeurs.

(5.9) se démontre par récurrence sur $m\,(\leqq k)$. Si $m=1$ c'est une conséquence immédiate de (5.6). Le passage de m à $m+1$ au moyen de la formule (5.6) est également immédiat. D'où le théorème (5.7).

VI. ÉTUDE DE $(\tilde{V}_n)_n$ ET $(\tilde{W}_n)_n$

On revient provisoirement sur l'espace $(\Omega, \underline{F}, P)$. On va montrer tout d'abord que $(V_n^x)_{n \geqq 0}$ et $(W_n^x)_{n \geqq 0}$ sont solutions d'équations aux différences aléatoires faisant intervenir la chaîne de Markov $(X_n^x, U_n^x)_{n \geqq 0}$ et la suite $(Z_n)_{n \geqq 0}$. On a précisément le résultat suivant :

(6.1) Proposition. — *Notant* $Y(1)_n^x = V_n^x$ *et* $Y(2)_n^x = W_n^x$, *pour* $i=1$ *et* 2 *et* $n \in \mathbb{N}$, $Y(i)_n^x$ *s'exprime ainsi :*

$$(6.2)\quad \begin{cases} Y(i)_0^x = 0 \\ \text{et, pour } n \geqq 1, \\ Y(i)_n^x = A_i(X_{n-1}^x, Z_n) \, . \, Y(i)_{n-1}^x + B_i(X_{n-1}^x, U_{n-1}^x, Z_n^x) \end{cases}$$

avec

$$(6.3)\quad \begin{cases} A_1(x, z) = D_x \varphi(x, z) \\ A_2^{(i, j, k)\,(l, m, p)}(x, z) = (D_x \varphi)^{i, l}(x, z) \, . \, (D_x \varphi)^{j, m}(x, z)(D_x \varphi)^{k, p}(x, z) \\ B_1(x, u, z) = 1/2\,[\rho(z)\Delta_z \varphi(x, z) \\ \qquad\qquad + D\rho(z)(D_z \varphi(x, z))^T] + 1/2\, D_{x^2}^2 \varphi(x, z) \, . \, u \\ B_2(x, u, z) = (D_x A(x, z) u + D_x B(x, z)) \, . \, u \, . \, (D_x \varphi)^T(x, z) \\ \qquad\qquad + \rho(z)(D_z A(x, z) u + D_z B(x, z)) \, . \, (D_z \varphi)^T(x, z). \end{cases}$$

[A *et* B *sont définis en* (4.1); *de plus, si* $T = (i_{l, m, p}) \in \mathscr{T}_3(n)$, $A_2 . T$ *est l'élément de* $\mathscr{T}_3(n)$ *suivant :*

$$(A_2 \, . \, T)_{i, j, k} = \sum_{l, m, p=1}^{n} A^{(i, j, k);\,(l, m, p)} \, . \, t_{l, m, p}\Bigg].$$

Preuve. — Pour obtenir (6.2) dans le cas où $i=1$, on utilise l'expression de V_n^x obtenue en prenant $\Phi=X_n^x=F_n^x(Z_1, \ldots, Z_n)$ dans (2.11), l'expression de $D_{z_l}F_n^x$ donnée en (2.24) et l'expression suivante de $\Delta_{z_l}F_n^x$ conséquence de (2.24) :

$$(6.4)\quad \begin{cases} \Delta_z F_1^x(z)=\Delta_z \varphi(x, z) \\ \text{et, pour } n \geqq 2, \\ \Delta_{z_l} F_n(z_1, \ldots, z_n)=\begin{cases} D_x \varphi(F_{n-1}^x(z_1, \ldots, z_{n-1}), z_n)\, \Delta_{z_l} F_{n-1}^x \\ \quad (z_1, \ldots, z_{n-1}) \\ \quad + D_{x^2} \varphi(F_{n-1}^x(z_1, \ldots, z_{n-1}), z_n) \\ \quad \times (D_{z_l} F_{n-1}^x)(D_{z_l} F_{n-1}^x)^T (z_1, \ldots, z_{n-1}) \\ \text{si } l \leqq n-1 \text{ et} \\ \Delta_z \varphi(F_{n-1}^x(z_1, \ldots, z_{n-1}), z_n) \quad \text{si} \quad l=n. \end{cases} \end{cases}$$

Lorsque $i=1$, (6.2) avec les expressions de A_1 et B_1 données par (6.3) est immédiate pour $n=0$ et $n=1$. [Par (2.24) et (6.4).] Pour $n \geqq 2$, on écrit, toujours par (2.24) et (6.4) pour $l=n$:

$$V_n^x=1/2 \sum_{l=1}^{n-1} [\rho(Z_l)\, \Delta_{z_l} F_n^x(Z_1, \ldots, Z_n)+D_z \rho(Z_l)(D_{z_l} F_n^x(Z_1, \ldots, Z_n))^T]$$
$$+1/2\,[\rho(Z_n)\, \Delta_z \varphi(X_{n-1}^x, Z_n)+D\rho(Z_n)(D_z \varphi(X_{n-1}^x, Z_n)^T]$$

et donc, par (2.24) et (6.4) pour $l \leqq n-1$:

$$V_n^x=A_1(X_{n-1}^x, Z_n)\, V_{n-1}^x+B_1(X_{n-1}^x, U_{n-1}^x, Z_n).$$

[En utilisant la définition (2.8) et son extension (2.9) de Γ (Φ, Ψ), avec $\Phi=\Psi=X_n^x$.]

D'où le résultat dans le cas où $i=1$.

Si $i=2$ on utilise l'expression de W_n^x obtenue en prenant $\Phi=U_n^x$ et $\Psi=X_n^x$ dans (2.8) [ou plutôt dans son extension, avec la notation $U_n^x=H_n^x(Z_1, \ldots, Z_n)$].

En plus de (2.25), on aura besoin de l'expression de $D_{z_l}H_n^x(z_1, \ldots, z_n)$ qui va suivre.

Rappelons que l'on a :

$$(6.5)\quad \begin{cases} U_0^x=0 \\ \text{et, pour } n \geqq 1, \\ U_n^x=A(X_{n-1}^x, Z_n)\, U_{n-1}^x+B(X_{n-1}^x, Z_n), \end{cases}$$

avec A et B définis en (4.1).

On en déduit alors le résultat suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} D_z H_1^x(z) = D_z B(x, z) \\ \text{et, pour } n \geqq 1, \\ D_{z_l} H_n(z_1, \ldots, z_n) = \left\{\begin{array}{l} A(F_{n-1}^x(z_1, \ldots, z_{n-1}), z_n) D_{z_l} H_{n-1}^x(z_1, \ldots, z_{n-1}) \\ \quad + D_x A(F_{n-1}^x(z_1, \ldots, z_{n-1}), z_n) \\ \quad \times H_{n-1}^x(z_1, \ldots, z_{n-1}) D_{z_l} F_{n-1}^x(z_1, \ldots, z_{n-1}) \\ \quad + D_x B(F_{n-1}^x(z_1, \ldots, z_{n-1}), z_n) D_{z_l} F_{n-1}^x(z_1, \ldots, z_{n-1}) \\ \text{si } l \leqq n-1, \text{ et} \\ D_z A(F_{n-1}^x(z_1, \ldots, z_{n-1}), z_n) H_{n-1}^x(z_1, \ldots, z_{n-1}) \\ \quad + D_z B(F_{n-1}^x(z_1, \ldots, z_{n-1}), z_n), \quad \text{si } l = n. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

On a $W_0^x = 0$ et $W_1^x = \rho(Z_1) D_z H_1^x(Z_1) D_z F_1(Z_1) = B_2(x, 0, Z_1)$ par (2.25) et (6.6). Pour $n \geqq 2$, on a, en utilisant encore (2.24) et (6.6) pour $l = n$:

$$W_n^x = \sum_{l=1}^{n-1} [\rho(Z_l) D_{z_l} H_n^x(Z_1, \ldots, Z_n) D_{z_l} F_n^x(Z_1, \ldots, Z_n)]$$
$$+ \rho(Z_n)(D_z A(X_{n-1}^x, Z_n) U_{n-1}^x + D_z B(X_{n-1}^x, Z_n))(D_z \varphi)^T(X_{n-1}^x, Z_n)$$

et encore, par (2.24) et (6.6) pour $l \leqq n-1$:

$$W_n^x = A(X_{n-1}^x, Z_n) . W_{n-1}^x . (D_x \varphi)^T(X_{n-1}^x, Z_n) + B_2(X_{n-1}^x, U_{n-1}^x, Z_n)$$

ce qui, avec la définition (4.1) de A donne (6.2) avec A_2, B_2 définis en (6.3).

Voici maintenant un résultat qui complète la proposition (4.3).

6.7. Proposition. — *Si on a* (H.1) *et* (H.2), *alors* $|\tilde{V}_n|^2$ *et* $|\tilde{W}_n|^2$ *sont* $\tilde{P}$-*intégrables* (*pour tout* $n \geqq 1$).

Preuve. — On va utiliser les inégalités suivantes sur A_i et B_i, qui se déduisent immédiatement de (H.1) [et des définitions (4.1) de A et B, (6.3) de A_i et B_i].

$$(6.8) \quad \left\{\begin{array}{l} \| A_i(x, z) \| \leqq L' \\ \text{et} \\ \| B_1(x, u, z) \| \leqq L' . (1 + |x|^\theta + \| u \|) \\ \| B_2(x, u, z) \| \leqq L' . (1 + |x|^{3\theta} + (1 + |x|^{2\theta}) . \| u \| + \| u \|^2). \end{array}\right.$$

On fait alors une récurrence sur n. Lorsque $n = 1$, on a :

$$Y(i)_1^x(\omega) = B_i(x, 0, Z_1(\omega)) \qquad (\text{pour } i = 1 \text{ et } 2).$$

On obtient donc la $\tilde{P}$-intégrabilité de $|\tilde{V}_1|^2$ et $|\tilde{W}_1|^2$.

[Par (6.8), (H.2) et l'inégalité de Schwarz.]

Supposons maintenant que $|\tilde{V}_n|^2$ et $|\tilde{W}_n|^2$ sont $\tilde{P}$-intégrables. On a, par (6.2), pour $i=1$ et 2, et en notant $\widetilde{Y(i)}_n(\omega, x) = Y(i)_n^x(\omega)$:

(6.9) $\quad |\widetilde{Y(i)}_{n+1}| \leqq \|A_i(\tilde{X}_n, Z_{n+1})\| . |\widetilde{Y(i)}_n| + \|B_i(\tilde{X}_n, \tilde{U}_n, Z_{n+1})\|$.

D'où, en utilisant (6.8) :

$$(6.10) \quad |\widetilde{Y(i)}_{n+1}| \leqq \begin{cases} L'(|\widetilde{Y(1)}_n| + |\tilde{X}_n|^\theta + \|\tilde{U}_n\|) & \text{si } i=1, \\ L'(|\widetilde{Y(2)}_n| + |\tilde{X}_n|^{3\theta} + (1+|\tilde{X}_n|^{2\theta}) . \|\tilde{U}_n\| + \|\tilde{U}_n\|^2) & \text{si } i=2. \end{cases}$$

On obtient alors, la $\tilde{P}$-intégrabilité de $|\widetilde{Y(i)}_{n+1}|^2$ pour $i=1$ et 2.

[Par (H.2), l'inégalité de Schwarz, l'hypothèse de récurrence et la $\tilde{P}$-intégrabilité de $\|\tilde{U}_n\|^2$, conséquence de (4.3).]

Les propositions (3.4), (4.3) et (6.7) démontrent le résultat énoncé en (1.5). Pour obtenir le théorème (1.8) on utilise les théorèmes (3.7), (4.10), (5.7) et la proposition suivante :

6.11. Proposition. — *Si on a* (H.1), (H.2) *et* (H.3), *alors* (3.6) *est vérifiée.*

Preuve. — On va montrer, par récurrence sur $n \geqq 1$, que l'on a :

$$(6.12) \quad [\tilde{E}[|(\tilde{V}_n, \tilde{W}_n)|^2]^{1/2} \leqq L''(1+\alpha+\ldots+\alpha^{n+1}) \quad \text{pour tout } n \geqq 1,$$

avec α définie par :

$$(6.13) \qquad \alpha = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left(\int \|D_x \varphi(x, z)\|^6 . \lambda(dz) \right)^{1/6}.$$

On a (6.12) pour $n=1$ par la proposition (6.7). Supposons que (6.12) est vraie à l'ordre n. On a alors, par (6.3) et (6.9) :

$$(6.14) \quad \tilde{E}[|(\tilde{V}_{n+1}, \tilde{W}_{n+1})|^2]^{1/2} \leqq \tilde{E}[\|D_x \varphi(\tilde{X}_n, Z_{n+1})\|^2 . |\tilde{V}_n|^2]^{1/2} + \tilde{E}[\|D_x \varphi(\tilde{X}_n, Z_{n+1})\|^6 . |\tilde{W}_n|^2]^{1/2} + L''.$$

(Sur $\mathbb{R}^d \times \mathcal{T}_3(d)$ on a pris $|(v, w)| = |v| + |w|$; d'autre part les termes $E[\|B_i(\tilde{X}_n, \tilde{U}_n, Z_{n+1})\|^2]^{1/2}$ sont majorés par L'' indépendante de n par (6.8), car $\tilde{X}_n$ a la loi η, par (H.2), et car on a montré au IV que $\sup_{n \geqq 1} \tilde{E}[\|\tilde{U}_n\|^{l(d)}] < +\infty$.)

Posant :

$$(6.15) \qquad H_k(x) = \int_E \|D_x \varphi(x, z)\|^k . \lambda(dz) \quad (\text{pour } k=2 \text{ et } 6),$$

on a :

(6.16) $$\tilde{\mathrm{E}}(\|\mathrm{D}_x\varphi(\tilde{\mathrm{X}}_n, \mathrm{Z}_{n+1})\|^k/\sigma(\tilde{\mathrm{X}}_0, \ldots, \tilde{\mathrm{X}}_n)) \leqq \mathrm{H}_k(\tilde{\mathrm{X}}_n).$$

[Puisque $\tilde{\mathrm{X}}_n$ est $\sigma(\tilde{\mathrm{X}}_0, \ldots, \tilde{\mathrm{X}}_n)$-mesurable et car Z_{n+1} est indépendante de $\sigma(\tilde{\mathrm{X}}_0, \ldots, \tilde{\mathrm{X}}_n)$ et de loi uniforme sur E.] Par suite, en conditionnant par rapport à $\sigma(\tilde{\mathrm{X}}_0, \ldots, \tilde{\mathrm{X}}_n)$ à l'intérieur des deux espérances de droite de (6.14), on obtient :

(6.17) $$\tilde{\mathrm{E}}[(\tilde{\mathrm{V}}_{n+1}, \tilde{\mathrm{W}}_{n+1})|^2]^{1/2} \leqq \mathrm{L}'' + \alpha . \mathrm{E}[(|(\tilde{\mathrm{V}}_n, \tilde{\mathrm{W}}_n)|^2]^{1/2}.$$

[On a appliqué, en plus de (6.16), le fait que $\mathrm{H}_k(x) \leqq \alpha^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour $k=2$ et 6.]

On a donc (6.12) pour $n+1$.

(6.12) et (H. 3) entraînent alors (3.6) de manière évidente.

APPENDICE

(*a*) Équivalence de (B) et de (B. *c*)

(B. *c*) entraîne (B) de manière évidente. Il suffit, pour prouver l'implication inverse, de montrer que, si $c(x, y) = \lambda$ $(\{z : \mathrm{C}(x, z)(y) \neq 0\})$, alors $(x, y) \to c(x, y)$ est semi-continue inférieurement (s. c. i.) en tout point (x, y). [En effet on utilisera (B) et le caractère s. c. i. sur un compact de $\mathbb{R}^{2d}$ de la forme $\mathrm{K} \times \mathrm{S}_{d-1}$, avec K compact contenu dans D. On prendra $\mathrm{D}' = \mathring{\mathrm{K}}$ avec K tel que $\mathring{\mathrm{K}} \neq \varnothing$ et $\eta(\mathring{\mathrm{K}}) > 0$.]

Soient $x \in \mathbb{R}^d$ et $y \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ tels que $c(x, y) > 0$. On considère un $z \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{C}(x, z)(y) \neq 0$. (H. 1) entraîne qu'il existe un voisinage V_z de x tel que : $\det(\mathrm{D}_x \varphi(x', z)) \neq 0$, pour tout $x' \in \mathrm{V}_z$. Par suite $x' \to \mathrm{C}(x', z)$ est continue sur V_z. D'où en particulier la continuité au point (x, y) de l'application $(x', y') \to \mathrm{C}(x', z)(y')$ (pour le point z considéré). On en déduit facilement que, pour toute suite (x_n, y_n) tendant vers (x, y), on a : $\mathrm{C}(x_n, z)(y_n) \neq 0$ à partir d'un certain rang. Donc : $\{z : \mathrm{C}(x, z)(y) \neq 0\} \subset \liminf_{n \to +\infty} \{z : \mathrm{C}(x_n, z)(y_n) \neq 0\}$. Ce qui entraîne, par le lemme de Fatou, que l'on a : $c(x, y) \leqq \liminf_{n \to +\infty} c(x_n, y_n)$. D'où le caractère s. c. i. en (x, y) de l'application étudiée (et bien sûr aussi en tout (x, y) tel que $c(x, y) = 0$).

(*b*) Autre formulation de (B) et complément

Posons $c_x = \inf_{y \in S_{d-1}} c(x, y)$. L'ensemble $\{x : c_x > 0\}$ n'est pas forcément ouvert; (B) exprime que cet ensemble contient un ouvert chargé par η.

Considérons maintenant la condition (B.*b*) obtenue en remplaçant dans (B) le mot ouvert par le mot borélien. (B.*b*) est plus faible que (B).

On obtient un théorème du même type que (1.8) si on remplace (B) par (B.*b*) et si on ajoute l'hypothèse suivante : il existe un entier $k \geqq 1$ tel que l'application $x \to \mathrm{E}[1_{\mathrm{F}}(\mathrm{X}_k^x)]$ soit continue sur $\mathbb{R}^d$ pour tout borélien F de $\mathbb{R}^d$. (Idem : le noyau P^k défini par : $\mathrm{P}^k(x, \mathrm{F}) = \mathrm{E}[1_{\mathrm{F}}(\mathrm{X}_k^x)]$ est fortement fellérien.)

En effet la condition précédente et (P′) entraînent la récurrence au sens de Harris de la chaîne relativement à η. Ce qui s'exprime par :

(P″) Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, (X_n^x) passe P-p.s. une infinité de fois dans tout borélien F tel que $\eta(\mathrm{F}) > 0$.

(Car on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et avec $a > 0$ suffisamment petit et F borélien tel que $\eta(\mathrm{F}) > 0$:

$$\sum_{n \geqq k+1} \mathrm{P}^n(x, \mathrm{F}) = \sum_{n \geqq 1} \mathrm{P}^n(x, f)$$

$$\geqq (1/a) \sum_{n \geqq 1} \mathrm{P}^n(x, \{f > a\}) = +\infty, \text{ où } f(.) = \mathrm{P}^k(., \mathrm{F}).)$$

On applique alors la méthode du V à partir de (B.*b*) et (P″) et on obtient l'inversibilité $\tilde{\mathrm{P}}$-p.s. de $\tilde{\mathrm{U}}_\infty$.

(*c*) Démonstration de l'inégalité

$$\tilde{\mathbf{P}}[\mathbf{rg}(\tilde{\mathbf{U}}_\infty) < d] \leqq \tilde{\mathbf{P}}[\tilde{\mathbf{T}}_k < +\infty, \mathbf{rg}(\tilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{T}_k}) < d]$$

Soit $n \geqq 1$. On a tout d'abord, en utilisant (5.2) et (C), l'inégalité suivante : $\tilde{\mathrm{P}}[\mathrm{T}_k \leqq n, \mathrm{rg}(\tilde{\mathrm{U}}_{\mathrm{T}_k}) < d] \geqq \tilde{\mathrm{P}}[\mathrm{T}_k \leqq n, \mathrm{rg}(\tilde{\mathrm{U}}_n) < d]$. D'autre part, en passant à l'espace auxiliaire introduit à la fin du IV et en utilisant la famille $(\mathrm{T}_{k,n}^*)$ de temps aléatoires définis, pour $n \geqq 1$ et $k \geqq 0$ par :

$$\mathrm{T}_{k,n}^* = \mathrm{S}_{k,n}^* + 1$$

avec $\mathrm{S}_{0,n}^* = 0$ et, pour $k \geqq 1$, $\mathrm{S}_{k,n}^* = \inf\{l > \mathrm{S}_{k-1,n}^* : \mathrm{X}_{-n+l}^* \in \mathrm{D}'\}$, on obtient l'égalité suivante :

$$\tilde{\mathrm{P}}[\mathrm{T}_k \leqq n, \mathrm{rg}(\tilde{\mathrm{U}}_n) < d] = \mathrm{P}^*[\mathrm{T}_{k,n}^* \leqq n, \mathrm{rg}(\mathrm{U}_n^*) < d].$$

D'autre part, d'après le IV, on a :

$$\mathrm{P}^*[\mathrm{T}_{k,n}^* \leqq n, \mathrm{rg}(\mathrm{U}_n^*) < d] \geqq \mathrm{P}^*[\mathrm{T}_{k,n}^* \leqq n, \mathrm{rg}(\mathrm{U}_\infty^*) < d].$$

Comme $\{T^*_{k,n} \leqq n\} \subset \{T^*_{k,n+1} \leqq n+1\}$, on en déduit facilement que :

$$\tilde{P}[T_k < +\infty, \operatorname{rg}(\tilde{U}_{T_k}) < d] \geqq P^*[(\lim_n \nearrow \{T^*_{k,n} \leqq n\}) \cap \{\operatorname{rg}(U^*_\infty) < d].$$

D'où l'inégalité cherchée par (4.9) et (P').

RÉFÉRENCES

[1] K. BITCHELER, J. B. GRAVEREAUX et J. JACOD, *Malliavin Calculus for Processes with Jumps*, Gordon and Breach Science Publishers LTD, 1987.

[2] L. BREIMAN, *Probability*, Addison-Wesley, 1968.

[3] J. B. GRAVEREAUX et J. JACOD, Opérateur de Malliavin sur l'espace de Wiener-Poisson, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **300**, série I, n° 3, 1985.

[4] A. K. GRINTSEVICIUS, On the Continuity of a Sum of Dependent Variables Connected with Independent Walks on Lines, *Theory Prob. Appl.*, vol. **19**, 1974, p. 163 à 168.

[5] E. LE PAGE, Théorèmes de renouvellement pour les produits de matrices aléatoires. Équations aux différences aléatoires, *Séminaire de Probabilités*, Rennes-I, 1983.

[6] P. MALLIAVIN, Stochastic Calculus of Variations and Hypoelliptic Operators, *Proc. Int. 1. Conf. on Stoch. Diff. Equa. Kyoto*, 1976, p. 195 à 263, New York, Wiley, 1978.

[7] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[8] W. VERVAAT, On a Stochastic Difference Equation and Representation of Non-Negative Infinitely Divisible Random Variables, *Adv. Appl. Prob.*, vol. **11**, 1979, p. 750 à 783.

[9] M. ZAKAI, The Malliavin Calculus, *Acta Applicandae Math.*, vol. **3-2**, 1985, p. 175 à 207.

(*Manuscrit reçu le* 16 *juin* 1986)
(*révisé le* 9 *octobre* 1987.)