ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

Y. GUIVARC'H
J. HARDY

Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov

Annales de l'I. H. P., section B, tome 24, nº 1 (1988), p. 73-98
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1988__24_1_73_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 24, n° 1, 1988, p. 73-98. *Probabilités et Statistiques*

Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov

par

Y. GUIVARC'H et J. HARDY

I.R.M.A.R., U.E.R. de Mathématiques,
35042 Rennes Cedex

RÉSUMÉ. — On montre que les théorèmes limites classiques du calcul des probabilités restent valables dans le cadre de l'indépendance généralisée qui est présente dans les difféomorphismes d'Anosov.

Mots clés : Chaîne de Markov, difféomorphisme d'Anosov, théorème limite local.

ABSTRACT. — We show that the classical limit theorems of probability theory remain valid in the setting of Anosov diffeomorphisms.

Key words : Markov chains, Anosov diffeomorphisms, local limit theorem.

On montre ici que les théorèmes limites classiques du calcul des probabilités restent valables dans le cadre d'une indépendance généralisée telle que celle qui apparaît dans les difféomorphismes hyperboliques d'Anosov ou plus généralement les systèmes de Smale [15]. On établit ainsi le théorème central limite avec reste, le théorème limite local, le théorème de renouvellement. La méthode utilisée consiste à se ramener, à l'aide d'une

Classification A.M.S. : 60 F 99.

partition markovienne au cas des sous-shifts, puis d'établir des théorèmes limites pour des chaînes de Markov convenables sur un espace produit et enfin d'en déduire les résultats correspondants pour les sous-shifts. Ces théorèmes limites pour des chaînes de Markov ont été énoncés en [6] et appliqués aux produits de matrices aléatoires. Ils reposent sur un théorème spectral dont l'idée est due à Doeblin et Fortet [4].

Ce théorème a été utilisé de manière analogue en [10] et [14] et on donne ici un exposé général de ces techniques; ce faisant, pour des raisons de clarté on a été amené à justifier divers résultats classiques relatifs en particulier aux sous-shifts.

Comme application du théorème de renouvellement on justifie la propriété de mélange pour une classe générale de flots spéciaux. De plus les estimations du théorème limite local permettant par exemple d'étudier l'ergodicité de transformations fibrées (par $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{Z}^d$) au-dessus d'un difféomorphisme d'Anosov (à paraître). Ces estimations ont également des applications en théorie ergodique où elles permettent de construire une classe générale de flots différentiables possédant la propriété K mais non celle de Bernoulli.

A. UNE CLASSE DE CHAINES DE MARKOV

I. Définitions

On considère un espace métrique compact X, un noyau markovien sur X noté $P(x, dy)$, une fonction lipchitzienne sur $X \times X$ notée $f(x, y)$. Sous certaines hypothèses relatives essentiellement au noyau P on établit des théorèmes limites précis relatifs aux sommes ergodiques le long d'une trajectoire (x_k) de la chaîne :

$$S_n(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, x_{k+1}). \tag{1}$$

Le noyau P et la fonction f seront fixés dans la suite.

On notera C(X) ou L(X) respectivement les espaces de fonctions continues ou lipchitziennes. On normera L(X) par :

$$\|\varphi\| = [\varphi] + \|\varphi\|_\infty$$

où

$$[\varphi]=\operatorname*{Sup}_{x,\,y}[\,|\,\varphi(x)-\varphi(y)\,|\,/d(x,y)], \qquad \|\varphi\|_\infty=\operatorname*{Sup}_{x}|\,\varphi(x)\,|.$$

DÉFINITION 0. — On dira qu'un opérateur linéaire borné Q de C(X) dans lui-même vérifie la condition (F) si :

(*a*) les puissances Q^n de Q sont bornées;

(*b*) il existe des constantes positives $\rho<1$, $t\in\mathbb{N}^*$, $C>0$ telles que :

$$\forall\,\varphi\in L(X),\quad [Q^t\varphi]\leqq\rho\,[\varphi]+C\,\|\varphi\|_\infty.$$

Ces conditions permettent d'établir [11] le théorème suivant :

THÉORÈME (Ionescu-Tulcea, Marinescu). — *Supposons que l'opérateur linéaire* Q *satisfasse la condition* F *de la définition précédente et considérons son spectre sur* L(X). *Les valeurs spectrales de module* 1 *sont isolées, en nombre fini. Les sous-espaces caractéristiques correspondants sont égaux aux sous-espaces propres et de dimension finie.*

DÉFINITION 1. — On dira que le noyau markovien $P(x, dy)$ sur X est irréductible si la condition

$$P\varphi=e^{i\,\theta}\varphi\,[\theta\in\mathbb{R},\ \varphi\in L(X)]\ \text{implique}\ e^{i\,\theta}=1,\quad \varphi=\mathrm{Cte}.$$

En particulier si P vérifie la condition F et est irréductible, la valeur propre 1 est simple et il existe une unique probabilité P-invariante ν telle que :

$$\forall\,\varphi\in L(X),\quad \lim_n\|\,P^n\varphi-\nu(\varphi)\,\|=0.$$

On désignera par S le support de ν; c'est le plus petit fermé de X qui soit P-invariant. Ces propriétés découlent, comme dans le cas d'un espace X fini, des propriétés spectrales résultant de la condition F et seront supposées valables dans cette partie A.

La donnée de $f(x, y)$ permet de définir une nouvelle chaîne sur $X\times\mathbb{R}$ de noyau $\tilde{P}$: le point (x, t) est transformé en $[y, t+f(x, y)]$ avec probabilité $P(x, dy)$. Les trajectoires de cette chaîne partant de $(x, 0)$ s'écrivent (x_n, S_n) avec $S_n=\sum_0^{n-1} f(x_k, x_{k+1})$, $x_0=x$. On est amené dans l'étude de S_n à remplacer la section triviale $x\to(x, 0)$ par d'autres sections $x\to[x, \varphi(x)]$ et ceci introduit les relations d'équivalence suivantes où le noyau P n'apparaît que de manière « topologique ».

DÉFINITION 2. — On dira que $f \in \mathrm{L}(\mathrm{X} \times \mathrm{X})$ est a-équivalente [resp. m-équivalente] à f' s'il existe $\varphi \in \mathrm{L}(\mathrm{X})$ [resp. $\psi \in \mathrm{L}(\mathrm{X})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$] telle que

$$f(x, y) - f'(x, y) = \varphi(y) - \varphi(x) \qquad [\text{resp. } e^{i\lambda f(x, y) - i\lambda f'(x, y)} = \psi(y)/\psi(x)]$$
$$\forall x \in \mathrm{S} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(x, dy) \text{ p. p.}$$

DÉFINITION 3. — On dira que $f \in \mathrm{L}(\mathrm{X} \times \mathrm{X})$ est dégénérée [resp. nonapériodique] si f est a-équivalente [m-équivalente] à une constante.

Si f est m-équivalente à 1 on dira que f est arithmétique.

Introduisons les opérateurs P_λ transformés de Laplace de (P, f) par :

$$\mathrm{P}_\lambda \varphi(x) = \mathrm{P}[e^{\lambda f} \varphi](x) = \int e^{\lambda f(x, y)} \varphi(y) \mathrm{P}(x, dy). \tag{2}$$

Ces opérateurs s'introduisent à partir de l'action du noyau $\tilde{\mathrm{P}}$ sur les fonctions de la forme $(\varphi . e_\lambda)(x, t) = \varphi(x) e^{\lambda t}$. On a, en effet :

$$\tilde{\mathrm{P}}(\varphi . e_\lambda) = (\mathrm{P}_\lambda \varphi) . e_\lambda.$$

L'action de $\tilde{\mathrm{P}}$ sur les fonctions de la forme $\varphi . p$ où p est un polynôme introduit en particulier les deux opérateurs M et Σ sur $\mathrm{C}(\mathrm{X})$, opérateurs qui jouent le rôle de moyenne et d'inertie :

$$\mathrm{M} \varphi(x) = \int f(x, y) \varphi(y) \mathrm{P}(x, dy) = \mathrm{P}[f \varphi](x) \tag{3}$$

$$\Sigma \varphi(x) = \int f^2(x, y) \varphi(y) \mathrm{P}(x, dy) = \mathrm{P}[f^2 \varphi](x). \tag{4}$$

Observons que si $f'(x, y) - f(x, y) = u(y) - u(x)$ on a $\mathrm{M}' 1 - \mathrm{M} 1 = \mathrm{P} u - u$ et si u est choisie de façon que $u - \mathrm{P} u = \mathrm{M} 1 - \nu(\mathrm{M} 1)$ on obtient

$$\mathrm{M}' 1 = \nu(\mathrm{M} 1) = \mathrm{Cte} = \gamma(f).$$

Un tel choix est ici possible et unique à cause de la condition F et de l'irréductibilité. On appellera la moyenne de f la quantité :

$$\gamma(f) = \int f(x, y) \mathrm{P}(x, dy) d\nu(x) \tag{5}$$

où ν est l'unique mesure invariante de la chaîne de noyau P.

De même, on appellera variance de f la quantité $\sigma^2(f) = \nu(\Sigma' 1) - \gamma^2(f)$ ce qui s'écrit encore :

$$\sigma^2(f) = \int [f(x, y) - \gamma(f) + u(y) - u(x)]^2 \mathrm{P}(x, dy) d\nu(x). \tag{6}$$

En particulier f sera non dégénérée si et seulement si $\sigma^2(f)>0$. Le développement de P_λ pour λ petit est donné par le lemme immédiat suivant.

LEMME 1. — *La fonction* $\lambda \to P_\lambda$ *définie par la formule* (1) *est holomorphe et pour* λ *petit on a :*

$$P_\lambda = P + \lambda M + (\lambda^2/2)\Sigma + o(\lambda^2) \tag{7}$$

où M *et* Σ *sont définis par* (3) *et* (4).

Comme l'opérateur P_λ dépend de λ de manière holomorphe et que pour $\lambda=0$ la valeur propre dominante est simple et isolée, on définit par perturbation, au voisinage de $\lambda=0$, une valeur propre dominante $k(f, \lambda)$, également simple et isolée. Le remplacement de f par

$$f'(x, y) = f(x, y) + u(y) - u(x)$$

remplace $P_\lambda \varphi$ par $P'_\lambda \varphi = (e^{-u}) P_\lambda [\varphi e^u]$. La fonction $k(f, \lambda)$ n'est donc pas modifiée par a-équivalence.

Désignant par e_λ une fonction propre correspondante, on définit un nouvel opérateur $Q_{\lambda+i\lambda'}$ pour $|\lambda| \leqq \varepsilon$: λ, $\lambda' \in \mathbb{R}$ par :

$$Q_{\lambda+i\lambda'}\varphi(x) = P_{\lambda+i\lambda'}[\varphi e_\lambda](\lambda)/k(f, \lambda) e_\lambda. \tag{8}$$

Des vérifications simples montrent que, en utilisant $|e^{i\lambda' f}|=1$ ainsi que la petitesse de $|\lambda|$ et la relation $P_\lambda e_\lambda = k(\lambda) e_\lambda$ la condition F est encore vérifiée par l'opérateur $Q_{\lambda+i\lambda'}$ pour $|\lambda| \leqq \varepsilon$. La fonction $k(f, i\lambda)$ possède des propriétés analogues à celles d'une fonction caractéristique :

LEMME 2. — *Soit* $f(x, y)$ *une fonction lipchitzienne sur* $X \times X$, $k(f, \lambda)$ *la valeur propre dominante de* P_λ *définie ci-dessus. Alors pour* $|\lambda|$ *assez petit la fonction* $k(f, \lambda)$ *est holomorphe, positive sur l'axe réel. Avec les notations des formules* (5) *et* (6), *on a en particulier* $k(f, 0)=1$, $k'(f, 0)=\gamma(f)$, $k''(f, 0)=\sigma^2(f)+\gamma^2(f)$.

Preuve. — Le fait que $k(f, \lambda)$ soit positif pour λ réel découle du fait que P_λ est un opérateur positif pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour obtenir le développement de $k(f, \lambda)$ pour λ petit on introduit le projecteur ν_λ relatif à la valeur propre simple $k(f, \lambda)$ et l'on écrit $\nu_\lambda P_\lambda = k(f, \lambda)\nu_\lambda$ avec

$$P_\lambda = P + \lambda M + 1/2\,\lambda^2 \Sigma + o(\lambda^2)$$

$$k(f, \lambda) = 1 + \lambda a + (\lambda^2/2) b + o(\lambda^2)$$

$$\nu_\lambda = \nu + \lambda\eta + \lambda^2 \sigma + o(\lambda^2).$$

On a ainsi les équations :

$$a\nu=\nu M+\eta-\eta P$$

$$b\nu=\nu\Sigma+\eta M-a\eta+\sigma P-\sigma.$$

D'où $a=\nu(M1)=\gamma(f)$.

Pour obtenir b on peut supposer $M1=\mathrm{Cte}=\gamma(f)$ puisque $k(f,\lambda)$ ne change pas par a-équivalence. On a alors $\eta M1-a\eta 1=0$ et $b=\nu(\Sigma 1)=\gamma^2(f)+\sigma^2(f)$. Enfin les propriétés de f sont reliées à celles de $P_{i\lambda}$ ($\lambda\in\mathbb{R}$) par le :

LEMME 3. — *Soit $f(x, y)$ une fonction lipchitzienne sur* $X\times X$. *Avec les notations des définitions* 2 *et* 3 *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *f est dégénérée* [*resp. non apériodique*];

(*b*) *pour tout λ imaginaire pur* [*resp. pour un $\lambda\neq 0$ imaginaire pur*] *il existe $\theta\in\mathbb{R}$ et*

$$\varphi_\lambda\in L(X) \qquad \textit{avec} \quad P_\lambda\varphi_\lambda=e^{i\theta}\varphi_\lambda.$$

Enfin f arithmétique équivaut à l'existence de $\lambda\neq 0$ imaginaire pur avec $P_\lambda\varphi_\lambda=\varphi_\lambda$.

Preuve :

$a\Rightarrow b$.

Si f est non apériodique on a $e^{i\lambda f(x,y)}=e^{i\theta}(\psi_\lambda(y))/(\psi_\lambda(x))$, $P(x, dy)$ p. p., $\forall x\in S$ et donc sur S : $P_\lambda(\psi_\lambda)=e^{i\theta}\psi_\lambda$.

Comme P_λ vérifie la condition F sur S aussi bien que sur X, on en déduit l'existence d'une forme linéaire ν_λ sur $L(S)$ telle que $\nu_\lambda P_\lambda=e^{i\theta}\nu_\lambda$. Cette forme linéaire opère aussi sur $L(S)$ et donc $e^{i\theta}$ est valeur propre de P_λ opérant sur $L(X)$ avec $P_\lambda\varphi_\lambda=e^{i\theta}\varphi_\lambda$.

Si f est dégénérée on obtient la relation précédente, pour tout λ.

$b\Rightarrow a$.

La condition $P_\lambda\varphi_\lambda=e^{i\theta}\varphi_\lambda$ donne en passant aux modules : $P(|\varphi_\lambda|)\geqq|\varphi_\lambda|$ et donc, puisque $\nu P=\nu$: $P|\varphi_\lambda|=|\varphi_\lambda|$ sur S.

Donc $|\varphi_\lambda|=\mathrm{Cte}$ sur S et l'on peut supposer $|\varphi_\lambda|=1$ sur S. Écrivant alors

$$e^{i\theta}=\int e^{i\lambda f(x,y)}(\varphi_\lambda(y))/(\varphi_\lambda(x))\,P(x, dy)$$

on obtient $e^{i\theta}=e^{i\lambda f(x,y)}(\varphi_\lambda(y))/(\varphi_\lambda(x))\,P(x, dy)$ p. p., $\forall x\in S$, ce qui prouve la deuxième partie de $b\Rightarrow a$. Pour obtenir la première partie on note que l'hypothèse implique $|k(f, i\lambda)|=1$ pour λ réel petit.

Le développement de k donne alors au troisième ordre près :

$$|k(f, i\lambda)| = (1 - ((\gamma^2 + \sigma^2)/2)\lambda^2)^2 + \gamma^2\lambda^2 + O(\lambda^2)$$

$$|k(f, i\lambda)| = 1 - \sigma^2\lambda^2 + O(\lambda^2).$$

On a donc $\sigma^2 = 0$ et f est bien dégénérée.

Enfin la condition d'arithméticité de f découle des arguments précédents.

Dans la suite interviendra de manière essentielle la décomposition spectrale de P_λ pour λ petit et imaginaire pur : si l'on note ν_λ le projecteur correspondant à la valeur propre simple $k(f, \lambda)$ on a

$$P_\lambda = k(f, \lambda)\nu_\lambda + r_\lambda \qquad \text{où} \quad r_\lambda \nu_\lambda = \nu_\lambda r_\lambda = 0 \tag{9}$$

et r_λ est de rayon spectral borné par $1 - \varepsilon < 1$ pour λ petit. Lorsque λ est imaginaire pur non nécessairement petit, la condition F vaut encore pour P_λ et donc, en l'absence de valeurs propres de module 1, on peut affirmer la décroissance exponentielle de $\| P_\lambda^n \|$ vers zéro. Les deux théorèmes suivants font intervenir les propriétés de P_λ pour λ petit tandis que les deux derniers utilisent les propriétés de P_λ sur l'axe imaginaire.

II. Les théorèmes limites

On conserve les notations précédentes et, pour alléger, on remplacera $k(f, \lambda)$ par $k(\lambda)$, $\gamma(f)$ et $\sigma^2(f)$ par γ et σ [*cf.* définitions 5 et 6]. On notera T_x la probabilité canonique sur l'espace des trajectoires de la chaîne de noyau P, issues de x et E_x désignera l'espérance correspondante.

Établissons d'abord deux lemmes simples et essentiels dans la suite.

LEMME 4. — *Soit $f(x, y)$ une fonction lipchitzienne sur $X \times X$, S_n la somme ergodique correspondante définie par* (1). *Alors la transformée de Fourier de la loi de S_n sous la probabilité canonique T_x vaut $P_{i\lambda}^n 1(x)$*

Preuve. — Écrivons pour $\varphi \in L(X)$:

$$E_x[e^{i\lambda S}\varphi(x_n)] = \tilde{P}^n[(x, 0), e_{i\lambda}.\varphi] = P_{i\lambda}^n \varphi(x).$$

LEMME 5. — *Avec les notations du lemme 4 supposons de plus f non dégénérée et de moyenne nulle : $\gamma(f) = 0$. Pour $\varphi \in L(X)$, la suite $P_{(i\lambda)/\sqrt{n}}^n \varphi(x)$ converge vers $e^{-\sigma^2(\lambda^2/2)}\nu(\varphi)$ où ν est l'unique probabilité invariante sous P. Il existe deux constantes positives A et B telles que pour $\lambda/\sqrt{n}$ assez petit la suite $\| P_{i\lambda/\sqrt{n}}^n \|$ soit bornée par $A e^{-B\lambda^2}$.*

Preuve. — On écrit pour λ assez petit le développement de $P^n_{i\lambda}\varphi(x)$:

$$P^n_{i\lambda}\varphi(x)=k^n(i\lambda)\,\nu_{i\lambda}\varphi+r^n(i\lambda)\,\varphi.$$

Or $\|r^n(i\lambda)/(\sqrt{n})\,\varphi\|\leqq C(1-\varepsilon)^n$ pour ε et λ assez petits, C assez grand, et $\lim_{\lambda\to 0}\nu_{i\lambda}=\nu$,

$$\lim_{n\to\infty} k^n((i\lambda)/\sqrt{n})=\lim_n(1-(\sigma^2\lambda^2)/n)^n=e^{-(\lambda^2/2)\sigma^2}.$$

Ceci donne bien la première partie de l'énoncé.

Il est clair que pour $|\lambda|\leqq\varepsilon'$ on a $|k(i\lambda)|\leqq e^{-\sigma^2(\lambda^2/4)}$ et on en déduit

$$|k^n((i\lambda)/\sqrt{n})|\leqq e^{-\sigma^2(\lambda^2/4)}.$$

Comme $\|P^n_{(i\lambda)/\sqrt{n}}\varphi\|\leqq\|\varphi\|\,[|k^n(i\lambda)/\sqrt{n}|+\|r^n(i\lambda/\sqrt{n})\|]$ et que pour

$$|\lambda/\sqrt{n}|\leqq\varepsilon':\quad \|r^n(i\lambda)/\sqrt{n}\|\leqq C(1-\varepsilon)^n\leqq C\,e^{-n\varepsilon}\leqq C\,e^{-\varepsilon(\lambda^2/\varepsilon'^2)}$$

l'énoncé est bien vérifiée avec $A=C+1$, $B=\operatorname{Sup}(\sigma^2/4,\ \varepsilon/\varepsilon'^2)$.

THÉORÈME 1. — *Soit $f(x, y)$ une fonction lipchitzienne sur* $X\times X$, $S_n(\omega)$ *les sommes ergodiques correspondantes définies par* (1). *On suppose f non dégénérée et de moyenne nulle. Alors la loi sous* T_x *de* $S_n/\sigma\sqrt{n}$ *converge vers la loi normale standard.*

Preuve. — En vertu des deux lemmes précédents on a la convergence des transformées de Fourier des lois de $S_n/\sigma\sqrt{n}$ vers $e^{-\lambda^2/2}$, ce qui établit le théorème.

THÉORÈME 2. — *Avec les notations du théorème* 1 *on a le théorème central limite avec reste suivant :*

$$\operatorname*{Sup}_{t\in\mathbb{R}}|P_x\{(S_n/\sigma\sqrt{n})<t\}-N(-\infty,t)|\leqq C/\sqrt{n}\tag{10}$$

où C *est une constante et* N *la loi normale standard.*

Preuve. — Pour alléger les notations on fera $\sigma=1$ et on aura besoin du lemme élémentaire suivant [17].

LEMME. — *Soit $h(\lambda)$ une fonction* 3 *fois dérivable pour λ petit avec*

$$h(0)=1,\qquad h'(0)=0,\qquad h''(0)=-1/2.$$

Alors il existe une constante A *telle que*

$$|h^n(\lambda/\sqrt{n})-e^{-\lambda^2/2}|\leqq(A|\lambda|^3/\sqrt{n})\,e^{-\lambda^2/4}\qquad \textit{pour } \lambda/\sqrt{n} \textit{ assez petit.}$$

Notons ρ_x^n la loi sous P_x de $S_n/\sqrt{n}$ et écrivons, pour $\lambda/\sqrt{n}$ petit :

$$\hat{\rho}_x^n(\lambda) = E_x(e^{i\lambda(S_n/\sqrt{n})}) = P_{i\lambda/\sqrt{n}}^n 1(x)$$

$$\hat{\rho}_x^n(\lambda) = k^n(i\lambda/\sqrt{n})\, \nu_{i\lambda/\sqrt{n}} 1 + r^n(i\lambda/\sqrt{n})\, 1.$$

Observons que $\|\nu_{i\lambda/\sqrt{n}} 1 - 1\| \leqq C|\lambda|/\sqrt{n}$, $\|r^n(i\lambda/\sqrt{n})\, 1\| \leqq C(1-\varepsilon)^n$ pour ε assez petit et C assez grand.

On a donc :

$$|\hat{\rho}_x^n(\lambda) - e^{-\lambda^2/2}| \leqq |k^n(i\lambda/\sqrt{n}) - e^{-\lambda^2/2}| + C(|\lambda|/\sqrt{n})e^{-\lambda^2/2} + C(1-\varepsilon)^n$$

Soit $|\hat{\rho}_x^n(\lambda) - e^{-\lambda^2/2}| \leqq C[(1-\varepsilon)^n + e^{-\lambda^2/4}((|\lambda|^2/\sqrt{n}) + \lambda^3/\sqrt{n})]$ en vertu du lemme. L'inégalité de Berry-Essen s'écrit ici

$$\operatorname*{Sup}_t |\rho_x^n(-\infty, t) - N(-\infty, t)| \leqq 1/\pi \int_{-T}^{T} |(\hat{\rho}_x^n(\lambda) - e^{-\lambda^2/2})/\lambda|\, d\lambda + 12/\pi T.$$

Les inégalités précédentes étant supposées valables pour $|\lambda/\sqrt{n}| \leqq \varepsilon'$, prenant $T = \varepsilon'\sqrt{n}$, le second terme de l'inégalité de Berry-Essen est majoré par $12/\pi\varepsilon'\sqrt{n}$. L'intégrale est majorée par :

$$C/\pi\left[2(1-\varepsilon)^n \varepsilon'\sqrt{n} + 1/\sqrt{n}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|\lambda^2|)\, e^{-\lambda^2/4}\, d\lambda\right], \quad \text{donc par Cte}/\sqrt{n}.$$

Ceci donne la majoration voulue.

Les deux théorèmes qui suivent sont des théorèmes de convergence vague vers le produit $\nu \times l$ de ν et de la mesure de Lebesque. Il est commode de remplacer les fonctions continues à support compact par les fonctions intégrables de transformée de Fourier à support compact; cet ensemble de fonctions sera noté $\mathscr{K}$ et la convergence sur $\mathscr{K}$ suffit à assurer la convergence vague d'après [3]. On note $l(I)$ la mesure de Lebesque de l'intervalle I.

THÉORÈME 3 (théorème limite local). — *Soit f une fonction lipchitzienne sur* $X \times X$ *de moyenne nulle et apériodique* [cf. *définition* 3]. *Alors pour* $\varphi \in L(X)$ *et* I *intervalle quelconque on a*

$$E_x[\varphi(x_n)\, 1_I(S_n)] \sim (l(I)\, \nu(\varphi))/\sigma\sqrt{2\pi n} \tag{11}$$

où ν *est l'unique probabilité invariante de la chaîne de noyau* P.

Preuve. — On considère la suite de mesures de Radon sur $X \times \mathbb{R}$ notée $\mathscr{E}_x^n$

$$\mathscr{E}_x^n(\varphi \,.\, u) = \sigma\sqrt{2\pi n}\, E_x[\varphi(x_n)\, u(S_n)] = P^n[(x, 0), \varphi \,.\, u]$$

et il faut montrer la convergence vague de cette suite vers $\nu \times l$.

Il suffit donc [3] de voir que pour $u \in \mathscr{K} : \lim_n \mathscr{E}_x^n(\varphi . u) = \nu(\varphi)\, l(u)$. Or, d'après la formule d'inversion de Fourier :

$$\mathrm{E}_x[\varphi(x_n)\, u(\mathrm{S}_n)] = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}_{i\lambda}^n \varphi(x)\, \hat{u}(\lambda)\, d\lambda$$

$$\mathscr{E}_x^n(\varphi . u) = (\sigma/\sqrt{2}\pi) \left[\sqrt{n} \int_{(\lambda) \geqq \varepsilon} \mathrm{P}_{i\lambda}^n \varphi(x)\, u(\lambda)\, d\lambda + \int_{-\varepsilon\sqrt{n}}^{\varepsilon\sqrt{n}} \mathrm{P}_{i\lambda/\sqrt{n}}^n \varphi(x)\, \hat{u}(\lambda/\sqrt{n})\, d\lambda \right].$$

Comme f est apériodique le lemme 3 dit que le rayon spectral de $\mathrm{P}_{i\lambda}$ pour $|\lambda| > \varepsilon$ est strictement inférieur à 1 : le premier terme du second membre tend vers zéro.

D'après le lemme 5, $\mathrm{P}_{i\lambda/\sqrt{n}}^n \varphi(x)\, 1_{[-\varepsilon\sqrt{n},\, \varepsilon\sqrt{n}]}$ converge, pour ε assez petit, de manière dominée vers $e^{-\sigma^2 (\lambda^2/2)}$. On en déduit la convergence du deuxième terme vers

$$\nu(\varphi)\, (\sigma/\sqrt{2}\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma^2 (\lambda^2/2)}\, u(0)\, d\lambda = \nu(\varphi)\, l(u).$$

THÉORÈME 4 (renouvellement). — *Soit f une fonction lipchitzienne sur* $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ *de moyenne positive et non arithmétique* [cf. *définition* 3]. *Avec les notations précédentes, supposons f non arithmétique, $\gamma(f) > 0$ et notons ρ_x la mesure sur* $\mathrm{X} \times \mathbb{R}$ *définie par :*

$$\rho_x(\varphi . 1_I) = \mathrm{E}_x[\sum_n \varphi(x_n)\, 1_I(\mathrm{S}_n)].$$

Alors ρ_x est une mesure de Radon et on a

$$\begin{aligned} &\lim_{t \to -\infty} \rho_x[\varphi . 1_{I+t}] = 0 \\ &\lim_{t \to +\infty} \rho_x[\varphi . 1_{I+t}] = (\nu(\varphi)\, l(\mathrm{I}))/\gamma. \end{aligned} \tag{12}$$

Preuve. — Définissons pour r entre 0 et 1 les mesures de Radon

$$\rho_x^r(\varphi . u) = \mathrm{E}_x[\sum_n r^n \varphi(x_n)\, u(\mathrm{S}_n)] = \sum_n r^n \mathrm{P}^n[(x, 0),\ \varphi . u].$$

Pour justifier la finitude de $\rho_x = \lim_{r \to 1} \rho_x^n$, considérons une exponentielle $e_\lambda(t) = e^{\lambda t}\, (\lambda < 0)$ et observons que l'on a $k(\lambda) < 1$ pour λ petit négatif en raison de la relation $k(\lambda)=1+\gamma\lambda+o(\lambda)$ où γ est positif. Prenant $u=e_\lambda$ et $\varphi \geqq 0$ on a alors :

$$P^n[(x, 0), \varphi . e_\lambda] = P^n_\lambda \varphi(x)$$

et donc, puisque $\lim \| P^n_\lambda \|^{1/n} = k(\lambda)$:

$$\rho_x(\varphi . e_\lambda) = \sum_n P^n_\lambda \varphi(x) < +\infty.$$

Remplaçant e_λ par $e_\lambda * \delta_a$, on a aussi :

$$\rho_x(\varphi . e_\lambda * \delta_a) = \rho_x(\varphi . e_\lambda) e^{-\lambda a}$$

et donc $\lim_{a \to -\infty} \rho_x(\varphi . e_\lambda * \delta_a) = 0$. On en déduit puisque 1_{I+a} est majorée par Cte $e_\lambda * \delta_a$:

$$\rho_x(\varphi . 1_I) < +\infty, \qquad \lim_{a \to -\infty} \rho_x(\varphi . 1_{I+a}) = 0.$$

En d'autres termes, si $\check{\rho}_x$ désigne la mesure symétrique de ρ_x, on a pour toute fonction continue u à support compact :

$$\lim_{a \to +\infty} \check{\rho}_x(\varphi . u * \delta_a) = 0$$

et, posant $\eta_x = \rho_x + \check{\rho}_x$, on voit que l'affirmation restante de l'énoncé revient à :

$$\lim_{a \to +\infty} \eta_x(\varphi . u * \delta_a) = (\nu(\varphi)\, l(u))/\gamma.$$

On aura besoin du lemme fondamental suivant, qui sera justifié plus loin :

LEMME. — *Avec les notations précédentes (f non arithmétique) la mesure sur $\mathbb{R}$ de densité définie à x fixé par* $\operatorname{Re}[(I-rP_{i\lambda})^{-1}\varphi(x)]$ *converge, quand r tend vers* 1, *vers* $(\delta_0 \pi/\gamma)\nu(\varphi) + \operatorname{Re}[(I-P_{i\lambda})^{-1}\varphi(x)]$ *où le second terme de cette expression est une fonction intégrable de λ sur les compacts.*

Comme dans la démonstration du théorème précédent il suffit [3] de voir que pour tout $u \in \mathscr{K}$:

$$\lim \eta_x(\varphi . u * \delta_a) = (\nu(\varphi)\, l(u))/\gamma.$$

Supposons d'abord $u \geqq 0$ et $\varphi \geqq 0$: alors on a

$$\eta_x(\varphi . u) = \lim_{r \to 1} (\rho^r_x + \check{\rho}^r_x)(\varphi . u).$$

Or :

$$2\pi\rho_x^r(\varphi.u)=\sum_n\int_{-\infty}^{+\infty} r^n P_{i\lambda}^n\varphi(x)\hat{u}(\lambda)\,d\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}(I-rP_{i\lambda})^{-1}\varphi(x)\hat{u}(\lambda)\,d\lambda.$$

Le passage de $\check{\rho}_x$ à ρ_x revient à changer λ en $-\lambda$ dans $\hat{u}$ ou $P_{i\lambda}$ et puisque $P_{i\lambda}(\psi)=P_{-i\lambda}(\psi)$, on a

$$\pi(\rho_x^r+\check{\rho}_x^r)(\varphi.u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}[(I-rP_{i\lambda})^{-1}\varphi(x)]\hat{u}(\lambda)\,d\lambda.$$

Puisque $\hat{u}$ est à support compact, le lemme fournit alors :

$$\pi\eta_x(\varphi.u)=\pi\nu(\varphi)(\hat{u}(0))/\gamma+\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}[I-P_{i\lambda})^{-1}\varphi(x)]\hat{u}(\lambda)\,d\lambda$$

$$\eta_x(\varphi.u)=\nu(\varphi)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u(t)\,dt\right)/(\gamma)+J(u).$$

On peut maintenant s'affranchir de la restriction $\varphi\geqq 0$, $u\geqq 0$. Le remplacement de u par $u*\delta_t$ fait apparaître $J(u*\delta_t)$ comme la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

D'après la propriété de Riemann-Lebesque on a donc $\lim\limits_{t\to\infty} J[u*\delta_t]=0$, ce qui fournit

$$\lim_{t\to\infty}\eta_x(\varphi.u*\delta_t)=\nu(\varphi)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u(s)\,ds\right)/\gamma.$$

Afin de justifier le lemme, notons que si h s'écrit pour λ petit sous la forme $h(\lambda)=1+i\gamma\lambda-\lambda^2C(\lambda)$ où $\gamma\in\mathbb{R}^+$ et $C(\lambda)$ est continue on a [3] pour λ petit à la convergence vague lorsque r tend vers un de $\mathrm{Re}(1/(1-rh(\lambda))$ vers $(\pi/\gamma)\delta_0+\mathrm{Re}(1/1-h(\lambda))$ où le second terme est une fonction intégrable de λ.

En tenant compte de la décomposition valable pour λ petit :

$$P_{i\lambda}=k(\lambda)\nu_\lambda+R_\lambda$$

avec $\|R_\lambda\|\leqq 1-\varepsilon<1$ on obtient

$$(I-rP_{i\lambda})^{-1}\varphi=[I-rk(i\lambda)]^{-1}\nu(\varphi)$$
$$+[1-rk(i\lambda)]^{-1}(\nu_{i\lambda}-\nu)\varphi+(I-rR_{i\lambda})^{-1}\varphi.$$

En dehors d'un voisinage de 0, la fonction de λ, $(I-rP_{i\lambda})^{-1}\varphi$ est bornée indépendamment de r sur les compacts puisque 1 n'est pas dans le spectre de $P_{i\lambda}$ et il y a donc alors convergence vague vers la mesure définie par $(I-P_{i\lambda})^{-1}\varphi$.

Lorsque r tend vers un et λ petit, les fonctions de λ : $[I-rk(i\lambda)]^{-1}(\nu_{i\lambda}\varphi-\nu\varphi)$ et $(I-rR_{i\lambda})^{-1}\varphi$ convergent uniformément vers des fonctions continues. Donc la limite vague de :

$$\operatorname{Re}[(I-rP_{i\lambda})^{-1}\varphi-(I-rk(i\lambda))^{-1}\nu(\varphi)]$$

existe et vaut :

$$\operatorname{Re}[1-k(i\lambda)]^{-1}(\nu_{i\lambda}\varphi-\nu\varphi)+\operatorname{Re}(I-R_{i\lambda})^{-1}\varphi.$$

La propriété rappelée plus haut fournit alors l'énoncé du lemme.

Le résultat précédent pourrait aussi se déduire du théorème général de renouvellement de [9]. Cependant il a paru utile d'en donner une autre preuve, plus analytique et plus courte, dans un cadre plus limité mais qui suffit à traiter beaucoup de situations.

B. APPLICATIONS

I. Noyaux lipchitziens

Pour des raisons de cohérence, on rappelle dans ce paragraphe et le suivant, sous forme concise, la construction classique ([2], [16]) des mesures de Gibbs sur A^Z où A est un ensemble fini. Considérons d'abord un espace métrique compact X et α étant un réel positif fixé, posons pour $\varphi \geqq 0$, $\varphi \in L(X)$: $\Delta(\varphi)=\sup_{d(x,y)\leqq\alpha}|\log\varphi(x)-\log\varphi(y)|/(d(x,y))$ avec la convention $-\infty+\infty=0$. On désignera par $Q(x, dy)$ un opérateur positif de $C(X)$ dans lui-même qui conserve $L(X)$ et on l'appellera noyau lipchitzien. On dira que Q est topologiquement transitif si pour tout $\varepsilon>0$, ol existe $n(\varepsilon)$ tel que, pour tout x et toute boule de rayon ε on ait $P^{n(\varepsilon)}(x, B)>0$.

On a alors la proposition :

PROPOSITION 1. — *Soit* Q *un noyau lipchitzien sur* X *et supposons qu'il existe* $\rho<1$, $C>0$ *tels que :*

$$\forall\varphi\in L(X),\quad \varphi\geqq 0,\qquad \Delta(Q\varphi)\leqq\rho\,\Delta(\varphi)+C. \tag{1}$$

Alors il existe $h\in L(X)$, $h\geqq 0$ *et* $k>0$ *avec* $Qh=kh$. *Si* Q *est topologiquement transitif, il y a unicité de h à un coefficient près et on a* $h>0$.

Preuve. — Fixons une probabilité Π sur X de support égal à X; il existe donc $\beta > 0$ tel que pour toute boule B de rayon α, on ait $\Pi(B) \geqq \beta$. Considérons le cône convexe C_K des $\varphi \in L(X)$, $\varphi \geqq 0$ vérifiant $\Delta(\varphi) \leqq \log K$ et notons que Q opère dans C_K si $\log K \leqq C/(1-\rho)$ en vertu de l'inégalité de l'hypothèse.

Puisque Π est de support X, la condition $\Pi(\varphi) = 1$ définit une base B de ce cône; montrons la compacité de B en convergence uniforme. La condition $\Delta(\varphi) \leqq \log K$, donne sur toute boule B_x de centre x et de rayon α :

$$\varphi(x)\, 1_{B(x)}/K \leqq \varphi \leqq K e^{\alpha} \varphi(x)\, 1_{B(x)}$$

et donc :

$$1 = \Pi(\varphi) \geqq \varphi(x)\, \Pi(B_x)/K \geqq \beta\varphi(x)/K$$

$$1 = \Pi(\varphi) \leqq K e^{\alpha} \varphi(x)\, \Pi(B_x) \leqq K e^{\alpha} \varphi(x)$$

soit :

$$1/K e^{-\alpha} \leqq \varphi \leqq K/\beta \qquad \text{si} \quad \varphi \in B.$$

Les éléments de B satisfont donc aussi pour $d(x, y) \leqq \alpha$:

$$K e^{\alpha} (\varphi(x) - \varphi(y)) \leqq \left| (\varphi(y)/\varphi(x)) - 1 \right| \leqq (e^{\Delta(\varphi)\, d(x, y)} - 1)$$

soit

$$K e^{\alpha} \left| \varphi(x) - \varphi(y) \right| \leqq K^{\alpha} \operatorname{Log} K\, d(x, y).$$

D'après le théorème d'Ascoli on a donc la compacité de B en convergence uniforme. Si l'on définit l'opérateur $\bar{Q}$ de B dans B par $\bar{Q}\varphi = Q\varphi/\Pi(Q\varphi)$, le théorème de Schauder-Tychonoff fournit $h \geqq 0$, $h \in B$ avec $\bar{Q}h = h$, c'est-à-dire $Qh = kh$ et ceci justifie la première partie de l'énoncé. Si Q est topologiquement transitif on a, pour toute $\varphi \in C_K$, $\varphi \geqq 0$, $P^{n_0}\varphi > 0$ pour un certain n_0. D'où ici, $P^{n_0} h = k^{n_0} h > 0$.

Pour montrer l'unicité de h on peut supposer Q markovien en le remplaçant par l'opérateur relativisé $P(x, dy) = (1/k)(Q(x, dy))(h(y)/h(x))$ qui possède les mêmes propriétés que Q avec de plus $P1 = 1$.

Si alors $Qh' = k'h'$, $h' \in C(X)$, $h' \geqq 0$ et $k' \leqq 1$ par exemple, on peut considérer l'ensemble où le minimum de h' est atteint : c'est un fermé Q-invariant et par transitivité topologique il est égal à X. Donc $h' = \text{Cte}$ ce qui fournit l'unicité de h'.

On considère maintenant un deuxième espace métrique compact Y avec $X \subset Y$ et des applications contractantes $g \in G$ de X dans Y de rapports majorés par $\rho < 1$. On considère aussi des fonctions lipchitziennes $q^g(x) = q(x, g)$ avec $\sup_g \Delta(q^g) \leqq C < +\infty$ et le noyau lipchitzien Q défini par $Q\varphi(x)=\int q(x, g)\varphi(gx)\,dg$ où dg est une mesure de probabilité fixée. De façon que Q opère sur C(X), on suppose que $q(x, g)>0$ et $x\in X$ impliquent $gx\in X$. La proposition précédente admet alors le corollaire suivant.

COROLLAIRE. — *Avec les notations précédentes, supposons le noyau* Q *topologiquement transitif. Alors il existe* $h\in L(X)$, $(h>0)$, Π *probabilité sur* X *et* $k>0$ *avec* $\Pi Q=k\Pi$, $Qh=kh$. *Il y a unicité de* Π *et* h *à un coefficient près. Pour* $\varphi\in L(X)$, *la suite* $Q^n\varphi/k^n$ *converge uniformément à vitesse exponentielle vers* $\Pi(\varphi)h$.

Preuve. — Vérifions l'inégalité (1) de la proposition : pour $d(x, y)\leqq\alpha$ et $\varphi\in L(X)$ on a

$$q(x, g)\leqq e^{Cd(x, y)}q(y, g)$$

$$\varphi(gx)\leqq e^{\Delta(\varphi)\rho d(x, y)}\varphi(gy)$$

$$Q\varphi(x)=\int q(x, g)\varphi(gx)\,dg\leqq e^{[C+\rho(\varphi)]d(x, y)}Q\varphi(y)$$

$$\Delta(Q\varphi)\leqq\rho\Delta(\varphi)+C.$$

La transitivité topologique de Q implique donc l'existence et l'unicité de $h\in L(X)$, $h>0$ avec $Qh=kh$. Afin de justifier les autres assertions, on peut comme précédemment supposer Q markovien en le remplaçant par $P(x, dy)=1/k\, Q(x, dy)(h(y))/h(x)$. Montrons que, alors Q vérifie essentiellement la condition F introduite initialement en A. Pour $d(x, y)\leqq\alpha$ on a :

$$|Q\varphi(x)-Q\varphi(y)|\leqq\int|q(x, g)-q(y, g)|\,\varphi(gx)\,dg + \int q(y, g)\,|\varphi(gx)-\varphi(gy)|\,dg$$

$$|Q\varphi(x)-Q\varphi(y)|\leqq|e^{Cd(x, y)}-1|\int(\varphi(gx))\,q(x, g)\,dg + [\varphi]^\alpha\rho\, d(x, y)\int q(y, g)\,dg$$

où l'on a posé

$$[\varphi]^\alpha=\operatorname*{Sup}_{d(x, y)\leqq\alpha}|\varphi(x)-\varphi(y)|/d(x, y)$$

soit

$$[Q\varphi]^\alpha \leqq \rho\,[\varphi]^\alpha + C\,e^{C\alpha}\,\|\varphi\|_\infty.$$

Il est clair que sur $L(X)$ les deux normes $[\varphi]+\|\varphi\|_\infty$ et $[\varphi]^\alpha+\|\varphi\|_\infty$ sont équivalentes et que l'on peut donc appliquer le théorème spectral de A.

Comme 1 est ici valeur propre simple, la suite $1/n \sum_0^{n-1} Q^k \varphi$ converge vers $\Pi(\varphi)$ où Π est le projecteur correspondant. Donc Q admet Π comme unique probabilité invariante.

Montrons enfin l'irréductibilité de Q : si $\varphi \in L(X)$ satisfait $Q\varphi = e^{i\theta}\varphi$, le passage aux modules donne $Q|\varphi| \geqq |\varphi|$ et le raisonnement de maximum effectué à la fin de la preuve de la proposition donne $|\varphi| = \mathrm{Cte}$. On a alors :

$$\forall x \in X, \quad e^{i\theta} = \int (\varphi(y)/\varphi(x))\,Q(x, dy) \qquad \text{avec} \quad |\varphi(y)/\varphi(x)| = 1.$$

On en déduit $\varphi(y) = \varphi(x)\,e^{i\theta}$, $Q(x, dy)$ p. p. et aussi $\varphi(y) = \varphi(x)\,e^{in\theta}\,Q^n(x, dy)$ p. p. En particulier $\varphi = \mathrm{Cte}$ sur le support de $Q^n(x, .)$. Or, par transitivité topologique, pour ε donné, le support de $Q^n(x, .)$ est ε-dense pour $n = n(\varepsilon)$ convenable. On a donc $\varphi = \mathrm{Cte}$ sur X, $e^{i\theta} = 1$ et le théorème spectral de A donne bien la convergence uniforme à vitesse exponentielle de $Q^n \varphi$ vers $\Pi(\varphi)$.

II. Sous-shifts

Considérons maintenant suivant [2] un alphabet fini A, une matrice carrée $M(a, b)\,(a, b \in A)$ formée de 0 et 1 et telle qu'il existe n avec M^n strictement positive. Considérons alors la partie Σ de A^Z formée des mots infinis $\omega = (\omega_n)_{n\in Z}$ sur A avec la condition : $\forall n \in Z$, $M(\omega_n, \omega_{n+1}) = 1$. Si A^Z est muni de la distance d définie par $d(\omega, \omega') = \sum_k 1/2^{|k|}\,\delta(\omega_k, \omega'_k)$ où $\delta(a, b) = 0$ si $a = b$, $\delta(a, b) = 1$ si $a \neq b$, il est clair que Σ est un fermé de A^Z invariant par la translation θ. On notera Σ^+ le fermé de A^N formé des mots infinis suivant la même règle de construction. Pour $\omega \in A^N$ et $a \in A$ on notera $a\omega$ le mot défini par $(a\omega)_0 = a$, $(a\omega)_k = \omega_{k-1}\,(k \geqq 1)$.

La condition M^n strictement positive donne pour $\omega, \omega' \in \Sigma^+$ l'existence d'une suite $a_k \in A$ telle que $a_1 \ldots a_k\,\omega$ appartienne à Σ^+ et converge vers

ω'. On dira dans ces conditions que Σ et Σ^+ sont des sous-shifts mélangeants. On notera $L_\varepsilon(X)$ $(\varepsilon>0)$ l'espace des fonctions lipchitziennes sur l'espace métrique compact $[X, d^\varepsilon]$ et l'on posera $H(X)=\bigcup_{\varepsilon>0} L_\varepsilon(X)$. Les éléments de $H(X)$ seront appelés fonctions holdériennes. Le lemme suivant [2] sera d'un usage constant.

LEMME. — *Si f est holdérienne sur Σ, il existe u holdérienne telle que $f^+=f+u\circ\theta-u$ ne dépende que des coordonnées d'indice positif.*

Il est commode de donner la

DÉFINITION 1. — On dira que les fonctions holdériennes f et f' sur Σ sont a-homologues (resp. m-homologues) s'il existe u holdérienne (resp. λ et ψ avec $\lambda\in\mathbb{R}$, $|\psi|=1$) telle que $f=f'+u\circ\theta-u$ [resp. $e^{i\lambda f}=e^{i\lambda f'}(\psi\circ\theta)/\psi$].

Considérons alors pour g fixée, les fonctions $q(\omega, a)=e^{g(a\omega)}$ si $\omega, a\omega\in\Sigma^+$ et $q(\omega, a)=0$, si $a\omega\notin\Sigma^+$ et le noyau lipchitzien Q sur Σ^+ défini par $Q\varphi(\omega)=\sum_a q(\omega, a)\varphi(a\omega)$. Il est clair que Q est topologiquement transitif puisque $e^{g^+(\omega)}>0$ si $\omega\in\Sigma^+$ et que l'ensemble des $a_1\ldots a_k\omega$ $(a_i\in A, k\in N)$ est dense dans Σ^+.

On peut donc appliquer à ce noyau le corollaire de la proposition 1 : il existe $h>0$ et $k>0$ uniques $[(h\in H(\Sigma^+)]$ avec $Qh=kh$. On notera P^g le noyau markovien déduit de Q par relativisation :

$$P^g\varphi(\omega, d\omega')=Q(\omega, d\omega')(h(\omega')/kh(\omega))$$

$$P^g\varphi(\omega)=\sum_a G(a\omega)\varphi(a\omega)$$

où $G=e^g h/kh\circ\theta$; ceci revient à modifier g par a-homologie et addition d'une constante $\log k$. Ce noyau markovien est inchangé lorsque g est modifiée par homologie et il est de même du nombre $k=k_g$. Considérons la probabilité ν sur Σ^+ qui est P^g-invariante et montrons que l'adjoint de P^g n'est autre que la translation θ. On a par définition :

$$\nu[\psi.P^g\varphi]=\int d\nu(\omega)\sum_a G(a\omega)\varphi(a\omega)\psi(\omega)=\sum_a a\,\nu[G.\varphi.\psi\circ\theta]$$

puisque $\theta(a\omega)=\omega$ si $\omega, a\omega\in\Sigma^+$.

D'où :

$$\nu[\psi.P^g\varphi]=\nu P^g[\varphi.\psi\circ\theta]=\nu[\varphi.\psi\circ\theta].$$

La convergence des itérés de P^g vers le projecteur associé à ν a lieu puisque P^g satisfait la condition F sur $L_\varepsilon(\Sigma^+)$ et implique que θ est mélangeante par rapport à ν. On peut trouver une unique mesure $\tilde{\nu}$ sur Σ qui est θ-invariante et de projection ν sur Σ^+ : il suffit de poser, pour $\varphi \circ \theta^k \in C(\Sigma^+)$: $\tilde{\nu}[\varphi] = \nu[\varphi \circ \theta^k]$. Il est clair que ν et $\tilde{\nu}$ sont inchangées lorsqu'on modifie g par a-homologie; elles seront appelées mesures de Gibbs associées à g.

III. Quelques lemmes

On fixe ici la fonction holdérienne $g \in L_\varepsilon(\Sigma^+)$ et donc ν et $\tilde{\nu}$ les mesures de Gibbs définies ci-dessus; l'opérateur P^g sera noté P et on rappelle qu'il satisfait la condition F sur $L_\varepsilon(\Sigma^+)$.

On a alors le :

LEMME 1. — *Soit f holdérienne sur Σ, $\tilde{\nu}$ une mesure de Gibbs sur Σ et $u \in L^1(\hat{\nu})$ telle que $f = u \circ \theta - u$ p.p. Alors u est égale $\tilde{\nu}-p.p$ à une fonction holdérienne.*

De même si ψ est borélienne de module 1 avec $e^{if} = (\psi \circ \theta)/\psi\,(pp)$, ψ est égale (p.p) à une fonction holdérienne.

Enfin u et ψ sont unique à des constantes près.

Preuve. — L'unicité de u et ψ aux constantes près est claire d'après l'ergodicité de θ. Par homologie, on peut supposer $f \in H(\Sigma^+)$ et alors u ne dépend que des coordonnées d'indice positif. En effet, comme θ est mélangeante et $\nu(u) = 0$ on a $\forall \varphi \in L^\infty(\tilde{\nu})$, $\lim_n \langle u \circ \theta^n, \varphi \rangle = 0$ et donc, l'équation $f = u \circ \theta - u$ implique la convergence de $\langle \sum_0 f \circ \theta^k, \varphi \rangle$ vers $\langle u, \varphi \rangle$, d'où $u = \sum_0^\infty f \circ \theta^k \in L^1(\nu)$, puisque φ est arbitraire dans $L^\infty(\nu)$. On en déduit aussi : $Pf = P(u \circ \theta) - Pu = u - Pu$; l'équation $u - Pu = Pf$ admet comme solution $u = \sum_1^\infty P^k f$ en raison de la convergence exponentielle de $P^k f$ vers zéro dans $L_\varepsilon(\Sigma^+)$.

Mais l'équation précédente admet une solution unique à une constante près car l'équation $u - Pu = 0$ implique par passage à l'adjoint $u = u \circ \theta$, $u = \text{Cte}$.

Finalement u solution de $f = u \circ \theta - u$ est égale p. p. à $\sum_1^\infty P^k f$ qui est dans $H_\varepsilon(\Sigma^+)$.

L'équation multiplicative $e^{if}=(u\circ\theta)/u$ s'écrit aussi :

$$f(\omega^+)+2n(\omega^+)\pi=v(\theta\omega)-v(\omega) \qquad \text{où} \quad v\in L^\infty(\tilde{\nu}),$$

où ω^+ est la projection de ω sur Σ^+ et $n(\omega^+)$ est un entier. Le raisonnement précédent montre que, en fait v ne dépend que des coordonnées d'indice positif. Il en est de même de $u=e^{iv}$ et on a $e^{if}=e^{i(v\circ\theta-v)}$, $P[e^{if}u]=P(u\circ\theta)=u$. Considérons alors l'opérateur P_f sur $C(\Sigma^+)$ défini par $P_f(\varphi)=P(e^{if}\varphi)$. D'après la première partie et le paragraphe précédent, il vérifie la condition (F). Si 1 n'était pas valeur propre de P_f dans $L_\varepsilon(\Sigma^+)$, on aurait d'après le théorème ergodique en moyenne la convergence uniforme de $(1/n)\sum_0^{n-1}(P_f)^k\varphi$ vers zéro pour $\varphi\in L_\varepsilon(\Sigma^+)$ donc pour $\varphi\in L^\infty(\nu)$. On ne pourrait donc avoir en ce cas $P_f u=u$, ce qui permet de conclure par l'absurde à l'existence de $u'\in L_\varepsilon(\Sigma^+)$ avec $P_f u'=u'$.

Par passage à l'adjoint on obtient :

$$e^{if}=(u'\circ\theta)/u' \qquad \text{et} \qquad u=u'\in L_\varepsilon(\Sigma^+).$$

Les notions d'équivalence introduite dans A seront ici relatives à un noyau Q de la forme $Q\varphi(\omega)=\sum_a q(a\omega)\varphi(a\omega)$ où $q\in L_\varepsilon(\Sigma^+)$ est strictement positive sur Σ^+ (et nulle en dehors).

Ces notions sont donc en fait indépendantes de q; elles peuvent se redéfinir sous la forme : on dira que f et f' sont a-équivalentes (resp. m-équivalentes) s'il existe u resp. (ψ et λ avec $|\psi|=1$, $\lambda\in\mathbb{R}$) holdérienne avec

$$f(a\omega)=f'(a\omega)+u(a\omega)-u(\omega)\ \text{resp.}\ e^{i\lambda[f(a\omega)-f'(a\omega)]}=\psi(a\omega)/\psi(\omega)$$

dès que ω, $a\omega\in\Sigma^+$.

On a alors le lemme suivant qui est simple changement de notations :

LEMME 2. — *Pour f et f' holdériennes sur Σ^+, on a l'équivalence des conditions* [cf. *définition* 1]

1° *f et f' sont a-homologues (resp. m-homologues);*

2° *f et f' sont a-équivalentes (resp. m-équivalentes).*

Soit $f\in H(\Sigma)$ et considérons (pour λ petit) l'opérateur P_λ perturbé de $P=P^g$ défini par la formule $P_\lambda\varphi=P[e^{\lambda f^+}\varphi]$: il admet une valeur propre dominante simple $k(f,\lambda)$. Par prolongement analytique cette fonction est uniquement définie par ses valeurs sur l'axe réel. Le lemme suivant montre que $k(f,\lambda)$ est un-invariant du couple formé par f et le système dynamique mesuré $(\Sigma,\theta,\tilde{\nu})$.

LEMME 3. — *Soit f holdérienne sur Σ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\tilde{\nu}$ une mesure de Gibbs sur Σ. Alors la suite de mesures de Radon $e^{\lambda \sum_0^{n-1} f \circ \theta^k} \tilde{\nu}/k^n(f, \lambda)$ converge vaguement où $k(f, \lambda)$ est la valeur propre dominante définie ci-dessus.*

Preuve. — Par homologie, on peut supposer $f \in L_\varepsilon(\Sigma^+)$ et, d'autre part, on peut tester la convergence vague sur les fonctions de la forme $\varphi \circ \theta^{-l}$ $(l \geqq 0)$ avec $\varphi \in L_\varepsilon(\Sigma^+)$. On a en posant $S_n = \sum_0^{n-1} f \circ \theta^k$:

$$(e^{\lambda S_n} \tilde{\nu})(\varphi \circ \theta^{-l}) = \tilde{\nu}(\varphi)\, e^{\lambda [S_{n+l} - S_l]}$$

et on peut donc se ramener au cas $l = 0$.

En ce cas :

$$(e^{\lambda S_n} \nu)(\varphi) = \nu[P_\lambda^{n-1} \varphi]$$

et

$$\nu[P_\lambda^{n-1} \varphi] \sim k^{n-1}(f, \lambda)\, \nu_\lambda(\varphi)\, \nu(e_\lambda)$$

car $P^n_{\lambda/k^n(f,\lambda)}$ converge vers le projecteur $\nu_\lambda \otimes e_\lambda$ associé à la valeur propre simple $k(f, \lambda)$. Ceci donne la convergence voulue.

IV. Les théorèmes limites

Ces théorèmes vont s'appliquer à une classe de systèmes dynamiques (V, T, m) admettant un « codage » par un sous-shift mélangeant. Plus précisément, T est un homéomorphisme de l'espace métrique compact V qui préserve la mesure de Radon m. On suppose l'existence d'un sous-shift mélangeant (Σ, θ, $\tilde{\nu}$) et d'une application holdérienne de Σ sur V qui est un isomorphisme des systèmes dynamiques mesurés (Σ, θ, $\tilde{\nu}$) et (V, T, m). Les lemmes précédents permettent le passage entre ces deux systèmes et fournissent des propriétés des fonctions holdériennes sur V, indépendantes du codage choisi.

En particulier les difféomorphismes hyperboliques d'une variété compacte admettant une mesure riemannienne invariante font partie de la classe considérée. Il en est de même, plus généralement des difféomorphismes satisfaisant l'axiome A [2] ou des systèmes de Smale [15]; ces systèmes sont supposés restreints à leur ensemble de points non errants et munis d'une mesure invariante de Gibbs associée à une fonction g fixée. On donnera donc seulement les énoncés dans le cas des sous-shifts mélangeants.

DÉFINITION 2. — On dira comme en A que f est dégénérée (resp. non apériodique) si f est a-homologue (resp. m-homologue) à une constante. De même f sera dite arithmétique si elle est m-homologue à la constante 1.

Pour alléger on supposera d'abord que la fonction holdérienne f sur Σ est centrée, c'est-à-dire vérifie $\gamma=\gamma(f)=\int f(x)\,d\tilde{\nu}(x)=k'(f,0)=0$.

On notera :

$$\sigma^2=k''(f,0) \tag{2}$$

$$S_n(x)=\sum_0^{n-1} f\circ\theta^k(x). \tag{3}$$

THÉORÈME 1. — *Soit f une fonction holdérienne sur le sous-shift* (Σ,θ) *muni de la mesure de Gibbs $\tilde{\nu}$. On suppose f non dégénérée et centrée. Alors on a :*

$$\lim_n \tilde{\nu}\left\{x;\ \sum_0^{n-1} f\circ\theta^k(x)\leqq\sigma t\sqrt{n}\right\}=N(-\infty,t) \tag{4}$$

pour tout t avec σ défini par (2) *et* N *la loi normale standard.*

THÉORÈME 2. — *Avec les notations du théorème* 1 *on a le théorème central limite avec reste :*

$$\sup_{n,x}\left|\tilde{\nu}\left\{x;\ \sum_0^{n-1} f\circ\theta^k(x)<\sigma t\sqrt{n}\right\}-N(-\infty,t)\right|\leqq C/\sqrt{n} \tag{5}$$

où C *est une constante.*

Afin de justifier ces deux énoncés, notons d'abord que le changement de f par a-homologie modifie $S_n/\sqrt{n}$ par addition d'un terme majoré par $K/\sqrt{n}$.

On peut donc, pour démontrer le théorème 1 supposer $f\in L_\varepsilon(\Sigma^+)$.

Notons $y=(y_n)$, $n\geqq 0$ une trajectoire sur Σ^+ de la chaîne de noyau P adjointe de θ et observons que la loi du point de coordonnée $(\theta^k x)$ $[0\leqq k\leqq n]\in(\Sigma^+)^{n+1}$ est égale à celle de $(y_n, y_{n-1}, \ldots, y_0)$ où y_0 est choisi suivant la loi initiale ν. Il en résulte que si $\hat{S}_n(y)=\sum_1^n f(y_k)$, $S_n(x)$ et $\hat{S}_n(y)$ ont même loi. Puisque f est non dégénérée au sens de θ ou de P le théorème 1 se déduit du théorème 1 de la partie A.

L'énoncé du théorème 2 n'est pas modifié par a-homologie puisque

$$\sup N(t-(K/\sqrt{n}),\ t+(K/\sqrt{n}))\leqq C'/\sqrt{n}$$

et on peut donc, pour le démontrer supposer $f \in L_\varepsilon(\Sigma^+)$. L'égalité des lois de $S_n(x)$ et $\hat{S}_n(y)$ donne encore le résultat en vertu du théorème 2 de la partie A.

Comme en A on notera $l(I)$ la longueur de l'intervalle I. Le théorème limite local suivant fournit des estimations essentielles pour l'ergodicité de certains systèmes dynamiques en mesure invariante infinie (à paraître). Il permet aussi la construction d'une classe générale de flots différentiables possédant la propriété K mais non celle de Bernoulli [J.-P. Thouvenot, communication personnelle].

THÉORÈME 3 (théorème limite local). — *Soit f une fonction holdérienne sur le sous-shift* (Σ, θ) *muni de la mesure de Gibbs* $\tilde{\nu}$. *On suppose f centrée et apériodique* [cf. *définition* 2]. *Alors pour tout intervalle l on a :*

$$\tilde{\nu}\left\{x ;\ \sum_{0}^{n-1} f \circ \theta^k(x) \in I\right\} \sim l(I)/\sigma\sqrt{2\pi n}. \tag{6}$$

THÉORÈME 4 (théorème de renouvellement). — *Soit f une fonction holdérienne sur le sous-shift* (Σ, θ) *muni de la mesure de Gibbs* $\tilde{\nu}$. *On suppose f non arithmétique* (cf. *définition* 2) *et de moyenne positive :*

$$\gamma = \int_{\Sigma} f(x)\, d\tilde{\nu}(x) > 0.$$

On note μ *la mesure définie par :*

$$\mu(I) = \int \sum_{n} 1_I [S_n(x)]\, d\tilde{\nu}(x).$$

Alors μ *est une mesure de Radon et l'on a :*

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t \to -\infty} \mu(I+t) = 0 \\ \lim\limits_{t \to +\infty} \mu(I+t) = l(I)/\gamma. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Ces deux théorèmes sont des théorèmes de convergence en loi sur R et, pour pouvoir se ramener à la chaîne de Markov de noyau P, on doit traiter des convergences plus générales. Soit $\mathscr{E}_n$ la loi du triplet $[x, S_n(x), \theta^n x]$. Pour obtenir le théorème 3 il suffit évidemment de justifier la convergence vague de $\sigma\sqrt{2\pi n}\,\mathscr{E}_n$ vers $\tilde{\nu} \times l \times \tilde{\nu}$. Le remplacement de f par $f^+ = f + u \circ \theta - u$ conduit à la loi $\mathscr{E}_n^+$ de $[x ; S_n^+(x), \theta^n x]$ qui est l'image de $\mathscr{E}_n$ par l'application continue $(x, t, y) \to [x, t + u(y) - u(x), y]$ et il suffit donc d'obtenir la convergence vague de $\sigma\sqrt{2\pi n}\,\mathscr{E}_n^+$. Pour obtenir celle-ci il suffit de traiter les projections sur les sous-shifts unilatères $\Sigma^{-l}(l \geqq 0)$ correspondant aux coordonnées d'indices $\geqq -l$. Il suffit alors de considérer le cas $l=0$ à condition de traiter toutes les fonctions $f^{+} \circ \theta^{l}$, fonctions qui possèdent les mêmes propriétés que f et f^{+}. Notons alors $\bar{\mathscr{E}}_n^{+}$ la projection de $\mathscr{E}_n^{+}$ sur $\Sigma^{+} \times \mathbb{R} \times \Sigma^{+}$ et désignons par $\eta_n^{y_0}$ la loi du couple $[y_n, \hat{S}_n(y)]$ sous P_{y_0}. Par passage à l'adjoint P de θ il est clair que

$$\bar{\mathscr{E}}_n^{+} = \int \eta_n^{y_0} \times \delta_{y_0} \, d\nu(y_0).$$

Il suffit donc enfin de montrer la convergence de $\sigma\sqrt{2\Pi n}\, \eta_n^{y_0}$, à y_0 fixé vers $\nu \times l$; ce résultat a précisément été obtenu au théorème 3 de la partie A sous l'hypothèse d'apériodicité qui est ici satisfaite.

Pour une mesure ρ sur $\Sigma \times \mathbb{R} \times \Sigma$ on notera $\rho * \delta_t$ la translatée de ρ par $(x, a, y) \to (x, a+t, y)$.

Pour obtenir le théorème de renouvellement il suffit de trouver les limites vagues de $\sum_0^{\infty} \mathscr{E}_n^{+} * \delta_t$ quant $t \to \pm\infty$. La mesure $\sum_0^{\infty} \mathscr{E}_n^{+}$ se déduit aussi de $\sum_0^{\infty} \mathscr{E}_n$ par l'application continue $(x, a, y) \to [x, a+u(y)-u(x), y]$ et on peut donc se ramener à $\sum_0^{\infty} \mathscr{E}_n^{+}$. Comme plus haut il suffit de traiter les projections sur $\Sigma^{-l} \times \mathbb{R} \times \Sigma^{-l} (l \geqq 0)$ et donc la projection sur $\Sigma^{+} \times \mathbb{R} \times \Sigma^{+}$ c'est-à-dire $\int \left(\sum_0^{\infty} \eta_n^{y_0}\right) \times \delta_{y_0} \, d\nu(y_0)$. Or on a vu en A la convergence, à y_0 fixé de $\sum_0^{\infty} \eta_n^{y_0} * \delta_t$ vers 0 ou $\nu \times l/\gamma(f)$ suivant que t tend vers $-\infty$ ou $+\infty$, dans le cas d'une fonction f non arithmétique vérifiant $\gamma(f) > 0$.

D'où le théorème.

Comme corollaire du théorème 4 ou plutôt de sa démonstration on obtient la propriété de mélange pour les flots spéciaux définis à partir d'une fonction holdérienne sur Σ. Cette connection entre renouvellement et flots spéciaux a été étudiée par divers auteurs (*cf.* [1]). Cette preuve est susceptible de modifications pouvant conduire à des vitesses de convergences pour certains flots d'Asonov. On considère donc ici une fonction holdérienne f positive et le compact E des couples (x, s) $[0 \leqq s \leqq f(x)]$ avec l'identification $[x, f(x)] \sim (\theta x, 0)$.

Si l'on considère la transformation $\tilde{T}$ sur $\Sigma \times R$ définie par

$$\tilde{T}(x, s) = [\theta x, s + f(x)]$$

E apparaît comme l'espace quotient de $\Sigma \times R$ par l'action du groupe $\tilde{T}^k$ $(k \in Z)$. Le flot naturel S^t sur $\Sigma \times R$: $(x, s) \to (x, s+t)$ se projette alors sur E suivant le flot spécial noté $\bar{S}^t$.

Comme la mesure $\tilde{\nu} \times l$ est S^t-invariante, sa restriction σ à E, qui peut être considéré comme un domaine fondamental dans $\Sigma \times R$ est $\bar{S}^t$-invariante; la probabilité correspondante est $(1/\gamma(f))\,\sigma$. On a alors le :

COROLLAIRE. — *Avec les notations du théorème* 4 *et* $f \geqq 0$, *considérons le flot spécial construit à l'aide de f au-dessus du sous-shift* $(\Sigma, \Theta, \tilde{\nu})$. *Alors ce flot spécial est mélangeant.*

Preuve. — Si l'on définit pour $k > 0$ $S_{-k}(x)$ par la formule

$$S_{-k}(x) = -S_k \circ \theta^{-k}(x) = -\sum_{1}^{k} f \circ \theta^{-l}$$

on peut écrire, pour tout $n \in Z$:

$$\tilde{T}^n(x, s) = [\theta^n x, s + S_n(x)].$$

On définit alors la mesure $\mathscr{E}_n$ pour $n \in Z$ comme la loi du triplet $[x, S_n(x), \theta^n x]$. On est ici amené à considérer $\sum_{n \in Z} \mathscr{E}_n$ et le comportement de cette mesure translatée par $t\,(t \to \infty)$ se réduit à celui de $\sum_{0}^{\infty} \mathscr{E}_n * \delta_t$ et $\sum_{-\infty}^{-1} \mathscr{E}_n * \delta_t$, lequel découle de l'étude précédente : $\sum_{n \in Z} \mathscr{E}_n$ est une mesure de Radon et $\lim_{t \to +\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{E}_n * \delta_t = \hat{\nu} \times l \times \tilde{\nu}/\gamma$. On a ici :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{E}_n(\psi . u . \varphi) = \int \sum_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, u\,[S_k(x)]\, \varphi(\theta^k x)\, d\tilde{\nu}(x).$$

Afin d'interpréter ces formules introduisons la fonction $\bar{\Phi}$ image canonique dans E d'une fonction Φ sur $\Sigma \times \mathbb{R}$ continue à support compact :

$$\bar{\Phi}(x, s) = \sum_{0}^{+\infty} \Phi[\theta^k x, s + S_k(x)].$$

Il est clair que l'ensemble des $\bar{\Phi}$ ainsi obtenu est dense dans $\mathscr{C}(E)$. Si l'on identifie la mesure ν à la projection sur E de $\tilde{\nu} \times \delta_0$, la formule donnant $\sum_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{E}_n$ s'interprète en :

$$\bar{S}^t[\psi\nu]\overline{(\varphi . u)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (\mathscr{E}_n * \delta_t)(\psi . u . \varphi).$$

Le comportement de $\sum_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{E}_n * \delta_t$ étudie précédemment nous donne : $\lim_{t \to +\infty} \bar{S}^t[\psi\tilde{\nu}] = \tilde{\nu}(\psi)\,\sigma/\gamma$.

On peut remplacer dans cette formule $\psi\tilde{\nu}$ par $S^a(\psi\tilde{\nu})$ ou $\int S^a[\psi\tilde{\nu}]\,u(a)\,da$, mesure ayant une densité par rapport à σ et dont la masse au lieu de $\tilde{\nu}(\psi)$ vaut $\tilde{\nu}(\psi)\,l(u)$.

Donc, pour toute mesure ρ absolument continue par rapport à σ et de masse $|\rho|$ on a en convergence vague :

$$\lim_{t \to \infty} \bar{S}^t[\rho] = |\rho|\,\sigma/\gamma.$$

C'est bien la propriété de mélange voulue.

Remarque. — La propriété de mélange faible du flot spécial :

$$\lim_{\theta} \frac{1}{\theta} \int_0^\theta |\langle \bar{S}^t \varphi, \psi \rangle|\, dt = 0$$

dès que $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi) = 0$ a été étudié par de nombreux auteurs (*cf.* [1]). Si f est holdérienne sur le sous-shift Σ, elle découle simplement de la non-arithméticité de f.

Ceci revient, d'après ce qui précède, à supposer f non m-homologue par une fonction borélienne à la fonction 1.

En effet, si le flot S^t n'était pas faiblement mélangeant, il aurait un spectre discret non trivial : on pourrait trouver φ borélienne sur E de module 1 et $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\bar{S}^t \varphi = e^{i\lambda t} \varphi$.

Par image réciproque dans $\Sigma \times \mathbb{R}$, on obtient une fonction encore notée φ propre pour le flot naturel : $\varphi(x, t) = \psi(x)\, e^{i\lambda t}$ qui est invariante par $\tilde{T}$. On a donc, avec ψ borélienne de module 1 :

$$\psi(\theta x)\, e^{i\lambda[t + f(x)]} = \psi(x)\, e^{i\lambda t} \qquad \text{ou} \qquad e^{i\lambda f} = \psi \circ \theta/\psi.$$

Ceci contredit l'hypothèse de non-arithméticité de f.

D'après [13] le mélange faible de $\bar{S}^t$ implique la propriété K, donc le mélange fort.

RÉFÉRENCES

[1] F. BLANCHARD, K-flots et théorème de renouvellement, *Z. wahr.*, vol. **36**, 1976, p. 345-358.

[2] R. BOWEN, Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphismes, *Springer Lectures Notes*, n° **470**, 1975.

[3] L. BREIMAN, *Probability*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968.

[4] W. DOEBLIN et R. FORTET, Sur les chaînes à liaisons complètes, *Bulletin Soc. Math. Fr.*, t. **65**, 1937, p. 132-148.

[5] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. **2**, Wiley, New York, 1971.

[6] Y. GUIVARC'H et A. RAUGI, Products of Random Matrices: Convergence Theorems, *Contemporary Mathematics*, vol. **50**, 1986, A.M.S., p. 31 à 54.

[7] Y. GUIVARC'H, Applications d'un théorème limite local à la transcience et à la récurrence de marcher de Markov, *Springer Lecture Notes*, n° **1096**, théorie du potentiel, 1983, p. 301-332.

[8] G. KELLER, Un théorème de la limite centrale pour une classe de transformations monotones par morceaux, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **291**, série A, 1980, p. 155-158.

[9] H. KESTEN, Renewal Theory for Functionals of a Markov Chain with General State Space, *Annals of Proba.*, 74, vol. **24**, n° 3, p. 355-386.

[10] E. LE PAGE, Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires. Springer, *Lecture Notes*, n° **928**, 1982, p. 258-303.

[11] F. NORMAN, *Markov Process and Learning Models*, Academic press, vol. **84**, 1972.

[12] M. RATNER, The Central Limit Theorem for Geodesic Flows on n-Dimensional Manifolds of Negative Curvature, *Israël. J. of Math.*, vol. **16**, 1973, p. 181-197.

[13] M. RATNER, Bernoulli Flows Over Maps of the Interval, *Israël Journal of Maths.*, vol. **31**, n° 34, 1978.

[14] J. ROUSSEAU-EGELE, Un théorème de la limite locale pour une classe de transformations dilatantes, *Annals of Proba.*, vol. **11**, n° 3, 1983, p. 772-788.

[15] D. RUELLE, Thermodynamic Formalism, *Encyclopedia of Maths and its Applications*, vol. **5**, 1978.

[16] Ya. G. SINAI, Gibbs Measures in Ergodic Theory, *Russian Maths Surveys*, n° **4**, (166), 1972, p. 21-64.

[17] A. N. SHIRYAYEV, *Probability Graduate Texts in Math*, vol. **95**, Springer-Verlag.

(*Manuscrit reçu le* 7 *mars* 1986)
(*corrigé le* *février* 1987.)