ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

EMMANUEL LESIGNE

# Théorèmes ergodiques ponctuels pour des mesures diagonales. Cas des systèmes distaux

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 23, n° 4 (1987), p. 593-612
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1987__23_4_593_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*

Vol. 23, n° 4, 1987, p. 593-612.

Echanges Annales

*Probabilités et Statistiques*

# Théorèmes ergodiques ponctuels pour des mesures diagonales. Cas des systèmes distaux

par

Emmanuel LESIGNE

Département de Mathématiques et Informatique,
Université de Bretagne Occidentale,
6, avenue Le Gorgeu, 29287 Brest Cedex

RÉSUMÉ. — Nous montrons que la propriété de convergence presque sûre des moyennes $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^{pn}x).g(T^{qn}x)$ sur un système dynamique probabilisé est conservée par extension isométrique. De plus, nous améliorons les résultats connus sur la convergence en moyenne de ces expressions.

*Mots clés :* Théorèmes ergodiques ponctuels, mesure diagonale, extension isométrique, système distal.

ABSTRACT. — We prove that the property of almost sure convergence of the means $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^{pn}x).g(T^{qn}x)$ on a dynamical system is preserved by isometric extensions. Moreover, we improve known results concerning the convergence in the mean of these expressions.

## INTRODUCTION

Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace probabilisé muni d'une transformation T inversible bimesurable et préservant $\mu$. On s'intéresse à la convergence des

*Classification A.M.S. :* 28 D 05.

moyennes

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^{pn} . g \circ T^{qn} \tag{1}$$

où $p$ et $q$ sont deux entiers relatifs et $f$, $g$ deux fonctions de carré intégrable sur $(X, \mathscr{A}, \mu)$. On sait que ces moyennes convergent dans $L^1(\mu)$ (*cf.* [1]); le problème de la convergence presque sûre est soulevé par H. Furstenberg dans [2].

Les entiers $p$ et $q$ sont dorénavant considérés comme fixés.

Nous dirons que le système dynamique $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ vérifie la c. p. s. m. (convergence presque sûre des moyennes) si, pour tous $f$, $g$ dans $L^2(\mu)$, la suite $\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^{pn} . g \circ T^{qn}\right)$ converge $\mu$-presque partout.

Dans un article précédent, [3], nous avons démontré que, pour qu'un système dynamique vérifie la c. p. s. m., il suffit que tous ses facteurs d'entropie nulle vérifient la c. p. s. m. En particulier la c. p. s. m. est assurée pour les K-systèmes.

Dans [6], D. Berend démontre, entre autres choses, qu'un endomorphisme surjectif d'un tore de dimension finie vérifie la c. p. s. m.

Nous démontrons dans la présente note que la c. p. s. m. est une propriété conservée par extension isométrique. En résumé, on appelle extension isométrique de $(X, T)$ un système du type $(X \times H/K, \tilde{T})$ où K est un sous-groupe d'un groupe compact H et où la transformation $\tilde{T}$ est définie par la donnée d'une application $\varphi$ de X dans H et par la relation $\tilde{T}(x, h.K) = (Tx, \varphi(x)h.K)$. Une définition complète est donnée dans le II.1.

Le principal résultat démontré (théorème 3) est que si $(X, T)$ vérifie la c. p. s. m. alors $(X \times H/K, \tilde{T})$ vérifie également la c. p. s. m. Un corollaire de cette affirmation est que tout système distal qui peut être construit, partant du système trivial, par une chaîne transfinie d'extensions isométriques successives, vérifie la c. p. s. m.

Pour démontrer ce résultat, on a besoin de préciser quelques points concernant la convergence en moyenne des expressions (1); dans le théorème 2, on étudie l'ergodicité des mesures obtenues comme limite des moyennes (1); dans le théorème 1, on étudie la convergence « Césaro-uniforme » de $(f \circ T^{pn} . g \circ T^{qn})$ dans $L^1(\mu)$.

Le plan de l'article est le suivant :

La partie I est consacrée à l'étude de la convergence en moyenne : on y démontre les théorèmes 1 et 2.

La partie II est consacrée à l'étude de la convergence presque sûre et des extensions isométriques :

– on commence par donner des définitions précises (II.1);

– on rappelle ensuite quelques résultats connus concernant la c. p. s. m. (II.2);

– enfin on énonce et on démontre le théorème 3.

*Remarque sur les notations.* – Dans toute la suite, l'expression « $\frac{1}{N}\sum$ » remplace, quand aucune confusion n'est à craindre, l'expression « $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}$ ».

# I. ÉTUDE DE LA CONVERGENCE EN MOYENNE

Un résultat général sur la convergence en moyennes de suites du type $\left(\frac{1}{N}\sum f_1 \circ T_1^n . f_2 \circ T_2^n\right)$ a été établi dans [1]. Nous allons préciser, dans un cas particulier, ce résultat.

Considérons un espace probabilisé $(X, \mathscr{A}, \mu)$, muni d'une transformation T, inversible, bimesurable et préservant $\mu$. On suppose que le système dynamique $(X, \mathscr{A}, \mu, T^{p-q})$ est ergodique.

THÉORÈME 1. – *Si* $f_1, f_2 \in L^2(\mu)$, *la suite*

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1 \circ T^{p(n+m)} . f_2 \circ T^{q(n+m)}\right)$$

*converge dans* $L^1(\mu)$, *uniformément quand m varie dans* $\mathbb{Z}$.

*Remarque* 1. – Le fait que, pour tout *m* fixé, la suite précédente converge dans $L^1(\mu)$ est un résultat connu (*cf.* [1]) et la limite est bien sûr indépendante de *m*.

*Remarque* 2. – Dans le cas d'une transformation (faire $f_2 \equiv 1$), ce résultat de convergence « Césaro-uniforme » est une généralisation immédiate du théorème ergodique en moyenne.

THÉORÈME 2. – *Il existe sur* $(X \times X, \mathscr{A} \otimes \mathscr{A})$ *une famille* $\{\mu_x \mid x \in X\}$ *de probabilités* $T^p \times T^q$*-invariantes et,* $\mu$*-presque sûrement,* $T^p \times T^q$*-ergodiques,* *telle que : pour tous $f_1$, $f_2$ dans* $L^2(\mu)$,

$$\lim_{N\to+\infty}\int_X\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^{pn}x).f_2(T^{qn}x)\right.$$

$$\left.-\int_{X\times X} f_1(x_1).f_2(x_2)\,d\mu_x(x_1,x_2)\right|d\mu(x)=0.$$

*Remarque* 3. — On pourra constater, dans la démonstration du théorème 2, que les mesures $\mu_x$ sont obtenues en désintégrant la mesure produit $\mu\otimes\mu$ au-dessus de la tribu des événements $T^p\times T^q$-invariants.

*Remarque* 4. — Grâce à des théorèmes de représentation, on peut démontrer qu'il n'y a pas de restriction réelle à supposer, pour démontrer les théorèmes 1 et 2, que X est un espace compact métrisable, que $\mathscr{A}$ est sa tribu borélienne et que $\mu$ est une probabilité régulière sur $(X, \mathscr{A})$. (Ceci est expliqué dans ([2], chap. 5) et dans [4].) On se placera dans cette situation.

*Preuve du théorème* 1. — On supposera que $p$ et $q$ sont non nuls, ce qui écarte un cas déjà traité. On reprend, en la généralisant légèrement, la démonstration de la convergence en moyenne pour $m=0$, telle qu'elle figure dans [1]. Notons $\mathscr{E}_T$ le sous-espace fermé de $L^2(\mu)$ engendré par les fonctions propres sous l'action de T. Nous allons montrer que :

si $f_1\in(\mathscr{E}_T)^\perp$ ou $f_2\in(\mathscr{E}_T)^\perp$, alors

$$\lim_{N-M\to+\infty}\frac{1}{N-M}\sum_{n=M}^{N-1} f_1\circ T^{pn}.f_2\circ T^{qn}=0,\ \text{dans } L^1(\mu),\quad (2)$$

si $f_1\in\mathscr{E}_T$ et $f_2\in\mathscr{E}_T$, alors

$$\lim_{N-M\to+\infty}\frac{1}{N-M}\sum_{n=M}^{N-1} f_1\circ T^{pn}.f_2\circ T^{qn}\quad \text{existe dans } L^1(\mu).\quad (3)$$

Ces deux résultats entraînent que, pour tous $f_1, f_2$ dans $L^2(\mu)$, les expressions $\frac{1}{N-M}\sum_{n=M}^{N-1} f_1\circ T^{pn}.f_2\circ T^{qn}$ convergent dans $L^1(\mu)$, quand $N-M$ tend vers l'infini. Ceci est bien le résultat annoncé.

Dans la suite de cette démonstration, « $\frac{1}{N-M}\sum$ » désignera « $\frac{1}{N-M}\sum_{n=M}^{N-1}$ ».

Commençons par établir (2).

Fixons une famille $\{f_{N,M} \mid N \in \mathbb{Z}, M \in \mathbb{Z}, N-M>0\}$ d'éléments de $L^\infty(\mu)$, vérifiant $\| f_{N,M} \|_\infty \leqq 1$ pour tout (N, M).

Fixons deux suites $(N_k)_{k \geqq 0}$ et $(M_k)_{k \geqq 0}$ dans $\mathbb{Z}$ telles que $\lim_{k \to +\infty} N_k - M_k = +\infty$.

On notera $g_k$ la fonction $f_{N_k, M_k}$.

Si $\Psi$ est une fonction continue sur $X \times X$, posons

$$\lambda_k(\psi) = \int_X g_k(x) \cdot \frac{1}{N_k - M_k} \sum \Psi(T^{pn} x, T^{qn} x) \, d\mu(x).$$

On peut extraire de la suite bornée de mesures $(\lambda_k)_{k \geqq 0}$ sur $X \times X$ une sous-suite $(\lambda'_k)_{k \geqq 0}$ qui converge étroitement. Fixons une telle sous-suite et notons $\lambda$ sa limite.

On vérifie sans peine que, pour toutes fonctions mesurables bornées $f_1$ et $f_2$ sur X, on a :

$$\lambda_k(f_1 \otimes f_2) = \int_X g_k(x) \cdot \frac{1}{N_k - M_k} \sum f_1(T^{pn} x) \cdot f_2(T^{qn} x) \, d\mu(x).$$

Ceci permet de prouver que la mesure $\lambda$ est $T^p \times T^q$-invariante.

D'autre part, si $u$ et $v$ sont des fonctions continues sur X, on a

$$|\lambda_k(u \otimes v)| \leqq \frac{1}{N_k - M_k} \sum \int_X |u|(T^{pn} x) \cdot |v|(T^{qn} x) \, d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{N_k - M_k} \sum \int_X |u|(T^{(p-q)n} x) \cdot |v|(x) \, d\mu(x).$$

Or, d'après la remarque 2 et l'ergocité de $T^{p-q}$, on a

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{N_k - M_k} \sum \int_X |u|(T^{(p-q)n} x) \cdot |v|(x) \, d\mu(x)$$

$$= \int_X |u|(x) \, d\mu(x) \cdot \int_X |v|(x) \, d\mu(x).$$

On en déduit que, si $u$ et $v$ sont des fonctions continues sur X, on a :

$$|\lambda(u \otimes v)| \leqq (\mu \otimes \mu)(|u| \otimes |v|).$$

Ceci entraîne que $\lambda \ll \mu \otimes \mu$.

Notons $\varphi$ la densité de $\lambda$ par rapport à $\mu \otimes \mu$. La fonction $\varphi$ est un élément $T^p \times T^q$-invariant de $L^2(\mu \otimes \mu)$. La fonction $\varphi$ appartient donc au sous-espace fermé de $L^2(\mu \otimes \mu)$ engendré par les fonctions de la forme $f_1 \otimes f_2$ où $f_1$ et $f_2$ sont dans $\mathscr{E}_T$.

Si $u$ et $v$ sont des fonctions continues sur X, on a :

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda'_k(u\otimes v)=\int_{X\times X} \varphi(x_1, x_2).u(x_1).v(x_2)\,d\mu(x_1)\,d\mu(x_2).$$

On note $(g'_k)$, $(N'_k)$ et $(M'_k)$ la suite de fonctions et les suites d'entiers associées à la suite $\lambda'_k$ par

$$\lambda'_k(u\otimes v)=\int_X g'_k(x).\frac{1}{N'_k-M'_k}\sum u(T^{pn}x).v(T^{qn}x)\,d\mu(x).$$

On vérifie sans peine que l'on a encore, pour tous $f_1, f_2\in L^2(\mu)$,

$$\lim_{k\to+\infty}\int_X g'_k(x).\frac{1}{N'_k-M'_k}\sum f_1(T^{pn}x).f_2(T^{qn}x)\,d\mu(x)$$
$$=\int_{X\times X} \varphi(x_1, x_2).f_1(x_1).f_2(x_2)\,d\mu(x_1)\,d\mu(x_2).$$

Fixons à présent $f_1$ et $f_2$ dans $L^2(\mu)$ telles que $f_1\in(\mathscr{E}_T)^\perp$ ou $f_2\in(\mathscr{E}_T)^\perp$. On a alors :

$$\lim_{k\to+\infty}\int_X g'_k(x).\frac{1}{N'_k-M'_k}\sum f_1(T^{pn}x).f_2(T^{qn}x)\,d\mu(x)=0.$$

Ceci étant vrai pour une suite $(N'_k, M'_k)$ extraite d'une suite $(N_k, M_k)$ arbitraire, on a en fait :

$$\lim_{N-M\to+\infty}\int_X f_{N,M}(x).\frac{1}{N-M}\sum f_1(T^{pn}x).f_2(T^{qn}x)\,d\mu(x)=0.$$

La famille $f_{N,M}$ étant arbitraire, on peut la choisir de façon que

$$f_{N,M}.\frac{1}{N-M}\sum f_1\circ T^{pn}.f_2\circ T^{qn}=\left|\frac{1}{N-M}\sum f_1\circ T^{pn}.f_2\circ T^{qn}\right|.$$

On prouve ainsi la convergence en moyenne vers 0, quand $N-M$ tend vers $+\infty$, de $\frac{1}{N-M}\sum f_1\circ T^{pn}.f_2\circ T^{qn}$, et (2) est établi.

Montrons à présent (3).

Soient $f_1$ et $f_2$ deux fonctions propres sous l'action de T :

$$f_1\circ T=\rho_1.f_1 \qquad \text{et} \qquad f_2\circ T=\rho_2.f_2,$$

avec $\rho_1, \rho_2\in\mathbb{C}$ et $|\rho_1|=|\rho_2|=1$.

On a

$$\lim_{N-M\to+\infty} \frac{1}{N-M} \sum f_1(T^{pn}x).f_2(T^{qn}x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho_1^p.\rho_2^q \neq 1 \\ f_1(x).f_2(x) & \text{si } \rho_1^p.\rho_2^q = 1. \end{cases}$$

L'existence de cette limite est encore vérifiée lorsque $f_1$ et $f_2$ sont des combinaisons linéaires de fonctions propres. Mais cette convergence ponctuelle n'est plus vérifiée pour des fonctions $f_1$ et $f_2$ quelconques dans $\mathscr{E}_T$ (c'est déjà faux dans le cas d'une seule transformation).

Si $g_1$ et $g_2$ sont des combinaisons linéaires de fonctions propres sous l'action de T, alors elles sont bornées et la convergence ponctuelle de $\frac{1}{N-M} \sum g_1 \circ T^{pn}.g_2 \circ T^{qn}$ entraîne la convergence dans $L^1(\mu)$ de ces expressions. C'est cette propriété de convergence en moyenne qui se prolonge par densité à des fonctions de $\mathscr{E}_T$. L'argument est standard et il est inutile de le détailler ici.

On démontre ainsi l'assertion (3), ce qui achève la preuve du théorème.

*Preuve du théorème* 2. — Commençons par préciser quelques notations : nous noterons $\mathscr{B}$ la plus petite sous-tribu de $\mathscr{A}$ rendant mesurables toutes les fonctions propres pour l'action de T sur $L^2(\mu)$. On a $L^2(\mu, \mathscr{B}) = \mathscr{E}_T$. Le système dynamique $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ est à spectre discret (c'est le facteur maximal à spectre discret du système initial). Il est donc isomorphe à une rotation sur un groupe compact abélien, autrement dit il existe un groupe compact abélien $(G, +)$, un élément $\alpha$ de G, un élément $X_1$ de $\mathscr{B}$, une injection $\Psi$ de $X_1$ dans G tels que :

— quand G est muni de sa probabilité de Haar $m_G$, la transformation $R : g \mapsto g+\alpha$ est ergodique;

— $\mu(X_1)=1$ et $T(X_1)=X_1$;

— $\Psi$ est mesurable de $(X_1, \mathscr{B})$ dans G muni de sa tribu borélienne et $\Psi$ envoie $\mu$ sur $m_G$;

— $R \circ \Psi = \Psi \circ T$.

Étudions à présent la convergence des moyennes. On écarte le cas connu où l'un des entiers $p$ ou $q$ est nul.

On a démontré (*cf.* [1] ou preuve du théorème 1) que, si $f_1, f_2 \in L^2(\mu)$, la suite $\left(\frac{1}{N}\sum f_1 \circ T^{pn}.f_2 \circ T^{qn}\right)$ converge dans $L^1(\mu)$ et que seules apportent une contribution à la limite les projections de $f_1$ et $f_2$ sur $\mathscr{E}_T$.

C'est-à-dire :

$$\lim_{L^1} \frac{1}{N}\sum f_1 \circ T^{pn}.f_2 \circ T^{qn} = \lim_{L^1} \frac{1}{N}\sum E(f_1 \mid \mathscr{B}) \circ T^{pn}.E(f_2 \mid \mathscr{B}) \circ T^{qn}.$$

Posons $\tilde{f}_i = \mathrm{E}(f_i \mid \mathscr{B}) \circ \Psi^{-1}$.

On a

$$\frac{1}{\mathrm{N}} \sum \tilde{f}_1 \circ \mathrm{R}^{pn}(g) . \tilde{f}_2 \circ \mathrm{R}^{qn}(g) = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum \tilde{f}_1 (g + pn\alpha) . \tilde{f}_2 (g + qn\alpha).$$

Pour presque tout $g$ dans G, on a donc

$$\lim_{\mathrm{N} \to +\infty} \frac{1}{\mathrm{N}} \sum \tilde{f}_1 \circ \mathrm{R}^{pn}(g) . \tilde{f}_2 \circ \mathrm{R}^{qn}(g) = \int_{\mathrm{G}} \tilde{f}_1 (g + ph) . \tilde{f}_2 (g + qh)\, dh.$$

Cette expression définit, pour tout $g$, une probabilité $\tilde{\mu}_g$ sur $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$.

Celle-ci définit, pour presque tout $x$, une probabilité $\mu_x$ sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ : si $x \in \mathrm{X}$, si $f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\mu)$,

$$\int_{\mathrm{X} \times \mathrm{X}} f_1(x_1) . f_2(x_2)\, d\mu_x(x_1, x_2)$$
$$= \int_{\mathrm{G}} \mathrm{E}(f_1 \mid \mathscr{B}) \circ \Psi^{-1}(\Psi(x) + ph) . \mathrm{E}(f_2 \mid \mathscr{B}) \circ \Psi^{-1}(\Psi(x) + qh)\, dh.$$

Dans la suite, on utilisera la notation fonctionnelle suivante :

$$\mu_x(f_1 \otimes f_2) = \int_{\mathrm{X} \times \mathrm{X}} f_1(x_1) . f_2(x_2)\, d\mu_x(x_1, x_2).$$

On a bien convergence en moyenne, pour tous $f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\mu)$, de la suite $\left(\frac{1}{\mathrm{N}} \sum f_1 \circ \mathrm{T}^{pn} . f_2 \circ \mathrm{T}^{qn}\right)$ vers la fonction $x \mapsto \mu_x(f_1 \otimes f_2)$.

Les probabilités $\mu_x$ ainsi définies sont bien sûr $\mathrm{T}^p \times \mathrm{T}^q$-invariantes. Nous allons à présent donner *deux arguments* distincts pour prouver que les probabilités $\mu_x$ sont ($\mu$-presque sûrement) $\mathrm{T}^p \times \mathrm{T}^q$-ergodiques. Le premier argument exploite la forme précise des mesures $\mu_x$ et utilise la désintégration de la probabilité produit $\mu \otimes \mu$ en probabilités $\mathrm{T}^p \times \mathrm{T}^q$-ergodiques. Le second argument utilise le théorème 1.

(*a*) *Désintégration de* $\mu \otimes \mu$

Dans $\mathrm{L}^2(\mu \otimes \mu)$, le sous-espace des $\mathrm{T}^p \times \mathrm{T}^q$-invariants est engendré par les fonctions de la forme $\gamma_1 \circ \Psi \otimes \gamma_2 \circ \Psi$ où $\gamma_1$ et $\gamma_2$ sont des caractères de G vérifiant $\gamma_1(p\alpha) . \gamma_2(q\alpha) = 1$.

Autrement dit, dans $\mathrm{L}^2(\mu \otimes \mu)$, le sous-espace des $\mathrm{T}^p \times \mathrm{T}^q$-invariants est engendré par les fonctions de la forme $\gamma^q \circ \Psi \otimes \gamma^{-p} \circ \Psi$ où $\gamma$ décrit le groupe des caractères de G (4).

Considérons l'application $\rho$ de $G \times G$ dans $G$ définie par $\rho(g_1, g_2) = qg_1 - pg_2$.

Notons $\underline{G}$ la tribu borélienne de G.

L'affirmation (4) est équivalente à : la sous-tribu $\mathscr{I}$ des éléments $T^p \times T^q$-invariants de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$ est, modulo $\mu \otimes \mu$,

$$\mathscr{I} = \Psi^{-1}(\rho^{-1}(\underline{G})).$$

La désintégration de $\mu \otimes \mu$ au dessus de $\mathscr{I}$ s'écrit

$$\int_X f_1(x)\, d\mu(x) . \int_X f_2(x)\, d\mu(x) = \int_G \left[ \int_G \tilde{f}_1(g+ph) . \tilde{f}_2(g+qh)\, dh \right] dg.$$

On voit ainsi que les mesures $\mu_x$ définies précédemment sont exactement les mesures qui apparaissent quand on désintègre $\mu \otimes \mu$ au dessus de $\mathscr{I}$. On sait que ces mesures sont ergodiques.

(*b*) *Autre preuve de l'ergodicité des mesures limites* $\mu_x$

Pour prouver que, pour $\mu$-presque tout $x$, la probabilité $\mu_x$ est $T^p \times T^q$-ergodique, il suffit de montrer que, pour $\mu$-presque tout $x$, pour toutes $f_1, f_2$ fonctions continues sur X, la suite $\left( \frac{1}{N} \sum f_1 \circ T^{pn} \otimes f_2 \circ T^{qn} \right)$ converge faiblement, dans $L^2(\mu_x)$, vers $\mu_x(f_1 \otimes f_2)$.

Il suffit de montrer que, pour $\mu$-presque tout $x$, pour toutes $f_1, f_2, f_3, f_4$ fonctions continues sur X, on a :

$$\lim_{N \to +\infty} \int_{X \times X} \left[ \frac{1}{N} \sum f_1(T^{pn} x_1) . f_2(T^{qn} x_2) \right] f_3(x_1) . f_4(x_2)\, d\mu_x(x_1, x_2) = \mu_x(f_1 \otimes f_2) . \mu_x(f_3 \otimes f_4).$$

En utilisant la séparabilité de l'espace des fonctions continues sur X, on constate qu'il suffit de montrer que, pour toutes $f_1, f_2, f_3, f_4$ fonctions continues sur X, pour $\mu$-presque tout $x$, on a :

$$\lim_{N \to +\infty} \mu_x \left( \left( \frac{1}{N} \sum f_1 \circ T^{pn} \otimes f_2 \circ T^{qn} \right) . f_3 \otimes f_4 \right) = \mu_x(f_1 \otimes f_2) . \mu_x(f_3 \otimes f_4).$$

Soient donc $f_1, f_2, f_3, f_4$ des fonctions continues sur X.

Soit $\varepsilon > 0$.

D'après le théorème 1, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que : si $N > N_0$ et $m \in \mathbb{Z}$, alors

$$\int_X \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^{p(n+m)} x) f_2(T^{q(n+m)} x) - \mu_x(f_1 \otimes f_2) \right| d\mu(x) < \varepsilon.$$

On a :

$$\int_X \left| \mu_x\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1\circ T^{pn}\otimes f_2\circ T^{qn}.f_3\otimes f_4\right) - \mu_x(f_1\otimes f_2).\mu_x(f_3\otimes f_4)\right| a\mu(x)$$

$$= \lim_{M\to+\infty}\int_X \left| \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^{p(n+m)}x).f_2(T^{q(n+m)}x) \times f_3(T^{pm}x).f_4(T^{qm}x)-\mu_x(f_1\otimes f_2).\mu_x(f_3\otimes f_4)\right| d\mu(x)$$

$$\leqq \limsup_{M\to+\infty}\left[\int_X\left|\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}(f_3(T^{pm}x).f_4(T^{qm}x) \times\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^{p(m+n)}x).f_2(T^{q(m+n)}x)-\mu_x(f_1\otimes f_2)\right)\right| d\mu(x) + \int_X\left|\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} f_3(T^{pm}x).f_4(T^{qm}x)-\mu_x(f_3\otimes f_4)\right| \times|\mu_x(f_1\otimes f_2)|\,d\mu(x)\right]$$

$\leqq \|f_3\|_\infty.\|f_4\|_\infty\,\varepsilon+0$ pour tout $N>N_0$.

On a donc :

$$\lim_{N\to+\infty}\int_X\left|\mu_x\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1\circ T^{pn}\otimes f_2\circ T^{qn}.f_3\otimes f_4\right) - \mu_x(f_1\otimes f_2).\mu_x(f_3\otimes f_4)\right| d\mu(x)=0.$$

Or l'expression ici intégrée est bornée, positive et a une limite quand N tend vers l'infini (d'après le théorème ergodique). Cette limite est donc nulle $\mu$-presque partout, ce qui est le résultat que l'on cherchait à établir. La démonstration du théorème 2 est achevée.

## II. EXTENSIONS ISOMÉTRIQUES

**1.** Ce paragraphe est consacré à l'énoncé de définitions.

La définition des systèmes dynamiques réguliers est celle donnée par H. Furstenberg dans [2]. La définition des extensions isométriques est celle donnée par J. P. Thouvenot dans [5].

DÉFINITION 1. — *Un système dynamique probabilisé* $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ *est dit* régulier *si* X *est un espace compact métrisable, si* $\mathscr{A}$ *est sa tribu borélienne et si* $\mu$ *est une probabilité régulière sur* $(X, \mathscr{A})$.

DÉFINITION 2. — *Soit* $(Y, \mathscr{D}, \nu, S)$ *un système dynamique probabilisé. Soient* H *un groupe compact métrisable et* K *un sous-groupe fermé de* H. *Notons* $\mathscr{B}$ *la tribu borélienne de* H/K *et* $m$ *l'image sur* H/K *de la mesure de Haar de* H. *Soit* $\varphi$ *une application mesurable de* Y *dans* H. *Le système* $(Y \times H/K, \mathscr{D} \otimes \mathscr{B}, \nu \otimes m, T)$ *défini par*

$$T(y, h.K) = (Sy, (\varphi(y)h).K)$$

*sera appelé une* extension isométrique *du système* $(Y, \mathscr{D}, \nu, S)$.

DÉFINITION 3. — *Reprenons les notations de la définition précédente. On dira que* $(Y \times H/K, \mathscr{D} \otimes \mathscr{B}, \nu \otimes m, T)$ *est une* extension isométrique sans spectre discret *du système* $(Y, \mathscr{D}, \nu, S)$ *si toute fonction de* $L^2(\nu \otimes m)$ *qui est propre sous* T *est en fait définie sur* Y. *Cette condition s'énonce précisément de la façon suivante : si* $f \in L^2(\nu \otimes m)$, *si* $\lambda \in \mathbb{C}$ *et si, pour presque tout* $(y, h) \in Y \times H$, *on a* $f(Sy, \varphi(y)h.K) = \lambda . f(y, h.K)$, *alors il existe* $\tilde{f} \in L^2(\nu)$ *vérifiant, pour presque tout* $(y, h)$, $f(y, h.K) = \tilde{f}(y)$.

**2.** Nous rappelons, dans les propositions 1 et 2, des résultats connus.

PROPOSITION 1. — *Soit* $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ *un système dynamique probabilisé. Si* $E_1$ *et* $E_2$ *sont deux parties de* $L^2(\mu)$ *qui engendrent des sous-espaces vectoriels denses dans* $L^2(\mu)$ *et si, pour tout* $f_1 \in E_1$ *et tout* $f_2 \in E_2$, *la suite* $\left(\frac{1}{N}\sum f_1 \circ T^{pn} . f_2 \circ T^{qn}\right)$ *converge* $\mu$-*presque sûrement, alors ceci est encore vrai pour tous* $f_1$ *et* $f_2$ *dans* $L^2(\mu)$.

La démonstration de cette proposition, basée sur une inégalité maximale, se trouve dans [3] et [4].

PROPOSITION 2. — *Si* G *est un groupe compact abélien et si* $\alpha \in G$, *alors, pour tous* $f_1$ *et* $f_2$ *dans* $L^2(G)$, *la suite*

$$\left(\frac{1}{N}\sum f_1(g+pn\alpha) . f_2(g+qn\alpha)\right)$$

*converge pour presque tout* $g$.

*Preuve de la proposition* 2. — L'argument figure déjà dans la preuve du théorème 1. Soient $f_1$, $f_2$ des fonctions continues sur G, et $g$ un point de G. Appelons H le sous-groupe fermé de G engendré par $\alpha$. Le théorème de Weyl permet d'affirmer que

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N}\sum f_1(g+pn\alpha) . f_2(g+qn\alpha) = \int_H f_1(g+ph) . f_2(g+qh)\, dh.$$

**3.** Énonçons à présent le principal résultat.

THÉORÈME 3. — *Soit* $(Y, \mathscr{D}, \nu, S)$ *un système dynamique régulier. On suppose que* $S^p$, $S^q$ *et* $S^{p-q}$ *sont des transformations ergodiques de* $(Y, \mathscr{D}, \nu)$.

*Soit* $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ *une extension isométrique sans spectre discret du système* $(Y, \mathscr{D}, \nu, S)$.

*Si, pour tous* $f_1, f_2$ *dans* $L^2(Y, \nu)$, *les moyennes*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1(S^{pn}y).f_2(S^{qn}y)$$

*convergent pour* $\nu$*-presque tout* $y$, *alors pour tous* $f_1, f_2$ *dans* $L^2(X, \mu)$, *les moyennes* $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^{pn}x).f_2(T^{qn}x)$ *convergent pour* $\mu$*-presque tout* $x$.

*Remarque.* — Si on suppose que la transformation T est continue, on peut ôter les hypothèses d'ergodicité de $S^p$ et $S^q$. Ceci apparaîtra clairement dans la démonstration du théorème.

*Cas des systèmes distaux.* — Suivant les définitions figurant dans [5], un système dynamique mesuré distal est un système que l'on peut construire, à partir du système trivial, par une chaîne transfinie d'extensions isométriques successives. On peut imposer que, dans cette chaîne, la première extension « absorbe » toute la partie discrète du spectre du système. Ainsi, sous une hypothèse d'ergodicité, le théorème 3 s'appliquera à toutes les autres extensions. D'après la proposition 2, la première extension vérifiera la c. p. s. m. De plus, d'après la proposition 1, on peut affirmer qu'un système qui est limite d'une famille totalement ordonnée de systèmes vérifiant la c. p. s. m., vérifie encore la c. p. s. m. *On prouve ainsi, par induction transfinie, que tout système dynamique mesuré distal* $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ *vérifie la c. p. s. m. dès que les transformations* $T^p$, $T^q$ et $T^{p-q}$ *sont ergodiques.*

Pour démontrer le théorème 3, nous aurons besoin de la proposition suivante dont une démonstration sera donnée après celle du théorème.

PROPOSITION 3. — *Soit* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espace probabilisé régulier et* U, V *deux transformations mesurables de cet espace, laissant la mesure* $\mu$ *invariante et agissant de façon ergodique.*

*Il existe une partie* $\mu$*-négligeable* A *de* X *vérifiant : si* $x \in X \setminus A$ *et si* $(N_k)$ *est une suite croissante d'entiers tels que, pour tous* $f_1, f_2$ *fonctions continues* *sur* X, *la suite* $\left(\frac{1}{N_k}\sum f_1(U^n x).f_2(V^n x)\right)$ *converge, alors en posant*

$$\lambda(f_1 \otimes f_2) = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{N_k}\sum f_1(U^n x).f_2(V^n x),$$

*on définit une probabilité* $\lambda$ *sur* $(X\times X, \mathscr{A}\otimes\mathscr{A})$ *qui est invariante sous la transformation* $U\times V$.

*Résumé de la preuve du théorème* 3. — Soit $x\in X$. Soit $\lambda$ une valeur d'adhérence faible de la suite $(\lambda_N)$ de probabilités sur $X\times X$ définies par : si $f_1$ et $f_2$ sont des fonctions continues sur X, $\lambda_N(f_1\otimes f_2)=\frac{1}{N}\sum f_1(T^{pn}x).f_2(T^{qn}x)$. « En général » une telle valeur d'adhérence sera une probabilité invariante sous $T^p\times T^q$. En régularisant $\lambda$ par convolution de façon convenable (suivant le procédé classique utilisé dans l'étude de l'unique ergodicité des produits gauches), on construit des probabilités qui sont encore $T^p\times T^q$-invariantes et qui sont de plus absolument continues par rapport à $\mu_x$. Ces régularisées coïncident donc avec $\mu_x$ (quand $\mu_x$ est ergodique). Il ne reste plus alors qu'à approcher $\lambda$ par de telles régularisées pour prouver que $(\lambda_N)$ n'admet qu'une seule valeur d'adhérence faible.

*Preuve du théorème* 3. — Reprenant les notations de la définition 2, on suppose que

$$(X, \mathscr{A}, \mu, T) = (Y\times H/K, \mathscr{D}\otimes\mathscr{B}, \nu\otimes m, T)$$

où $T(y, h.K)=(Sy, \varphi(y)h.K)$.

On considère la famille $\{\mu_x \mid x\in X\}$ de probabilités sur $X\times X$ définie dans le théorème 2. Ce même théorème appliqué au système $(Y, \mathscr{D}, \nu, S)$ permet de définir une famille $\{\nu_y \mid y\in Y\}$ de probabilités sur $Y\times Y$.

Pour tous $f_1$, $f_2$ dans $L^2(\mu)$, on a convergence, dans $L^1(\mu)$, de

$$\frac{1}{N}\sum f_1\circ T^{pn}.f_2\circ T^{qn}$$

vers la fonction

$$x\to\int_{X\times X} f_1(x_1).f_2(x_2)\,d\mu_x(x_1, x_2).$$

Pour tous $f_1$, $f_2$ dans $L^2(\nu)$, on a convergence, dans $L^1(\nu)$, de

$$\frac{1}{N}\sum f_1\circ S^{pn}.f_2\circ S^{qn}$$

vers la fonction

$$y \to \int_{Y \times Y} f_1(y_1).f_2(y_2)\, d\nu_y(y_1, y_2).$$

En se référant à la construction des mesures $\mu_x$ et $\nu_y$, et en utilisant le fait que $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ est une extension sans spectre discret de $(Y, \mathscr{D}, \nu, S)$, on peut affirmer que ces mesures sont liées par la relation suivante : si $f_1$, $f_2 \in L^2(\mu)$ et si $x=(y, h.K) \in X$, alors

$$\int_{X \times X} f_1(x_1).f_2(x_2)\, d\mu_x(x_1, x_2)$$

$$= \int_{Y \times Y \times H \times H} f_1(y_1, h_1.K).f_2(y_2, h_2.K)\, d\nu_y(y_1, y_2)\, dh_1\, dh_2. \quad (4)$$

Remarquons que, pour $\nu$-presque tout $y$, si $f_1$ et $f_2$ sont des fonctions continues sur Y, les moyennes $\frac{1}{N}\sum f_1(S^{pn} y).f_2(S^{qn} y)$ convergent vers

$$\nu_y(f_1 \otimes f_2). \quad (5)$$

En effet on sait, d'après l'hypothèse du théorème, que si $f_1$ et $f_2$ sont des fonctions continues sur Y, alors, pour $\nu$-presque tout $y$, les moyennes convergent. En utilisant l'existence d'une partie dénombrable dense (pour la convergence uniforme) dans l'espace des fonctions continues sur Y, on vérifie que, pour $\nu$-presque tout $y$, les moyennes convergent pour toutes fonctions continues $f_1$ et $f_2$ sur Y. La limite presque sûre de ces moyennes coïncide avec la limite dans $L^1(\nu)$, ce qui prouve (5).

Remarquons que, $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ étant une extension sans spectre discret de $(Y, \mathscr{D}, \nu, S)$, l'ergodicité de $S^p$ et $S^q$ sur $(Y, \mathscr{D}, \nu)$ est équivalente à celle de $T^p$ et $T^q$ sur $(X, \mathscr{A}, \mu)$. En utilisant la proposition 3, on construit une partie $\mu$-négligeable A de X vérifiant la conclusion de cette proposition, où $U=T^p$ et $V=T^q$. (C'est à cet endroit de la démonstration qu'intervient l'hypothèse d'ergodicité de $S^p$ et $S^q$, que l'on peut remplacer par l'hypothèse de continuité de T.) Considérons un point $x=(y, h.K)$ de X tel que :

– $x \notin A$;
– la probabilité $\mu_x$ est $T^p \times T^q$-ergodique;
– pour toutes fonctions continues $f_1$ et $f_2$ sur Y,

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum f_1(S^{pn} y).f_2(S^{qn} y) = \nu_y(f_1 \otimes f_2). \quad (6)$$

On sait, d'après le théorème 2 et d'après (5) que $\mu$-presque tout point de X vérifie ces trois conditions. Le point $x$ est dorénavant fixé. Considérons à présent une suite croissante d'entiers $(N_k)_{k \geqq 0}$ telle que, pour toutes fonctions continues $f_1$ et $f_2$ sur X, la suite

$$\left(\frac{1}{N_k}\sum f_1(T^{pn}x).f_2(T^{qn}x)\right)$$

converge. Notons $\lambda$ $(f_1 \otimes f_2)$ sa limite. Nous voulons démontrer que $\lambda = \mu_x$. Par densité, on peut prolonger $\lambda$ en une unique forme linéaire sur $\mathscr{C}(X \times X)$, qui définit une probabilité sur $(X \times X, \mathscr{A} \otimes \mathscr{A})$. Pour tous $f_1$, $f_2$ dans $L^2(\mu)$, la fonction $f_1 \otimes f_2$ est $\lambda$-intégrable et l'on a

$$|\lambda(f_1 \otimes f_2)| \leqq \| f_1 \|_2 . \| f_2 \|_2 \tag{7}$$

(*cf.* preuve de la proposition 3).

Puisque $x$ a été choisi en dehors de A, cette probabilité $\lambda$ est $T^p \times T^q$-invariante.

D'après (6), la projection de $\lambda$ sur $Y \times Y$ coïncide avec $\nu_y$ (8). Nous allons à présent construire des « régularisées » de $\lambda$ qui seront encore $T^p \times T^q$-invariantes et qui seront absolument continues par rapport à $\mu_x$.

Soient $\Psi_1$ et $\Psi_2$ deux fonctions continues, positives et d'intégrales égales à 1, définies sur le groupe H.

On définit une probabilité $\lambda * (\Psi_1 \otimes \Psi_2)$ sur $X \times X$ par, si $f_1$ et $f_2$ sont continues sur X,

$$(\lambda * (\Psi_1 \otimes \Psi_2))(f_1 \otimes f_2) = \int_{H \times H \times X \times X} f_1(y_1, hh_1 . K) . f_2(y_2, h' h_2 . K) \times \Psi_1(h) . \Psi_2(h')\, dh\, dh'\, d\lambda(x_1, x_2)$$

[où l'on note $x_i = (y_i, h_i . K)$, $i = 1, 2$].

En utilisant (7), on vérifie que cette formule s'étend à tous $f_1$, $f_2$ dans $L^2(\mu)$.

On a :

$$|(\lambda * (\Psi_1 \otimes \Psi_2))(f_1 \otimes f_2)| \leqq \sup_{h \in H} |\Psi_1(h)| . \sup_{h \in H} |\Psi_2(h)| \times \int_{H \times H \times X \times X} |f_1(y_1, hh_1 . K) . f_2(y_2, h' h_2 . K)|\, dh\, dh'\, d\lambda(x_1, x_2).$$

En utilisant (8) et (4), on obtient

$$|(\lambda*(\Psi_1\otimes\Psi_2))(f_1\otimes f_2)|\leqq\sup_{h\in\mathrm{H}}|\Psi_1(h)|.\sup_{h\in\mathrm{H}}|\Psi_2(h)|$$
$$\times\int_{\mathrm{X}\times\mathrm{X}}|f_1(x_1)|.|f_2(x_2)|\,d\mu_x(x_1,x_2).$$

Ceci entraîne bien que $\lambda*(\Psi_1\otimes\Psi_2)\ll\mu_x$.

Ajoutons une hypothèse supplémentaire sur les fonctions $\Psi_1$ et $\Psi_2$, à savoir qu'elles sont invariantes sous les automorphismes intérieurs de H [si $h, h'\in\mathrm{H}$, $\Psi_i(h^{-1}h'h)=\Psi_i(h')$].

On notera, pour $y\in\mathrm{Y}$ et $k\in\mathbb{N}$,

$$\varphi^{(k)}(y)=\varphi(\mathrm{S}^{k-1}y).\varphi(\mathrm{S}^{k-2}y)\ldots\varphi(y);$$

ainsi, on a, pour $x=(y, h.\mathrm{K})\in\mathrm{X}$ et $k\in\mathbb{N}$, $\mathrm{T}^k(y, h.\mathrm{K})=(\mathrm{S}^k y, \varphi^{(k)}(y)h.\mathrm{K})$.

Soient $f_1$ et $f_2$ deux fonctions continues sur X. On a :

$$(\lambda*(\Psi_1\otimes\Psi_2))(f_1\circ\mathrm{T}^p\otimes f_2\circ\mathrm{T}^q)=\int_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}\times\mathrm{X}\times\mathrm{X}}f_1(\mathrm{S}^p y_1, \varphi^{(p)}(y_1)hh_1.\mathrm{K})$$
$$\times f_2(\mathrm{S}^q y_2, \varphi^{(q)}(y_2)h'h_2.\mathrm{K}).\Psi_1(h).\Psi_2(h')\,dh\,dh'\,d\lambda(x_1,x_2)$$
$$=\int_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}\times\mathrm{X}\times\mathrm{X}}f_1(\mathrm{S}^p y_1, h\varphi^{(p)}(y_1)h_1.\mathrm{K})$$
$$\times f_2(\mathrm{S}^q y_2, h'\varphi^{(q)}(y_2)h_2.\mathrm{K}).\Psi_1(h).\Psi_2(h')\,dh\,dh'\,d\lambda(x_1,x_2).$$

On a utilisé ici l'invariance de $\Psi_1$ et $\Psi_2$ sous les automorphismes intérieurs de H. En utilisant l'invariance de $\lambda$ sous $\mathrm{T}^p\times\mathrm{T}^q$, on obtient $(\lambda*(\Psi_1\otimes\Psi_2))(f_1\circ\mathrm{T}^p\otimes f_2\circ\mathrm{T}^q)=(\lambda*(\Psi_1\otimes\Psi_2))(f_1\otimes f_2)$.

Nous avons ainsi construit une probabilité $\lambda*(\Psi_1\otimes\Psi_2)$ qui est $\mathrm{T}^p\times\mathrm{T}^q$-invariante et absolument continue par rapport à $\mu_x$. La probabilité $\mu_x$ étant $\mathrm{T}^p\times\mathrm{T}^q$-ergodique, on a nécessairement $\lambda*(\Psi_1\otimes\Psi_2)=\mu_x$.

Nous allons à présent approcher $\lambda$ par une suite de ses « régularisées ». Notons $d$ une distance invariante à droite et à gauche sur H (une telle distance $d$ existe toujours si H est compact métrisable) et $e$ l'élément neutre de H. Posons, pour $n>0$, $\gamma_n(h)=\frac{1}{n}-\inf\left(\frac{1}{n}, d(e,h)\right)$. La fonction $\gamma_n$ est continue, strictement positive sur la boule $\{h \mid d(e,h)<1/n\}$, nulle en dehors de cette boule et invariante sous les automorphismes intérieurs de H. On pose :

$$\tilde{\gamma}_n = \frac{1}{\int_H \gamma_n(h)\,dh} \cdot \gamma_n.$$

La fonction $\tilde{\gamma}_n$ vérifie les conditions que nous avions imposées à $\Psi_1$ et $\Psi_2$. On a donc $\lambda * (\tilde{\gamma}_n \otimes \tilde{\gamma}_n) = \mu_x$. D'autre part la suite de probabilités $(\lambda * (\tilde{\gamma}_n \otimes \tilde{\gamma}_n))$ converge étroitement vers la probabilité $\lambda$, quand $n$ tend vers l'infini. On a ainsi prouvé que $\lambda$ et $\mu_x$ coïncident. Conclusion (le point $x$ est toujours fixé) : du fait que $\mathscr{C}(X)$ est séparable, on déduit que : de toute suite croissante d'entiers, on peut extraire une sous-suite $(N_k)$ telle que, pour tous $f_1, f_2 \in \mathscr{C}(X)$, la suite $\left(\frac{1}{N_k}\sum f_1(T^{pn}x).f_2(T^{qn}x)\right)$ converge. La limite est nécessairement $\mu_x(f_1 \otimes f_2)$. Ceci prouve que $\frac{1}{N}\sum f_1(T^{pn}x).f_2(T^{qn}x)$ converge vers $\mu_x(f_1 \otimes f_2)$. Finalement on a montré ce résultat pour $\mu$-presque tout $x$. La démonstration du théorème est achevée, grâce à la proposition 1.

*Preuve de la proposition* 3. — On note $\mathscr{C}(X)$ l'espace des fonctions continues sur X muni de la topologie de la convergence uniforme. Plaçons-nous sous les hypothèses de la proposition. La fonction $\lambda$ précédemment définie est une forme linéaire continue sur un sous-espace vectoriel dense de $\mathscr{C}(X \times X)$. Elle s'étend donc en une forme linéaire continue sur $\mathscr{C}(X \times X)$, c'est-à-dire en une mesure $\lambda$ sur $(X \times X, \mathscr{A} \otimes \mathscr{A})$. Si U et V sont des transformations continues, le fait que $\lambda$ soit $U \times V$-invariante est évident; dans ce cas l'hypothèse d'ergodicité n'intervient pas et l'on peut choisir $A = \varnothing$. Il s'agit pour nous d'établir cette invariance en général. Commençons par construire la partie négligeable A de X.

Notons D une partie dénombrable dense de $\mathscr{C}(X)$. Notons C l'ensemble des fonctions de la forme $|f_1 \circ U - f_2|^2$ ou $|f_1 \circ V - f_2|^2$, avec $f_1, f_2 \in \mathscr{C}(X)$. Notons C' l'ensemble des fonctions de la forme $|f_1 \circ U - f_2|^2$ ou $|f_1 \circ V - f_2|^2$, avec $f_1, f_2 \in D$.

Pour tout $f$ dans C', on a, pour $\mu$-presque tout $x$,

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N}\sum f(U^n x) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N}\sum f(V^n x) = \int_X f\,d\mu. \tag{9}$$

La famille C' étant dénombrable, il existe une partie $\mu$-négligeable A de X telle que, pour tout $x \in X \setminus A$ et tout $f \in C'$, l'assertion (9) est vérifiée. Tout élément de C étant limite uniforme d'une suite d'éléments de C', l'assertion (9) est encore vérifiée par tout $x \in X \setminus A$ et tout $f \in C$. La partie A de X est à présent construite.

Supposons donnés $x$ et $(N_k)$ vérifiant les hypothèses de la proposition, et définissant une probabilité $\lambda$ sur $X \times X$.

Soient $f_1, f_2 \in \mathscr{C}(X)$; on a :

$$\left| \frac{1}{N} \sum f_1(U^n x) . f_2(V^n x) \right| \leqq \left( \frac{1}{N} \sum |f_1|^2 (U^n x) \right)^{1/2} . \left( \frac{1}{N} \sum |f_2|^2 (V^n x) \right)^{1/2} .$$

Les fonctions $|f_1|^2$ et $|f_2|^2$ étant dans C, on en déduit que :

$$\limsup_{N \to +\infty} \left| \frac{1}{N} \sum f_1(U^n x) . f_2(V^n x) \right| \leqq \left( \int_X |f_1|^2 d\mu \right)^{1/2} . \left( \int_X |f_2|^2 d\mu \right)^{1/2} .$$

Et donc :

$$|\lambda(f_1 \otimes f_2)| \leqq \left( \int_X |f_1|^2 d\mu \right)^{1/2} . \left( \int_X |f_2|^2 d\mu \right)^{1/2} . \qquad (10)$$

Grâce à un petit lemme de théorie de la mesure (*cf.* [4], appendice II), on en déduit que, pour tous $f_1, f_2$ dans $L^2(\mu)$, la fonction $f_1 \otimes f_2$ est bien définie modulo $\lambda$, est $\lambda$-intégrable et que l'inégalité (10) est encore satisfaite.

Étudions le problème de l'invariance de $\lambda$. Soient $f_1, f_2 \in \mathscr{C}(X)$; soit M un réel vérifiant $\sup_{x \in X} |f_i(x)| < M$ $(i=1, 2)$; soit $\varepsilon > 0$.

Fixons, dans $\mathscr{C}(X)$, deux fonctions $g_1$ et $g_2$ vérifiant

$$\int_X |f_1 \circ U - g_1|^2 d\mu < \varepsilon^2, \quad \int_X |f_2 \circ V - g_2|^2 d\mu < \varepsilon^2$$

et $\sup_{x \in X} |g_i(x)| < M \qquad (i=1, 2)$.

On a :

$$|\lambda(f_1 \circ U \otimes f_2 \circ V) - \lambda(g_1 \otimes g_2)| \leqq |\lambda(f_1 \circ U \otimes (f_2 \circ V - g_2))|$$
$$+ |\lambda((f_1 \circ U - g_1) \otimes g_2| \leqq 2 M \varepsilon, \text{ d'après (10).} \qquad (11)$$

On a :

$$\left| \frac{1}{N} \sum f_1(U^n x) . f_2(V^n x) - \frac{1}{N} \sum g_1(U^n x) . g_2(V^n x) \right|$$
$$\leqq \frac{1}{N} |f_1(x) . f_2(x) - f_1(U^N x) . f_2(V^N x)|$$
$$+ \left| \frac{1}{N} \sum (f_1(U^{n+1} x) . f_2(V^{n+1} x) - g_1(U^n x) . g_2(V^n x)) \right| . \qquad (12)$$

On a :

$$\left|\frac{1}{N}\sum (f_1(U^{n+1}x).f_2(V^{n+1}x)-g_1(U^nx).g_2(V^nx))\right|$$

$$\leqq \frac{1}{N}\sum |f_1(U^{n+1}x)-g_1(U^nx)|.|f_2(V^{n+1}x)|$$

$$+\frac{1}{N}\sum |g_1(U^nx)|.|f_2(V^{n+1}x)-g_2(V^nx)|. \quad (13)$$

On a :

$$\frac{1}{N}\sum |f_1(U^{n+1}x)-g_1(U^nx)|.|f_2(V^{n+1}x)|$$

$$\leqq M.\left(\frac{1}{N}\sum |f_1\circ U-g_1|^2(U^nx)\right)^{1/2}. \quad (14)$$

Enfin, puisque $x\notin A$, on a :

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{N}\sum |f_1\circ U-g_1|^2(U^nx)\right)^{1/2}=\left(\int_X |f_1\circ U-g_1|^2 d\mu\right)^{1/2}. \quad (15)$$

De (12), (13), (14), (15) et de calculs similaires, on déduit que

$$\limsup_{N\to+\infty}\left|\frac{1}{N}\sum f_1(U^nx).f_2(V^nx)-\frac{1}{N}\sum g_1(U^nx).g_2(V^nx)\right|\leqq 2M\varepsilon,$$

et donc $|\lambda(f_1\otimes f_2)-\lambda(g_1\otimes g_2)|\leqq 2M\varepsilon$.

Associé à (11), ceci entraîne que

$$|\lambda(f_1\circ U\otimes f_2\circ V)-\lambda(f_1\otimes f_2)|\leqq 4M\varepsilon.$$

Le réel $\varepsilon$ étant arbitraire, on a prouvé que, pour tous $f_1, f_2\in\mathscr{C}(X)$, $\lambda(f_1\circ U\otimes f_2\circ V)=\lambda(f_1\otimes f_2)$.

Grâce à la densité de $\mathscr{C}(X)\otimes\mathscr{C}(X)$ dans $\mathscr{C}(X\times X)$, on peut conclure que $\lambda$ est invariante sous $U\times V$. Ceci achève la démonstration de la proposition 3.

## RÉFÉRENCES

[1] J. P. CONZE et E. LESIGNE, Théorèmes ergodiques pour des mesures diagonales, *Bull. Soc. Math. France*, t. **112**, 1984, p. 143-175.

[2] H. FURSTENBERG, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton University Press, 1981.

[3] E. LESIGNE, Sur la convergence ponctuelle de certaines moyennes ergodiques, *C.R. Acad. Sci.* Paris, t. **298**, série I, 1984 (résumé d'un texte non publié).
[4] E. LESIGNE, Convergence de moyennes ergodiques pour des mesures diagonales, *Thèse de* 3e *cycle*, Rennes, 1981.
[5] J. P. THOUVENOT, La démonstration de Furstenberg du théorème de Szemerédi sur les progressions arithmétiques, *Séminaire Bourbaki*, 1977/78, n° 518.
[6] D. BEREND, Joint Ergodicity and Mixing, *Journal d'Analyse Mathématique*, vol. **45**, 1985.

(*Manuscrit reçu le* 11 *juin* 1986.)