ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN-CHRISTIAN ALT

La loi des grands nombres de Prokhorov dans les espaces de type p

Annales de l'I. H. P., section B, tome 23, nº 4 (1987), p. 561-574

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1987__23_4_561_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 23, n° 4, 1987, p. 561-574. *Probabilités et Statistiques*

La loi des grands nombres de Prokhorov dans les espaces de type p

par

Jean-Christian ALT

Université Louis-Pasteur, Département de Mathématique,
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg

RÉSUMÉ. — La loi des grands nombres de Prokhorov est étendue à des variables à valeurs dans un espace de Banach de type p. Dans nos résultats l'hypothèse classique du cas scalaire est remplacée par la suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \sum_{n \geqq 1} \exp(-\varepsilon \lambda_n^{-1}) < \infty$$

où :

$$\lambda_n = 2^{-2n} \sup \{ \sum_{2^n < i \leqq 2^{n+1}} \mathrm{E} \langle \mathrm{X}_i, x^* \rangle^2 ; \| x^* \|_{\mathrm{B}'} \leqq 1 \}.$$

Mots clés : Loi forte des grands nombres, espace de Banach de type p.

ABSTRACT. — The Prokhorov law of large numbers is extended to random variables taking their values in a type p Banach space B. In our result the classical assumption of the scalar case is replaced by the following one:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \sum_{n \geqq 1} \exp(-\varepsilon \lambda_n^{-1}) < \infty$$

Classification A.M.S. : 60 *B* 12, 60 *F* 15, 46 *B* 05, 46 *B* 20.

where:

$$\lambda_n = 2^{-2n} \sup \{ \sum_{2^n+1 \leqq i \leqq 2^{n+1}} E \langle x^*, X_i \rangle^2 ; \| x^* \|_{B'} \leqq 1 \}.$$

INTRODUCTION

L'objet de cet article est d'étendre à une large classe d'espaces de Banach le théorème suivant, dû à Prokhorov [7].

THÉORÈME 1. — *Soit* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles (v. a. r.) indépendantes et centrées, satisfaisant la condition :*

$$\exists c > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |X_n| \leqq cn/\mathrm{Log}_2 n \quad \text{p. s.}$$

(*où* $\mathrm{Log}_2 x = \mathrm{Log}[\mathrm{Log}(x \vee e^e)]$).

Cette suite vérifie la loi forte des grands nombres si et seulement si :

$$(1) \qquad \forall \varepsilon > 0, \quad \sum_{n \geqslant 1} \exp(-\varepsilon \lambda_n^{-1}) < \infty$$

où

$$\lambda_n = 2^{-2n} \sum_{2^n+1 \leqq i \leqq 2^{n+1}} EX_i^2.$$

Ce théorème est optimal en ce sens que pour toute suite $(c_n)_n$ tendant vers $+\infty$, il existe une suite $(X_n)_n$ de v. a. r. indépendantes et centrées satisfaisant la condition de Prokhorov (1) ci-dessus de même que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |X_n| \leqq c_n n/\mathrm{Log}_2 n$$

et ne vérifiant pas la loi forte des grands nombres.

Lorsque l'on cherche à généraliser ce théorème aux espaces de Banach, une première démarche naturelle est de remplacer dans la condition de Prokhorov (1) les valeurs absolues des v. a. r. par des normes. Cette démarche est suivie par J. Kuelbs et J. Zinn dans [5], où ils démontrent le théorème suivant.

THÉORÈME 2. — *Soit* $(X_n)_n$ *une suite de v.a. indépendantes à valeurs dans un espace de Banach réel séparable* $(B, \| \ \|)$, *vérifiant les conditions :*

$$(1) \qquad \exists c>0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|X_n\| \leqq c\, n/\mathrm{Log}_2\, n \quad \text{p. s.}$$

$$(2) \qquad \forall \varepsilon>0, \quad \sum_{n \geqslant 1} \exp(-\varepsilon \Lambda_n^{-1}) < \infty$$

où

$$\Lambda_n = 2^{-2n} \sum_{2^n+1 \leqq i \leqq 2^{n+1}} \mathrm{E}\|X_i\|^2.$$

L'équivalence suivante est alors réalisée :

$$n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} 0 \quad \Leftrightarrow \quad n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\text{p. s.}} 0.$$

Cet énoncé a l'avantage d'être vrai dans tout espace de Banach, mais nécessite une hypothèse (2) très restrictive. Une seconde démarche consiste à adopter une condition de Prokhorov moins forte et, en contrepartie, à imposer des conditions sur la nature de l'espace de Banach considéré. Cette démarche est celle de B. Heinkel dans [3] et [4], où le théorème de Prokhorov est étendu aux espaces de Banach uniformément lisses en employant une condition s'exprimant à l'aide des quantités :

$$\tilde{\lambda}_n = 2^{-2n} \sum_{2^n+1 \leqq i \leqq 2^{n+1}} \sup\{\mathrm{E}\langle x^*, X_i\rangle^2;\ \|x^*\|_{B'} \leqq 1\}.$$

Le théorème qui suit, démontré dans [3], a pour cadre les espaces 2-uniformément lisses; on trouvera dans [4] des résultats analogues pour les espaces p-uniformément lisses $(1<p\leqq 2)$.

THÉORÈME 3. — *Soit* $(X_n)_n$ *une suite de v.a. indépendantes et centrées à valeurs dans un espace de Banach réel séparable 2-uniformément lisse* $(B, \| \ \|)$.

Supposons vérifiées les trois conditions suivantes :

$$(1) \qquad \exists c>0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|X_n\| \leqq c\, n/\mathrm{Log}_2\, n \quad \text{p. s.}$$

$$(2) \qquad \lim_{n \to +\infty} n^{-2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\|X_i\|^2 = 0$$

$$(3) \qquad \forall \varepsilon>0, \quad \sum_{n \geqslant 1} \exp(-\varepsilon \tilde{\lambda}_n^{-1}) < \infty.$$

Sous ces hypothèses la suite $(X_n)_n$ vérifie la loi forte des grands nombres.

La condition (3) du théorème précédent n'est pas encore pleinement satisfaisante car on vérifie sans difficulté qu'elle n'est pas nécessaire. En fait, comme nous le montrerons plus loin (théorème 4), la condition de Prokhorov naturelle qui est nécessaire dans n'importe quel espace de Banach pour la loi forte des grands nombres sous l'hypothèse (1) du théorème 3 s'énonce :

$$\text{(CP)} \qquad \forall \varepsilon > 0, \quad \sum_{n \geqslant 1} \exp(-\varepsilon \lambda_n^{-1}) < \infty$$

où

$$\lambda_n = 2^{-2n} \sup \{ \sum_{2^n + 1 \leqq i \leqq 2^{n+1}} E \langle x^*, X_i \rangle^2; \| x^* \|_{B'} \leqq 1 \}.$$

En octobre 1985, B. Heinkel m'a suggéré d'entreprendre l'étude de la loi forte des grands nombres de Prokhorov sous l'hypothèse (CP) dans les espaces de type 2 en utilisant une méthode de randomisation gaussienne introduite par M. Ledoux [6] pour l'étude de la loi du logarithme itéré dans les espaces de type 2. Cette méthode s'applique aussi de façon efficace à l'étude de la loi forte des grands nombres et permet d'obtenir dans tout espace de Banach de type p $(1 < p \leqq 2)$ une généralisation optimale du théorème de Prokhorov (théorème 5 ci-dessous). Dans le cas d'un espace de Banach quelconque, la même méthode mène à un énoncé « dégénéré » ne comportant plus de condition de Prokhorov (remarque 4 ci-dessous).

Notations :

– Pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est l'ensemble $\{ 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} \}$.

– Si $(X_n)_n$ est une suite de v. a. à valeurs dans un espace de Banach B (de dual topologique B′), on pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$T_n = 2^{-n} \sum_{i \in I_n} X_i$$

et

$$\lambda_n = 2^{-2n} \sup \{ \sum_{i \in I_n} E \langle x^*, X_i \rangle^2; \| x^* \|_{B'} \leqq 1 \}.$$

$(\tilde{X}_n)_n$ désignera une copie indépendante de la suite $(X_n)_n$, $(\varepsilon_n)_n$ une suite de v. a. de Rademacher indépendantes, $(g_n)_n$ et $(\tilde{g}_n)$ des suites de v. a. r. gaussiennes indépendantes, centrées et réduites. Toutes ces suites seront supposées indépendantes entre elles, de sorte qu'il sera possible de les définir sur des espaces distincts, et de prendre pour espace probabilisé de base un produit de ces espaces. On notera alors E_x (resp. $E_{\tilde{x}}$, E_ε, ...) l'espérance par rapport au facteur sur lequel est définie la suite $(X_n)_n$ [resp. $(\tilde{X}_n)_n$, $(\varepsilon_n)_n$, ...].

– On posera enfin : $m=(E|g|)^{-1}$, où g est une v. a. r. gaussienne centrée et réduite.

1. NÉCESSITÉ DE LA CONDITION (CP)

Sa démonstration repose sur une minoration exponentielle due à Kolmogorov ([8], théorème 5.2.2).

LEMME. — *Il existe deux constantes strictement positives c_1 et c_2 telles que quelle que soit la suite $Y_1, \ldots, Y_n$ de v. a. r. indépendantes et centrées vérifiant*

$$\exists c>0, \quad \forall i=1, \ldots, n, \qquad |Y_i| \leqq c s_n \quad \text{p. s.}$$

où

$$s_n^2 = \sum_{i=1}^{n} EY_i^2,$$

on ait pour tout réel $\varepsilon>0$ satisfaisant les inégalités

$$\varepsilon \geqq c_1 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon c \leqq c_2$$

la minoration

$$P\{Y_1+\ldots+Y_n/s_n>\varepsilon\} \geqq \exp(-\varepsilon^2).$$

Le théorème qui suit montre que pour un espace de Banach quelconque la condition (CP) est une généralisation nécessaire naturelle de la condition (1) du théorème de Prokhorov.

THÉORÈME 4. — *Soient* $(B, \|\ \|)$ *un espace de Banach réel séparable, et* $(X_n)_n$ *une suite de v. a. indépendantes et centrées à valeurs dans* B *telles* *que :*

$$\exists c>0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|X_n\| \leqq cn/\mathrm{Log}_2 n \quad \text{p.s.}$$

Si cette suite vérifie la loi forte des grands nombres, alors elle satisfait la condition suivante :

$$\text{(CP)} \qquad \forall \varepsilon>0, \quad \sum_{n \geqslant 1} \exp(-\varepsilon \lambda_n^{-1}) < \infty.$$

Démonstration. — On se ramène facilement au cas où les variables X_n sont symétriques et vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in I_n, \qquad \|X_i\| \leqq 2^n/\mathrm{Log}\, n \quad \text{p.s.} \tag{1.1}$$

Les hypothèses de l'énoncé entraînent alors ([1], lemme 3.1)

$$\lim_{n \to \infty} E\|T_n\|^2 = 0.$$

Soit $\varepsilon>0$. Choisissons un réel $\delta>0$ vérifiant

$$4\delta \leqq c_2 \qquad \text{et} \qquad 2\varepsilon\delta^2 \leqq 1. \tag{1.2}$$

Soit $A = \{ n \in \mathbb{N} \mid \varepsilon \leqq 2\lambda_n \,\mathrm{Log}\, n \}$.

Pour tout $n \in A$, il existe, par définition de λ_n, un élément f_n de B' tel que :

$$\|f_n\|_{B'} \leqq 1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_n \leqq 2E\langle f_n, T_n \rangle^2. \tag{1.3}$$

Posons $s_n^2 = E\langle f_n, T_n \rangle^2$ et remarquons que

$$s_n^2 \leqq E(\|f_n\| \cdot \|T_n\|)^2 \leqq E\|T_n\|^2; \tag{1.4}$$

d'où $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = 0$.

Puisque $\|f_n\| \leqq 1$:

$$P\{\|T_n\| > \varepsilon\delta\} \geqq P\{f_n(T_n) > \varepsilon\delta\} = P\{f_n(T_n)/s_n > \varepsilon\delta/s_n\};$$

la probabilité de droite se minore grâce au lemme appliqué aux variables $Y_i = f_n(2^{-n} X_i)$, $i \in I_n$.

On a en effet : $s_n^2 = \sum\limits_{i \in I_n} EY_i^2$, et, par (1.4), $\varepsilon\delta/s_n$ est supérieur à c_1 pour n assez grand.

(1.1) implique d'autre part :

$$\forall i \in \mathrm{I}_n, \quad |\mathrm{Y}_i| \leqq \|2^{-n}\mathrm{X}_i\| \leqq 1/\mathrm{Log}\, n = s_n/s_n \,\mathrm{Log}\, n,$$

d'où, tenant compte de (1.2), (1.3) et de l'appartenance de n à A :

$$(\varepsilon\delta/s_n)(1/s_n \,\mathrm{Log}\, n) \leqq 2\,\varepsilon\delta/\lambda_n \,\mathrm{Log}\, n \leqq 4\,\delta \leqq c_2.$$

On déduit alors du lemme :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{f_n(\mathrm{T}_n)/s_n > \varepsilon\delta/s_n\} &\geqq \exp(-\varepsilon^2\,\delta^2/s_n^2) \\ &\geqq \exp(-2\,\varepsilon^2\,\delta^2\,\lambda_n^{-1}) \quad [\text{par } (1.3)] \\ &\geqq \exp(-\varepsilon\lambda_n^{-1}) \quad [\text{par } (1.2)]. \end{aligned}$$

La suite $(\mathrm{X}_n)_n$ obéissant à la loi forte des grands nombres vérifie :

$$\sum_{n \geqslant 1} \mathrm{P}\{\|\mathrm{T}_n\| > \varepsilon\delta\} < \infty.$$

Par conséquent, d'après ce qui précède :

$$\sum_{n \in \mathrm{A}} \exp(-\varepsilon\lambda_n^{-1}) < \infty,$$

et comme de façon évidente,

$$\sum_{n \notin \mathrm{A}} \exp(-\varepsilon\lambda_n^{-1}) < \infty,$$

la nécessité de la condition (CP) se trouve finalement démontrée.

2. GÉNÉRALISATION DE LA LOI DES GRANDS NOMBRES DE PROKHOROV

THÉORÈME 5. — *Soit* $(\mathrm{X}_n)_n$ *une suite de v. a. indépendantes et centrées, à valeurs dans un espace de Banach* $(\mathrm{B}, \|\ \|)$ *réel, séparable et de type p,* $p \in]1, 2]$.

On suppose vérifiées les conditions suivantes :

(1) *il existe une suite* $(\mathrm{C}_n)_n$ *de réels positifs tendant vers* 0 *telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\mathrm{X}_n\| \leqq \mathrm{C}_n\, n/\mathrm{Log}_2\, n \quad \text{p. s.}$$

(2) $$\lim_{n \to +\infty} n^{-p} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E} \| X_i \|^p = 0$$

(3) $$\forall \varepsilon > 0, \quad \sum_{n \geq 1} \exp(-\varepsilon \lambda_n^{-1}) < +\infty.$$

Sous ces hypothèses, la suite $(X_n)_n$ *satisfait la loi forte des grands nombres.*

Démonstration : Première étape. — Désignons par C la constante de type de l'espace B. On a pour tout entier $n \geqq 1$

$$\mathrm{E} \| S_n/n \|^p \leqq \mathrm{C}\, n^{-p} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E} \| X_i \|^p;$$

l'hypothèse (2) assure donc la convergence en probabilité de S_n/n vers 0, ce qui permet de se restreindre au cas de variables X_n symétriques. On sait qu'alors la convergence presque sûre de S_n/n vers 0 équivaut à celle de T_n vers 0, et on aura donc démontré le théorème si l'on prouve l'égalité :

$$\lim_{k \to \infty} \mathrm{E} \sup_{n \geq k} \| T_n \| = 0.$$

On se ramènera par commodité au cas où il existe une suite de réels C'_n compris entre 0 et 1, et tendant vers 0, telle que :

(1′) $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in I_n, \qquad \| X_i \| \leqq C'_n 2^n / \mathrm{Log}\, n \quad \text{p. s.}$$

Par symétrie des variables X_n :

$$\mathrm{E} \sup_{n \geq k} \| T_n \| = \mathrm{E} \sup_{n \geq k} 2^{-n} \| \sum_{i \in I_n} \varepsilon_i X_i \|,$$

et d'après un principe de contraction :

$$\mathrm{E} \sup_{n \geq k} 2^{-n} \| \sum_{i \in I_n} \varepsilon_i X_i \| \leqq m\, \mathrm{E} \sup_{n \geq k} 2^{-n} \| \sum_{i \in I_n} g_i X_i \|.$$

La suite de démonstration est une adaptation de celle employée par M. Ledoux pour prouver la l. l. i. équidistribuée dans les espaces de type 2 ([6], th. 3.2). Nous commencerons comme dans [6] par utiliser un corollaire de l'inégalité isopérimétrique gaussienne de C. Borell ([6], lemme 2.2) pour obtenir la majoration :

$$\mathrm{E} \sup_{n \geq k} 2^{-n} \| \sum_{i \in I_n} g_i X_i \| \leqq \mathrm{K} [\mathrm{E}_x \sup_{n \geq k} \{ \mathrm{E}_g 2^{-n} \| \sum_{i \in I_n} g_i X_i \| \} + \mathrm{E} \sup_{n \geq k} \{ | g_n | \sigma_n \}],$$

où K est une constante >0 et

$$\sigma_n = \sup_{\|x^*\| \leqq 1} \left(2^{-2n} \sum_{i \in \mathrm{I}_n} \langle x^*, \mathrm{X}_i \rangle^2\right)^{1/2}.$$

Nous poserons pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{A}_k = \mathrm{E} \sup_{n \geqslant k} 2^{-n} \left\| \sum_{i \in \mathrm{I}_n} g_i \mathrm{X}_i \right\|$$

$$\mathrm{B}_k = \mathrm{E}_{\mathrm{X}} \left[\sup_{n \geqslant k} \left\{ \mathrm{E}_g 2^{-n} \left\| \sum_{i \in \mathrm{I}_n} g_i \mathrm{X}_i \right\| \right\}\right]$$

et

$$\mathrm{C}_k = \mathrm{E} \sup_{n \geqslant k} \{ |g_n| \sigma_n \}.$$

Avec ces notations, l'inégalité précédente se réécrit :

$$\mathrm{A}_k \leqq \mathrm{B}_k + \mathrm{C}_k. \tag{2.1}$$

Deuxième étape. — On montre ici que B_k tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. L'espace B étant de type p, il existe une constante $\mathrm{C}' > 0$ telle que :

$$\mathrm{B}_k \leqq \mathrm{C}' \, \mathrm{E} \sup_{n \geqslant k} \left\{ 2^{-n} \left(\sum_{i \in \mathrm{I}_n} \|\mathrm{X}_i\|^p\right)^{1/p} \right\}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Clairement :

$$\mathrm{B}_k \leqq \mathrm{C}' \left[\varepsilon + \int_{\varepsilon}^{\infty} \mathrm{P}\left\{ \sup_{n \geqslant k} 2^{-n} \left(\sum_{i \in \mathrm{I}_n} \|\mathrm{X}_i\|^p\right)^{1/p} > t \right\} dt \right]$$

$$\leqq \mathrm{C}' \left[\varepsilon + \sum_{n \geqq k} \int_{\varepsilon}^{\infty} \mathrm{P}\left\{ 2^{-np} \sum_{i \in \mathrm{I}_n} \|\mathrm{X}_i\|^p > t^p \right\} dt \right] \tag{2.2}$$

Pour tout réel $h > 0$, on obtient au moyen de l'inégalité de Tchebychev et grâce à l'indépendance :

$$\mathrm{P}\left\{ 2^{-np} \sum_{i \in \mathrm{I}_n} \|\mathrm{X}_i\|^p > t^p \right\}$$

$$\leqq \exp(-ht^p) \, \mathrm{E} \exp\left(2^{-np} h \sum_{i \in \mathrm{I}_n} \|\mathrm{X}_i\|^p\right)$$

$$= \exp(-ht^p) \prod_{i \in \mathrm{I}_n} \mathrm{E} \exp(2^{-np} h \|\mathrm{X}_i\|^p). \tag{2.3}$$

Puis pour tout $i\in \mathrm{I}_n$, en tenant compte de l'hypothèse (1') :

$$\mathrm{E}\exp(2^{-np}h\|\mathrm{X}_i\|^p)=1+\mathrm{E}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}h^j 2^{-jnp}\|\mathrm{X}_i\|^{jp}$$

$$\leqq 1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}h^j 2^{-jnp}\left(\frac{2^n}{\operatorname{Log} n}\right)^{jp-p}\mathrm{E}\|\mathrm{X}_i\|^p$$

$$=1+\operatorname{Log}^p n\, 2^{-np}\mathrm{E}\|\mathrm{X}_i\|^p\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{h}{\operatorname{Log}^p n}\right)^j.$$

On choisit alors $h=\operatorname{Log}^p n$, ce qui donne :

$$\mathrm{E}\exp(\operatorname{Log}^p n\, 2^{-np}\|\mathrm{X}_i\|^p)\leqq 1+e\operatorname{Log}^p n\, 2^{-np}\mathrm{E}\|\mathrm{X}_i\|^p$$

$$\leqq\exp(e\operatorname{Log}^p n\, 2^{-np}\mathrm{E}\|\mathrm{X}_i\|^p).$$

Cette dernière inégalité et l'inégalité (2.3) entraînent

$$\mathrm{P}\{2^{-np}\sum_{i\in\mathrm{I}_n}\|\mathrm{X}_i\|^p>t^p\}\leqq\exp(-\operatorname{Log}^p n[t^p-e\,2^{-np}\sum_{i\in\mathrm{I}_n}\mathrm{E}\|\mathrm{X}_i\|^p]).$$

L'hypothèse (2) assure l'existence d'un entier k_0 tel que pour $n\geqq k_0$:

$$e\,2^{-np}\sum_{i\in\mathrm{I}_n}\mathrm{E}\|\mathrm{X}_i\|^p\leqq\varepsilon^p/2.$$

Par conséquent, pour $n\geqq k_0$ et $t\geqq\varepsilon$:

$$\mathrm{P}\{2^{-np}\sum_{i\in\mathrm{I}_n}\|\mathrm{X}_i\|^p>t^p\}\leqq\exp(-\operatorname{Log}^p n\,t^p/2),$$

ce qui permet d'écrire :

$\forall n\geqq k_0$,

$$\int_\varepsilon^\infty \mathrm{P}\{2^{-np}\sum_{i\in\mathrm{I}_n}\|\mathrm{X}_i\|^p>t^p\}\leqq\int_\varepsilon^\infty\exp(-\operatorname{Log}^p n\,t^p/2)\,dt$$

$$\leqq\int_\varepsilon^\infty\exp(-\operatorname{Log}^p n\,\varepsilon^{p-1}t/2)\,dt$$

$$\leqq(2/\varepsilon^{p-1}\operatorname{Log}^p n)\exp(-\operatorname{Log}^p n\,\varepsilon^p/2).$$

La dernière inégalité (où $p>1$) et (2.2) montrent que B_k tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

Troisième étape. — C_k se majore grâce à l'inégalité de Minkowski :

$$C_k \leqq C'_k + C''_k \tag{2.4}$$

où l'on a posé :

$$C'_k = E \sup_{n \geqslant k} \{ |g_n| \sup_{\| x^* \| \leqq 1} 2^{-n} | \sum_{i \in I_n} \langle x^*, X_i \rangle^2 - E \langle x^*, X_i \rangle^2 |^{1/2} \}$$

et

$$C''_k = E \sup_{n \geqslant k} \{ |g_n| \sup_{\| x^* \| \leqq 1} 2^{-n} (\sum_{i \in I_n} E \langle x^*, X_i \rangle^2)^{1/2} \} = E \sup_{n \geqslant k} \{ |g_n| \lambda_n^{1/2} \}.$$

— Commençons par prouver que C''_k tend vers 0. Pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$\begin{aligned} C''_k &\leqq \varepsilon + \sum_{n \geqq k} \int_\varepsilon^\infty P\{ |g_n| \lambda_n^{1/2} > t \} \, dt \\ &\leqq \varepsilon + \sum_{n \geqq k} \int_\varepsilon^\infty \lambda_n^{1/2} t^{-1} \exp(-t^2/2\lambda_n) \, dt \\ &\leqq \varepsilon + \sum_{n \geqq k} \lambda_n^{1/2} \varepsilon^{-1} \int_\varepsilon^\infty \exp(-\varepsilon t/2\lambda_n) \, dt \\ &= \varepsilon + 2\varepsilon^{-2} \sum_{n \geqq k} \lambda_n^{3/2} \exp(-\varepsilon^2/2\lambda_n). \end{aligned}$$

La dernière série écrite est convergente en vertu de l'hypothèse (3), ce qui implique la convergence de C''_k vers 0.

— Posons :

$$D_k = E \sup_{n \geqslant k} \{ |g_n|^2 \sup_{\| x^* \| \leqq 1} 2^{-2n} | \sum_{i \in I_n} \langle x^*, X_i \rangle^2 - E \langle x^*, X_i \rangle^2 | \}$$

et remarquons que par l'inégalité de Schwarz :

$$C'_k \leqq D_k^{1/2}. \tag{2.5}$$

Les majorations suivantes utilisent essentiellement l'indépendance et l'inégalité de Jensen, et emploient les notations précisées dans l'introduction :

$$\begin{aligned}
D_k &= \mathrm{E}\sup_{n\geqslant k}\{|g_n|^2 \sup_{\|x^*\|\leqq 1} 2^{-2n} \\
&\qquad\times|\sum_{i\in I_n}\langle x^*, X_i\rangle^2 - \mathrm{E}\langle x^*, \tilde{X}_i\rangle^2|\} \\
&\leqq \mathrm{E}\sup_{n\geqslant k}\{|g_n|^2 \sup_{\|x^*\|\leqq 1} 2^{-2n}|\sum_{i\in I_n}\langle x^*, X_i\rangle^2 - \langle x^*, \tilde{X}_i\rangle^2|\} \\
&= \mathrm{E}\sup_{n\geqslant k}\{|g_n|^2 \sup_{\|x^*\|\leqq 1} 2^{-2n}|\sum_{i\in I_n}\varepsilon_i(\langle x^*, X_i\rangle^2 - \langle x^*, \tilde{X}_i\rangle^2)|\} \\
&\leqq 2m\,\mathrm{E}\sup_{n\geqslant k}\{|g_n|^2 \sup_{\|x^*\|\leqq 1} 2^{-2n}|\sum_{i\in I_n}\tilde{g}_i\langle x^*, X_i\rangle^2|\}. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Fixons à présent les variables liées aux suites $(g_n)_n$ et $(X_n)_n$, et considérons sur l'ensemble $\mathbb{N}(k)\times B'_1$ [où $\mathbb{N}(k)$ désigne l'ensemble des entiers $\geqq k$, et B'_1 la boule unité fermée du dual B' de B] le processus gaussien

$$G(n, x^*) = |g_n|^2 \sum_{i\in I_n}\tilde{g}_i\langle x^*, X_i\rangle^2.$$

On vérifie sans peine que : $\forall x^*, y^*\in B'_1$, $\forall n\neq m\in\mathbb{N}(k)$

$$\mathrm{E}_{\tilde{g}}[G(n, x^*) - G(n, y^*)]^2 \leqq 4|g_n|^4\sum_{i\in I_n}\|X_i\|^2(\langle x^*, X_i\rangle - \langle y^*, X_i\rangle)^2$$

et

$$\mathrm{E}_{\tilde{g}}[G(n, x^*) - G(m, y^*)]^2 = |g_n|^4\sum_{i\in I_n}\langle x^*, X_i\rangle^4 + |g_m|^4\sum_{i\in I_m}\langle y^*, X_i\rangle^4,$$

si bien que l'écart induit par G est majoré par celui induit par le processus gaussien

$$G'(n, x^*) = 2|g_n|^2\sum_{i\in I_n}\langle x^*, X_i\rangle\|X_i\|\tilde{g}_i.$$

On peut alors appliquer un théorème de comparaison gaussienne basé sur le lemme de Slépian (*cf.* [2], théorème 2.1.2) et en déduire à partir de (2.6)

$$\begin{aligned}
D_k &\leqq 8m\,\mathrm{E}\sup_{n\geqslant k}\{|g_n|^2 \sup_{\|x^*\|\leqq 1} 2^{-2n}|\sum_{i\in I_n}\langle x^*, X_i\rangle\|X_i\|\tilde{g}_i|] \\
&= 8m\,\mathrm{E}\sup_{n\geqslant k}\{|g_n|^2\, 2^{-2n}\|\sum_{i\in I_n}\tilde{g}_i\|X_i\|X_i\|\}.
\end{aligned}$$

On obtient ensuite par un principe de contraction, grâce à l'hypothèse (1') :

$$D_k \leqq 8m \, E \sup_{n \geqslant k} \{ |g_n|^2 (C'_n 2^n / \mathrm{Log}\, n) \, 2^{-2n} \| \sum_{i \in I_n} \tilde{g}_i X_i \| \}.$$

Il vient enfin par indépendance

$$D_k \leqq 8m \, E \sup_{n \geqslant k} \{ |g_n|^2 C'_n / \mathrm{Log}\, n \} \, E \sup_{n \geqslant k} 2^{-n} \| \sum_{i \in I_n} \tilde{g}_i X_i \| = \delta_k^2 A_k \quad (2.7)$$

si l'on pose : $\delta_k^2 = 8m \, E \sup_{n \geqslant k} \{ |g_n|^2 C'_n / \mathrm{Log}\, n \}$; on remarque que δ_k tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$, puisque par hypothèse la suite C'_n tend vers 0.

(2.1), (2.4), (2.5) et (2.7) permettent d'établir l'inégalité

$$A_k \leqq \alpha (B_k + C''_k + \delta_k A_k^{1/2})$$

où α est une constante >0 et B_k, C''_k et δ_k tendent vers 0 quand k tend vers l'infini. A_k tend donc nécessairement vers 0, ce qui entraîne la conclusion désirée.

Remarques. — (1) Dans une première rédaction de cet article je n'avais obtenu le théorème 5 que sous l'hypothèse plus restrictive

$$C_n = O(1/\sqrt{\mathrm{Log}_2 n}).$$

C'est à la suite d'une discussion avec Michel Ledoux que j'ai été à même de le démontrer dans la forme énoncée ci-dessus.

(2) La méthode employée pour démontrer le théorème 5 ne permet apparemment pas de conclure lorsque la condition (1) est remplacée par :

$$(1'') \qquad \exists C > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|X_n\| \leqq C n / \mathrm{Log}_2 n \quad \text{p. s.}$$

Si maintenant l'espace B est de plus supposé réflexif, il est cependant possible de prouver sous l'hypothèse (1'') la convergence faible presque sûre de S_n/n vers 0. Dans ce cas en effet l'unique différence avec la démonstration précédente est que δ_k est borné (au lieu de tendre vers 0), et l'on peut seulement affirmer que A_k est borné. On en déduit facilement que la suite S_n/n est presque sûrement bornée dans B. D'autre part pour tout élément x^* de B', la suite $x^*(S_n/n)$ converge vers 0 p. s. d'après le théorème 1. B étant séparable, il existe une partie D dénombrable et dense dans B′ pour la topologie $\sigma(B', B)$. La conclusion est alors une conséquence immédiate du fait que les topologies $\sigma(B', B)$ et $\sigma(B', D)$ coïncident sur les parties faiblement compactes.

(3) L'exemple de Prokhorov [7] mentionné dans l'introduction est encore utilisable dans le cadre du théorème 5, car on voit sans peine qu'il en vérifie la condition (2) pour tout $p \in [1, 2]$.

(4) Si l'on ne fait plus d'hypothèse de type sur l'espace, on ne peut plus obtenir qu'une forme « dégénérée » de la loi des grands nombres de Prokhorov, dont la démonstration est similaire à celle du théorème 5 :

THÉORÈME 6. — *Soit* $(X_n)_n$ *une suite de v. a. indépendantes et centrées à valeurs dans un espace de Banach B réel et séparable. Si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

$$(1) \qquad \exists C>0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|X_n\| \leqq C\, n/\mathrm{Log}_2\, n \quad \text{p. s.}$$

$$(2) \qquad \lim_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} E\|X_i\| = 0$$

alors la suite $(X_n)_n$ *vérifie la loi forte des grands nombres.*

RÉFÉRENCES

[1] A. DE ACOSTA, Inequalities for B Valued Random Vectors with Applications to the Strong Law of Large Numbers, *Ann. Probability*, vol. **9**, 1981, p. 157-161.

[2] X. FERNIQUE, Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes, *Lecture Notes in Math.*, n° **480**, 1975, p. 1-96, Springer, Berlin.

[3] B. HEINKEL, Une extension de la loi des grands nombres de Prokhorov, *Z. Wahr. verw. Gebiete*, vol. **67**, 1984, p. 349-362.

[4] B. HEINKEL, An Application of a Martingale Inequality of Dubins and Freedman to the Law of Large Numbers in Banach Spaces, *Lecture Notes in Math.*, vol. **1193**, 1986, p. 29-43, Springer, Berlin.

[5] J. KUELBS et J. ZINN, Some Stability Results for Vector Valued Random Variables, *Ann. Probability*, vol. **7**, 1979, p. 75-84.

[6] M. LEDOUX, *Gaussian Randomisation and the Law of the Iterated Logarithm in Type* 2 *Banach Spaces*, Preprint, 1985.

[7] Y. PROKHOROV, Some Remarks on the Srong Law of Large Numbers, *Th. Prob. Appl.*, vol. **4**, 1959, p. 204-208.

[8] W. F. STOUT, *Almost Sure Convergence*, Academic Press, New York, 1974.

(*Manuscrit reçu le* 10 *avril* 1986)
(*corrigé le* 31 *juillet* 1986.)