ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

DOMINIQUE DELESALLE

Classes de Donsker et fonction d'entropie relatives aux mesures aléatoires

Annales de l'I. H. P., section B, tome 23, nº 3 (1987), p. 531-559

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1987__23_3_531_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 23, n° 3, 1987, p. 531-559. *Probabilités et Statistiques*

Classes de Donsker et fonction d'entropie relatives aux mesures aléatoires

par

Dominique DELESALLE

Université des Sciences et Techniques de Lille-Flandres-Artois
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées,
Laboratoire de Statistique et Probabilités,
59655 Villeneuve d'Ascq-Cedex

RÉSUMÉ. — Pour un n-échantillon d'une mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$ sur un espace métrique séparable muni de sa tribu borélienne $\mathscr{B}$, on considère la mesure aléatoire empirique normalisée :

$$\eta_n^{\bullet} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\mu_i^{\bullet} - \mu),$$

μ étant la mesure moyenne associée à $\mu^{\bullet}$. En introduisant des classes de Donsker relativement à la tribu $\mathscr{B}$, et une fonction d'entropie appropriée, on met en évidence un ensemble de conditions permettant d'assurer la convergence en loi de la suite $(\eta_n^{\bullet})$.

Mots clés : Théorème central limite, mesure aléatoire, convergence faible, entropie.

ABSTRACT. — Let $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ be a random sample from a random measure $\mu^{\bullet}$ on a separable metric space endowed with its Borel σ-algebra $\mathscr{B}$. Let

$$\eta_n^{\bullet} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\mu^{\bullet}{}_i - \mu)$$

be the normalised empirical random measure, where μ denotes the expected value of $\mu^{\bullet}$. We study the convergence in law of the sequence $(\eta_n^{\bullet})$ by means of Donsker classes in $\mathscr{B}$ and appropriate entropy function.

Key words : Central limit theorem, random measure, entropy.

I. — INTRODUCTION

Le théorème de limite centrale a pour objet d'étudier la convergence en loi du processus empirique $\nu_n = \sqrt{n}(P_n - P)$, où P_n désigne la loi empirique associée à un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ d'une variable aléatoire X de loi P. Nous tentons une généralisation des méthodes utilisées par R. M. Dudley [3] au cas où la variable aléatoire en question prend ses valeurs dans un espace de mesures. La notion de mesure aléatoire utilisée ici est celle définie, par exemple, dans [7] : le point de vue diffère donc sensiblement de celui adopté par R. M. Dudley dans une publication plus récente [4]. Ce dernier, en effet, multiplie les références à l'analyse fonctionnelle, et exploite largement l'équivalence entre une classe de théorèmes limites pour les mesures empiriques et une théorie des éléments aléatoires à valeurs dans des espaces normés plus généraux. Même si les mesures aléatoires peuvent relever d'une structure intermédiaire, nous préférons garder un point de vue plus typiquement probabiliste.

Nous tenons à remercier bien vivement M. P. Jacob, dont l'aide nous a été précieuse.

II. — DÉFINITIONS ET NOTATIONS. THÉORÈME PRÉLIMINAIRE

Soit $\mathscr{X}$ un espace métrique séparable, et $\mathscr{B}_b$ l'anneau de ses boréliens bornés; nous désignons par $\mathscr{M}$ (respectivement $\mathscr{M}_+$) l'ensemble des mesures réelles (resp. positives) sur $\mathscr{X}$. Étant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{Pr})$, les mesures aléatoires réelles (resp. positives) sur $\mathscr{X}$ sont les applications de Ω dans $\mathscr{M}$ (resp. $\mathscr{M}_+$), mesurables relativement à la tribu

Classification A.M.S. : 60 F 05, 60 G 57, 60 B 05, 60 B 10, 60 G 15, 60 G 17.

$\mathscr{A}$ et à la tribu $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{F}_+$), tribu borélienne associée à la topologie de la convergence faible à distance finie.

Soit $\mu^{\bullet}$ une mesure aléatoire positive d'ordre 2, c'est-à-dire telle que le processus stochastique associé à la mesure aléatoire $\mu^{\bullet} \otimes \mu^{\bullet}$ sur $\mathscr{X} \times \mathscr{X}$ possède un moment d'ordre 1 [8]. A tout n-échantillon $(\mu_1^{\bullet}, \mu_2^{\bullet}, \ldots, \mu_n^{\bullet})$ de $\mu^{\bullet}$, nous associons la mesure aléatoire réelle :

$$\eta_n^{\bullet} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\mu_i^{\bullet} - \mu),$$

μ étant la mesure moyenne associée à $\mu^{\bullet}$.

Dans le cas où $\mu^{\bullet} = \delta_X$, X étant une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$, on retrouve les cas classiques étudiés par exemple dans [2] et [6].

Pour toute suite finie $S = (B_1, B_2, \ldots, B_k)$ de boréliens bornés, désignons par $P_{n, S}$ la loi du vecteur aléatoire :

$$(\eta_n^{\bullet}(B_1), \ldots, \eta_n^{\bullet}(B_k)).$$

Le théorème de limite centrale relatif aux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ permet de montrer que la suite des probabilités $(P_{n, S})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers P_S, probabilité gaussienne définie sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}^k$. On en déduit, par le théorème de Kolmogorov-Bochner, l'existence d'une probabilité P sur la tribu produit $(\mathbb{R}^{\mathscr{B}_b}, \mathscr{R}^{\mathscr{B}_b})$, $\mathscr{R}$ désignant la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, dont les projections de dimension finie sont les P_S; ces lois P_S sont centrées et de même covariance que la mesure aléatoire parente $\mu^{\bullet}$.

Nous appelons alors *processus de limite centrale* associé à la mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$ tout processus stochastique réel indexé par $\mathscr{B}_b$:

$$\eta^{\bullet} = (\eta^{\bullet}(B))_{B \in \mathscr{B}_b},$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(i) *Les variables aléatoires* $\eta^{\bullet}(B)$ *sont définies sur le même espace probabilisé que la mesure aléatoire* $\mu^{\bullet}$.

(ii) *Le processus* $\eta^{\bullet}$ *est gaussien, centré.*

(iii) *La covariance de* $\eta^{\bullet}$ *est donnée par celle de* $\mu^{\bullet}$ *; pour tous boréliens bornés* B_1 *et* B_2 *:*

$$\operatorname{Cov}\{\eta^{\bullet}(B_1), \eta^{\bullet}(B_2)\} = E\{(\mu^{\bullet} - \mu) \otimes (\mu^{\bullet} - \mu)(B_1 \times B_2)\}.$$

La construction de tels processus est classique. Il est malheureusement impossible d'assimiler $\eta^{\bullet}$ à une mesure aléatoire, ce qui rend délicate l'étude d'une éventuelle convergence en loi de la suite $(\eta_n^{\bullet})$ vers $\eta^{\bullet}$. On est alors amené à construire un espace métrique qui contient l'ensemble $\mathcal{M}$ des mesures réelles, et dans lequel, sous des hypothèses appropriées, les applications $\eta_n^{\bullet}$ et $\eta^{\bullet}$, considérées comme variables aléatoires, prennent leurs valeurs.

Soit d la pseudo-distance sur $\mathscr{B}_b$, définie par :

$$d(\mathrm{B}, \mathrm{B}') = \| \mu^{\bullet}(\mathrm{B} \triangle \mathrm{B}') \|_2$$

où $\| \cdot \|_2$ désigne la norme relative à l'espace $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{Pr})$. Pour une partie $\mathscr{C}$ de l'ensemble $\mathscr{B}_b$, nous désignons par $\mathrm{B}(\mathscr{C})$ [resp. $\mathrm{C}(\mathscr{C})$] l'espace vectoriel des applications λ de $\mathscr{C}$ dans $\mathbb{R}$, bornées (resp. d-continues et bornées). Nous munissons ces deux espaces de la norme de la convergence uniforme, définie par :

$$\| \lambda \| = \sup_{\mathrm{B} \in \mathscr{C}} | \lambda(\mathrm{B}) |$$

et nous désignons aussi par d la pseudo-distance induite par d sur $\mathscr{C}$. Soit $\mathrm{D}(\mathscr{C})$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{B}(\mathscr{C})$ formé des applications λ de $\mathscr{C}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'écrivent :

$$\lambda = \varphi + \nu,$$

où φ est un élément de $\mathrm{C}(\mathscr{C})$ et où ν est une application bornée de $\mathscr{C}$ dans $\mathbb{R}$ qui est la restriction à $\mathscr{C}$ d'une mesure réelle sur $\mathscr{X}$. D'après ces définitions, nous avons : $\mathrm{D}(\mathscr{C}) \subset \mathrm{B}(\mathscr{C})$. Il est par ailleurs immédiat que pour tout $\omega \in \Omega$, η_n^{ω} est une mesure réelle sur $\mathscr{X}$; la condition :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \sup_{\mathrm{B} \in \mathscr{C}} \mu^{\omega}(\mathrm{B}) < \infty \tag{1}$$

entraîne alors que pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tout nombre entier naturel n, la restriction à $\mathscr{C}$ de η_n^{ω} (encore notée de la même façon) est un élément de $\mathrm{D}(\mathscr{C})$. Nous munirons l'espace $\mathrm{D}(\mathscr{C})$ de la tribu, notée $\mathbb{B}$, engendrée par les boules ouvertes pour la pseudo-distance d.

Dans toute la suite de cet article, nous considérerons une mesure aléatoire positive $\mu^{\bullet}$, d'ordre 2, et un sous-ensemble $\mathscr{C}$ de l'ensemble $\mathscr{B}_b$ des boréliens bornés. On désignera par μ la mesure moyenne de $\mu^{\bullet}$.

Soit $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}_b$, telle que la condition (1) ci-dessus soit satisfaite, et telle que :

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $\eta_n^{\bullet}$ de Ω dans $\mathrm{D}(\mathscr{C})$ est mesurable par rapport aux tribus $\mathscr{A}$ et $\mathbb{B}$.

Conformément à [3], nous dirons que $\mathscr{C}$ est une *classe de Donsker* pour $\mu^{\bullet}$ si et seulement si les conditions 1° à 3° ci-dessous sont satisfaites :

1° $\mathscr{C}$ est précompacte dans l'espace pseudo-métrique $(\mathscr{B}_d, d)$.

2° Il existe un processus de limite centrale $\eta^{\bullet}$ dont, presque sûrement, les restrictions à $\mathscr{C}$ des trajectoires :

$$\eta^{\omega}: \quad B \mapsto \eta^{\omega}(B)$$

sont uniformément continues.

3° En désignant par P_n la probabilité sur $(D(\mathscr{C}), \mathbb{B})$ qui est la loi de la variable aléatoire $\eta_n^{\bullet}$ et par P la probabilité borélienne sur l'espace métrique $(D(\mathscr{C}), \|\,.\,\|)$ qui est la loi de $\eta^{\bullet}$, la suite (P_n) converge faiblement vers P [c'est-à-dire que pour toute application f continue et bornée de $D(\mathscr{C})$ dans $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \int^{*} f dP_n = \lim_{n \to +\infty} \int_{*} f dP_n = \int f dP \Big].$$

Nous citons sans démonstration le théorème suivant, qui relie la notion de classe de Donsker à l'oscillation de $\eta_n^{\bullet}$ sur les boréliens. Ce résultat est, à nouveau, fortement inspiré de [3].

THÉORÈME 1. — *Soit $\mathscr{C}$ une partie de $\mathscr{B}_b$, vérifiant les conditions* (1) *et* (2) *ci-dessus.*

Si $\mathscr{C}$ est une classe de Donsker pour $\mu^{\bullet}$, alors :

(3) *$\mathscr{C}$ est précompacte dans l'espace pseudo-métrique $(\mathscr{B}_d, d)$.*

(4) *$\mathscr{C}$ et $\eta_n^{\bullet}$ vérifient la condition, dite de faible oscillation : A tout nombre réel $\varepsilon > 0$ est associé un nombre réel $\rho > 0$ tel que l'on ait, pour tout n assez grand :*

$$\Pr{}^{*}\Big\{ \sup_{\substack{(B, B') \in \mathscr{C}^2 \\ d\,(B, B') < \rho}} |\eta_n^{\bullet}(B) - \eta_n^{\bullet}(B')| > \varepsilon \Big\} < \varepsilon.$$

Inversement, sous l'hypothèse supplémentaire :

$$\sup_{B \in \mathscr{C}} \operatorname{Var} \mu^{\bullet}(B) < \infty,$$

les conditions (3) *et* (4) *entraînent que $\mathscr{C}$ est une classe de Donsker pour $\mu^{\bullet}$.*

III. – NOTION D'ENTROPIE

Cette notion avait été utilisée en [3] (metric entropy with inclusion) dans le cas particulier où $\mu^{\bullet}$ est la mesure aléatoire de Dirac δ_{ξ}, ξ étant une variable aléatoire de loi π sur $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$. La pseudo-distance d sur $\mathscr{B}_b$ était définie par :

$$d(\mathrm{B}, \mathrm{B}') = \pi(\mathrm{B} \triangle \mathrm{B}'),$$

où Δ désigne l'opération de différence symétrique. L'absence d'une trop grande dispersion des boréliens à l'intérieur d'une classe $\mathscr{C}$ y était caractérisée au moyen d'inégalités du type :

$$\pi(\mathrm{B}) < \varepsilon.$$

Les résultats obtenus reposaient essentiellement sur le fait que pour tout borélien B, les deux premiers moments de la variable aléatoire de Bernoulli $\delta_{\xi}(\mathrm{B})$ sont déterminés par la loi de probabilité π.

Dans la situation plus générale envisagée ici, nous substituons à la mesure aléatoire de Dirac δ_{ξ} une mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$. Le rôle de la loi de probabilité π sera joué par ce que nous appellerons « fonction d'entropie », définie à partir du moment d'ordre 2 de la mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$.

Nous appellerons *fonction d'entropie* associée à $\mu^{\bullet}$ l'application Φ de $\mathscr{B}_b$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$\Phi(\mathrm{B}) = \| \mu^{\bullet}(\mathrm{B}) \|_2,$$

où $\| \, . \, \|_2$ désigne la norme relative à l'espace $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{Pr})$. Remarquons les propriétés suivantes : Φ est croissante [pour tous éléments B et B′ de $\mathscr{B}_b$ tels que $\mathrm{B} \subset \mathrm{B}'$, on a : $\Phi(\mathrm{B}) \leqq \Phi(\mathrm{B}')$]]; Φ est sous-additive [pour tous éléments B et B′ de $\mathscr{B}_b$, *on a :* $\Phi(\mathrm{B} \cup \mathrm{B}') \leqq \Phi(\mathrm{B}) + \Phi(\mathrm{B}')$]; enfin, d'après l'inégalité de Jensen, $\mu(\mathrm{B}) \leqq \Phi(\mathrm{B})$ pour tout élément B de $\mathscr{B}_b$.

Nous dirons que la classe *$\mathscr{C}$ possède une entropie relativement à la mesure aléatoire* $\mu^{\bullet}$ si à tout nombre réel ρ strictement positif est associée au moins une suite finie de boréliens bornés :

$$(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_k)$$

vérifiant la condition :

Pour tout $\mathrm{B} \in \mathscr{C}$, il existe deux boréliens bornés $\mathrm{A}_{s(\mathrm{B})}$ et $\mathrm{A}_{t(\mathrm{B})}$, où $1 \leqq s(\mathrm{B}) \leqq k$ et $1 \leqq t(\mathrm{B}) \leqq k$, tels que :

$$\mathrm{A}_{s(\mathrm{B})} \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{A}_{t(\mathrm{B})},$$

et :

$$\Phi(A_{t(B)} - A_{s(B)}) < \rho.$$

On suppose maintenant que $\mathscr{C}$ possède une entropie relativement à $\mu^{\bullet}$. Pour $\rho > 0$, on définit $\Gamma(\rho)$ comme étant le plus petit nombre entier naturel k vérifiant la condition ci-dessus. Le nombre réel $\operatorname{Log}\Gamma(\rho)$ sera appelé ρ-*entropie de* $\mathscr{C}$ *relativement à* $\mu^{\bullet}$, la suite

$$S_{\rho} = (A_1, A_2, \ldots, A_{\Gamma(\rho)})$$

sera appelé *suite* ρ-*approximante pour* $\mathscr{C}$ *relativement à* $\mu^{\bullet}$, et ρ sera appelé module d'approximation de $\mathscr{C}$ par S_{ρ}.

IV. – INÉGALITÉ DE BERNSTEIN-FRÉCHET

Ce résultat classique est souvent formulé avec des hypothèses trop contraignantes. Ou bien les variables aléatoires sont supposées bornées comme, par exemple, dans G. Bennett [1]; pourtant, tel n'est pas le cas dans la version donnée par S. Bernstein lui-même. Ou bien l'on requiert une limitation de l'écart entre la variable aléatoire somme et son espérance mathématique (M. Fréchet [5]) : cette condition, non contraignante dans les applications usuelles, amenait cependant de graves difficultés techniques dans la suite de notre étude. Nous retenons ici l'énoncé dû à P. Jacob, qui présente une majoration peu différente de celle de [4], à partir d'une condition sur les moments d'ordre 2, et qui évite les clauses trop restrictives mentionnées ci-dessus.

PROPOSITION 1. — *Soient* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots)$ *une suite de variables aléatoires réelles définies sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{A}, \Pr)$, *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la somme partielle de rang n associée à cette suite :*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$

Si $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots$ *sont mutuellement indépendantes, possèdent des moments de tous ordres, et vérifient la condition suivante :*

Il existe un nombre réel $K > 1$ *tel que pour tout* $i \in \mathbb{N}^*$ *et pour tout entier naturel p supérieur ou égal à* 2,

$$E\{|\xi_i - E(\xi_i)|^p\} \leqq K^{p-2} p! \operatorname{Var}(\xi_i),$$

alors pour tout nombre entier naturel $n \geqq 1$ et pour tout nombre réel u strictement positif, on a :

$$\Pr\{|S_n - E(S_n)| \geqq u\} \leqq 2\exp\left(-\frac{u^2}{4\operatorname{Var}(S_n) + 2Ku}\right).$$

Preuve. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$E(\xi_n) = m_n; \qquad \operatorname{Var}(\xi_n) = \sigma_n^2$$
$$E(S_n) = M_n; \qquad \operatorname{Var}(S_n) = s_n^2.$$

Soit t un nombre réel tel que $0 \leqq t < \frac{1}{K}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, et tout $k \geqq 2$,

$$\frac{1}{k!} E\{t^k |\xi_i - m_i|^k\} \leqq t^2 \sigma_i^2 (tK)^{k-2}$$

est le terme général d'une série convergente, si bien que, d'après un théorème classique d'intégration, la série de terme général :

$$t^k (\xi_i - m_i)^k / k!$$

est presque sûrement convergente et d'espérance $E\{e^{t(\xi_i - m_i)}\}$; on peut alors procéder aux majorations suivantes

$$\begin{aligned} E\{e^{t(\xi_i - m_i)}\} &\leqq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} t^k E\{|\xi_i - m_i|^k\}/k! \\ &\leqq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} t^k \sigma_i^2 K^{k-2} = 1 + t^2 \sigma_i^2/(1 - tK) \\ &\leqq \exp(t^2 \sigma_i^2/(1 - tK)). \end{aligned}$$

Compte tenu de l'indépendance des variables aléatoires $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, on obtient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$E\{e^{t(S_n - M_n)}\} = \prod_{i=1}^{n} E\{e^{t(\xi_i - m_i)}\} \leqq \exp(t^2 s_n^2/(1 - tK)),$$

et pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\Pr\{S_n - M_n \geqq \varepsilon s_n\} \leqq \exp(-t\varepsilon s_n + t^2 s_n^2/(1 - tK)).$$

Soit alors :

$$t_n = \varepsilon / (2 s_n + \varepsilon K) ;$$

le cas où s_n^2 est nul étant trivial, on vérifie immédiatement que $0 \leqq t_n < 1/K$, ce qui permet d'écrire :

$$\Pr\{ |S_n - M_n| \geqq \varepsilon s_n \} \leqq \exp(-s_n \varepsilon^2 / (4 s_n + 2 \varepsilon K)).$$

Une majoration similaire est obtenue pour $\Pr\{ S_n - M_n \leqq -\varepsilon s_n \}$, si bien que :

$$\Pr\{ |S_n - M_n| \geqq \varepsilon s_n \} \leqq 2 \exp(-s_n \varepsilon^2 / (4 s_n + 2 \varepsilon K)).$$

Le résultat annoncé s'en déduit, en posant $u = \varepsilon s_n$.

Nous supposerons, dans la suite, que la mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$ satisfait à la double condition suivante :

$$(5) \begin{cases} \text{(i) } \mu^{\bullet} \text{ possède des moments de tous ordres.} \\ \text{(ii) Il existe un nombre réel } K>0 \text{ tel que pour tou } B \in \mathscr{B}_b, \text{ et } p \in \mathbb{N} \\ \text{vérifiant } p \geqq 2, \\ \qquad E\{ |\mu^{\bullet}(B) - \mu(B)|^p \} \leqq K^{p-2} p! \operatorname{Var}\{ \mu^{\bullet}(B) \}. \end{cases}$$

La condition (5) (ii) apparaît, au premier abord, peu naturelle, et appelle un certain nombre de remarques. Nous désignerons pour tous $B \in \mathscr{B}_b$, et $p \in \mathbb{N}$, le moment centré d'ordre p (resp. moment absolu centré d'ordre p) de la variable aléatoire $\mu^{\bullet}(B)$ par :

$$m_p(B) = E\{ (\mu^{\bullet}(B) - \mu(B))^p \}$$

[resp. $a_p(B) = E\{ |\mu^{\bullet}(B) - \mu(B)|^p \}$].

Tout d'abord, la condition (5) entraîne, de façon immédiate :

$$(6) \qquad \varlimsup_{p \to +\infty} \sup_{B \in \mathscr{B}_b} \left(\frac{a_p(B)}{p!} \right)^{1/p} < +\infty.$$

Inversement, en supposant l'existence des moments de tous ordres, la condition (6), jointe à la condition supplémentaire :

$$(7) \qquad \sup_{B \in \mathscr{B}_b} \operatorname{Var}\{ \mu^{\bullet}(B) \} < +\infty,$$

implique la condition (5). En effet, soit M un majorant de la suite

$$\left(\sup_{B\in\mathscr{B}_b}\left(\frac{a_p(B)}{p!}\right)^{1/p}\right),$$

et soit

$$V=\sup_{B\in\mathscr{B}_b}\operatorname{Var}\{\mu^{\bullet}(B)\};$$

comme $\left(\frac{M^2}{V}\right)^{1/p-2}$ tend vers 1 lorsque $p\to+\infty$, il est possible de choisir K de façon que l'on ait, pour tout $p\in\mathbb{N}$:

$$K>\max(M,\sqrt{V})\left(\frac{M^2}{V}\right)^{1/p-2};$$

la condition (5) se trouve alors vérifiée.

En second lieu, la condition (6) est vérifiée dès que l'on a :

(8) $$\lim_{q\to+\infty}\sup_{B\in\mathscr{B}_b}\left(\frac{m_{2q}(B)}{(2q)!}\right)^{1/2q}<+\infty.$$

Ce résultat découle de l'inégalité de Liapounov :

$$(a_{p-1}(B))^{1/p-1}\leqq(a_p(B))^{1/p},$$

et des relations évidentes :

$$\left(\frac{a_{p-1}(B)}{(p-1)!}\right)^{1/p-1}\leqq\left(\frac{a_p(B)}{p!}\right)^{1/p}\frac{(p!)^{1/p}}{[(p-1)!]^{1/p-1}};$$

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{(p!)^{1/p}}{(p-1)!^{1/p-1}}=1$$

$$a_{2q}(B)=m_{2q}(B).$$

Finalement, la condition (5) (ii) peut être remplacée par celle, plus maniable :

(9) $$m_{2p}(B)\leqq K^{2p-2}(2p)!\,m_2(B).$$

A titre d'exemple de mesure aléatoire vérifiant la condition (5), citons certaines mesures aléatoires de Poisson : pour une mesure positive sur l'espace métrique séparable $\mathscr{X}$, $\mu^{\bullet}(B)$ suit la loi de Poisson de paramètre

$\mu(B)$. En supposant que

$$\sup_{B \in \mathscr{B}_b} \mu(B) < +\infty,$$

la condition (9) est assurée au moyen de la proposition suivante :

PROPOSITION 2. — *Soit ξ une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson dont le paramètre λ appartient à l'intervalle* [0, 1], *et m_n son moment centré d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$). Il existe un nombre réel* K *(indépendant de λ) tel que pour tout nombre entier naturel n vérifiant $n \geqq 2$, on ait :*

$$m_n \leqq K^{n-2} n!\,\lambda.$$

Preuve. — Nous raisonnons par récurrence sur n. La relation s'obtient immédiatement pour $n=2$. Utilisons, par ailleurs, la fonction caractéristique de la variable aléatoire centrée $\xi - E(\xi)$:

$$\varphi(t) = \exp[\lambda(e^{it} - it - 1)],$$

avec laquelle nous avons, pour tout entier naturel n :

$$m_n = i^n \varphi^{(n)}(0).$$

Posons, pour tout réel t :

$$u(t) = \lambda[e^{it} - it - 1];$$

les relations évidentes :

$$\varphi'(t) = u'(t)\,\varphi(t)$$

$$\varphi^{(n)}(0) = \sum_{j=0}^{n=1} \binom{n-1}{j} \varphi^{(j)}(0)\,u^{(n-j)}(0),$$

$$u'(0) = 0$$

$$u^{(n-j)}(0) = i^{n-j}\lambda \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq j \leqq n-2,$$

entraînent :

$$\frac{\varphi^{(n)}(0)}{i^n} = \lambda \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{i^j}.$$

En supposant que pour $0 \leqq j \leqq n$,

$$\frac{\varphi^{(j)}(0)}{i^j} \leqq K^{j-2} j!\,\lambda,$$

et que $\lambda \in [0, 1]$, on obtient :

$$\frac{\varphi^{(n)}(0)}{i^n} \leqq \lambda \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j} j!\, K^{j-2}.$$

Il reste donc à établir que :

$$\sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j} \frac{j!}{n!} K^{j-2} \leqq K^{n-2};$$

un calcul facile montre que :

$$\sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j} \frac{j!}{n!} K^{j-2} = K^{n-2} \frac{1}{nK} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(1/K)^j}{j!} - 1 \right) \leqq K^{n-2} \frac{1}{K} (e^{1/K} - 1);$$

or il existe un réel α tel que $0 < \alpha < 1$, et el que pour tout $0 < x < \alpha$, on ait :

$$x(e^x - 1) \leqq 1.$$

La propriété est alors démontrée en prenant $K > \frac{1}{\alpha}$. ■

Revenant au cas général, nous appliquerons une première fois la proposition 1 à la mesure aléatoire $\eta_n^{\bullet}$:

PROPOSITION 3. — *La condition* (5) *implique, pour tout borélien* B, *pour tout nombre réel* $u > 0$ *et pour tout nombre entier naturel* $n \geqq 1$, *l'inégalité :*

$$\Pr\{ | \eta^{\bullet}{}_n(B) | > u \} \, 2 \exp\left(- \frac{u^2}{4[\Phi(B)]^2 + (2Ku/\sqrt{n})} \right).$$

Preuve. — Considérons, pour tout $B \in \mathscr{B}_b$, la variable aléatoire :

$$\xi_i = \mu^{\bullet}{}_i(B).$$

La suite $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ est constituée de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées; en reprenant les notations de la proposition 1, on a :

$$\operatorname{Var} S_n = n \operatorname{Var}\{ \mu^{\bullet}(B) \}$$
$$S_n - E(S_n) = \sqrt{n}\, \eta_n^{\bullet}(B).$$

Il en résulte alors :

$$\Pr\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\mu_i(\mathrm{B})-n\,\mu(\mathrm{B})\right|\geqq u\sqrt{n}\right\}\leqq 2\exp-\frac{nu^2}{4\,n\,\mathrm{Var}\{\mu^{\bullet}(\mathrm{B})\}+2\mathrm{K}u\sqrt{n}}.$$

Sachant que :

$$\eta_n^{\bullet}(\mathrm{B})=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}[\mu_i(\mathrm{B})-\mu(\mathrm{B})]$$

et que :

$$\mathrm{Var}\{\mu^{\bullet}(\mathrm{B})\}\leqq[\Phi(\mathrm{B})]^2,$$

on en déduit l'inégalité annoncée. ■

Nous utiliserons une seconde fois l'inégalité de Bernstein-Fréchet pour étudier l'oscillation de $\eta_n^{\bullet}$ le long d'une suite ρ-approximante. Nous supposons que la classe $\mathscr{C}$ possède une entropie relativement à $\mu^{\bullet}$. Soient $\rho>0$ et S_ρ une suite ρ-approximante pour $\mathscr{C}$, notée :

$$\mathrm{S}_\rho=(\mathrm{A}_q)_{1\leqq q\leqq\Gamma(\rho)}.$$

A tout borélien borné B appartenant à la classe $\mathscr{C}$ sont associés deux indices $s(\mathrm{B})$ et $t(\mathrm{B})$ tels que :

$$\mathrm{A}_{s(\mathrm{B})}\subset\mathrm{B}\subset\mathrm{A}_{t(\mathrm{B})}$$
$$\Phi(\mathrm{A}_{t(\mathrm{B})}-\mathrm{A}_{s(\mathrm{B})})<\rho.$$

Considérons la variable aléatoire réelle :

$$\omega_{n,\rho}=\max_{[\mathrm{S}_\rho]}\left|\eta_n^{\bullet}(\mathrm{A}_t)-\eta_n^{\bullet}(\mathrm{A}_s)\right|,$$

où le maximum est pris sur la classe $[\mathrm{S}_\rho]$ des couples de boréliens A_t et A_s de la suite S_ρ tels que :

$$\mathrm{A}_s\subset\mathrm{A}_t$$
$$\Phi(\mathrm{A}_t-\mathrm{A}_s)<\rho$$
$$(s,t)\in\{1,2,\ldots,\Gamma(\rho)\}^2.$$

La variable aléatoire $\omega_{n,\rho}$ sera appelée *oscillation de* $\eta_n^{\bullet}$ *le long de* S_ρ.

LEMME 1. — *Si la mesure aléatoire* $\mu^{\bullet}$ *satisfait à la condition* (5), *alors pour tous nombres réels strictement positifs* ρ *et* u, *et pour tout nombre entier naturel non nul* n, *nous avons :*

$$\Pr\{\omega_{n,\rho}>u\} \leqq 2[\Gamma(\rho)]^2 \exp - \frac{u^2}{4\rho^2+(2\mathrm{K}u/\sqrt{n})}.$$

Preuve. — Comme $\mathrm{A}_s \subset \mathrm{A}_t$, nous avons :

$$\eta_n^{\bullet}(\mathrm{A}_t)-\eta_n^{\bullet}(\mathrm{A}_s)=\eta_n^{\bullet}(\mathrm{A}_t-\mathrm{A}_s),$$

et, par conséquent, l'événement $\{\omega_{n,\rho}>u\}$ est contenu dans la réunion des événements :

$$\{|\eta_n^{\bullet}(\mathrm{A}_t-\mathrm{A}_s)|>u\},$$

les indices s et t décrivant l'ensemble :

$$\{1, 2, \ldots, \Gamma(\rho)\}.$$

Il en résulte l'inégalité :

$$\Pr\{\omega_{n,\rho}>u\} \leqq \sum_{(s,t)\in\{1,2,\ldots,\Gamma(\rho)\}^2} \Pr\{|\eta_n^{\bullet}(\mathrm{A}_t-\mathrm{A}_s)|>u\}.$$

Les différents termes de la somme sont ensuite majorés uniformément au moyen de la proposition 2, et de l'inégalité :

$$\Phi(\mathrm{A}_t-\mathrm{A}_s)<\rho. \blacksquare$$

V. CONSTRUCTION D'UN MODULE D'APPROXIMATION A PARTIR D'UNE CONDITION INTÉGRALE PORTANT SUR L'APPLICATION Γ

Nous supposons que la mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$ vérifie la condition (5) relative aux moments, que la classe $\mathscr{C}$ possède une entropie relative à $\mu^{\bullet}$ et vérifie la condition intégrale :

$$(10) \qquad \int_0^1 [\operatorname{Log}\Gamma(x^2)]^{1/2}\,dx<\infty.$$

La condition (10) implique :

$$\lim_{x \to 0_+} x \operatorname{Log} \Gamma(x) = 0 \tag{11}$$

et

$$\int_0^1 [\operatorname{Log} \Gamma(y)]^{1/2} y^{-1/2} \, dy < \infty. \tag{12}$$

La relation (12) entraîne à son tour, du fait de la décroissance de l'application $y \to [\operatorname{Log} \Gamma(y)]^{1/2} y^{-1/2}$,

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{1}{K\,2^l} \operatorname{Log} \Gamma\left(\frac{1}{K\,2^l} \right) \right]^{1/2} < \infty. \tag{13}$$

Fixons $0 < \varepsilon < 1$ et choisissons un nombre réel α tel que $0 < \alpha < 1/3$, et un nombre entier naturel l_0 tels que l'on ait simultanément les relations (14) à (17) :

$$\Gamma(x) \leqq \exp \frac{\varepsilon^2}{4\,096\,(K+1)\,x}, \quad \text{pour tout nombre réel } x \tag{14}$$

tel que $0 < x \leqq \alpha$, d'après (11);

$$\exp - \frac{\varepsilon^2}{2\,048\,(K+1)\,\alpha} \leqq \frac{\varepsilon}{32}; \tag{15}$$

$$\sum_{l=l_0}^{\infty} \left[\frac{1}{K\,2^l} \operatorname{Log} \Gamma\left(\frac{1}{K\,2^l} \right) \right]^{1/2} \leqq \frac{\varepsilon}{32\sqrt{10(K+2)}}, \quad \text{d'après (13)}; \tag{16}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \exp\left(- \frac{K\,\varepsilon^2\, 2^{l+l_0}}{5(K+2)\,2^{11}\,(l+1)^4} \right) \leqq \frac{\varepsilon}{32}. \tag{17}$$

En outre, désignons par r un nombre entier naturel tel que l'on ait simultanément :

$$r \geqq l_0 \tag{18}$$

et :

$$\frac{1}{K\,2^r} \leqq \alpha < \frac{1}{3}. \tag{19}$$

Posons enfin :

$$(20) \qquad \rho_\varepsilon = \frac{1}{K\,2^r};$$

dans cette notation, l'indice ε rappelle que r dépend de ε, par l'intermédiaire de (18) et de (19).

Considérons maintenant une suite ρ_ε-approximante pour $\mathscr{C}$ relativement à $\mu^\bullet$:

$$S_{\rho_\varepsilon} = (A_1, A_2, \ldots, A_{\Gamma(\rho_\varepsilon)});$$

nous étudions l'oscillation relative à cette suite. Pour tout borélien B de la classe $\mathscr{C}$ on notera $A_{s(B)}$ et $A_{t(B)}$ tous boréliens de classe S_{ρ_ε} tels que l'on ait simultanément :

$$(21) \qquad A_{s(B)} \subset B \subset A_{t(B)}$$

$$(22) \qquad \Phi(A_{t(B)} - A_{s(B)}) < \rho_\varepsilon.$$

DÉFINITION. — *Le nombre réel strictement positif* ε *étant donné, nous appellerons* oscillation de $\eta_n^\bullet$ relative à la suite S_{ρ_ε} *la variable aléatoire réelle :*

$$(23) \qquad O_{n,\varepsilon} = \sup_{\substack{(B, B') \in \mathscr{C}^2 \\ d(B, B') < \rho_\varepsilon}} \left| \eta_n^\bullet(A_{t(B)}) - \eta_n^\bullet(A_{t(B')}) \right|.$$

PROPOSITION 4. — *Sous les hypothèses* (5) *et* (6), *nous avons pour n assez grand :*

$$(24) \qquad \Pr\left\{ O_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{2} \right\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Preuve. — L'inégalité triangulaire relative à la pseudo-distance d sur l'ensemble $\mathscr{B}_b$ donne, pour tous éléments B et B′ de la classe $\mathscr{C}$:

$$d(A_{t(B)}, A_{t(B')}) \leqq d(A_{t(B)}, B) + d(B, B') + d(B', A_{t(B')}),$$

puis, par définition de d, et d'après (21) et (22) :

$$d(A_{t(B)}, A_{t(B')}) \leqq \Phi(A_{t(B)} - B) + d(B, B') + \Phi(A_{t(B')} - B') \leqq 2\rho_\varepsilon + d(B, B').$$

Il en résulte que la condition :

$$d(B, B') < \rho_\varepsilon$$

implique :

$$d(A_{t\,(B)}, A_{t\,(B')}) < 3\,\rho_\varepsilon.$$

De ce fait, en posant :

$$\pi_{n,\,\varepsilon} = \Pr\left\{ \sup_{[3\,\rho_\varepsilon]} \left| \eta_n^\bullet(A_t) - \eta_n^\bullet(A_s) \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

où le supremum est pris relativement à la classe $[3\,\rho_\varepsilon]$ des couples (s, t) tels que l'on ait simultanément :

$$(25) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (s,\, t) \in \{1, 2, \ldots, \Gamma(\rho_\varepsilon)\}^2 \\ \quad d(A_s, A_t) < 3\,\rho_\varepsilon, \end{array} \right.$$

nous obtenons :

$$\Pr\left\{ O_{n,\,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{2} \right\} < \pi_{n,\,\varepsilon}.$$

Par ailleurs, en remarquant les relations évidentes :

$$\begin{aligned} &\left| \eta_n^\bullet(A_t) - \eta_n^\bullet(A_s) \right| \\ &\quad = \left| \eta_n^\bullet(A_t - A_s) + \eta_n^\bullet(A_t \cap A_s) - \eta_n^\bullet(A_s \cap A_t) - \eta_n^\bullet(A_s - A_t) \right| \\ &\qquad \leqq \left| \eta_n^\bullet(A_t - A_s) \right| + \left| \eta_n^\bullet(A_s - A_t) \right|, \end{aligned}$$

nous avons l'inclusion :

$$\begin{aligned} &\left\{ \left| \eta_n^\bullet(A_t) - \eta_n^\bullet(A_s) \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \\ &\qquad \subset \left\{ \left| \eta_n^\bullet(A_t - A_s) \right| > \frac{\varepsilon}{4} \right\} \cup \left\{ \left| \eta_n^\bullet(A_s - A_t) \right| > \frac{\varepsilon}{4} \right\} \end{aligned}$$

et, compte tenu de la proposition 3,

$$\begin{aligned} &\Pr\left\{ \left| \eta_n^\bullet(A_t) - \eta_n^\bullet(A_s) \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \\ &\qquad \leqq 2 \exp\left(\frac{\varepsilon^2}{64\,[\Phi(A_t - A_s)]^2 + (8\,K\,\varepsilon/\sqrt{n})} \right) \\ &\qquad\qquad + 2 \exp\left(- \frac{\varepsilon^2}{64\,[\Phi(A_s - A_t)]^2 + (8\,K\,\varepsilon/\sqrt{n}} \right). \end{aligned}$$

Sachant que

$$\Phi(A_t - A_s) \leqq \Phi(A_t \triangle A_s) = d(A_t, A_s) < 3\,\rho_\varepsilon,$$

que, d'après (19) et (20), $3\,\rho_\varepsilon < 1$, que, par conséquent $[\Phi(A_t - A_s)]^2 < 3\,\rho_\varepsilon$, et qu'une majoration analogue vaut pour $\Phi(A_s - A_t)$, nous obtenons :

$$\Pr\left\{|\eta_n^{\bullet}(A_t) - \eta_n^{\bullet}(A_s)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leqq 4\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{192\,\rho_\varepsilon + (8\,K\,\varepsilon/\sqrt{n})}\right).$$

Supposons que l'on ait :

$$\sqrt{n} \geqq \frac{\varepsilon\,K^2\,2^r}{8(16\,K+13)}. \tag{26}$$

Nous obtiendrons, d'après (20) :

$$\frac{K\,\varepsilon}{\sqrt{n}} \leqq 8(16\,K+13)\,\rho_\varepsilon$$

et, compte tenu de la condition (25) :

$$\pi_{n,\,\varepsilon} \leqq 4\,[\Gamma(\rho_\varepsilon)]^2 \exp - \frac{\varepsilon^2}{1\,024(K+1)\,\rho_\varepsilon}.$$

Les relations (14) et (19) donnent alors :

$$\pi_{n,\,\varepsilon} \leqq 4\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\,048(K+1)\,\rho_\varepsilon}\right),$$

et, enfin, d'après (15), et sous réserve de la condition (26),

$$\Pr\left\{O_{n,\,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{2}\right\} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad \blacksquare$$

Il nous faut aller plus loin, en introduisant un nouveau module d'approximation plus fin que le précédent. Pour tout nombre entier naturel n non nul, désignons par $p(n)$ l'unique entier naturel tel que l'on ait :

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{n}}{\varepsilon\,K\,2^{p(n)+r-4}} \leqq 1, \tag{27}$$

et posons :

$$\rho_\varepsilon^n = \frac{1}{K\, 2^{p(n)+r}}; \tag{28}$$

dans cette notation, l'indice ε rappelle que l'entier naturel r dépend de ε, par l'intermédiaire des relations (14), (15), (16), (18), (19). Considérons alors la suite ρ_ε^n-approximante :

$$(A_{p(n),\, q})_{1 \leqq q \leqq \Gamma(\rho_\varepsilon^n)}.$$

Ainsi, à tout borélien B de la classe $\mathscr{C}$ sont associés deux indices :

$$s[p(n), B] \qquad \text{et} \qquad t[p(n), B],$$

tels que :

$$\begin{cases} A_{p(n),\, s[p(n),\, B]} \subset B \subset A_{p(n),\, t[p(n),\, B]}. \\ \Phi(A_{p(n),\, t[p(n),\, B]} - A_{p(n),\, s[p(n),\, B]}) < \rho_\varepsilon^n. \end{cases} \tag{29}$$

Compte tenu de la majoration suivante, qui est une conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left\{ \left| \eta_n^\bullet(B) - \eta_n^\bullet(A_{t(B)}) \right| > \frac{\varepsilon}{4} \right\} & \\ \subset \left\{ \left| \eta_n^\bullet(B) - \eta_n^\bullet(A_{p(n),\, t[p(n),\, B]}) \right| > \frac{\varepsilon}{8} \right\} & \\ \cup \left\{ \left| \eta_n^\bullet(A_{p(n),\, t[p(n),\, B]}) - \eta_n^\bullet(A_{t(B)}) \right| > \frac{\varepsilon}{8} \right\}&, \end{aligned} \tag{30}$$

nous introduirons les variables aléatoires réelles :

$$E'_{n,\varepsilon} = \sup_{B \in \mathscr{C}} \left| \eta_n^\bullet(B) - \eta_n^\bullet(A_{p(n),\, t[p(n),\, B]}) \right|, \tag{31}$$

qui sera appelée dans ce qui suit *erreur d'approximation relative à la suite* $S_{\rho_\varepsilon^n}$, et :

$$E''_{n,\varepsilon} = \sup_{B \in \mathscr{C}} \left| \eta_n^\bullet(A_{p(n),\, t[p(n),\, B]}) - \eta_n^\bullet(A_{t(B)}) \right|, \tag{32}$$

appelée erreur *d'approximation entre les suites* S_{ρ_ε} *et* $S_{\rho_\varepsilon^n}$.

Nous serons amenés, dans les paragraphes qui suivent, à établir les inégalités :

$$\Pr\left\{E'_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8}\right\} \leqq \frac{\varepsilon}{8}$$

et

$$\Pr\left\{E''_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8}\right\} \leqq \frac{\varepsilon}{8}.$$

Étudions, en premier lieu, l'erreur d'approximation relative à la suite $S_{\rho_\varepsilon^n}$. Nous touchons ici le nœud du problème car, outre une nouvelle application de l'inégalité de Bernstein-Fréchet, la proposition qui suit fait intervenir la définition même de la mesure aléatoire empirique normalisée d'ordre n :

$$\eta_n^\bullet = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\mu_i^\bullet - \mu).$$

Proposition 5. — *Toujours sous les hypothèses* (5) *et* (10), *nous avons, pour tout entier naturel non nul n :*

(33) $$Pr\left\{E'_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8}\right\} \leqq \frac{\varepsilon}{8}.$$

Preuve. — A partir de la définition de $\eta_n^\bullet$, rappelée ci-dessus, nous avons, pour tout borélien B appartenant à la classe $\mathscr{C}$, pour tout nombre entier naturel n, et pour le borélien :

$$A_{p(n),\, t[p(n),\, B]}$$

qui leur est associé par (28) et (29) :

$$\begin{aligned}\eta_n^\bullet(B) - \eta_n^\bullet(A_{p(n),\, t[p(n),\, B]}) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} [\mu_i^\bullet(B) - \mu_i^\bullet(A_{p(n),\, t[p(n),\, B]})] \\ &\quad + \sqrt{n}\,[\mu(A_{p(n),\, t[p(n),\, B]}) - \mu(B)].\end{aligned}$$

Comme la mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$ est positive, la double inclusion figurant dans (29) donne les inégalités :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}[\mu_i^{\bullet}(\mathrm{B})-\mu_i^{\bullet}(\mathrm{A}_{p(n),\,t[p(n),\,\mathrm{B}]})]\leqq 0$$

$$\mu(\mathrm{B})\geqq\mu(\mathrm{A}_{p(n),\,s[p(n),\,\mathrm{B}]}),$$

et par conséquent :

$$\eta_n^{\bullet}(\mathrm{B})-\eta_n^{\bullet}(\mathrm{A}_{p(n),\,t[p(n),\,\mathrm{B}]})\leqq\sqrt{n}\,\mu(\mathrm{A}_{p(n),\,t[p(n),\,\mathrm{B}]}-\mathrm{A}_{p(n),\,s[p(n),\,\mathrm{B}]}).$$

En tenant compte de (4), de (29), et de la partie droite de la double inégalité (26), nous obtenons alors :

$$(34)\qquad \eta_n^{\bullet}(\mathrm{B})-\eta_n^{\bullet}(\mathrm{A}_{p(n),\,t[p(n),\,\mathrm{B}]})\leqq\frac{\varepsilon}{16}.$$

On établit de la même façon que :

$$\eta_n^{\bullet}(\mathrm{A}_{p(n),\,s[p(n),\,\mathrm{B}]})-\eta_n^{\bullet}(\mathrm{B})\leqq\frac{\varepsilon}{16}.$$

Comme

$$\begin{aligned}\eta_n^{\bullet}(\mathrm{A}_{p(n),\,t[p(n),\,\mathrm{B}]})-\eta_n^{\bullet}(\mathrm{B})\\ &=\eta_n^{\bullet}(\mathrm{A}_{p(n),\,t[p(n),\,\mathrm{B}]}-\eta_n^{\bullet}(\mathrm{A}_{p(n),\,s[p(n),\,\mathrm{B}]})\\ &\qquad+\eta_n^{\bullet}(\mathrm{A}_{p(n),\,s[p(n),\,\mathrm{B}]})-\eta_n^{\bullet}(\mathrm{B}),\end{aligned}$$

on déduit de ce qui précède :

$$\begin{aligned}(35)\quad \eta_n^{\bullet}(\mathrm{A}_{p(n),\,t[p(n),\,\mathrm{B}]})-\eta_n^{\bullet}(\mathrm{B})\\ &\leqq\eta_n^{\bullet}(\mathrm{A}_{p(n),\,t[p(n),\,\mathrm{B}]})-\eta_n^{\bullet}(\mathrm{A}_{p(n),\,s[p(n),\,\mathrm{B}]})+\frac{\varepsilon}{16}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, l'application du lemme donne :

$$\begin{aligned}(36)\quad \Pr\Big\{\sup_{[\mathrm{S}_{\rho_\varepsilon^n}]}\big|\,\eta_n^{\bullet}(\mathrm{A}_{p(n),\,t[p(n),\,\mathrm{B}]})\\ &-\eta_n^{\bullet}(\mathrm{A}_{p(n),\,s[p(n),\,\mathrm{B}]})\big|>\frac{\varepsilon}{16}\Big\}\end{aligned}$$

$$\leqq 2[\Gamma(\rho_\varepsilon^n)]^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{256[4(\rho_\varepsilon^n)^2+(K\varepsilon/8\sqrt{n})]}\right).$$

Nous avons, d'après (28), (19) et (20) :

$$\rho_\varepsilon^n = \frac{1}{K\,2^{p(n)+r}} \leqq \frac{1}{K\,2^r} < 1,$$

d'où il résulte :

$$(\rho_\varepsilon^n)^2 \leqq \rho_\varepsilon^n.$$

De plus, la partie gauche de la double inégalité (27) implique :

$$\frac{K\varepsilon}{8\sqrt{n}} \leqq 4K\rho_\varepsilon^n,$$

et d'après (14) et (19), nous avons :

$$\Gamma(\rho_\varepsilon^n) \leqq \exp\frac{\varepsilon^2}{4096(K+1)\rho_\varepsilon^n}.$$

Il résulte alors des trois dernières inégalités que le second membre de (36) est majoré par :

$$2\exp-\frac{\varepsilon^2}{2048(K+1)\rho_\varepsilon^n},$$

ou encore, d'après (19) et (15), par $\frac{\varepsilon}{16}$.

Ce résultat, joint à l'inégalité (35) donne la relation annoncée :

$$\Pr\left\{E'_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8}\right\} \leqq \frac{\varepsilon}{8}. \blacksquare$$

En vue d'étudier l'erreur d'approximation entre les suites S_{ρ_ε} et $S_{\rho_\varepsilon^n}$, il convient d'introduire un nouveau module d'approximation. Pour tout nombre entier naturel l, posons :

$$\rho_{\varepsilon,l} = \frac{1}{K\,2^{l+r}},$$

et considérons une suite $\rho_{\varepsilon, l}$ approximante :

$$S_{\varepsilon, l} = (A_{l, q})_{1 \leqq q \leqq \Gamma(\rho_{\varepsilon, l})}.$$

Ainsi, à tout borélien B de la classe $\mathscr{C}$ sont associés deux indices $s(l, \mathrm{B})$ et $t(l, \mathrm{B})$ appartenant à l'ensemble des nombres entiers $\{1, 2, \ldots, \Gamma(\rho_{\varepsilon, l})\}$, tels que :

$$\text{(37)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} A_{l, s(l, \mathrm{B})} \subset \mathrm{B} \subset A_{l, t(l, \mathrm{B})} \\ \Phi(A_{l, t(l, \mathrm{B})} - A_{l, s(l, \mathrm{B})}) < \rho_{\varepsilon, l} \end{array} \right. .$$

Posons aussi, pour $l \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{C}$,

$$\tilde{A}_{l, \mathrm{B}} = A_{l, t(l, \mathrm{B})} - A_{l+1, t(l+1, \mathrm{B})}$$
$$\tilde{A}'_{l, \mathrm{B}} = A_{l+1, t(l+1, \mathrm{B})} - A_{l, t(l, \mathrm{B})}.$$

PROPOSITION 6. — *Sous les hypothèses* (5) *et* (10) *relatives à* $\mu^{\bullet}$ *et* $\mathscr{C}$, *nous avons, pour tout nombre réel* $u > 0$, *pour tout naturel* $n \geqq 1$, *pour tout* $l \in \{0, 1, \ldots, p(n) - 1\}$, *et pour tout borélien* B *appartenant à la classe* $\mathscr{C}$ *:*

$$\Pr\{|\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{l, \mathrm{B}})| > u\} \leqq 2 \exp\left(-\frac{u^2}{4\rho_{\varepsilon, l} + (2\mathrm{K}u/\sqrt{n})}\right),$$

ainsi qu'une relation analogue avec $\tilde{A}'_{l, \mathrm{B}}$.

Preuve. — Comme l'application Φ est croissante, les relations (37) ainsi que les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{l+1, s(l+1, \mathrm{B})} \subset \mathrm{B} \subset A_{l+1, t(l+1, \mathrm{B})} \\ \Phi(A_{l+1, t(l+1, \mathrm{B})} - A_{l+1, s(l+1, \mathrm{B})}) < \rho_{\varepsilon, l+1}, \end{array} \right.$$

qui en sont une conséquence immédiate, impliquent :

$$\Phi(\tilde{A}_{l, \mathrm{B}}) < \rho_{\varepsilon, l}$$
$$\Phi(\tilde{A}'_{l, \mathrm{B}}) < \rho_{\varepsilon, l+1}.$$

Par ailleurs, la proposition 3 donne :

$$\Pr\{|\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{l, \mathrm{B}})| > u\} \leqq 2 \exp - \frac{u^2}{4[\Phi(\tilde{A}_{l, \mathrm{B}})]^2 + (2\mathrm{K}u/\sqrt{n})}.$$

Sachant que

$$\Phi(\tilde{A}'_{l, \mathrm{B}}) \leqq \rho_{\varepsilon, l+1} \leqq \rho_{\varepsilon, l},$$

et que

$$(\rho_{\varepsilon, l})^2 \leqq \rho_{\varepsilon, l},$$

du fait que : $K 2^{r+l} \geqq K 2^r \geqq 1$, d'après (19), on obtient les inégalités annoncées. ■

Nous introduisons, en outre, une suite $(u_{\varepsilon, l})_{l \in \mathbb{N}}$ de modules d'approximation. Posons, pour tout nombre entier naturel l :

$$(38) \qquad u_{\varepsilon, l} = \max\left(\frac{\varepsilon}{32(l+1)^2}, [10(K+2)\,\rho_{\varepsilon, l+1} \operatorname{Log}\Gamma(\rho_{\varepsilon, l+1})]^{1/2}\right).$$

LEMME 2. — *La suite* $(u_{\varepsilon, l})_{l \in \mathbb{N}}$ *définie par* (38) *vérifie les propriétés suivantes :*

$$(39) \qquad \sum_{l \in \mathbb{N}} u_{\varepsilon, l} < \frac{\varepsilon}{16}.$$

(40) *Pour tout nombre entier naturel l,*

$$\Gamma(\rho_{\varepsilon, l+1}) \leqq \exp\frac{(u_{\varepsilon, l})^2}{10(K+2)\,\rho_{\varepsilon, l+1}}.$$

(41) *Pour tout nombre entier naturel l tel que* $l \in \{0, 1, \ldots, p(n)-1\}$,

$$u_{\varepsilon, l} < \rho_{\varepsilon, l}\sqrt{n}.$$

Preuve. — 1° Du fait que :

$$\sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{(l+1)^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

nous tirons, de façon immédiate :

$$\sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{32(l+1)^2} < \frac{10\,\varepsilon}{192}.$$

Par ailleurs, du fait que $r \geqq l_0$ [hypothèse (18)], et d'après (16), nous avons :

$$\sum_{l \in \mathbb{N}} [\rho_{\varepsilon, l+1} \operatorname{Log}\Gamma(\rho_{\varepsilon, l+1})]^{1/2}$$
$$= \sum_{l \geqq r+1} \left[\frac{1}{K 2^l} \operatorname{Log}\Gamma\left(\frac{1}{K 2^l}\right)\right]^{1/2} \leqq \frac{\varepsilon}{32\sqrt{10(K+2)}} \leqq \frac{\varepsilon}{96}.$$

L'inégalité (40) en résulte alors.

2° Par définition même de $u_{\varepsilon, l}$, nous avons :

$$[5(4+2\mathrm{K})\,\rho_{\varepsilon, l+1} \operatorname{Log} \Gamma(\rho_{\varepsilon, l+1})]^{1/2} \leqq u_{\varepsilon, l},$$

et par conséquent :

$$\Gamma(\rho_{\varepsilon, l+1}) \leqq \exp \frac{(u_{\varepsilon, l})^2}{10(K+2)\,\rho_{\varepsilon, l+1}}.$$

3° Nous avons, d'après (39) :

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad u_{\varepsilon, l} \leqq \sum_{l \in \mathbb{N}} u_{\varepsilon, l} < \frac{\varepsilon}{16},$$

et, d'après la partie gauche de l'inégalité (27) :

$$\frac{\varepsilon}{16} < \frac{2\sqrt{n}}{\mathrm{K}\, 2^{p(n)+r}}.$$

L'inégalité annoncée résulte alors de ce que : $l \leqq p(n)-1$. ■

PROPOSITION 7. — *Toujours sous les hypothèses* (5) *et* (10), *nous avons, pour n assez grand :*

$$\Pr\left\{ \sum_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} \sup_{\mathrm{B} \in \mathscr{C}} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{\mathrm{A}}_{l, \mathrm{B}})| > \frac{\varepsilon}{16} \right\} \leqq \frac{\varepsilon}{16},$$

ainsi qu'une inégalité analogue pour $\tilde{\mathrm{A}}'_{l, \mathrm{B}}$.

Preuve. — Raisonnons sur $\tilde{\mathrm{A}}_{l, \mathrm{B}}$; la démarche est analogue avec $\tilde{\mathrm{A}}'_{l, \mathrm{B}}$. D'après (39), nous avons les inclusions :

$$\left\{ \sum_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} \sup_{\mathrm{B} \in \mathscr{C}} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{\mathrm{A}}_{l, \mathrm{B}})| > \frac{\varepsilon}{16} \right\}$$
$$\subset \left\{ \sum_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} \sup_{\mathrm{B} \in \mathscr{C}} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{\mathrm{A}}_{l, \mathrm{B}})| > \sum_{l \in \mathbb{N}} u_{\varepsilon, l} \right\}$$
$$\subset \bigcup_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} \left\{ \sup_{\mathrm{B} \in \mathscr{C}} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{\mathrm{A}}_{l, B})| > u_{\varepsilon, l} \right\},$$

puis, en passant aux probabilités, l'inégalité :

$$(42) \quad \Pr\left\{ \sum_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} \sup_{\mathrm{B} \in \mathscr{C}} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{\mathrm{A}}_{l, \mathrm{B}})| > \frac{\varepsilon}{16} \right\}$$

$$\leqq \sum_{l=0}^{p(n)-1} \Pr\{\sup_{B \in \mathscr{C}} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{l,B})| > u_{\varepsilon,l}\}.$$

La proposition 6 donne, pour tout nombre entier naturel l :

$$\Pr\{|\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{l,B})| > u_{\varepsilon,l}\} \leqq 2\exp\left(-\frac{(u_{\varepsilon,l})^2}{4\rho_{\varepsilon,l}+(2Ku_{\varepsilon,l}/\sqrt{n})}\right).$$

Nous obtenons alors, d'après la définition de $\tilde{A}_{l,B}$ et celle des indices $t(l, B)$:

$$(43)\quad \Pr\{\sup_{B \in \mathscr{C}} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{l,B})| > u_{\varepsilon,l}\}$$

$$\leqq 2\Gamma(\rho_{\varepsilon,l})\Gamma(\rho_{\varepsilon,l+1})\exp\left(-\frac{(u_{\varepsilon,l})^2}{4\rho_{\varepsilon,l}+(2Ku_{\varepsilon,l}/\sqrt{n})}\right).$$

Comme l'application Γ est décroissante, et comme :

$$\rho_{\varepsilon,l}=\frac{1}{K\,2^{r+l}},$$

nous avons, pour tout nombre entier naturel $l \geqq 1$:

$$\Gamma(\rho_{\varepsilon,l}) \leqq \Gamma(\rho_{\varepsilon,l+1}).$$

Avec cette dernière inégalité, jointe à (40) et (41), le premier membre de (43) est majoré par :

$$2\exp-\frac{(u_{\varepsilon,l})^2}{10(K+2)\rho_{\varepsilon,l}},$$

ou encore, en tenant compte de (18) et de (38), par :

$$2\exp\left(-\frac{K\varepsilon^2\,2^{l+l_0}}{5(K+2)\,2^{11}(l+1)^4}\right).$$

Nous obtenons alors, d'après (42) et (17) :

$$\Pr\left\{\sum_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} \sup_{B \in \mathscr{C}} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{l,B})| > \frac{\varepsilon}{16}\right\}$$

$$\leqq 2\sum_{l=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{K\varepsilon^2\,2^{l+l_0}}{5(K+2)\,2^{11}(l+1)^4}\right) \leqq \frac{\varepsilon}{16}. \blacksquare$$

Nous sommes enfin à même de conclure pour l'erreur d'approximation entre les suites S_{ρ_ε} et $S_{\rho_\varepsilon^n}$:

PROPOSITION 8. — *Toujours sous les hypothèses* (5) *et* (10) *nous avons, pour tout entier naturel non nul n :*

$$\Pr\left\{ E''_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8} \right\} \leqq \frac{\varepsilon}{8}. \tag{44}$$

Preuve. — Observons d'abord que l'inégalité triangulaire entre nombres réels donne, pour tout nombre entier naturel n, et pour tout borélien B appartenant à la classe $\mathscr{C}$, les majorations :

$$\begin{aligned} (45)\quad & \left| \eta_n^{\bullet} (A_{p(n),\, t[p(n),\, B]}) - \eta_n^{\bullet} (A_{t(B)}) \right| \\ & \leqq \sum_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} \left| \eta_n^{\bullet} (A_{l,\, t(l,\, B)}) - \eta_n^{\bullet} (A_{l+1,\, t(l+1,\, B)}) \right| \\ & \leqq \sum_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} \left| \eta_n^{\bullet} (\tilde{A}_{l,\, B}) \right| + \sum_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} \left| \eta_n^{\bullet} (A'_{n,\, B}) \right|, \end{aligned}$$

et l'inclusion :

$$\begin{aligned} (46)\quad & \left\{ \sup_{B \in \mathscr{C}} \left| \eta_n^{\bullet} (A_{p(n),\, t[p(n),\, B]}) - \eta_n^{\bullet} (A_{t(B)}) \right| > \frac{\varepsilon}{8} \right\} \\ & \subset \left\{ \sum_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} \sup_{B \in \mathscr{C}} \left| \eta_n^{\bullet} (\tilde{A}_{l,\, B}) \right| > \frac{\varepsilon}{16} \right\} \\ & \cup \left\{ \sum_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} \sup_{B \in \mathscr{C}} \left| \eta_n^{\bullet} (\tilde{A}'_{l,\, B}) \right| > \frac{\varepsilon}{16} \right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons, en tenant compte de (32) :

$$\begin{aligned} \Pr\left\{ E''_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8} \right\} & \leqq \Pr\left\{ \sum_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} \sup_{B \in \mathscr{C}} \left| \eta_n^{\bullet} (\tilde{A}_{l,\, B}) \right| > \frac{\varepsilon}{16} \right\} \\ & + \Pr\left\{ \sum_{0 \leqq l \leqq p(n)-1} \sup_{B \in \mathscr{C}} \left| \eta_n^{\bullet} (A'_{l,\, B}) \right| > \frac{\varepsilon}{16} \right\}, \end{aligned}$$

et, d'après la proposition 6.

$$\Pr\left\{ E''_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8} \right\} \leqq \frac{\varepsilon}{8}. \blacksquare$$

VI. UNE CONDITION SUFFISANTE POUR QU'UNE CLASSE SOIT DE DONSKER

THÉORÈME 2. — *Soit* $\mu^{\bullet}$ *une mesure aléatoire satisfaisant aux conditions* (5) *et* (7) *relatives aux moments.*

Soit $\mathscr{C}$ *une classe de boréliens bornés, possédant une entropie relativement à* $\mu^{\bullet}$, *et vérifiant les conditions* (1) *et* (2).

Sous ces hypothèses, la condition intégrale :

$$\int_0^1 [\operatorname{Log} \Gamma(x^2)]^{1/2}\, dx < +\infty \tag{10}$$

entraîne que $\mathscr{C}$ *est une classe de Donsker relativement à* $\mu^{\bullet}$.

Preuve. — Nous nous ramenons aux hypothèses du théorème 1. Puisque $\mathscr{C}$ possède une entropie pour $\mu^{\bullet}$, $\mathscr{C}$ est précompacte dans l'espace pseudo-métrique $(\mathscr{B}_b, d)$. Afin d'obtenir la condition de faible oscillation, il suffit de montrer que pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, la mesure aléatoire vérifie, lorsque n est assez grand :

$$\Pr\{ \sup_{\substack{(B, B') \in \mathscr{C}^2 \\ d(B, B') < \rho_\varepsilon}} |\eta_n^{\bullet}(B) - \eta_n^{\bullet}(B')| > \varepsilon \} < \varepsilon, \tag{47}$$

le nombre ρ_ε ayant été défini en (20).

Pour cela, nous partirons de l'inclusion suivante, valable pour tous boréliens B et B' de la classe $\mathscr{C}$:

$$\begin{aligned} \{ |\eta_n^{\bullet}(B) - \eta_n^{\bullet}(B')| > \varepsilon \} \subset & \left\{ |\eta_n^{\bullet}(B) - \eta_n^{\bullet}(A_{t(B)})| > \frac{\varepsilon}{4} \right\} \\ & \cup \left\{ |\eta_n^{\bullet}(A_{t(B)}) - \eta_n^{\bullet}(A_{t(B')})| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \\ & \cup \left\{ |\eta_n^{\bullet}(A_{t(B')}) - \eta_n^{\bullet}(B')| > \frac{\varepsilon}{4} \right\}, \end{aligned}$$

qui est conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire. Nous obtenons alors, d'après (23), (20), (31) et (32),

$$\Pr\Big\{ \sup_{\substack{(\mathrm{B},\,\mathrm{B}')\in\mathscr{C}^2 \\ d(\mathrm{B},\,\mathrm{B}')<\rho_\varepsilon}} |\eta_n^\bullet(\mathrm{B})-\eta_n^\bullet(\mathrm{B}')| > \varepsilon \Big\}$$

$$\leqq \Pr\left\{ \mathrm{O}_{n,\,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{2} \right\} + 2\left[\Pr\left\{ \mathrm{E}'_{n,\,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8} \right\} + \Pr\left\{ \mathrm{E}''_{n,\,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8} \right\} \right].$$

Il résulte, finalement, des relations (24), (33) et (44), la relation annoncée (47). ■

Le rôle de la condition intégrale (10) est pleinement mis en évidence. Dans le cas de mesures bornées, le théorème de Borisov [4] en souligne déjà le caractère draconien. Sous nos hypothèses plus générales, elle garde toute son importance.

RÉFÉRENCES

[1] G. Bennett, Probability Inequalities for the Sum of Independant Random Variables, *J. Amer. Statist. Assoc.*, vol. **57**, 1962, p. 33-45.

[2] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York, 1968.

[3] R. M. Dudley, Central Limit Theorems for Empirical Measures, *Ann. Probability.*, vol. **6**, 1978, p. 899-929.

[4] R. M. Dudley, *Cours de l'Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour*, 1982. *Lecture Notes in Mathematics*, n° **1097**, Springer Verlag, 1984.

[5] M. Fréchet, *Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités*, Premier livre, 1950.

[6] P. Gaenssler et W. Stute, Empirical Processes: a Survey of Results for Independant and Identically Distributed Random Variables, *Ann. Probability.*, vol. **7**, 1979, p. 193-243.

[7] P. Jacob, Convergence uniforme à distance finie des mesures signées, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. **XV**, n° 4, 1979, p. 355-373.

[8] O. Kallenberg, *Random Measures*, Academic Press, 1976.

(*Manuscrit reçu le* 26 *novembre* 1984)
(*corrigé le* 10 *avril* 1986.)