Annales de l'I. H. P., section B

Alain Rouault

Espérances et majorations pour un processus de branchement spatial markovien

Annales de l'I. H. P., section B, tome 23, nº 3 (1987), p. 459-497
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1987__23_3_459_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 23, n° 3, 1987, p.459-497. *Probabilités et Statistiques*

Espérances et majorations pour un processus de branchement spatial markovien

par

Alain ROUAULT

Unité associée n° 743-A.D.4,
Mathématique, Bât. n° 425, 91405 Orsay Cedex

RÉSUMÉ. — Pour un processus de Galton-Watson $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ supercritique, $\frac{1}{n} \operatorname{Log} EZ_n$ et $\frac{1}{n} \operatorname{Log} Z_n$ ont même limite m. Ce résultat est étendu dans [2] au cas spatial homogène. Dans le cas markovien [6] avec population initiale exponentielle, on donne ici une limite pour l'analogue de la première expression et une majoration en probabilité pour une analogue de la seconde. Deux formules variationnelles sont en jeu; la seconde, avec contrainte sur l'intégrale d'action, caractérise par là-même les zones de « présence ».

Mots clés : Spatial branching process, large deviations, action integral, Cramer transform.

ABSTRACT. — For a supercritical Galton-Watson process $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\frac{1}{n} \operatorname{Log} EZ_n$ and $\frac{1}{n} \operatorname{Log} Z_n$ have the same limit m. This result is extended in [2] to homogeneous spatial case. In the markovian case [6] with exponential initial population, we give here a limit for the analogue of the first expression and an overestimation—in probability—for an analogue of the second one. Two variational formulas are at stake; the second one, with constraint over action integral, allows the definition of "presence areas".

INTRODUCTION GÉNÉRALE

On continue ici l'étude des processus de branchement spatiaux markoviens commencée en [6], dont les principales conjectures ont été présentées en [7].

On se donne une famille indexée par $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ (temps, espace) de lois de probabilité sur $\mathcal{M}$, espace des mesures ponctuelles finies sur $\mathbb{R}$. L'élément générique est $\mathscr{P}_{t,x}(d\nu)$, ayant une espérance notée $\mu_{t,x}$, mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}$. $\mathscr{P}_{t,x}$ décrit, à l'échelle 1, la loi des positions des enfants d'un individu situé en x à l'instant t. Le cas homogène correspond à $\mathscr{P}_{t,x} \equiv \mathscr{P}$ pour tout t, x.

On construit une famille indexée par ε tendant vers 0 de processus de branchement spatiaux. Pour ce faire, on se donne $x_0 \in \mathbb{R}$, position d'un ancêtre (individu de la génération 0). Il vit un temps ε puis est remplacé par des enfants dont les positions forment un élément (aléatoire) de $\mathcal{M}$ obtenu de la manière suivante : on tire un élément de $\mathcal{M}$ suivant $\mathscr{P}_{\varepsilon, x_0}$, on lui applique une homothétie de rapport ε puis une translation de vecteur x_0. Les enfants de l'ancêtre forment la première génération et sont datés de l'instant ε de sorte qu'un tel individu, situé en x, sera à l'instant 2ε remplacé par des enfants dont les positions formeront un élément de $\mathcal{M}$ obtenu par tirage suivant $\mathscr{P}_{2\varepsilon, x}$, ε-homothétie et x-translation. On itère la procédure, mais (nouveauté par rapport à [6]) à partir d'une population initiale de taille $\exp \frac{1}{\varepsilon} f_0(x)$ au voisinage de x, pour tout x d'un compact F_0 où $f_0 \geqq 0$. On s'intéresse à ζ_t^ε, élément de $\mathcal{M}$ représentant les individus en vie à t. L'asymptotique est celle des grandes déviations : reproductions de plus en plus fréquentes (aux instants de $\varepsilon \mathbb{N}$) et les sauts de plus en plus petits (rapport ε).

Dans le cas homogène (et à ancêtre unique) la méthode [2] a consisté à évaluer d'abord des espérances puis à comparer les v. a. à leurs espérances. L'espérance de la n-ième génération, égale à μ^{*n} relevait d'un calcul type Chernov. Dans le cas non homogène on se sert des grandes déviations pour chaînes de Markov ([1], [8]). Si M_1 majore uniformément les taux de croissance, les $M_1^{-1} \mu_{t,x}$ règlent le déplacement markovien d'une seule particule (avec disparition). L'outil fondamental est l'intégrale d'action définie sur $\mathscr{A}[t_0, t_1]$, ensemble des fonctions absolument continues de $[t_1, t_2]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{I}(t_1, t_2, \varphi) = \int_{t_1}^{t_2} h(s, \varphi(s), \dot{\varphi}(s))\, ds$$

où $h(t, x, .)$ est la transformée de Cramer de $\mu_{t,x}$. Un chemin φ doit être vu comme la limite (en ε) d'une ligne généalogique constituée par les positions des ancêtres successifs d'un individu.

On montre au III que $\varepsilon \operatorname{Log} \mathrm{E} \hat{\zeta}_t^\varepsilon([x - r(\varepsilon), x + r(\varepsilon)])$ pour un certain $r(\varepsilon)$ tendant vers 0 est voisine de

$$\mathrm{T} f_0(0, t, x) = \sup_{\substack{f_0(\varphi(0)) \geqq 0 \\ \varphi(t) = x}} f_0(\varphi(0)) - \mathrm{I}(0, t, \varphi).$$

La contribution essentielle, stabilisée par l'opération $\varepsilon \operatorname{Log}$, à l'espérance de la population en x provient de lignes généalogiques dans un tube autour d'un chemin φ (dit optimal) réalisant ce sup. S'il existe $s < t$ tel que $f_0(\varphi(0)) - \mathrm{I}(0, s, \varphi) < 0$, alors par référence au modèle homogène, cela signifie qu'avec une probabilité voisine de 1, la population est éteinte au voisinage de $\varphi(s)$ à l'instant s. La contribution correspondant à φ en x est nulle au temps t avec la même probabilité, donc si on attend $\varepsilon \operatorname{Log} \hat{\zeta}_t^\varepsilon([x - r(\varepsilon), x + r(\varepsilon)] \simeq \alpha(t, x) > 0$, α correspondant à une formule variationnelle ne sera sûrement pas atteint pour ce chemin. En fait la conjecture (*cf.* [7]) est

$$\alpha(t, x) = \sup_{\substack{f_0(\varphi(0)) \geqq 0 \\ \varphi(t) = x \\ \forall s \leqq t,\quad \mathrm{T} f_0(0, x, \varphi(s)) \geqq 0.}} f_0(\varphi(0)) - \mathrm{I}(0, t, \varphi)$$

Il va être nécessaire de découper $[0, t]$ en tranches d'épaisseur τ, suffisamment grande pour que le processus ait eu le temps de donner des résultats asymptotiques, mais suffisamment faible pour que qualitativement tout se passe comme pour un processus homogène ($\varepsilon \operatorname{Log} \xi \simeq \varepsilon \operatorname{Log} \mathrm{E} \xi$ là où celle-ci est positive). Il est bien entendu que les points de départ spatiaux d'une tranche sont les points d'arrivée de la tranche précédente ayant une densité de population suffisante. L'étude d'une tranche nécessite notamment un encadrement de l'espérance, donc les mêmes outils que dans l'espérance globale. Mais l'empilement d'un nombre croissant $\left(\simeq \frac{t}{\tau} \text{ à } t \text{ fixé}\right)$ de ces tranches exige de ne pas s'en tenir aux parties principales quand ε tend vers 0, c'est-à-dire d'évaluer les restes de façon uniforme.

Ceci conduit dans I à l'étude des itérées de T en vue d'obtenir des pentes uniformément bornées pour les chemins optimaux. Pour notre modèle précisé en II, nous énonçons et démontrons en III les résultats asymptotiques sur l'espérance du processus. Ceci a notamment pour conséquence, en IV une caractérisation τ-approchée de la zone « désertique » à l'instant t, et une majoration, en probabilité, de $\varepsilon \operatorname{Log} \hat{\zeta}_t^\varepsilon$ par le résultat de $\left[\frac{t}{\tau}\right]$ itérations de T appliquées à f_0. Dans un prochain article nous étudierons la minoration correspondante et la convergence de l'algorithme vers α quand $\tau \to 0$.

I. — ÉTUDE D'UN PROBLÈME VARIATIONNEL LIÉ A UN MODÈLE DE CROISSANCE DE POPULATIONS SPATIALES

1. Introduction

Dans le modèle probabiliste étudié, l'évolution entre t_0 et t_1 du logarithme de la taille locale d'une population fait intervenir une fonction f réglant la taille initiale et une fonctionnelle

$$\mathrm{I}(t_0, t_1, \varphi) = \int_{t_0}^{t_1} h(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t))\, dt$$

définie sur les chemins absolument continus de $[t_0, t_1]$ dans $\mathbb{R}$ (représentant les lignes généalogiques). h est astreinte à une condition de croissance surlinéaire, de convexité par rapport à la troisième variable et de régularité par rapport aux trois. On est amené à étudier le problème variationnel

$$(\bigstar) \qquad \sup_{\substack{\varphi\,:\,\varphi(t_1)=x \\ f(\varphi(t_0)) \geqslant 0}} f(\varphi(t_0)) - \mathrm{I}(t_0, t_1, \varphi)$$

(f représente le logarithme de la taille d'une population). En posant $g=f$ si $f \geqq 0$ et $g=-\infty$ si $f<0$ on ramène ($\bigstar$) au problème classique de

Bolza

$$(\bigstar\bigstar) \qquad \sup_{\varphi\,:\,\varphi(t_1)=x} g(\varphi(t_0)) - \mathrm{I}(t_0, t_1, \varphi).$$

Après avoir énoncé les hypothèses sur h, nous rappellerons au paragraphe 2 les propriétés d'existence et de régularité des chemins optimaux pour le problème de Bolza et nous démonterons un lemme technique.

Dans un modèle approché, τ est un pas de temps destiné à tendre vers 0 et la population au temps $t=n\tau$ sera décrite par la fonction obtenue en itérant n fois la procédure précédente. Si $\mathrm{T}f(t_0, t_1, x)$ désigne la valeur du sup dans ($\bigstar$) on considère

$$\begin{aligned} &f_0 = f \\ &\ldots\ldots \\ k \geqq 1, \qquad &f_k(x) = \mathrm{T}f_{k-1}((k-1)\tau, k\tau, x) \quad \text{si } \{f_{k-1} \geqq 0\} \neq \varnothing \\ & = -\infty \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Si φ_k désigne un chemin optimal à l'étape k, notre but est d'obtenir une majoration de $\|\dot{\varphi}_k\|_\infty$ uniforme en k, τ vérifiant $k\tau \leqq t_1$ fixé. Une propriété de Lipschitz sur f se transmet aux f_k (mais une régularité plus forte se perd dès la première étape). Comme dans la théorie classique (sans contrainte), il y a relation étroite entre les majorants de $\dot{\varphi}_k$, de p_k (lié à φ_k par une équation d'Euler) et le coefficient de Lipschitz de f_{k-1}.

Dans le paragraphe 3, après avoir rappelé le formalisme des sous-différentiels, bien adapté ici, nous donnerons pour le problème à un pas une majoration (uniforme en x) de $|\dot{\varphi}|$ et de $|\partial \mathrm{T}f|$. L'idée fondamentale est la suivante : le problème sans contrainte donne déjà, grâce à la condition de croissance, des chemins optimaux à pentes bornées; la contrainte introduit une majoration sur les pentes pour d'autres raisons : la saturation a tendance à envoyer $\dot{\varphi}$ sur des régions où h est négatif et $\{u : h(t, x, u) \leqq 0\}$ est un compact sous nos hypothèses.

Une itération mécanique des majorations précédentes conduit à $+\infty$. Néanmoins, la dérivabilité p. p. de $\mathrm{T}f$, conséquence du paragraphe 3 permet, dans le paragraphe 4, un traitement local qui donne par récurrence les majorations désirées pour le problème à n pas. Enfin en 5 on donne un résultat annexe utile pour la suite.

2. Hypothèses. Existence. Régularité

On dit qu'une fonction F de $\mathbb{R}$ vérifie la condition de croissance si on a

$$\text{(CC)} \qquad \frac{F(v)}{|v|} \xrightarrow[|v| \to +\infty]{} +\infty.$$

On considère une fonction h mesurable de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout (t, x) de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $h(t, x, .)$ soit convexe et vérifie (CC). On note $L(t, x, .)$ la duale de Young de $h(t, x, .)$. On définit ainsi une fonction L de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Nous utiliserons dans cette partie les hypothèses suivantes. Elles ne sont pas systématiquement minimales; il semble en particulier que dans [H3] la lipschitzianité de h suffirait. Mais nous les énonçons ainsi pour des raisons de commodité (*cf.* [6]).

[H1] $\inf_{t, x} h(t, x, .)$ vérifie (CC), c'est-à-dire qu'il existe $\underline{h}$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant

$$\text{(CC')} \qquad \frac{\underline{h}(r)}{r} \xrightarrow[r \to +\infty]{} +\infty$$

et

$$\inf_{t, x} h(t, x, v) \geqq \underline{h}(|v|) \quad \text{pour tout } v.$$

Elle est équivalente à :

[H'1] Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sup_{t, x} L(t, x, \theta) < \infty$.

Dans ce cas on pose

$$M = \sup_{t, x} [L(t, x, 0)]^+,$$

$$\bar{L}(\theta) = \sup_{t, x} L(t, x, \theta) \vee L(t, x, -\theta) \vee M$$

$\bar{L}$ est convexe, paire, sa duale $(\bar{L})^*$ est convexe, s. c. i., paire, vérifie (CC) donc atteint son minimum M_0 en $\pm r_0$ $(r_0 > 0)$. On pose

$$\underline{h}(r) = M_0 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq r \leqq r_0,$$

$$\underline{h}(r) = (\bar{L})^* \qquad \text{pour} \quad r \geqq r_0.$$

Alors $\underline{h}$ est croissante, convexe, s. c. i., vérifie $-M \leqq \bar{L}^*(\pm r) \leqq \underline{h}(r)$ $(r \geqq 0)$ et convient pour [H1]. On note $\underline{\underline{h}} = \underline{h} + M > 0$.

[H2] Pour tout $v \in \mathbb{R}$, $\sup\limits_{t, x} h(t, x, v) < +\infty$. On définit alors $\bar{h}$, convexe par

$$\bar{h}(v) = \sup_{t, x} h(t, x, v)$$

et $\bar{\bar{h}}$, croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\bar{\bar{h}}(r) = \sup_{|v| \leqq r} \bar{h}(v).$$

[H3] h vérifie [H1] et est de classe C^1. Pour tout $t, x, h(t, x, .)$ est strictement convexe. Il existe C mesurable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, localement bornée, qu'on peut toujours supposer croissante, telle que pour tout $(t, x, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$

$$\left|\frac{\partial h}{\partial t}(t, x, v)\right| + \left|\frac{\partial h}{\partial x}(t, x, v)\right| + \left|\frac{\partial h}{\partial v}(t, x, v)\right| \leqq C(t)[M + 1 + h(t, x, v)]$$

[H2] + [H3] entraîne

[H3′] Pour tout $T > 0$ il existe une fonction croissante h_1 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que pour tous $t \leqq T$, $|v| \leqq r$, $x \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{\partial h}{\partial v}(t, x, v)\right| \leqq h_1(r)$$

[H4] h est de classe $\mathscr{C}^1$ par rapport à v et il existe $\underline{h}_1$ strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, tendant vers $\pm\infty$ avec son argument telle que pour tout $(t, x, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$

$$\underline{h}_1(v) \leqq \frac{\partial h}{\partial v}(t, x, v)$$

[H3′] + [H4] entraîne

[H4′] Pour tout $T > 0$, il existe L_1 croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que

$$\forall t \leqq T, \quad |\theta| \leqq r, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \left|\frac{\partial L}{\partial \theta}(t, x, \theta)\right| \leqq L_1(r).$$

Le résultat principal de ce paragraphe se trouve dans la proposition suivante. Pour tous $0 < t_0 < t_1 < +\infty$ on note $\mathscr{A}[t_0, t_1]$ l'ensemble des fonctions absolument continues de $[t_0, t_1]$ dans $\mathbb{R}$ et pour $\varphi \in \mathcal{A}[t_0, t_1]$

$$\mathrm{I}(t_0, t_1, \varphi) = \int_{t_0}^{t_1} h(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t))\, dt$$

PROPOSITION 1. — *Sous les hypothèses* [H1] *et* [*H*3] *si* f *est une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *s. c. s. et vérifiant* $-\infty < \sup f < +\infty$, *alors*

$$\sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{A}[t_0, t_1] \\ \varphi(t_1) = x}} f(\varphi(t_0)) - \mathrm{I}(t_0, t_1, \varphi)$$

est atteint et les chemins optimaux sont des classe $\mathscr{C}^1$.

Ce problème, bien connu, est traité dans de nombreux ouvrages, mais comme les différentes démonstrations se font sous des hypothèses différentes qui se recoupent sans se recouvrir, nous renvoyons le lecteur à [6], p. 25 (qu'il faut très légèrement modifier à cause de f). En fait [H1] entraîne l'atteinte dans $\mathcal{A}$ et [H3] la régularité des chemins optimaux.

Si $f(x_0) = 0$ et $f = -\infty$ sur $\{x_0\}^c$ on retrouve le problème à points fixes (t_0, x_0), (t_1, x). Pour f s. c. s. quelconque un φ solution du problème de Bolza est aussi solution du problème à points fixes $(t_0, \varphi(t_0))$, (t_1, x).

On note désormais pour tout (t_0, t_1, x_0, x_1) de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$, $\Phi(t_0, t_1, x_0, x_1)$ l'ensemble des φ de $\mathscr{C}^1([t_0, t_1])$ vérifiant

$$\varphi(t_0) = x_0, \qquad \varphi(t_1) = x_1,$$
$$\mathrm{I}(t_0, t_1, \varphi) = \inf_{\substack{\psi \in \mathcal{A}[t_0, t_1] \\ \psi(t_0) = x_0 \\ \psi(t_1) = x_1}} \mathrm{I}(t_0, t_1, \psi)$$

c'est-à-dire l'ensemble des chemins optimaux pour le problème à points fixes.

Nous énonçons et prouvons maintenant un lemme technique.

LEMME 1. — *Définissons, pour* $(a, b, t^1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2$ *les sous-ensembles suivants de* $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^2$

$$\Delta_1(a) = \{(t, \tau, x_0, x_1) : \Phi(t, t+\tau, x_0, x_1) \subset \{\varphi : \mathrm{I}(t, t+\tau, \varphi) \leqq a\}\}$$
$$\Delta_2(a) = \{(t, \tau, x_0, x_1) : \Phi(t, t+\tau, x_0, x_1) \subset \{\varphi : \mathrm{I}(t, t+\tau, \varphi) \leqq a\tau\}\}$$
$$\Delta_3(b) = \{(t, \tau, x_0, x_1) : |x_1 - x_0| \leqq b\tau\}$$
$$\Delta_4(b) = \{(t, \tau, x_0, x_1) : \varphi \in \Phi(t, t+\tau, x_0, x_1),\ s \in [t, t+\tau] \Rightarrow |\dot{\varphi}(s)| \leqq b\}$$
$$\Delta_5(t^1) = \{(t, \tau, x_0, x_1) : t+\tau \leqq t^1\}.$$

Sous [H1] *à* [H4] *on a :*

1° $$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \exists b \in \mathbb{R}_+, \qquad \Delta_2(a) \subset \Delta_3(b) \tag{1.1}$$

2° $$\left.\begin{array}{l} \forall (a, b, t^1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2, \quad \exists c \in \mathbb{R}_+, \\ \Delta_1(a) \cap \Delta_3(b) \cap \Delta_5(t^1) \subset \Delta_4(c) \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

Preuve du lemme 1. — 1° D'après [H1], si $(t, \tau, x_0, x_1) \in \Delta_2(a)$ et $\varphi \in \Phi(t, \tau, x_0, x_1)$ on a

$$\tau^{-1} \int_t^{t+\tau} \underline{h}(|\dot{\varphi}(s)|)\, ds \leqq a. \tag{1.3}$$

La croissance de $\underline{h}$, jointe à sa convexité (Jensen) donne alors :

$$\underline{h}\left(\frac{|x_1 - x_0|}{\tau}\right) = \underline{h}\left(\tau^{-1}\left|\int_t^{t+\tau} \dot{\varphi}(s)\, ds\right|\right)$$
$$\leqq \underline{h}\left(\tau^{-1}\int_t^{t+\tau} |\dot{\varphi}(s)|\, ds\right) \leqq \tau^{-1}\int_t^{t+\tau} \underline{h}(|\dot{\varphi}(s)|)\, ds$$

d'où $\underline{h}\left(\frac{|x_1 - x_0|}{\tau}\right) \leqq a$ et on conclut à l'existence de b car $\underline{h}$ vérifie CC.

2° Soit $(t, \tau, x_0, x_1) \in \Delta_3(b)$. Tout φ de $\Phi(t, \tau, x_0, x_1)$ vérifie les équations d'Euler partout : il existe p de classe $\mathscr{C}^1$ tel que pour tout s de $[t, t+\tau]$ on ait :

$$\left.\begin{array}{l} \dot{p}(s) = \dfrac{\partial h}{\partial x}(s, \varphi(s), \dot{\varphi}(s)), \\ p(s) = \dfrac{\partial h}{\partial v}(s, \varphi(s), \dot{\varphi}(s)) \end{array}\right. \tag{1.4}$$

D'après le théorème de la valeur moyenne, il existe $s_0 \in]t, t+\tau[$ tel que $\dot{\varphi}(s_0) = \dfrac{x_1 - x_0}{\tau}$ et donc d'après [H3′] p vérifie

$$|p(s_0)| \leqq h_1(b).$$

La formule

$$p(s) = p(s_0) + \int_{s_0}^{s} \frac{\partial h}{\partial x}(\sigma, \varphi(\sigma), \dot{\varphi}(\sigma))\, d\sigma$$

permet alors d'écrire

$$|p(s)| \leqq h_1(b) + \int_t^{t+\tau} \left|\frac{\partial h}{\partial x}(\sigma, \varphi(\sigma), \dot{\varphi}(\sigma))\right| d\sigma$$

et d'après [H3], si $(t, \tau, x_0, x_1) \in \Delta_5(t^1)$ on aboutit en posant $\mathrm{C} = \mathrm{C}(t_1)$ à

$$|p(s)| \leqq h_1(b) + \mathrm{C}[(\mathrm{M}+1)t^1 + \mathrm{I}(t, t+\tau, \varphi)]$$

Si $(t, \tau, x_0, x_1) \in \Delta_1(a) \cap \Delta_3(b) \cap \Delta_5(t^1)$ on a donc un d tel que

$$|p(s)| \leqq d, \qquad \forall s \in [t, t+\tau]$$

(4) et [H4′] donnent alors, pour tout s de $[t, t+\tau]$

$$|\dot{\varphi}(s)| \leqq \mathrm{L}_1(d)$$

3. Le problème à un pas

On suppose [H1], ..., [H4] vérifiées, f s. c. s. de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\sup f < \infty$. On note pour $t_0 < t_1$

$$\mathrm{T}f(t_0, t_1, x) = \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{C}^1[t_0, t_1] \\ \varphi(t_1) = x \\ f(\varphi(t_0)) \geqq 0}} f(\varphi(t_0)) - \mathrm{I}(t_0, t_1, \varphi)$$

et $\Phi^f(t_0, t_1, x)$ l'ensemble des chemins optimaux c'est-à-dire, des φ de $\mathscr{C}^1([t_0, t_1])$ vérifiant

$$\varphi(t_1) = x_1, \qquad f(\varphi(t_0)) \geqq 0$$

et

$$f(\varphi(t_0)) - \mathrm{I}(t_0, t_1, \varphi) = \mathrm{T}f(t_0, t_1, x).$$

Ce paragraphe est destiné à préparer le suivant (itération). Pour majorer uniformément $\|\dot{\varphi}\|_\infty$ pour $\varphi \in \Phi^f(t, t+\tau, x)$ avec x vérifiant « $\mathrm{T}f(t, t+\tau, x)$ minoré par une constante », nous distinguerons suivant que φ sature ou non la contrainte. Dans le cas de non-saturation nous utilisons les équations d'Euler. Il ne servirait à rien de supposer la fonction initiale f de classe $\mathscr{C}^1$ car de toute façon, les futures fonctions initiales ($\mathrm{T}f$) seront « seulement » s. c. s. et Lip. loc. Nous rappelons le formalisme des sous différentiels ou gradients généralisés ([3], [4]) puis nous établissons la Lip. loc. de $\mathrm{T}\, f(t, t+\tau, .)$. A cause de la contrainte, l'argument classique de modification « en parallèle » d'un chemin optimal est inopérant. Nous utiliserons dans ce cas une modification « conique » (respectant la contrainte).

LEMME 2 (sous les hypothèses [H1]. . . [H4]). — *Pour tout* (a, t^1) *de* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ *il existe* a' *de* $\mathbb{R}_+$ *tel que pour tout* f, *si* t, τ *vérifient* $t+\tau \leqq t^1$, *si* x *vérifie* $\mathrm{T}\, f(t, t+\tau, x) \geqq -a\tau$, *tout* φ *de* $\Phi^f(t, t+\tau, x)$ *vérifiant* $f(\varphi(t))=0$ *satisfait à*

$$\sup_{t \leqq s \leqq t+\tau} |\dot{\varphi}(s)| \leqq a'. \tag{1.5}$$

Preuve du lemme 2. — $\mathrm{T} f(t, t+\tau, x) \geqq -a\tau$ et $f(\varphi(t))=0$ entraîne $(t, \tau, \varphi(t), x) \in \Delta_2(a)$ (notations du lemme 1); il existe donc $b>0$ tel que $(t, \tau, \varphi(t), x)$ appartienne à $\Delta_3(b)$. Or il appartient à $\Delta_5(t^1)$ par hypothèse, donc finalement à $\Delta_1(at^1) \cap \Delta_3(b) \cap \Delta_5(t^1)$ d'où le résultat. ■

On se propose maintenant d'obtenir le même résultat quand $f(\varphi(t))>0$.

DÉFINITIONS ([3], [4]). — (*a*) Une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est dite localement lipschitzienne si pour tout sous-ensemble borné B de $\mathbb{R}^n$ il existe $\mathrm{K_B}>0$ tel que

$$x_1, x_2 \in \mathrm{B} \quad \Rightarrow \quad |f(x_1)-f(x_2)| \leqq \mathrm{K_B} \|x_1-x_2\|$$

Une telle fonction est dérivable p. p., la fonction f' ainsi définie est bornée sur les sous-ensembles bornés de son domaine de définition.

(*b*) On appelle gradient généralisé de f en x et on note $\partial f(x)$ l'enveloppe convexe de l'ensemble des limites de la forme $\lim f'(x+h_i)$ où $h_i \to 0$ quand $i \to +\infty$.

$\partial f(x)$ est un compact convexe non vide; dans le cas $n=1$ c'est un intervalle compact. On notera $\sup |\partial f(x)| = \sup \{|a| : a \in \partial f(x)\}$. Si $x \in \mathring{\mathrm{B}}$ on a évidemment $\sup |\partial f(x)| \leqq \mathrm{K_B}$.

Si f est convexe on retrouve le sous-différentiel, si f est de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de x on a $\partial f(x) = \{f'(x)\}$.

(*c*) Soit $t_0 < t_1$, $\varphi \in \mathscr{A}[t_0, t_1]$. On dit que h de $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne en (x, v) près de φ, s'il existe $\eta>0$ et $k \in \mathrm{L}^1[t_0, t_1]$, tels que l'on ait pour presque tout t de $[t_0, t_1]$:

$$\sup_{i=1,2} [|x_i-\varphi(t)|+|v_i-\dot{\varphi}(t)|] < \eta$$

$$\Rightarrow \quad |h(t, x_1, v_1)-h(t, x_2, v_2)| \leqq k(t) [|x_1-x_2|+|v_1-v_2|].$$

THÉORÈME [4]. — *Si g est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, localement lipschitzienne, si h est mesurable en t, φ optimale pour le problème* ($\bigstar\bigstar$) *et h lipschitzienne en (x, v) près de φ, il existe $p \in \mathscr{A}[t_0, t_1]$ tel que*

$$\left.\begin{array}{r}(\dot{p}(t), p(t)) \in \partial h(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \quad p.p.\ sur\ [t_0, t_1] \\ -p(t_0) \in \partial g(\varphi(t_0)) \quad \blacksquare \end{array}\right\} \tag{1.6}$$

Les outils sont maintenant en place pour démontrer le résultat annoncé, avec la définition suivante que notre contrainte nous amène à proposer.

DÉFINITION. — Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ d'intérieur $\mathring{A} \neq \varnothing$, f est dite localement uniformément lipschitzienne sur A (en abrégé LUL sur A) s'il existe η et $K > 0$ tels que

$$x_1, x_2 \in \mathring{A}, \qquad |x_1 - x_2| < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| < K\,|x_1 - x_2|.$$

LEMME 3 (sous les hypothèses [H1]. . . [H4]). — *Si f est* LUL *sur* $\{f \geqq 0\}$ *et* $\sup f < \infty$, *alors pour tout* (a, t^1) *de* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ *il existe* a'' *de* $\mathbb{R}_+$ *tel que* $t+\tau \leqq t^1$, $\quad \mathrm{T}f(t, t+\tau, x) \geqq -a\tau$, $\quad \varphi \in \Phi^f(t, t+\tau, x)$, $\quad f(\varphi(t)) > 0$ *entraînent :* $\sup\limits_{t \leqq s \leqq t+\tau} |\dot{\varphi}(s)| \leqq a''$.

Preuve du lemme 3. — Puisque φ ne sature pas la contrainte, on peut toujours modifier f en une fonction localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, identique à f dans un voisinage de $\varphi(0)$ et telle que φ reste optimal pour le nouveau problème. Comme φ est de classe $\mathscr{C}^1$, l'image de $[t, t+\tau]$ par l'application $(\varphi, \dot{\varphi})$ est bornée ce qui, joint à l'hypothèse [H3] (h est de classe $\mathscr{C}^1$) entraîne que h est lipschitzienne en (x, v) près de φ. Le théorème de Clarke nous donne alors :

$$\dot{p}(s) = \frac{\partial h}{\partial x}(s, \varphi(s), \dot{\varphi}(s)), \quad p(s) = \frac{\partial h}{\partial v}(s, \varphi(s), \dot{\varphi}(s)) \quad \text{p. p. sur } [t, t+\tau]$$

$$-\mathrm{p}(\mathrm{t}) \in \partial \mathrm{f}(\varphi(\mathrm{t})) \tag{1.7}$$

d'où pour tout $s \in [t, t+\tau]$

$$p(s) \in -\partial f(\varphi(t)) + \int_0^s \frac{\partial h}{\partial x}(\sigma, \varphi(\sigma), \dot{\varphi}(\sigma))\, d\sigma.$$

L'hypothèse [H3] et l'optimalité de φ donnent alors

$$\sup_{t \leqq s \leqq t+\tau} |p(s)| \leqq a_1$$

avec (1.8)

$$a_1 = \sup |\partial f(\varphi(t)| + C[(M+1)t^1 + f(\varphi(t)) - Tf(t, t+\tau, x)]$$

et finalement sous les hypothèses du lemme 3 :

$$\sup_{t \leqq s \leqq t+\tau} |p(s)| \leqq \sup |\partial f| + C[(M+1+a)t^1 + (\sup f)^+] = a_2 \quad (1.9)$$

(7) et [H4′] permettent alors de conclure

$$\sup_{t \leqq s \leqq t+\tau} |\dot{\varphi}(s)| \leqq a'' = L_1(a_2) \quad (1.10)$$

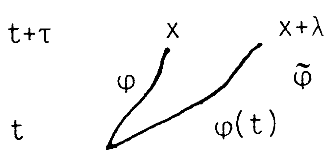
PROPOSITION 2. — *Sous les hypothèses des lemmes* 3 *et* 4, *la fonction* $f_1 = Tf(t, t+\tau, .)$ *est* LUL *sur* $\{f_1 \geqq -a\tau\}$.

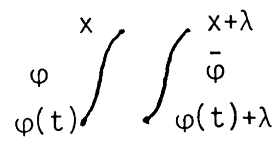
Preuve de la proposition 2. — Montrons d'abord la sous-lipschitzianité de f_1 sur $\mathbb{R}$. Soit x quelconque, $\varphi \in \Phi^f(t, t+\tau, x)$ et $|\lambda| \leqq \tau$. Le chemin $\tilde{\varphi}$ défini par

$$\tilde{\varphi}(s) = \varphi(s) + \lambda \frac{s-t}{\tau} \quad (1.11)$$

pour $s \in [t, t+\tau]$ vérifie $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t)$, $\tilde{\varphi}(t+\tau) = x+\lambda$, satisfait toujours la contrainte $f(\tilde{\varphi}(t)) \geqq 0$, ce qui n'est pas toujours le cas du chemin classique $\bar{\varphi}$ défini par

$$\bar{\varphi}(s) = \varphi(s) + \lambda \quad (1.12)$$





La sous-optimalité de $\tilde{\varphi}$, jointe à l'optimalité de φ donne :

$$f_1(x+\lambda) - f_1(x) \geqq I(t, t+\tau, \varphi) - I(t, t+\tau, \tilde{\varphi})$$

et d'après [H3] on a pour tout (ξ, v), $s \leqq t^1$, $|\delta_1| \vee |\delta_2| \leqq 1$,

$$h(s, \xi, v) - h(s, \xi+\delta_1, v+\delta_2) \geqq -D(|\delta_1| + |\delta_2|)[M+1+h(s, \xi, v)] \quad (1.13)$$

où

$$D = \exp 2C(t^1)$$

ce qui donne, en tenant compte de [H2] et en intégrant

$$f_1(x+\lambda)-f_1(x) \geqq -D(1+t^1)[M+1+\bar{\bar{h}}(\|\dot{\varphi}\|_\infty)]|\lambda| \quad \text{pourvu que } |\lambda| \leqq 1 \wedge \tau \qquad (1.14)$$

D'après les lemmes 2 et 3, si $f_1(x) \geqq -a\tau$ et $\varphi \in \Phi^f(t, t+\tau, x)$ on a $\|\dot{\varphi}\|_\infty \leqq a' \vee a''$ d'où en posant

$$D' = D(1+t^1)[M+1+\bar{\bar{h}}(a' \vee a'')] \qquad (1.15)$$

$f_1(x+\lambda)-f_1(x) \geqq -D'|\lambda|$ dès que $f_1(x) \geqq -a\tau$ et $|\lambda| \leqq 1 \wedge \tau$; on obtient le résultat demandé en échangeant x et $x+\lambda$.

Remarque. — Le majorant B′ de $\sup|\partial Tf|$ sur $Tf \geqq -a\tau$ dépend via a'' du majorant de $\sup|\partial f|$ et $\sup f$ [*cf.* (9) et (10)].

4. Le problème à n pas

Notre objectif, rappelons-le, est d'étudier l'itération de l'opérateur T. Avec l'idée d'approcher le problème d'optimisation à contrainte permanente le pas de temps τ est destiné à tendre vers 0; nous cherchons pour un temps fini t $\left[\text{c'est-à-dire au bout de } O\left(\frac{1}{\tau}\right) \text{opérations}\right]$ une majoration uniforme des pentes des chemins optimaux et des gradients des fonctions successives.

D'après la remarque du paragraphe 3, une itération mécanique des majorations conduirait à $+\infty$. Nous prouverons notre résultat par un traitement local, s'appuyant sur les propriétés de dérivabilité p. p., conséquence de la proposition 2. Construisons d'abord notre itération : f est LUL et vérifie $\sup f < \infty$, τ est positif et ζ_n, $n \in \mathbb{N}$ est une suite de réels.

Soit

$$g_0 = f$$

$$\cdots\cdots$$

$$n \geqq 1, \qquad (1.16)$$

$$\begin{aligned} g_n(x) &= T g_{n-1}((n-1)\tau, n\tau, x) + \zeta_n \quad \text{si } \{g_{n-1} \geqq 0\} \neq \varnothing \\ &= -\infty \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

On note $F_n = \{g_n \geqq 0\}$, $n \geqq 0$. La suite ζ_n est là pour des raisons techniques dans les calculs des chapitres suivants. En fait la frontière de la zone de présence a tendance à contenir peu d'individus et les ζ_n sont là pour s'en écarter un peu. Pour que l'algorithme ait des chances de converger vers la limite attendue (*cf.* introduction générale) il faut néanmoins que les ζ_n soient négligeables par rapport aux g_n c'est-à-dire $\tau^{-1} \sup_n |\zeta_n| \underset{\tau \to 0}{\to} 0$. Deux cas principaux serviront : $\zeta_n \equiv \zeta > 0$ et $\frac{\zeta}{\tau} \to 0$; $\zeta_n \equiv -\zeta$ et $\frac{\zeta}{\tau} \to 0$.

PROPOSITION 3 (sous [H1]. . . [H4]). — 1° *Pour tout n,* g_n *est* LUL *sur* F_n.

2° *Pour tout* $a \geqq 0$, $t^1 > 0$, *il existe* $C_1, \ldots, C_4$ *tels que pour tout* $\tau > 0$, *toute suite* ζ_k, $k \in \mathbb{N}$ *telle que* $\sup_k \zeta_k \leqq a\tau$ *et n tel que* $n\tau \leqq t^1$ *on ait*

(i)
$$\| g_n^+ \|_\infty \leqq C_1 \tag{1.17}$$

(ii)
$$\begin{aligned} &\forall x \in F_n, \\ &\qquad \sup \{ \| \dot{\varphi} \|_\infty : \varphi \in \Phi^{g_{n-1}}((n-1)\tau, n\tau, x) \} \leqq C_2 \\ &\forall x, x' \in F_n, \\ &\qquad |x - x'| \leqq \tau \wedge 1 \quad \Rightarrow \quad |g_n(x) - g_n(x')| \leqq C_3 |x - x'| \end{aligned} \tag{1.18}$$

(iii)
$$F_n \subset [-C_4, +C_4]. \tag{1.19}$$

Preuve de la proposition 3. — 1° [H1] entraîne facilement

$$\| g_n^+ \|_\infty \leqq \| f^+ \|_\infty + (M + a) n\tau \tag{1.20}$$

et la LUL se prouve par récurrence en utilisant la proposition 2.

2° (ii) et (iii) Pour prouver l'existence de C_2, on montrera l'existence d'un majorant uniforme pour le coefficient de sous-lipschitzianité de g_n sur F_n et on utilisera la dérivabilité p. p. de g_n, conséquence de 1° pour montrer qu'il majore aussi les sous-différentiels correspondants.

Soit $n\tau \leqq t^1$ et $x \in \mathring{F}_n$ supposé non vide. On définit simultanément par récurrence sur $k \leqq n$ une suite de chemins (optimaux) $\varphi_k \in \mathscr{C}^1([(k-1)\tau, k\tau])$ et une suite de points x_k vérifiant

$$\begin{gathered} x_n = x = \varphi_n(n\tau), \\ x_k = \varphi_k(k\tau) = \varphi_{k+1}(k\tau), \quad 1 \leqq k < n, \qquad x_0 = \varphi_1(0) \\ \varphi_k \in \Phi^{g_{k-1}}((k-1)\tau, k\tau, x_k), \qquad 1 \leqq k < n. \end{gathered} \tag{1.21}$$

(Les Φ sont non vides d'après la proposition 1.)

Si k est fixé et λ vérifie $g_{k-1}(x_{k-1}+\lambda) \geqq 0$, la sous-optimalité du chemin $\bar{\varphi}_k$ [*cf.* (12)] jointe à l'optimalité de φ_k donne :

$$g_k(x_k+\lambda)-g_k(x_k) \geqq g_{k-1}(x_{k-1}+\lambda)-g_{k-1}(x_{k-1}) \\ +\mathrm{I}((k-1)\tau,\, k\tau,\, \varphi_k)-\mathrm{I}((k-1)\tau,\, k\tau,\, \bar{\varphi}_k).$$

Utilisant (13), une intégration et l'optimalité de φ_k on aboutit à :

$$g_k(x_k+\lambda)-g_k(x_k) \geqq g_{k-1}(x_{k-1}+\lambda)-g_{k-1}(x_{k-1}) \\ -|\lambda|\,\mathrm{D}[a'''\tau+g_{k-1}(x_{k-1})-g_k(x_k)] \quad (1.22)$$

où $a'''=[\mathrm{M}+1+a]$.

La méthode consiste alors à itérer cette relation pour aboutir à la sous-lipschitzianité de g_n.

Premier cas. — La contrainte n'est jamais saturée [$g_k(x_k) > 0$ pour tout $k < n$]. Par continuité, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $k < n$ et $|\lambda| \leqq r$, on ait $g_k(x_k+\lambda) > 0$. La formule (22), valable pour tout $k \leqq n$ donne par addition :

$$g_n(x+\lambda)-g_n(x) \geqq f(x_0+\lambda)-f(x_0)-|\lambda|\,\mathrm{D}[a'''n\tau+f(x_0)-g_n(x)].$$

La LUL de f entraîne alors l'existence de K et r_0 tels que $n\tau \leqq t^1$, $|\lambda| \leqq r_0 \wedge r$ et $g_n(x) \geqq 0$ entraînent

$$g_n(x+\lambda)-g_n(x) \geqq -|\lambda|[\mathrm{K}+\mathrm{D}(a'''t^1+\|f^+\|_\infty)]=-\mathrm{K}_1|\lambda| \quad (1.23)$$

Deuxième cas. — On sature la contrainte au moins une fois. On pose

$$j=\sup\{k \leqq n:\, g_{k-1}(x_{k-1})=0\}.$$

Par continuité il existe r tel que $j \leqq k < n$ et $|\lambda| \leqq r$ entraînent $g_k(x_k+\lambda) > 0$. Par addition de (22) on obtient

$$g_n(x+\lambda)-g_n(x) \geqq g_j(x_j+\lambda)-g_j(x_j)-|\lambda|\,\mathrm{D}[a'''(n-j)\tau+g_j(x_j)-g_n(x)]$$

x_j étant l'extrémité de φ_j qui sature la contrainte en x_{j-1}, (5) et (14) donnent

$$g_j(x_j+\lambda)-g_j(x_j) \geqq -\mathrm{D}(1+t^1)[\mathrm{M}+1+\bar{\bar{h}}(a')]|\lambda| \\ =-\mathrm{K}_2|\lambda| \qquad \text{pour} \quad |\lambda| \leqq 1 \wedge \tau.$$

De (20) et $g_n(x) \geqq 0$ on tire finalement pour $|\lambda| \leqq 1 \wedge \tau \wedge r$

$$g_n(x+\lambda)-g_n(x)$$

$$\geqq -[\mathrm{K}_2+\mathrm{D}((\mathrm{M}+a+a''')t^1+\|f^+\|_\infty)]|\lambda| = -\mathrm{K}_3|\lambda| \quad (1.24)$$

En rapprochant (23) et (24), on a trouvé K_4 (ne dépendant que de f, a, t^1) et r' (dépendant de f, n, τ, x) tel que les conditions $|\lambda| \leqq r'$, $n\tau \leqq t^1$, $g_n(x) \geqq 0$ entraînent :

$$g_n(x+\lambda)-g_n(x) \geqq -|\lambda|\mathrm{K}_4. \quad (1.25)$$

D'après le 1°, g_n est dérivable p. p. sur $\mathring{\mathrm{F}}_n$. Si $g'_n(x) \neq 0$, en prenant λ du signe opposé à $g'_n(x)$ et en faisant tendre λ vers 0 dans (25) on obtient $|g'_n(x)| \leqq \mathrm{K}_4$, *a fortiori* vrai si $g'_n(x)=0$. D'après la définition du gradient généralisé, on a donc, pour tout x de $\mathring{\mathrm{F}}_n$

$$\sup|\partial g_n(x)| \leqq \mathrm{K}_4. \quad (1.26)$$

Pour la majoration de $\|\dot{\varphi}_n\|_\infty$ il suffit de revenir à (5), (9), (10) pour conclure :

– contrainte saturée : $\|\dot{\varphi}_n\|_\infty \leqq a'$;

– contrainte non saturée :

$$\|p_n\|_\infty \leqq \mathrm{K}_4+\mathrm{C}[\|f^+\|_\infty+(2\mathrm{M}+2a+1)t^1]=\mathrm{K}_5 \;\Rightarrow\; \|\dot{\varphi}_n\|_\infty \leqq \mathrm{L}_1(\mathrm{K}_5)$$

d'où l'existence de C_2, puis de C_3 d'après la formule (14). Ceci termine la démonstration de (ii).

(iii) F_0 est compact par hypothèse, et de plus avec les notations de (ii) on a pour tout $n \geqq 1$ et tout x de F_n

$$x=\varphi_1(0)+\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\tau}^{k\tau}\dot{\varphi}_k(s)\,ds$$

et donc

$$|x| \leqq \sup_{y\in\mathrm{F}_0}|y|+\mathrm{C}_2 t^1$$

5. Résultat annexe

On note, pour $t_0 < t_1$, x_0, x_1 quelconques (sous les hypothèses [H1]. . . [H4])

$$\bar{\mathrm{I}}(t_0, t_1, x_0, x_1)=\inf\{\mathrm{I}(t_0, t_1, \varphi) : \varphi(t_0)=x_0,\ \varphi(t_1)=x_1\}$$
$$|\Phi|(t_0, t_1, x_0, x_1)=\sup\{\|\dot{\varphi}\|_\infty : \varphi\in\Phi(t_0, t_1, x_0, x_1)\}.$$

Nous aurons besoin, dans l'étude du modèle, du résultat annexe suivant :

PROPOSITION 4. — *Pour tous* γ, d, $t^1 > 0$, *il existe* $\delta_1(\gamma, d)$ *et* $\delta_2(\gamma, d, t^1) > 0$ *tels que pour tous* $t, \tau, \lambda, x_0, x_1$ *les conditions* $|\lambda| \leqq d\tau$ et $|\Phi|(t, t+\tau, x_0, x_1) \leqq \gamma$ *entraînent :*

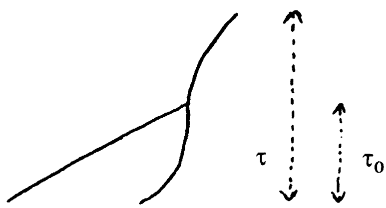
1° $\bar{\mathrm{I}}(t, t+\tau, x_0+\lambda, x_1) \leqq \bar{\mathrm{I}}(t, t+\tau, x_0, x_1)+\delta_1|\lambda|$;

2° $|\Phi|(t, t+\tau, x_0+\lambda, x_1) \leqq \delta_2$, *si* $t+\tau \leqq t^1$.

Preuve de la proposition 4. — Posons $\tau_0 = d^{-1}|\lambda|$ et si $\varphi \in \Phi(t, t+\tau, x_0, x_1)$ soit $\hat{\varphi}$ le chemin défini par

$$\hat{\varphi}(s) = (\varphi(t+\tau_0)-x_0-\lambda)\frac{s-t}{\tau_0}+x_0+\lambda \qquad \text{pour} \quad t \leqq s \leqq t+\tau_0$$

$$\hat{\varphi}(s) = \varphi(s) \qquad \text{pour} \quad t+\tau_0 \leqq s \leqq t+\tau.$$



La non-optimalité de $\hat{\varphi}$ et l'optimalité de φ donnent :

$$\bar{\mathrm{I}}(t, t+\tau, x_0+\lambda, x_1) \leqq \bar{\mathrm{I}}(t, t+\tau, x_0, x_1) - \mathrm{I}(t, t+\tau_0, \varphi) + \mathrm{I}(t, t+\tau_0, \hat{\varphi})$$

[H1] donne $\mathrm{I}(t, t+\tau_0, \varphi) \geqq -\mathrm{M}\tau_0$ et [H2] donne

$$\mathrm{I}(t, t+\tau_0, \hat{\varphi}) \leqq \tau_0 \bar{\bar{h}}\left(\left|\frac{\varphi(t+\tau_0)-x_0-\lambda}{\tau_0}\right|\right).$$

D'après les hypothèses et l'inégalité évidente

$$|\varphi(t+\tau_0)-x_0-\lambda| \leqq |\varphi(t+\tau_0)-\varphi(t)|+|\lambda| \leqq (\gamma+d)\tau_0$$

on peut écrire

$$\bar{\mathrm{I}}(t, t+\tau, x_0+\lambda, x_1) - \bar{\mathrm{I}}(t, t+\tau, x_0, x_1)$$
$$\leqq [\mathrm{M}+\bar{\bar{h}}(\gamma+d)]\tau_0 = d^{-1}[\mathrm{M}+\bar{\bar{h}}(\gamma+d)]|\lambda|.$$

Les conditions de l'énoncé placent $(t, t+\tau, x_0+\lambda, x_1)$ dans l'ensemble $\Delta_1(\gamma+d) \cap \Delta_3(\gamma+d\delta_1 t^1) \cap \Delta_5(t^1)$ et on termine grâce au lemme 1.

II. — PRÉSENTATION DU MODÈLE

Il s'agit du modèle de croissance de population introduit dans [6], c'est-à-dire une suite de processus de branchement spatiaux, indexée par un paramètre d'échelle ε, mais avec en plus une population initiale de taille exponentielle réglée par une fonction f_0. $\mathcal{M}$ est l'ensemble des mesures de Radon positives sur $\mathbb{R}$; $\mathcal{M}$, ensemble des mesures ponctuelles finies (sommes finies de masses de Dirac) est borélien pour la topologie vague. On le munit de la tribu trace notée $\mathcal{B}(\mathcal{M})$.

Soit $U = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{N}^n$ et si $u = j_1 \ldots j_n \in U$ on note $|u| = n$, $f(u) = j_1 \ldots j_{n-1}$. Grâce à [5], on peut construire (*cf.* [6], chap. I) un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{I})$ d'arbres ω marqués par $\mathcal{M}$ (la marque ν_u en un nœud u de ω représentant les positions des enfants de u). Pour $u \in U$ on définit le sous-ensemble Ω_u de Ω des arbres admettant u comme nœud et sur Ω_u les v. a. ν_u (ν_φ est noté ν), Θ_u (arbre translaté en u), $\sigma(u)$ (position associée au nœud u) et $s(u) = (\sigma \circ f^{n-1}(u), \ldots, \sigma \circ f(u), \sigma(u))$. Pour tout n, on note $z_n(\omega)$ l'ensemble des nœuds de ω de longueur n, $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les Ω_u tels que $|u| \leqq n$ et les ν_u tels que $|u| < n$, et

$$\zeta_n = \sum_{u \in z_n} \delta_{\sigma(u)}, \qquad Z_n = \sum_{u \in z_n} \delta_{s(u)}.$$

Soit $\mathcal{P}_{t,x}$, $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ une famille mesurable de lois sur $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathcal{M}))$. Pour tout (ε, x) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on note $S_{\varepsilon,x}$ l'application de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ dans lui-même définie par $S_{\varepsilon,x} g(z) = g(x + \varepsilon z)$ et pour tout k de $\mathbb{N}$, $\bar{\mathcal{P}}^{\varepsilon}_{k,x}$ l'image de $\mathcal{P}_{k\varepsilon,x}$ par $S_{\varepsilon,x}$. Pour tout ε, la proposition 1 de [6] permet de construire une famille $P^{\varepsilon}_{k,x}$, $(k, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ de lois sur $(\Omega, \mathcal{I})$ telle que l'image de $P^{\varepsilon}_{k,x}$ par ν soit $\bar{\mathcal{P}}^{\varepsilon}_{k,x}$ et pour tout n, conditionnellement à $\mathcal{F}_n$, les v. a. $\Theta_u (u \in z_n)$ sont indépendantes et de lois respectives: $P^{\varepsilon}_{\bar{\sigma}(u)}$ où $\bar{\sigma}$ est définie par $\bar{\sigma}(\varnothing) = (k, x)$, $\bar{\sigma}(u) = (k + |u|, \sigma(u))$ si $u \neq \varnothing$. On suppose que pour tout (t, x), $\mathcal{P}_{t,x}$ a une espérance notée $\mu_{t,x}$ et que pour tout (θ, v)

$$\begin{aligned} L(t, x, \theta) &= \operatorname{Log} \int e^{\theta\xi} \mu_{t,x}(d\xi), \\ h(t, x, v) &= \sup_{\theta} \theta v - L(t, x, \theta) \end{aligned} \tag{2.1}$$

sont finies (donc l'enveloppe convexe du support de $\mu_{t,x}$ est $\mathbb{R}$). $\bar{\mathscr{P}}^{\varepsilon}_{k,x}$ a alors une espérance notée ${}_{\varepsilon}Q(k, x, .)$ dont la log-Laplace ${}_{\varepsilon}L$ et la transformée de Cramer ${}_{\varepsilon}H$ vérifient

$$ {}_{\varepsilon}L(k, x, \theta) = L(k\varepsilon, x, \varepsilon\theta), \qquad {}_{\varepsilon}H(k, x, v) = h\left(k\varepsilon, x, \frac{v}{\varepsilon}\right). \tag{2.2} $$

On suppose données une fonction f_0, LUL sur son domaine compact de positivité F_0 (*cf.* I), deux fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, r_0 et s_1 vérifiant quand ε tend vers 0

$$ \begin{gathered} \lim r_0(\varepsilon) = \lim s_1(\varepsilon) = 0 \\ \text{et} \\ \lim \varepsilon^{-1} r_0(\varepsilon) = \lim \varepsilon^{-1} s_1(\varepsilon) = +\infty \end{gathered} \tag{2.3} $$

et une famille π_0^{ε} d'éléments de $\mathscr{M}$, à support dans F_0, telle que pour tout ε et $x \in F_0$

$$ \left| \varepsilon \operatorname{Log} \pi_0^{\varepsilon}(\Delta_{r_0(\varepsilon)}(x)) - f_0(x) \right| \leqq s_1(\varepsilon) \tag{2.4} $$

où pour r positif, $\Delta_r(x)$ désigne l'intervalle $[x-r, x+r]$.

Tous les éléments sont maintenant en place pour la construction de la famille de processus de branchements spatiaux.

Soit $\hat{\Omega} = \sum_1^{\infty} \Omega^n$ l'ensemble des réunions finies d'arbres spatiaux, muni de la tribu $\hat{\mathscr{F}}$ traçant $\mathscr{F}^{\otimes n}$ sur Ω^n. Toutes les v. a. définies sur Ω s'étendent de manière naturelle à $\hat{\Omega}$, on les notera avec le signe $\hat{}$. Pour tout ε on note P^{ε} la probabilité sur $\hat{\Omega}$, $\hat{\mathscr{F}}$ correspondant à la superposition d'arbres spatiaux aléatoires indépendants, yant pour positions initiales les points chargés par π_0^{ε} et ayant pour lois les $P^{\varepsilon}_{0,x}$ correspondants. Dans ces conditions, pour tout n, la v. a. $\hat{\zeta}_n$ est une somme de v. a. indépendantes du type ζ_n.

Enfin on note $\hat{\zeta}_t^{\varepsilon} = \hat{\zeta}_{[t/\varepsilon]}$.

III. — RÉSULTATS ASYMPTOTIQUES SUR L'ESPÉRANCE DU PROCESSUS

On montre ici que la limite de $\varepsilon \operatorname{Log} E^{\varepsilon} \hat{\zeta}_t^{\varepsilon}(\Delta_r(x))$ est $T f_0(0, t, x)$. La minoration en 1 est une adaptation, au cas de population initiale, de la proposition de [6]. La majoration en 2 est plus complexe. De façon générale on cherche à majorer des $E\zeta_n(A)$ avec A borélien de $\mathbb{R}$. Grâce à une renormalisation on peut utiliser les techniques de grandes déviations pour les chaînes (sous)-markoviennes. Il est bien connu ([1], [8]) que les ensembles adéquats pour la majoration de la probabilité sont liés aux ensembles de niveau de la fonctionnelle I. Il faut donc inclure $\mathbb{R}^{n-1}\times A$ dans un ensemble de niveau bien choisi. Comme les deux énoncés classiques ([1], [8]) ne sont pas directement applicables, on établit une proposition (dite technique), voisine, avec une démonstration plus simple faite en appendice, Elle nous servira aussi dans le IV pour trouver, par récurrence une majoration d'espérance pour des généalogies contraintes, clé de la majoration finale de $\varepsilon \operatorname{Log} \hat{\zeta}_t^\varepsilon$ grâce à l'inégalité de Markov.

1. Minoration

PROPOSITION 5. — *Si h vérifie* [H1]. . . [H4] *et*
[H5] *h est de classe* $\mathscr{C}^2$ *en* v *et il existe* h_2 *décroissante de* $\mathbb{R}^+$ *dans* $\mathbb{R}_*^+$ *telle que*

$$\forall (t, x), \qquad |v| \leqq r \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}(t, x, v) \geqq h_2(r)$$

alors pour tout $(x, t^1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^+$, *il existe* $\sigma>0$ *tel que pour tout* $t\leqq t^1$

$$\varliminf_{\substack{\varepsilon\to 0\\ r\geqq\sigma\sqrt{E\varepsilon t}}} \varepsilon \operatorname{Log} E^\varepsilon \hat{\zeta}_t^\varepsilon(\Delta_r(x)) \geqq T f_0(0, t, x). \tag{3.1}$$

Preuve de la proposition 5. — On part de l'inégalité suivante valable pour tout $x_0\in F_0$

$$E^\varepsilon \hat{\zeta}_t^\varepsilon(\Delta_r(x)) \geqq \int_{\Delta_{r_0}(x_0)} E_{0,y}^\varepsilon(\zeta_{[t/\varepsilon]}(\Delta_r(x))\,\pi_0(dy). \tag{3.2}$$

D'après les formules (4.9) et (4.11), p. 23 de [6] on a pour tout γ, l'existence de σ (fixe) et de $\delta(\varepsilon)$ tendant vers 0 avec ε, tels que pour tout φ vérifiant $\varphi(t)=x$, $\|\bar{\varphi}\|_\infty\leqq\gamma$ et tout $r\geqq\sigma\sqrt{t\varepsilon}$, on ait :

$$E_{0,\varphi(0)}^\varepsilon \zeta_{[t/\varepsilon]}(\Delta_r(x)) \geqq \frac{1}{2}\exp-\frac{1}{\varepsilon}[I(0, t, \varphi)(1+\delta(\varepsilon))+\delta(\varepsilon)] \tag{3.3}$$

Soit $\varphi^x \in \Phi^{f_0}(0, t, x) (\subset \Phi(0, t, \varphi^x(0), x))$ et avec les notations de I, 5, soit $\gamma = |\Phi|(0, t, \varphi^x(0), x)$. Dans ces conditions, d'après la proposition 4, il existe δ_1 et δ_2 telles que les relations $|y - \varphi^x(0)| \leqq r_0(\varepsilon) \leqq t$, $\varphi \in \Phi(0, t, y, x)$ entraînent

$$\mathrm{I}(0, t, \varphi) \leqq \mathrm{I}(0, t, \varphi^x) + \delta_1 r_0(\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \|\mathring{\varphi}\|_\infty \leqq \delta_2.$$

En prenant $x_0 = \varphi^x(0)$ dans (3.2) et en appliquant (3.3) aux φ précédents (quitte à remplacer γ par δ_2) on obtient pour $r_0(\varepsilon) \leqq t$ et $r \geqq \sigma \sqrt{\varepsilon t}$

$$\mathrm{E}^\varepsilon \hat{\zeta}_t^\varepsilon(\Delta_r(x)) \geqq \frac{1}{2} \pi_0(\Delta_{r_0}(\varphi^x(0))) \exp - \frac{1}{\varepsilon}\{(\mathrm{I}(0, t, \varphi^x) + \delta_1 r_0)(1+\delta) + \delta\}.$$

Il suffit alors pour conclure d'appliquer (2.3) et (2.4).

2. Majoration

Nous établissons, après l'énoncé de la proposition technique, une majoration en temps réel (avec ε) pour un ensemble de niveau, qui sert à obtenir la majoration proposée pour $\mathrm{E}^\varepsilon \hat{\zeta}_t^\varepsilon$ et prépare celles du IV.

On rappelle ([6], II) qu'un noyau est une fonction de $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \times \mathscr{B}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^+$, telle que $\mathrm{Q}(i, ., \mathrm{A})$ soit mesurable et $\mathrm{Q}(i, x, .)$ soit une mesure finie. Il est dit markovien (resp. sous-markovien) si pour tout (i, x) on a $\mathrm{Q}(i, x, \mathbb{R}) = 1$ (resp. $\leqq 1$). On définit sur $\mathbb{R}^k$ la mesure $\mathrm{Q}_k(i, x, .)$ par

$$\mathrm{Q}_k(i, x, g) = \int_{\mathbb{R}^k} g(y_1, \ldots, y_k) \mathrm{Q}(i, x, dy_1) \times \mathrm{Q}(i+1, y_1, dy_2) \ldots \mathrm{Q}(i+k-1, y_{k-1}, dy_k) \quad (3.4)$$

PROPOSITION TECHNIQUE. — *Soit* Q^0 *un noyau sous-markovien, et* $\mathrm{Q}^0_{i, y}$, $(i, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ *la famille correspondante de sous-probabilités sur* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *On note* L^0 *sa log-Laplace et* H^0 *sa duale de Legendre (supposées définies partout). On suppose qu'il existe* $\bar{\mathrm{L}}^0$ *(qu'on peut supposer paire et positive) telle que pour tout* θ *de* $\mathbb{R}$

$$\sup_{j \in \mathbb{N},\, x \in \mathbb{R}} \mathrm{L}^0(j, x, \theta) \leqq \bar{\mathrm{L}}^0(\theta). \tag{3.5}$$

On note $\underline{\mathrm{H}}^0$ *la duale de* $\bar{\mathrm{L}}^0$. *Soit* $k, q \in \mathbb{N}^*$, $n = kq$, $l_0, u \in \mathbb{R}$

$$\Xi^0(u) = \left\{ l \in \mathbb{R}^n : \sum_{r=0}^{q-1} k\, \mathrm{H}^0\left(rk, l_{rk}, \frac{1}{r}(l_{(r+1)k} - l_{rk})\right) \geqq u \right\} \tag{3.6}$$

et pour $0 \leqq r \leqq q-1$, $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$

$$B_r = \{ l \in \mathbb{R}^n : \sup_{rk \leqq s \leqq (r+1)k} |l_s - l_{rk}| \leqq \gamma \}. \tag{3.7}$$

Alors, les conditions $u_0 \geqq q$, $u \leqq u_0$ *entraînent :*

$$Q_n^0 \left(0, l_0, \Xi^0(u) \cap \bigcap_{r=0}^{q-1} B_r \right) \leqq \exp \left\{ -\frac{u - n\Delta}{1+\Delta} + q \operatorname{Log} \frac{6u_0}{q} \right\} \tag{3.8}$$

$$Q_n^0 \left(0, l_0, \bigcup_{r=0}^{q-1} B_r^c \right) \leqq 4q \exp -k \underline{H}^0 \left(\frac{\gamma}{2k} \right) \tag{3.9}$$

où

$$\Delta = \sup \left\{ \frac{|H^0(j, y', u) - H^0(i, y, u)|}{1 + H^0(i, y, u)} ; \right.$$
$$\left. |i-j| \leqq k, \ |y-y'| \leqq \gamma, \ u \in \mathbb{R} \right\} \quad \blacksquare \tag{3.10}$$

La démonstration de cette proposition est reportée au paragraphe VII. Grâce à l'hypothèse [H1], une renormalisation de toutes les espérances permet de ramener notre problème au cas sous-markovien précédent.

PROPOSITION 6. — *Soit* $l_0 \in \mathbb{R}$, t_0, t^1, ε, η, $\tau \in \mathbb{R}_+^*$, i_0, k, q, $n \in \mathbb{N}^*$ *vérifiant* $\varepsilon < \eta < \tau < t^1 - t_0$, $t_0 = i_0 \varepsilon$, $\eta = k \varepsilon$, $\tau = q \eta$, $n = kq$. *Si* $l \in \mathbb{R}^n$, *on note* l^η *la ligne brisée ayant pour sommets les points* $(t_0 + j\eta, l_{kj})$ *pour* $0 \leqq j \leqq q$ *et si* $u \in \mathbb{R}$, *on pose*

$$\Xi(u) = \{ l \in \mathbb{R}^n : I(t_0, t_0 + \tau, l^\eta) \geqq u \}. \tag{3.11}$$

Alors, si h vérifie [H1], [H2], [H3], *pour tous* K, u_0 *de* $\mathbb{R}_+^*$ *les conditions* $\delta = (2K+1)\eta D \leqq 1$ (cf. 1.13), $u \leqq u_0$, $\varepsilon \leqq M\eta$ *entraînent*

$$E_{i_0, l_0}^\varepsilon Z_n(\Xi(u))$$
$$\leqslant \exp \frac{1}{\varepsilon(1+\delta)^2} \left\{ -u + 3\delta\tau(M+1) + \frac{4\tau\varepsilon}{\eta} \operatorname{Log} \frac{6u_0\eta}{\varepsilon\tau} \right\}$$
$$+ \exp \frac{1}{\varepsilon(1+\delta)^2} \left\{ 4M\tau - \eta \underline{h}(K) + 4\varepsilon \operatorname{Log} \frac{4\tau}{\eta} \right\} \tag{3.12}$$

où $\tilde{u}_0 = u_0 + M t^1$.

Preuve de la proposition 6. — Fixons ε, η, τ, γ vérifiant $0 < \varepsilon < \eta < \tau$ et $\gamma > 0$. D'après [H1] (*cf.* [6], II, rem. 2) le noyau $Q^0 = e^{-M} ({}_\varepsilon Q)$ est sous-markovien. Comme pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ on a

$$E^{\varepsilon}_{i_0, l_0} Z_n(A) = ({}_\varepsilon Q)_n (i_0, l_0, A) = e^{nM} Q^0_n (i_0, l_0, A) \tag{3.13}$$

on peut appliquer la proposition technique. Les formules de passage sont (*cf.* 2.2)

$$L^0(i, ., \theta) = L(i\varepsilon, ., \varepsilon\theta) - M,$$

$$H^0(i, ., u) = h\left(i\varepsilon, ., \frac{u}{\varepsilon}\right) + M, \qquad \underline{H}^0(.) = M + \underline{h}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right).$$

D'après [H3] (*cf.* 1.13) on a, si $\gamma + \eta \leqq 1$

$$\sup \left\{ \frac{|h(t, y, u) - h(t', y', u)|}{M + 1 + h(t, y, u)}; \right.$$

$$\left. |t - t'| \leqq \eta, |y - y'| \leqq \gamma, u \in \mathbb{R} \right\} \leqq D(\gamma + \eta).$$

On suppose désormais $\Delta = D(\gamma + \eta) \leqq 1$ (et $i_0 = 0$ pour simplifier). Pour $r \leqq q$ l'inégalité $r\eta \leqq t < (r+1)\eta$ entraîne $|l^\eta(t) - l_{rk}| \leqq \gamma$ pour $l \in B_r$, donc (*cf.* 1.13)

$$M + h(t, l^\eta(t), \mathring{l}^\eta(t)) \leqq \Delta + (1 + \Delta) H^0\left(r, l_{rk}, \frac{1}{k}(l_{(r+1)k} - l_{rk})\right)$$

ce qui permet de conclure par intégration :

$$(\Xi(u) \cap \bigcap_{r<q} B_r) \subset \left(\Xi^0\left(\frac{u + (M - \Delta)\tau}{\varepsilon(1 + \Delta)}\right) \cap \bigcap_{r<q} B_r\right). \tag{3.14}$$

Les conditions de la proposition 6 entraînent

$$\frac{u + (M - \Delta)\tau}{\varepsilon(1 + \Delta)} \leqq \frac{\tilde{u}_0}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \frac{\tilde{u}_0}{\varepsilon} \geqq \frac{\tau}{\eta}.$$

Si on pose $\gamma = 2K\eta$ et $\delta = \Delta$, les formules (3.8), (3.13), (3.14) et $\Delta \leqq 1$ permettent d'affirmer

$$E^{\varepsilon}_{0, l_0} Z_n(\Xi(u) \cap \bigcap_{r<q} B_r)$$

$$\leqq \exp \frac{1}{\varepsilon(1+\delta)^2}\left\{-u+3\,\delta\tau(\mathrm{M}+1)+\frac{4\,\tau\varepsilon}{\eta}\operatorname{Log}\frac{6\,\tilde{u}_0\,\eta}{\varepsilon\tau}\right\}.$$

De même (3.9) et (3.13) entraînent :

$$\mathrm{E}^{\varepsilon}_{0,\,l_0}\mathrm{Z}_n\big(\bigcup_{r<q}\mathrm{B}^c_r\big)\leqq \exp\frac{1}{\varepsilon(1+\delta)^2}\left\{4\,\mathrm{M}\,\tau-\underline{h}(\mathrm{K})+4\,\varepsilon\operatorname{Log}\frac{4\,\tau}{\eta}\right\}.$$

Cette double majoration ne dépend pas de la condition initiale donc, d'après la propriété de Markov, vaut pour t_0 quelconque. Ceci termine la preuve. ■

Passons maintenant à l'énoncé final de ce paragraphe.

Proposition 7. — *Si h vérifie* [H1], . . ., [H3] *et si $r(\varepsilon)$ tend vers* 0 *avec* ε *on a pour tous t, x*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \varepsilon\operatorname{Log}\mathrm{E}^{\varepsilon}\hat{\zeta}^{\varepsilon}_t(\Delta_r(x))\leqq \mathrm{T}f_0(0,\,t,\,x). \tag{3.15}$$

Preuve de la proposition 7. — Notons qu'elle servira de modèle pour le paragraphe suivant.

Comme $d_0=\operatorname{diam}\mathrm{F}_0$ est fini il existe un recouvremnt de F_0 en intervalles I_j centrés sur $y_j\in\mathrm{F}_0$, de diamètre $2\,r_0(\varepsilon)$, $j=1,\ \ldots,\ \#_0(\varepsilon)$ avec

$$\#_0(\varepsilon)\,r_0(\varepsilon)\leqq d_0. \tag{3.16}$$

On a évidemment, pour tout $\mathrm{A}\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$

$$\mathrm{E}^{\varepsilon}\hat{\zeta}^{\varepsilon}_t(\mathrm{A})\leqq\sum_{j\leqq\#_0}\pi^{\varepsilon}_0(\mathrm{I}_j)\sup\{\mathrm{E}_{0,\,y}\zeta_n(\mathrm{A});\ y\in\mathrm{I}_j\} \tag{3.17}$$

et pour y quelconque, si $\mathrm{S}\geqq\sup\{\mathrm{T}f_0(0,\,t,\,z):\ z\in\mathrm{A}\}$, avec les notations de la proposition 6 et $t=\tau$ on a :

$$\mathrm{E}^{\varepsilon}_{0,\,y}\zeta_n(\mathrm{A})\leqq\mathrm{E}^{\varepsilon}_{0,\,y}(\mathrm{Z}_n(\Xi(f_0(y)-\mathrm{S}))). \tag{3.18}$$

La suite consiste à appliquer (2.4) et la proposition 6.

Pour tout $0<\delta<1$ et $y\in\mathrm{F}_0$ on a d'après (2.4)

$$\varepsilon\operatorname{Log}\pi^{\varepsilon}_0(\Delta_{r_0}(y))\leqq f_0(y)+s_1(\varepsilon)\leqq\frac{f_0(y)+\gamma_0}{(1+\delta)^2} \tag{3.19}$$

où on a posé

$$\gamma_0=4\,s_1(\varepsilon)+3\,\delta\,\|f_0^+\|_\infty. \tag{3.20}$$

Pour tout $y \in F_0$ on a $f_0(y) - S \leqq u_0 = \| f_0^+ \|_\infty + |S|$. Si D_0 majore la constante de Lipschitz de f_0, on peut écrire pour r_0 (donc ε) assez petit et $\varepsilon \leqq M\eta$ d'après (3.19) et la proposition 6

$$
\begin{aligned}
E^\varepsilon \hat{\zeta}_t^\varepsilon(A) \leqq \sharp_0 \exp \frac{1}{\varepsilon(1+\delta)^2} \Big\{ & \sup_A Tf_0(0, t, .) \\
& + D_0 r_0 + \gamma_0 + 3\delta t(M+1) + \frac{4t\varepsilon}{\eta} \operatorname{Log} \frac{6\tilde{u}_0 \eta}{\varepsilon t} \Big\} \\
+ \sharp_0 \exp \frac{1}{\varepsilon(1+\delta)^2} \Big\{ & 4Mt - \eta \underline{h}(K) + 4\varepsilon \operatorname{Log} \frac{4t}{\eta} + \| f_0^+ \|_\infty + \gamma_0 \Big\}
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

x et t sont maintenant fixés. On choisit $A = \Delta_r(x)$, D_1 un majorant de la constante de Lipschitz de $Tf_0(0, t, .)$ au voisinage de x (possible d'après une adaptation très simple de la proposition 2) et

$$D'_1 = D_1 \vee \| f_0^+ \|_\infty \vee |Tf_0(0, t, x)| \vee D_0.$$

Dans la formule (3.21), on peut remplacer $\sup_A Tf_0(0, t, .)$ par $Tf_0(0, t, x) + Dr$ ce qui rapproche de la conclusion.

Supposons pour l'instant $r \leqq 1$ (ce qui entraîne $u_0 \leqq 3D'_1 + Mt$). On choisit η en fonction de ε tel que

$$\varepsilon \ll \eta \ll 1 \tag{3.22}$$

puis K tel que $\eta \underline{h}(K) = 3D'_1 + 4Mt = D''_1$ ce qui entraîne d'après [H2]

$$\delta \ll 1 \ll K \tag{3.23}$$

et

$$4\varepsilon \operatorname{Log} \frac{4t}{\eta} \leqq D'_1 \quad \text{pour } \varepsilon \text{ assez petit.}$$

On a désormais

$$4Mt - \eta \underline{h}(K) + 4\varepsilon \operatorname{Log} \frac{4t}{\eta} + \| f_0^+ \| \leqq -D'_1 \leqq Tf_0(0, t, x)$$

et par conséquent

$$E^\varepsilon \hat{\zeta}_t^\varepsilon(\Delta_r(x)) \leqq 2\sharp_0 \exp \frac{1}{\varepsilon(1+\delta)^2}$$

$$\times\Big\{\mathrm{T} f_0(0,\,t,\,x)+\mathrm{D}'_1(r+r_0)+\gamma_0$$

$$+3(\mathrm{M}+1)\,t\,\delta+\frac{4\,t\,\varepsilon}{\eta}\mathrm{Log}\frac{6\,\mathrm{D}''_1\,\eta}{\varepsilon\,t}\Big\}.$$

Pour conclure, il faut outre (3.22), (3.23) utiliser (3.16) et (2.3) qui nous assurent que ε Log $(2\,\sharp_0)$ tend vers 0. ■

Les propositions 6 et 7 sont à rapprocher du théorème 2 de [6] qui, avec l'inégalité de Markov, permet d'aboutir à la conclusion suivante.

COROLLAIRE. — *Dans le cas d'un seul ancêtre en* x_0 $(f_0(x_0)=0,\ \mathrm{F}_0=\{x_0\})$ *et sous les hypothèses du théorème* 2 *de* [6], *pour tout* $(t,\,x_0,\,x_1)$ *de* $\mathbb{R}^+\times\underline{\mathbb{R}}^2$ *s'il existe* $\varphi\in\Phi(0,t,x_0,x_1)$ *vérifiant*

$$\inf_{\substack{k,\,\varepsilon\\0\leq k\,\varepsilon<t-\varepsilon}} h\left(k\,\varepsilon,\,\varphi(k\,\varepsilon),\,\frac{1}{\varepsilon}(\varphi(k+1)\,\varepsilon-\varphi(k\,\varepsilon))\right)>0 \qquad (3.24)$$

(hypothèse de sous-criticité), il existe σ positif tel que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\,\mathrm{Log}\,\mathrm{P}^{\varepsilon}_{0,\,x_0}(\zeta_{[t/\varepsilon]}(\Delta_{\sigma\sqrt{\varepsilon}}(x))>0)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\,\mathrm{Log}\,\mathrm{E}^{\varepsilon}_{0,\,x_0}(\zeta_{[t/\varepsilon]}(\Delta_{\sigma\sqrt{\varepsilon}}(x))$$

$$=-\bar{\mathrm{I}}(0,t,x_0,x) \qquad (3.25)$$

IV. – MAJORATION DE $\hat{\zeta}^{\varepsilon}_t$ EN PROBABILITÉ

On se propose de préciser, dans le modèle τ-approché, la description asymptotique de $\hat{\zeta}^{\varepsilon}_t$. On caractérise ici la zone «désertique» $(\mathrm{F}^c_{[t/\tau]})$ et on majore en probabilité ε Log $\hat{\zeta}^{\varepsilon}_t(\Delta_r(x))$ pour $x\in\mathrm{F}_{[t/\tau]}$ par $g_{[t/\tau]}(x)$ (à un facteur $\rho\underset{\varepsilon\to 0}{\to}1$ près). Nous utiliserons pour cette démonstration un lemme inspiré de III sur la majoration d'espérances de trajectoires contraintes.

1. Majoration d'espérances contraintes

τ est un pas de temps et ζ positif. On considère avec f_0 définie au II l'algorithme (*cf.* 1.16).

$$\begin{aligned} & g_0 = f_0 \\ j \geqq 1, \quad & g_j = \mathrm{T} g_{j-1}((j-1)\tau, j\tau, .) + \zeta \quad \text{sur } \{g_{j-1} \geqq 0\} \neq \varnothing \\ & = -\infty \quad \text{sinon.} \end{aligned} \tag{4.0}$$

On note toujours $\mathrm{F}_j = \{g_j \geqq 0\}$, $j \geqq 1$.

Comme d'habitude $\tau = n\varepsilon$. Posons pour $j \geqq 1$ et A borélien de $\mathbb{R}$

$$\Xi'_j(\mathrm{A}) = \{ l \in \mathbb{R}^{jn} : l_{jn} \in \mathrm{A}, \forall 0 < i \leqq j-1, l_{in} \in \mathrm{F}_i \}$$

et

$$\mathrm{N}_j(\mathrm{A}) = \hat{\mathrm{Z}}^{\varepsilon}_{jn}(\Xi'_j(\mathrm{A})) \tag{4.1}$$

Les deux cas traités seront $\mathrm{A} = (\mathrm{F}_j)^c$ et $\mathrm{A} = \Delta_r(x)$.

(On s'intéresse toujours aux généalogies aboutissant soit près de x si x est dans la zone de présence, soit dans la zone d'absence, mais dans les deux la contrainte concerne les étapes précédentes, qui toutes doivent correspondre à une situation de présence.)

LEMME 4. — *Pour tout* t^1, ε, *il existe* τ, δ, ζ, γ *dépendant de* ε *vérifiant* (cf. 3.20, *pour* γ_0) :

$$\begin{gathered} 1 \gg \tau \gg \varepsilon \operatorname{Log} \frac{1}{\varepsilon}, \qquad \varepsilon \ll \delta \ll \tau, \\ \varepsilon \ll \zeta \ll \tau, \qquad \gamma - \gamma_0 \gg \varepsilon \end{gathered} \tag{4.2}$$

tels que $\varepsilon \ll r \ll \tau$ *entraîne, pour tout* j *tel que* $j\tau \leqq t^1$

$$\hat{\mathrm{E}}^{\varepsilon}(\mathrm{F}^c_j) \leqq \exp \frac{1}{\varepsilon(1+\delta)^2}(\gamma_0 - j\gamma) \tag{4.3}$$

$$\hat{\mathrm{E}}^{\varepsilon}(\Delta_r(x) \cap \mathrm{F}_j) \leqq \exp \frac{1}{\varepsilon(1+\delta)^2}\{ g_j(x) + \gamma_0 - j\gamma \} \tag{4.4}$$

Preuve du lemme 4. — Elle se fait par récurrence en reprenant, à peu de choses près les idées de la proposition 7 et en appliquant les résultats d'uniformité du I. Supposons $\dfrac{\zeta}{\tau}$ majoré par 1. D'après (1.19) on peut procéder à un recouvrement de F_{j-1} en $\sharp_{j-1}$ interv. I_i de diamètre $2r$.

Avec les notations de II, on obtient en conditionnant par $\mathscr{F}_{(j-1)n}$ (voir aussi [6])

$$E^{\varepsilon} N_j(A) = \sum_{i \leqq \# j} E^{\varepsilon} \sum_{u \in z(j-1)n} 1_{\Xi'_{j-1}(I_i \cap F_{j-1})}(s(u))$$

$$E^{\varepsilon}_{(j-1)n, \sigma(u)} [\zeta_n(\Theta_u(.), A) \mid \mathscr{F}_{(j-1)n}] \quad (4.5)$$

Mais

$$s(u) \in \Xi'_{j-1}(I_i \cap F_{j-1}) \quad \Rightarrow \quad \sigma(u) \in I_i \cap F_{j-1}$$

et vu les propriétés des Θ on a

$$E^{\varepsilon}_{(j-1)n, \sigma(u)} [\zeta_n(\Theta_u(.), A) \mid \mathscr{F}_{(j-1)n}] \leqq \sup_{y \in I_i \cap F_{j-1}} E^{\varepsilon}_{(j-1)n, y} \zeta_n(A) \underset{\text{def}}{=} a_i \quad (4.6)$$

et donc d'après (4.5)

$$E^{\varepsilon} N_j(A) \leqq \sum_{i \leqq \# j-1} a_i E^{\varepsilon} N_{j-1}(I_i \cap F_{j-1}) \quad (4.7)$$

et a_j se majore à l'aide de la proposition 6 comme dans la preuve de la proposition 7.

D'après la proposition 3, soit D_1 majorant (uniforme en j, τ tels que $j\tau \leqq t^1$) à la fois $\|g_j^+\|_{\infty}$ et la constante de Lipschitz de g_j sur F_j. Pour $y \in F_{j-1}$, si $S \geqq \sup_{z \in A} g_j^+(z)$ on a

$$E^{\varepsilon}_{(j-1)n, y}(\zeta_n(A)) \leqq E^{\varepsilon}_{(j-1)n, y}(\Xi(g_{j-1}(y) - a + \zeta)) \quad (4.8)$$

et pour $y \in I_i$ on a grâce à (1.18)

$$g_{j-1}(y_i) - \sup_{z \in A} g_j^+(z) - D_1 r + \zeta \leqq g_{j-1}(y) - a + \zeta \leqq C_1 + t^1 \underset{\text{def}}{=} u_0$$

d'où si (4.4) est vraie à l'ordre $j-1$, d'après la proposition 6 on a

$$a_i E^{\varepsilon} N_{j-1}(I_i \cap F_{j-1}) \leqq e_1 + e_2$$

où

$$e_1 = \exp \frac{1}{\varepsilon(1+\delta)^2} \left\{ \sup_{x' \in A} g_j^+(x') - \zeta + D_1 r \right.$$

$$\left. + \gamma_0 - (j-1)\gamma + 3(M+1)\delta\tau + \frac{4\tau\varepsilon}{\eta} \operatorname{Log} \frac{6\bar{u}_0 \eta}{\varepsilon\tau} \right\} \quad (4.9)$$

avec

$$\bar{u}_0 = u_0 + \mathrm{M}\, t^1$$

et

$$e_2 = \exp \frac{1}{\varepsilon(1+\delta)^2} \left\{ 4\,\mathrm{M}\,\tau - \eta\, \underline{\underline{h}}(\mathrm{K}) \right.$$
$$\left. + 4\,\varepsilon\, \mathrm{Log} \frac{4\,\tau}{\eta} + \mathrm{D}_1 + \gamma_0 - (j-1)\,\gamma \right\} \quad (4.10)$$

On choisit $\varepsilon\, \mathrm{Log}\, \frac{1}{\varepsilon} \ll \eta$, $\eta\, \underline{\underline{h}}(\mathrm{K}) = 3\,\mathrm{D}_1 + 4\,\mathrm{M}\, t^1$ et ε_0 tel que $\varepsilon \leqq \varepsilon_0$ entraîne $4\,\varepsilon\, \mathrm{Log} \frac{4\,t^1}{\eta} \leqq \mathrm{D}_1$. On peut affirmer que si $\zeta \leqq \tau \leqq \mathrm{D}_1$ on a :

$$4\,\mathrm{M}\,\tau - \eta\, \underline{\underline{h}}(\mathrm{K}) + 4\,\varepsilon\, \mathrm{Log} \frac{4\,\tau}{\eta} + \mathrm{D}_1 \leqq -\mathrm{D}_1 \leqq \sup_{x' \in \mathrm{A}} g_j^+ (x') - \zeta \quad (4.11)$$

ce qui entraîne

$$a_i\, \mathrm{E}^\varepsilon\, \mathrm{N}_{j-1} (\mathrm{I}_i \cap \mathrm{F}_{j-1}) \leqq 2\, e_1 \quad (4.12)$$

et la majoration est indépendante de *i*. (4.7) donne alors

$$\mathrm{E}^\varepsilon\, \mathrm{N}_j (\mathrm{A}) \leqq 2\, \#_{j-1}\, e_1 \quad (4.13)$$

et d'après (1.19), il existe D'_1 tel que $j\,\tau \leqq t^1$ entraîne $\#_j \leqq \frac{\mathrm{D}'_1}{2\,r}$, d'où

$$\mathrm{E}^\varepsilon\, \mathrm{N}_j (\mathrm{A}) \leqq \frac{\mathrm{D}'_1\, e_1}{r} \quad (4.14)$$

En notant que si $r \leqq \tau \wedge 1$:

$\mathrm{A} = \Delta_r (x) \cap \mathrm{F}_j$ entraîne grâce à (1.18),

$$\sup_{x' \in \mathrm{A}} g_j^+ (x') \leqq g_j (x) + \mathrm{D}_1\, r;$$

$\mathrm{A} = \mathrm{F}_j^c$ entraîne $\sup_{x' \in \mathrm{A}} g_j^+ (x') = 0$, on peut écrire pour $j \geqq 0$

$$(E^\varepsilon N_j(F_j^c)) \vee \left\{ \left(\exp - \frac{1}{\varepsilon(1+\delta)^2} g_j(x) \right) \times E^\varepsilon N_j(\Delta_r(x) \cap F_j) \right\} \leqq \exp \frac{1}{\varepsilon(1+\delta)^2} (\gamma_0 - j\gamma) \quad (4.15)$$

où

$$\gamma = \zeta - \zeta',$$

$$\zeta' = 2 D_1 (r \vee r_0) + 3(M+1)\delta\tau + \frac{4\tau\varepsilon}{\eta} \operatorname{Log} \frac{6\bar{u}_0 n}{\varepsilon\tau} + 4\varepsilon \operatorname{Log} \frac{D'_1}{r \wedge r_0} \quad (4.16)$$

[car pour $j=0$ notre hypothèse de récurrence est vraie grâce à (3.20)].

Il suffit alors de choisir

$$1 \gg \tau \gg s_1(\varepsilon) \vee K\eta \quad \text{et} \quad \zeta = \zeta' + \gamma_0 + \delta, \quad \gamma = \gamma_0 + \delta \quad (4.17)$$

ce qui donne

$$\left.\begin{array}{l} \zeta' \ll \tau \text{ grâce à (4.2), } \varepsilon \ll r \ll \tau, \text{ et (4.10)} \\ \gamma_0 \ll \tau \text{ grâce à (3.20) et (4.17)} \end{array}\right\} \Rightarrow \zeta \ll \tau$$

$$\delta \ll \tau \text{ grâce à (4.17)}$$

$$\varepsilon \ll \gamma - \gamma_0 = \delta \text{ grâce à (4.10)}$$

Remarque. — Le découpage de $[0, \tau]$ en intervalle de taille η rend le calcul long mais semble incontournable car avec la méthode utilisée, prendre $\tau = \eta$ empêcherait $\frac{\gamma_0}{\tau}$ d'être borné et donc $\frac{\zeta}{\tau}$ de l'être. ■

2. Résultat principal : majoration en probabilité

PROPOSITION 8. — *Pour tout t, ε, il existe τ, ζ, ρ dépendant de ε, vérifiant*

$$1 \gg \tau \gg \varepsilon \operatorname{Log} \frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \ll \zeta \ll \tau, \quad \varepsilon \ll 1 - \rho \ll \tau \quad (4.18)$$

tels que $\varepsilon \ll r \ll \tau$ *entraîne*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\substack{t \leqslant t^1 \\ t \in \tau \mathrm{N}}} \mathrm{P}^\varepsilon (\hat{\zeta}_t^\varepsilon (\mathrm{F}_{[t/\tau]}^c) \geqq 1) = 0 \tag{4.19}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\substack{t \leqq t^1 \\ t \in \tau \mathrm{N} \\ x \in \mathrm{F}_{[t/\tau]}}} \mathrm{P}^\varepsilon (\varepsilon \operatorname{Log} \hat{\zeta}_t^\varepsilon (\Delta_r(x)) \geqq \rho\, g_{[t/\tau]}(x)) = 0 \tag{4.20}$$

Preuve de la proposition 8. — Posons $\left[\frac{t}{\tau}\right] = k$, $\tau = \eta \varepsilon$.

On a facilement

$$\{ \hat{\zeta}_t^\varepsilon (\mathrm{F}_k^c) \geqq 1 \} \subset \bigcup_{j=1}^{k} \{ \mathrm{N}_j (\mathrm{F}_j) \geqq 1 \}$$

(Les généalogies des individus de F_k^c ont quitté les zones de présence — les F_j — pour la première fois au plus tard à l'instant $k-1$.) Appliquant l'inégalité de Markov, il vient

$$\mathrm{P}^\varepsilon (\hat{\zeta}_t^\varepsilon (\mathrm{F}_k) \geqq 1) \leqq \sum_{j=1}^{k} \mathrm{E}^\varepsilon \mathrm{N}_j (\mathrm{F}_j)$$

Prenant τ, δ, ζ, γ comme dans le lemme et posant $\rho^{-1} = (1+\delta)^2$ on a grâce au lemme :

$$\mathrm{P}^\varepsilon (\hat{\zeta}_t^\varepsilon (\mathrm{F}_k) \geqq 1) \leqq \frac{e^{-\rho((\gamma-\gamma_0)/\varepsilon)}}{1 - e^{-\rho\gamma/\varepsilon}}$$

De même on peut écrire, si $a_k(x) = \exp \frac{1}{\varepsilon} \rho\, g_k(x)$

$$\{ \hat{\zeta}_t^\varepsilon (\Delta_r(x) \cap \mathrm{F}_k) \geqq a_k(x) \} \hat{\subset} \mathrm{N}_k (\Delta_r(x) \cap \mathrm{F}_k) \geqq a_k(x) \} \cup \bigcup_{j=1}^{k-1} \{ \mathrm{N}_j (\mathrm{F}_j^c) \geqq 1 \}$$

et toujours grâce à l'inégalité de Markov :

$$\mathrm{P}^\varepsilon (\hat{\zeta}_t^\varepsilon (\Delta_r(x) \cap \mathrm{F}_k) \geqq a_k(x) \} \leqq \frac{1}{a_k(x)} \mathrm{E}^\varepsilon \mathrm{N}_k (\Delta_r(x) \cap \mathrm{F}_k) + \sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{E}^\varepsilon \mathrm{N}_j (\mathrm{F}_j^c)$$

et toujours grâce au lemme:

$$\mathbf{P}^{\varepsilon}(\hat{\zeta}_t^{\varepsilon}(\Delta_r(x)\cap \mathrm{F}_k)\geqq a_k(x))\leqq \frac{e^{-\rho((\gamma-\gamma_0)/\varepsilon)}}{1-e^{-\rho\gamma/\varepsilon}}$$

On termine avec (4.17). ■

Remarque finale. — Comme il a été précisé dans l'introduction, il reste à étudier la minoration en probabilité de $\varepsilon \operatorname{Log} \hat{\zeta}_t^{\varepsilon}$ dans la zone de présence et à montrer la convergence de l'algorithme vers une limite, c'est-à-dire remplacer la contrainte séquentielle par une contrainte permanente. Ce sera fait dans nos prochains articles.

V. — APPENDICE: PREUVE DE LA PROPOSITION TECHNIQUE

Énonçons tout d'abord un lemme qui servira deux fois dans la démonstration de la proposition.

LEMME T. — *Soit $k\geqq 1$, $x_0\in\mathbb{R}$ et B borélien de $\mathbb{R}^k$. On suppose qu'il existe l^0 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, la condition $(x_1,\ldots,x_k)\in\mathrm{B}$ entraîne*

$$\mathrm{G}^0(s,x_s,\theta)\leqq l^0(x_0,0)\quad \textit{pour tout } s \textit{ tel que } 0\leqq s\leqq k-1 \tag{T1}$$

Alors pour tout $v\in\mathbb{R}$ on a (cf. 3.4):

$$\mathrm{Q}_k^0(0,x_0,\mathrm{B}\cap\{x_k\geqq x_0+kv\})\leqq \exp-\{k\sup_{\lambda\geqq 0}[\lambda v-l^0(x_0,\lambda)]\} \tag{T2}$$

$$\mathrm{Q}_k^0(0,x_0,\mathrm{B}\cap\{x_k\leqq x_0+kv\})\leqq \exp-\{k\sup_{\lambda\leqq 0}[+\lambda v-l^0(x_0,\lambda)]\}\quad ■ \tag{T3}$$

Démonstration reportée en fin de paragraphe.

Démonstration de la proposition technique. — On suppose $u>0$, le cas $u\leqq 0$ etant évident.

L'esprit de la méthode est classique ([1], [8]). On a séparé les trajectoires réalisant $\Xi(u)$ en deux groupes selon que sur les tranches de durée k elles ont ou non effectué des excursions d'au plus γ.

1° *Majoration de* $Q_1 = Q^0_{0,\,l_0}\left(\bigcap_{r=0}^{q-1} B_r \cap \Xi^0(u)\right)$. — Posons $l_0 = x$ et X la chaîne sous-markovienne associée.

Majorons tout d'abord pour $v \in \mathbb{R}^*_+$

$$p_0 = Q^0_{0,\,x}\left(B_0 \cap \left\{k\,H^0\left(0, x, \frac{X_k - x}{k}\right) \geqq v\right\}\right) \tag{T10}$$

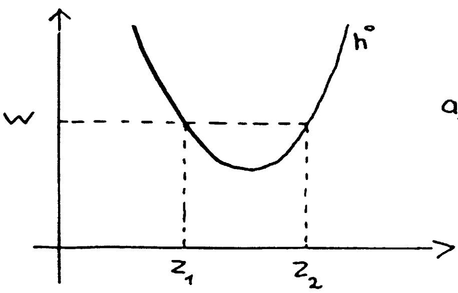
Si h^0 est la transformée de Cramer d'une sous-probabilité sur $\mathbb{R}$, l'ensembke $\{z : h^0(z) \geqq w\}$ pour $w \in \mathbb{R}$ est la réunion de deux demi-droites $]-\infty, z_1]$, $[z_2, +\infty[$ avec $z_1 \leqq z_2$ et

(*a*) si $z_1 < z_2$ alors

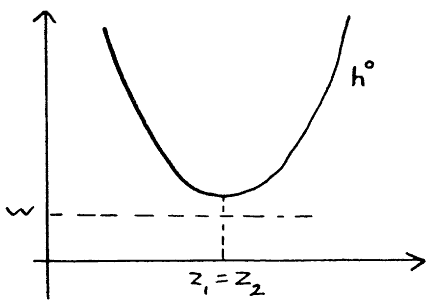
$$h^0(z_1) = h^0(z_2) = w \qquad \text{et} \qquad (h^0)'(z_1) < 0 < (h^0)'(z_2) \tag{T.11}$$

(*b*) si $z_1 = z_2$ alors

$$h^0(z_1) = h^0(z_2) \geqq w \qquad \text{et} \qquad (h^0)'(z_1) = (h^0)'(z_2) = 0$$



a)



b)

Ici $h^0 = H^0(0, x, .)$ (x est fixé) et $w = \dfrac{v}{k}$. On a par conséquent

$$\left\{k\,H^0\left(0, x, \frac{X_k - x}{k}\right) \geqq v\right\} = (X_k \leqq x + k z_1) \cup \{X_k \geqq x + k z_2\} \tag{T12}$$

On va appliquer le lemme précédent. Pour $j \leqq k$ on a pour tout y' tel que $|y' - y| \leqq \gamma$ et tout u de $\mathbb{R}$

$$H^0(0, y, u) \leqq H^0(j, y', u)(1 + \Delta) + \Delta \tag{T13}$$

d'où par dualité pour tout θ

$$G^0(j, y', \theta) \leqq l^0(y, \theta)$$

où (T14)

$$l^0(y,\theta)=\frac{1}{1+\Delta}G^0(0,y,\theta(1+\Delta))+\frac{\Delta}{1+\Delta}$$

On en déduit facilement, grâce à (T2)

$$Q^0_{0,x}(B_0\cap(X_k\leqq x+kz_1))\leqq\exp -k\sup_{\lambda\leqq 0}\{\lambda z_1-l^0(x,\lambda)\}$$

et

$$\sup_{\lambda\leqq 0}\{\lambda z_1-l^0(x,\lambda)\}=\sup_{\lambda\leqq 0}\lambda z_1-\frac{1}{1+\Delta}G^0(0,x,\lambda(1+\Delta))-\frac{\Delta}{1+\Delta}$$

$$=\frac{1}{1+\Delta}[(\sup_{\theta\leqq 0}(\theta z_1-G^0(0,w,\theta)\})-\Delta]$$

Or d'après (T11)

$$\sup_{\theta\leqq 0}\theta z_1-G^0(0,x,\theta)=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\theta z_1-G^0(0,x,\theta)=H^0(0,x,z_1)\geqq\frac{v}{k}$$

ce qui donne

$$Q^0_{0,x}(B_0\cap(X_k\leqq x+kz_1))\leqq\exp-\frac{v-k\Delta}{1+\Delta} \qquad (T15)$$

De même (T3) et (T11) fournissent le même majorant pour $Q^0_{0,x}(B_0\cap(X_k\geqq x+kz_2))$. On en déduit grâce à (T10) et (T12)

$$p_0\leqq 2\exp-\frac{v-k\Delta}{1+\Delta} \qquad (T16)$$

Ce majorant ne dépend pas de la condition initiale et donc si on note $\mathscr{F}'_r=\sigma(X_1,\ldots,X_{kr})$ on a d'après la propriété de Markov, pour tout x

$$Q^0_{0,x}\left[B_r\cap\left\{k\,H^0\left(kr,X_{kr},\frac{X_{k(r+1)}-X_{kr}}{k}\right)\geqq v\right\}\middle|\mathscr{F}'_r\right]$$

$$\leqq 2\exp-\frac{v-k\Delta}{1+\Delta} \qquad (T17)$$

Posons pour $0 \leqq r \leqq q-1$,

$$Y_{r+1} = k\,H^0\left(kr, X_{kr}, \frac{X_{k(r+1)} - X_{kr}}{k}\right) 1_{B_r},$$

$$Y_{r+1} \in \sigma(X_{kr}, \ldots, X_{k(r+1)}).$$

Pour v positif (T17) entraîne

$$Q^0_{0,x}[Y_{r+1} \geqq v \mid \mathscr{F}'_r] \leqq \exp -\lambda(v-a) \tag{T18}$$

où $\lambda = \dfrac{1}{1+\Delta}$ et $a = k\Delta + (1+\Delta)\,\mathrm{Log}\,2 > 0$.

Si v est négatif ou nul la formule (T18) est une évidence.

En posant $Y'_r = \lambda(Y_r - a)$, la situation est la suivante: une suite de v. a. $Y'_1, \ldots, Y'_q$ réelles positives, adaptées à la filtration $\mathscr{F}'_1, \ldots, \mathscr{F}'_q$ (on notera $\mathscr{F}'_0$ la tribu grossière) et vérifiant pour $1 \leqq r \leqq q$

$$(\bigstar) \qquad P^{\mathscr{F}'_{r-1}}(Y'_r \geqq v) \leqq e^{-v} \quad \text{pour tout } v \in \mathbb{R}^+_*$$

le problème étant de majorer $P(Y'_1 + \ldots + Y'_r \geqq v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^+_*$.

On sait que si V est une v. a. réelle de f. r. F., alors $-\log[1-F(V)]$ suit une loi exponentielle de paramètre 1. Donc si pour tout r on définit sur $\mathbb{R} \times \Omega$, Φ_r par $\Phi_r(v, \omega) = -\mathrm{Log}\,P^{\mathscr{F}'_{r-1}}(Y'_r \geqq v)$ la v. a. W_r définie par $W_r(\omega) = \Phi_r(Y'_r(\omega), \omega)$ est $\mathscr{F}'_r$ mesurable et suit conditionnellement à $\mathscr{F}'_{r-1}$ une loi exponentielle, c'est-à-dire que pour tout u de $\mathbb{R}_+$ on a

$$P^{\mathscr{F}'_{r-1}}(W_r \geqq u) = e^{-u}$$

Il en résulte évidemment que les W_r sont indépendants et $(*)$ implique

$$Y'_r \leqq W_r \quad \text{pour tout } 1 \leqq r \leqq q$$

En sommant on obtient

$$P(Y'_1 + \ldots + Y'_q \geqq v) \leqq P(W_1 + \ldots + W_q \geqq v)$$

Pour majorer cette dernière quantité on utiliqe l'inégalité de Cramer-Chernov. On rapelle que la transformée de Cramer de la loi exponentielle de paramètre 1 est la fonction qui vaut $+\infty$ sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}^*_+$:

$$x \to x - \mathrm{Log}\,x - 1 = h(x)$$

et donc pour $v \geqq q$

$$P(Y'_1 + \ldots + Y'_q \geqq v) \leqq e^{-qh(v/q)} = e^{-v+q\,\mathrm{Log}\,(v/q)+q}$$

d'où pour tout $v_0 \geqq q$ et tout $v \leqq v_0$

$$P(Y'_1 + \ldots + Y'_q \geqq v) \leqq e^{-v + q \operatorname{Log}(v_0/q)}$$

et en revenant aux Y

$$P(Y_1 + \ldots + Y_q \geqq v) \leqq \exp - \lambda (v - qa) + q + q \operatorname{Log} \frac{v_0}{q}$$

dès que $\lambda v \leqq v_0$ et $v_0 \geqq q$.

Si on remplace λ et a par leurs valeurs on en déduit facilement

$$Q_1 \leqq \exp \left\{ -\frac{1}{1+\Delta}(u - n\Delta) + q \operatorname{Log} \frac{2 e u_0}{q} \right\}$$

pourvu que $u \leqq u_0$ et $u_0 \geqq q$.

2° *Majoration de* $Q_2 = Q^0_{0, t0}\left(\bigcup_{r=0}^{q-1} B^c_r \right)$. On pose encore $l_0 = x$.

On a

$$Q_2 \leqq \sum_{r=0}^{q-1} Q^0_{0, x}(B^c_r) \leqq q \sup_{r \leqq q-1} Q^0_{0, x}(B^c_r)$$

On majore tout d'abord $Q^0_{0, x}(B^c_0)$. D'après Ventsel [8], on a

$$Q^0_{0, x}(B^c_0) \leqq 2 \sup Q^0_{s, y} \left\{ |X_{s'} - y| > \frac{\gamma}{2} \right\}$$

le sup étant pris sur $\left\{ \begin{array}{c} 0 \leqq s \leqq s' \leqq k \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$. Posant $\gamma' = \frac{\gamma}{2}$ et appliquant le lemme avec $l^0(y, \lambda) = \bar{L}^0(\lambda)$ pour tout y, on obtient grâce à la parité de $\bar{L}^0$

$$Q^0_{s, y}\{ |X_{s'} - y| > \gamma' \} \leqq 2 \exp - (s' - s) \underline{H}^0 \left(\frac{\gamma'}{s - s} \right) \qquad (T20)$$

or $\underline{H}^0$ est positive et croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc on obtient

$$Q^0_{0, x}(B^c_0) \leqq 4 \exp - k \underline{H}^0 \left(\frac{\gamma}{2k} \right)$$

Ce majorant ne dépend pas de la condition initiale et d'après la propriété de Markov vaut donc pour les B_r^c, $1 \leqq r \leqq q-1$. On conclut donc par

$$Q_2 \leqq 4 q \exp - k \underline{H}^0 \left(\frac{\gamma}{2k} \right) \quad \blacksquare$$

Démonstration du lemme. — L'identité valable pour tout x, λ de $\mathbb{R}^2$ et tout $k \geqq 1$

$$E_{0,x} \exp \left\{ \lambda (X_k - x) - \sum_{s=0}^{k-1} L^0 (s, X_s, \lambda) \right\} = 1 \tag{T21}$$

entraîne pour tout B mesurable par rapport aux X

$$E_{0,x} 1_B \exp \left\{ \lambda (X_k - x) - \sum_{s=0}^{k-1} L^0 (s, X_s, \lambda) \right\} \leqq 1$$

et donc en appliquant l'hypothèse

$$E_{0,x} 1_B \exp \{ \lambda (X_k - x) - k l^0 (x, \lambda) \} \leqq 1$$

ou encore

$$E_{0,x} 1_B \exp \lambda (X_k - x) \leqq e^{k l^0 (x, \lambda)}$$

qui permet d'obtenir (T2) et (T3) par optimisation sur l'inégalité de Markov pour les moments exponentiels.

RÉFÉRENCES

[1] R. AZENCOTT et G. RUGET, Mélanges d'équations différentielles et grands écarts à la loi des grands nombres, *Zeits. für Wahr.*, t. **38**, 1977, p. 1-54.

[2] J. D. BIGGINS, Chernoff's Theorem in the Branching Random Walk, *J. of Appl. Prob.*, t. **14**, 1977, p. 630-646.

[3] F. H. CLARKE, Generalized Gradients and Applications, *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, t. **205**, 1975, p. 247-262.

[4] F. H. CLARKE, The Euler-Lagrange Differential Inclusion, *J. of Diff. Eq.*, t. **19**, 1975, p. 80-90.

[5] J. NEVEU, *Arbres et processus de Galton-Wtson Ann I.H.P., vol.* **22**, n° 2, 1986.

[6] A. ROUAULT, Probabilités de présence dans un processus de branchement spatial markovien, *Ann. I.H.P., vol.* **23**, n° 1, 1987.

[7] G. RUGET, Large Deviations and More or Less Rare Events in Population Dynamics, *Colloque Luminy; Lect. Notes in Biom.*, n° **49**, 1981, p. 388-400.

[8] A. D. VENTSEL, Rough Limit Theorems on Large Deviations for Markov Stochastic Processes, *Théor. of Prob. and its Appl.*, t. **21**, n° 2, 1976, p. 227-242 et t. **21**, n° 3, p. 499-512.

(*Manuscrit reçu le* 24 *septembre* 1985.)