ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

GEORGE HAIMAN

Étude des extrêmes d'une suite stationnaire m-dépendante avec une application relative aux accroissements du processus de Wiener

Annales de l'I. H. P., section B, tome 23, nº 3 (1987), p. 425-457
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1987__23_3_425_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 23, n° 3, 1987, p.425-458. *Probabilités et Statistiques*

Étude des extrêmes d'une suite stationnaire m-dépendante avec une application relative aux accroissements du processus de Wiener

par

George HAIMAN

I.N.R.E.T.S. et L.S.T.A., Université Paris-VI

RÉSUMÉ. — Cet article comporte deux parties :

Au chapitre 1 on démontre un théorème d'approximation par une loi géométrique de la probabilité que les maximums d'une suite stationnaire m-dépendante restent en dessous d'un seuil fixé. On déduit une évaluation fine de la probabilité de franchissement d'un seuil fixé par les accroissements du processus de Wiener.

Au chapitre 2, $\{(T_n, \mathcal{O}_n), n \geqq 1\}$ étant la suite des temps de records et des records de la suite m-dépendante $\{X_n, n \geqq 1\}$, on construit, sur le même espace de probabilité que celui sur lequel sont définies les N_n, une suite $\{(S_n, R_n), n \geqq 1\}$, dont la loi de probabilité est la même que celle de $\{(T_n, \mathcal{O}_n), n \geqq 1\}$ lorsque les X_n sont indépendantes et telle que presque sûrement il existe deux entiers q et n_0 tels que pour tout $n \geqq n_0$ on a $S_n = T_{n-q}$ et $R_n = \mathcal{O}_{n-q}$. Les hypothèses concernent la loi des couples (X_1, X_i), $i=2, \ldots, m$.

ABSTRACT. — This article is composed of two parts:

In chapter 1 we prove that the probability that the partial maximum sequence associated with an m-dependent stationary sequence remain under a given treshold may be approximated by a geometric law. We also give the rate of the approximation. From this result we deduce an improved evaluation of the probability that the increments of the Wiener process remain under a given treshold.

In chapter 2 we consider the sequence $\{(T_n, \mathcal{O}_n), n \geqq 1\}$ of records times and records associated with an m-dependent stationary sequence $\{X_n, n \geqq 1\}$. We construct on the probability space on which is defined $\{X_n, n \geqq 1\}$ a sequence $\{(S_n, R_n), n \geqq 1\}$ having the same probability law as $\{(T_n, \mathcal{O}_n), n \geqq 1\}$ when the X_n are i. i. d. and such that almost surely there exists two integers q and n_0 such that for any $n \geqq n_0$ we have $S_n = T_{n-q}$ and $R_n = \mathcal{O}_{n-q}$.

Key words : m-dependent sequences, time series, increments of the Wiener process, records and record times.

CHAPITRE I

1. INTRODUCTION ET RÉSULTATS

Soit $\{X_n, n \geqq 1\}$ une suite stationnaire de variables aléatoires m-dépendantes, $(m \geqq 2)$ à valeurs dans (a, b), $-\infty \leqq a < b \leqq \infty$.

On suppose que la fonction de répartition de X_1 est continue.

Nous avons démontré dans [3] le :

THÉORÈME A. — *Il existe $a < u_0 < b$ et deux fonctions $\sigma(u)$ et $\mu(u)$, $u_0 \leqq u \leqq b$, telles que pour tout $u_0 \leqq u \leqq b$ on a $0 < \mu(u) < 1$, $|\sigma(u)| < 1$, $\sigma(u) = 0(P\{X_1 \geqq u\})$, $u \nearrow b$ et*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P\{\operatorname{Max}(X_1, \ldots, X_n) \leqq u\}}{(1+\sigma(u))\,\mu^n(u)} = 1 \tag{1}$$

avec

$$\mu(u) = 1 - P\{\operatorname{Max}(X_1, \ldots, X_{m-1}) \leqq u, X_m \geqq u\} + O(P\{X_1 \geqq u\}^2), \qquad u \nearrow b. \tag{2}$$

Dans cette partie nous démontrons le théorème suivant qui complète le théorème A :

THÉORÈME 1. — *Il existe* $a<u_0<b$ *(indépendant de* m*) et une fonction* $\mu(u)$, $0<\mu(u)<1$ *définie pour* u *tel que* $u_0<m\,\mathrm{P}\{X_1>u\}<b$, *telle que*

(i)

$$\operatorname*{Max}_{n\geqq 1}\left|\frac{\mathrm{P}\{\operatorname{Max}(X_1,\ldots,X_n)\leqq u\}}{\mu^n(u)}-1\right| \leqq \mathrm{K}\,m^2 \sup_{1<i\leqq m}\mathrm{P}\{X_1>u,\ X_i>u\} \tag{3}$$

K *étant une constante* $\geqq 0$ *et*

$$\mu(u)=1-\mathrm{P}\{\operatorname{Max}(X_1,\ldots,X_{m-1})\leqq u,\ X_m\geqq u\}+\frac{1}{m}O((m\,\mathrm{P}\{X_1\geqq u\})^2) \tag{4}$$

la fonction $O(x)$ *vérifiant pour tout* $x>0$

$$|O(x)|\leqq \mathrm{C}x, \qquad \mathrm{C}>0 \text{ indépendant de } m.$$

(ii) m *étant fixé, si l'hypothèse suivante* (H_1) *est satisfaite :*

(H_1) *il existe* $\beta>0$ *tel que quel que soit* $1<i\leqq m$

$$\limsup_{u\nearrow b}\frac{\mathrm{P}\{X_1\geqq u,\ X_i\geqq u\}}{\mathrm{P}\{X_1\geqq u\}^{1+\beta}}<\infty \tag{5}$$

alors

$$\mu(u)=\mathrm{P}\{X_1\leqq u\}+O(\mathrm{P}\{X_1\geqq u\}^{\min(1+\beta,\,2)}),\qquad u\nearrow b \tag{6}$$

(iii) m *étant fixé, si l'hypothèse suivante entraînant* (H_1) :

(H_2) *il existe* $\beta>0$ *tel que quel que soit* $1<i\leqq m$

$$\limsup_{Z\nearrow b}\left\{\sup_{\substack{Z<v<w<b\\ Z<u<b}}\frac{\mathrm{P}\{X_1\geqq u,\ v\leqq X_i\leqq w\}}{\mathrm{P}\{X_1\geqq u\}^{\beta}\,\mathrm{P}\{v\leqq X_i\leqq w\}}\right\}<\infty \tag{7}$$

est satisfaite alors il existe $\mathrm{C}'>0$ *et* $u_1>0$ *tel que quel que soit* $u_1<u<b$

$$\operatorname*{Max}_{\substack{u\leqq v<w\leqq b\\ n\geqq 1}}\left|\frac{\mathrm{P}\{\operatorname{Max}(X_1,\ldots,X_n)\leqq u,\ v\leqq X_{n+1}\leqq w\}}{\mu^n(u)(1-\mu(u))(\mathrm{P}\{v\leqq X_1\leqq w\}/\mathrm{P}\{X_1\geqq u\})}-1\right| \leqq \mathrm{C}'\,\mathrm{P}\{X_1\geqq u\}^{\min(\beta,\,1)} \tag{8}$$

Remarques 1.

1° D'après les formules de Poincaré on a (*voir* [2], théorème 1.4.1)

$$P\{\operatorname{Max}(X_1, \ldots, X_{m-1}) \leqq u, X_m \geqq u\}$$
$$= P\{X_1 \geqq u\} - \sum_{k=2}^{m} (-1)^k$$
$$\times \sum_{1 < i(2) < \ldots < i(k) \leqq m} P\{X_1 \geqq u, X_{i(2)} \geqq u, \ldots, X_{i(k)} \geqq u\} \quad (9)$$

et

$$0 \leqq \sum_{k=2}^{m} (-1)^k \sum_{1 < i(2) < \ldots < i(k) \leqq m} P\{X_1 \geqq u, X_{i(2)} \geqq u, \ldots, X_{i(k)} \geqq u\}$$
$$\leqq \sum_{2 \leqq i \leqq m} P\{X_1 \geqq u, X_i \geqq u\} \quad (10)$$

On voit que (5) et (10) entraînent (6) et que la condition plus classique (*voir* [9]) :

(H'_1) quel que soit $1 < i \leqq m$

$$\limsup_{u \nearrow b} \frac{P\{X_1 \geqq u, X_i \geqq u\}}{P\{X_1 \geqq u\}} = 0 \quad (11)$$

et suffisante pour que l'on ait :

$$\mu(u) \sim P\{X_1 \leqq u\}, \qquad u \nearrow b \quad (12)$$

(H'_1) est satisfaite dans toutes les applications présentées ci-après.

2° Lorsque $m=2$ on peut écrire à la place de (3) :

$$\operatorname{Max}_{n \geqq 1} \left| \frac{P\{\operatorname{Max}(X_1, \ldots, X_n) \leqq u\}}{\mu^n(u)} - 1 + P(X_1 > u, X_2 > u) \right| = O(P(X_1 > u)^2)$$

3° L'exemple suivant fournit une méthode de construction de suites pour lesquelles $\mu(u)$ est « strictement » différent de $P\{X_1 \leqq u\}$ lorsque $u \nearrow b$.

Soit $\{Y_n, n \geqq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées à valeurs dans (a, b) et $\{i_n, n \geqq 1\}$ une suite de Bernoulli, indépendante de $\{Y_n, n \geqq 1\}$.

On vérifie facilement que

$$X_n = Y_{n-i_n}, \qquad n \geqq 2$$

est 2-dépendante et que

$$\lim_{u \nearrow b} \frac{P\{X_2 \geqq u, X_3 \geqq u\}}{P\{X_2 \geqq u\}} = P\{i_1=0\} \times P\{i_1=1\}$$

L'application ci-après, relative aux accroissements du processus de Wiener, constitue un autre exemple dans lequel $\mu(u) \sim P\{X_1 \leqq u\}$ lorsque $u \nearrow b$. △

Application du théorème 1 (i)-(ii) relative aux accroissements du processus de Wiener

Soit $\{X(t), t \geqq 0\}$ le processus gaussien centré dont la fonction de covariance est

$$E(X(t)X(\tau)) = \begin{Bmatrix} 1-|t-\tau| & \text{si} & |t-\tau| \leqq 1 \\ 0 & \text{si} & |t-\tau| > 1 \end{Bmatrix} \tag{13}$$

$\{W(t), t \geqq 0\}$ étant un processus de Wiener, on remarque que $\{X(t), t \geqq 0\}$ admet la représentation

$$X(t) = W(t+1) - W(t), \qquad t \geqq 0 \tag{14}$$

Posons quels que soient $x < u$ et $T > 0$

$$P_u(T/x) = P\{\sup_{0<t\leqq T} X(t) < u \,|\, X(0) = x\} \tag{15}$$

Slepian ([8], 1962), en utilisant une propriété de $X(t)$ semblable à la propriété de Markov (cette propriété n'est vérifiée que si $0 \leqslant T \leqslant 1$) a démontré l'identité :

$$Q_u(T/x) = -\frac{d}{dT} P_u(T/x) = \frac{u-x}{T(2\pi T(2-T))^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x(1-T)-u)^2}{T(2-T)}\right\}, \qquad x<u, \quad 0<T\leqq 1 \tag{16}$$

Shepp ([7], 1966) par une méthode différente, valable elle aussi uniquement si $0 \leqq T \leqq 1$, a démontré l'identité, en accord avec (16),

$$P_u(T/x) = \Phi\left(\frac{u-x(1-T)}{(T(2-T))^{1/2}}\right) - e^{-1/2\,(u^2-x^2)}$$

$$\Phi\left(\frac{x-u(1-\mathrm{T})}{(\mathrm{T}(2-\mathrm{T}))^{1/2}}\right), \qquad x<u, \quad 0 \leqq \mathrm{T} \leqq 1 \quad (17)$$

dans laquelle

$$\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-(u^2/2)}\,du$$

Enfin, Shepp ([10], 1971), en utilisant une identité de Karlin et McGregor ([4], 1959), a démontré la formule :

Pour tout T entier et $x<u$ on a

$$\mathrm{P}_u(\mathrm{T}/x)=\frac{1}{g(x)}\int\ldots\int_{\mathrm{D}} \det g(y_i-y_{j+1}+u)\,dy_2\ldots dy_{\mathrm{T}+1} \qquad (18)$$

avec

$$\mathrm{D}=\{u-x<y_2<\ldots<y_{\mathrm{T}+1}\}, \qquad g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x^2/2)},$$

$$0 \leqq i, j \leqq \mathrm{T}, \qquad y_0=0 \qquad \text{et} \qquad y_1=u-x.$$

Dés que $\mathrm{T}>1$, le développement de (18) conduit à des expressions compliquées et de moins en moins exploitables.

Posons

$$\mathrm{P}_u(\mathrm{T})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} \mathrm{P}_u(\mathrm{T}/x)\,e^{-(x^2/2)}\,dx=\mathrm{P}\{\sup_{0<t\leqq \mathrm{T}} \mathrm{X}(t)<u\} \qquad (19)$$

Nous utilisons le théorème 1 et (18) avec $\mathrm{T}=1$ et $\mathrm{T}=2$ pour déduire le :

THÉORÈME 2. — *Soit* $\{\mathrm{W}(t),\ t \geqq 0\}$ *le processus de Wiener. Il existe* $u_0>0$ *et une fonction* $\mu(u)$, $u_0 \leqq u<\infty$, $0<\mu(u)<1$, *telle que :*

(*i*) *lorsque* $u \nearrow \infty$

$$\mu(u)=1-\frac{u}{\sqrt{2\pi}}e^{-(u^2/2)}(1+o(1)) \qquad (21)$$

(ii) *Il existe* $\mathrm{C}(u)>0$ *tel que*

$$\operatorname*{Max}_{\mathrm{T}\geqq 1}\left|\frac{\mathrm{P}\{\operatorname*{Max}_{0\leqq t\leqq \mathrm{T}}(\mathrm{W}(t+1)-\mathrm{W}(t))\leqq u\}}{\mu(u)^{\mathrm{T}}}-1\right| \leqq \mathrm{C}(u)\,(ue^{-(u^2/2)}), \qquad (22)$$

$$\lim_{u \to \infty} C(u) = 0$$

En combinant le théorème 2 et un lemme de Ortega et Wschebor ([5], 1984) on déduit le :

COROLLAIRE 1. — (i) *Il existe deux fonctions,* $C_1(u)$, $\lim_{u \to \infty} C_1(u) = 0$ *et* $\varepsilon_1(u)$, $u_1 \leqq u$, $\lim_{u \to \infty} \varepsilon_1(u) = 0$, *telles que pour tout* $T \geqq 1$ *et* $u_1 \leqq u$ *on a*

$$P\{\max_{0 \leqq t \leqq T} \max_{0 \leqq s \leqq 1} (W(t+s) - W(t)) \leqq u\}$$

$$\leqq P\{\max_{0 \leqq t \leqq T} (W(t+1) - W(t)) \leqq u\}$$

$$\leqq (1 + C_1(u)\, u e^{-(u^2/2)}) \left(1 - \frac{u}{\sqrt{2\pi}} e^{-(u^2/2)} (1 - \varepsilon_1(u))\right)^T \tag{23}$$

(ii) *Quel que soit* $\delta > 0$ *il existe* $C_2 > 0$ *et* $-\infty < u_2 < \infty$ *telles que pour tout* $T \geqq 1$ *et* $u_2 \leqq u$

$$P\{\max_{0 \leqq t \leqq T} \max_{0 \leqq s \leqq 1} (W(t+s) - W(t)) \leqq u\}$$

$$\geqq (1 - C_2\, u e^{-(u^2/2)}) \left(1 - (4e + \delta) \frac{u}{\sqrt{2\pi}} e^{-(u^2/2)}\right)^T \tag{24}$$

Remarque 2. — (23) et (24) sont des approximations plus fines que :

LEMME A (Révesz, 1982). — *Quel que soit* $\varepsilon > 0$ *il existe* $u_0(\varepsilon) > 0$ *et* $T_0 = T_0(\varepsilon) > 0$ *tels que si* $u > u_0$ *et* $T > T_0$ *alors :*

$$\exp\left\{-25 \frac{T}{\sqrt{2\pi}} u e^{-(u^2/2)}\right\}$$

$$\leqq P\{\sup_{0 \leqq t \leqq T} \sup_{0 \leqq s \leqq 1} (W(t+s) - W(t)) \leqq u\}$$

$$\leqq P\{\sup_{0 \leqq t \leqq T} (W(t+1) - W(t)) \leqq u\}$$

$$\leqq \exp\left\{-(1 - \varepsilon) \frac{T}{\sqrt{2\pi}} u e^{-(u^2/2)}\right\}$$

2. DÉMONSTRATIONS DES THÉORÈMES

Démonstration du théorème 1. — Il est intéressant, pour une raison de simplicité dans les notations, de ramener l'étude de $\{X_n, n \geqq 1\}$ à celle de

$$\{U_n = 1 - F(X_n),\ n \geqq 1\}, \qquad F(x) = P\{X_1 \leqq x\}, \quad a \leqq x \leqq b$$

$\{U_n, n \geqq 1\}$ a ses lois marginales uniformément distribuées sur (0, 1) et l'énoncé du théorème 1 s'exprime en termes de minimum sous la forme équivalente suivante :

THÉORÈME 1'. — *Il existe* $0 < u < 1$ (*indépendant de* m) *et* $0 < \mu(x) < 1$, *définie pour* $0 < x < \frac{u_0}{m}$ *telle que :*

(i)

$$\operatorname*{Max}_{n \geqq 1} \left| \frac{P\{\operatorname{Min}(U_1, \ldots, U_n) > x\}}{\mu^n(x)} - 1 \right| \leqq K m^2 \sup_{1 < i \leqq m} P(U_1 < x, U_i < x) \tag{3'}$$

K *étant une constante* $\geqq 0$ *et*

$$\mu(x) = 1 - P\{\operatorname{Min}(U_1, \ldots, U_{m-1})\} \geqq x, U_m < x\} + \frac{1}{m} O((mx)^2) \tag{4'}$$

la fonction $O(t)$ *vérifiant pour tout* $t > 0$

$$|O(t)| \leqq Ct, \qquad C > 0 \textit{ indépendant de } m.$$

(ii) *m étant fixé, si l'hypothèse suivante* H^1 *est satisfaite :*
(H^1) *il existe* $\beta > 0$ *tel que quel que soit* $1 < i \leqq m$

$$\limsup_{u \downarrow 0} \frac{P\{U_1 < u, U_i < u\}}{u^{1+\beta}} < \infty \tag{5'}$$

alors, lorsque $mx \searrow 0$

$$\mu(x) = 1 - x + O((mx)^{\min(1+\beta, 2)}),$$

avec (6')

$$|O(u)| < C' u, \qquad C' \textit{ indépendant de } m.$$

(iii) *m étant fixé, si l'hypothèse suivante entraînant* (H^1).
(H^2) *il existe* $\beta > 0$ *tel que quel que soit* $1 < i \leqq m$

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{\substack{0 < v < w < \varepsilon \\ 0 < u < \varepsilon}} \frac{P\{U_1 < u, v < U_i \leqq w\}}{u^\beta (w - v)} < \infty \tag{7'}$$

est satisfaite alors il existe C″ *tel que quel que soit* $0<x<u$

$$\underset{\substack{0\leqq z<y\leqq x\\ n\geqq 1}}{\operatorname{Max}}\left|\frac{\mathrm{P}\{\operatorname{Min}(\mathrm{U}_1,\,\ldots,\,\mathrm{U}_n)>x,\; z\leqq \mathrm{U}_{n+1}\leqq y\}}{\mu^n(x)(1-\mu(x))((y-z)/x)}-1\right|$$

$$\leqq \mathrm{C}''\, x^{\min(\beta,\,1)}\quad \triangle \qquad (8')$$

Démontrons d'abord (3′) et (4′) dans le cas d'une suite stationnaire 2-dépendante $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots$, telle que $\operatorname{Min}\{x;\ \mathrm{P}(\mathrm{U}_1<x)>0\}=0$.

Posons quels que soient $x\geqq 0$ et $n\geqq 1$

$$q_n(x)=\mathrm{P}\{\operatorname{Min}(\mathrm{U}_1,\,\ldots,\,\mathrm{U}_n)>x\},\qquad q_0(x)=1,$$
$$p_n(x)=\mathrm{P}\{\operatorname{Max}(\mathrm{U}_1,\,\ldots,\,\mathrm{U}_n)\leqq x\}\qquad \text{et}\qquad p_0(x)=1.$$

Soit la fonction complexe

$$\mathscr{C}_x(z)=\frac{1}{1-z+p_1(x)z^2-p_2(x)z^3+\ldots}$$

définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ contenant 0 et soient $\{\mathrm{C}_n(x),\ n\geqq 0\}$ les coefficients de la série entière associée à $\mathscr{C}_x(z)$.

LEMME 1.1. — *Quels que soient* $n\geqq 0$ *et* $x\geqq 0$

$$q_n(x)=\mathrm{C}_{n+1}(x) \qquad (2.1)$$

Démonstration. — *Voir* [3], lemme 1.

LEMME 1.2. — *Il existe* $u>0$ *tel que quel que soit* $x\leqq u$ *la fonction* $1-z+p_1(x)z^2-p_2(x)z^3+\ldots$ [*cette fonction est définie quel que soit* $|z|<\dfrac{1}{\sqrt{p_1(x)}}$ *car d'après la* 2-*dépendance quel que soit* $n\geqq 1$ *on a* $p_n(x)\leqq(\sqrt{p_1(x)})^n$]

admet à l'intérieur du disque $|z|=1+\sqrt{p_1(x)}$ *un zéro et un seul,* $\lambda(x)$, *réel et d'ordre de multiplicité* 1, *vérifiant lorsque* $x\searrow 0$

$$\lambda(x)=1+p_1(x)-p_2(x)+O(p_1(x)^2) \qquad (2.2)$$

Démonstration. — *Voir* [3], lemme 2.

D'après le lemme 1.2 quel que soit $x \leqq u$, il existe une fonction $R_x(z) \neq 0$, définie pour $|z| \leqq 1+\sqrt{p_1(x)}$, telle que quel que soit $|z| \leqq 1+\sqrt{p_1(x)}$, $|z| \neq \lambda(x)$.

$$\mathscr{C}_x(z) = \frac{1}{(1-z/\lambda(x))\,R_x(z)} \tag{2.3}$$

Posons, en omettant dorénavant d'écrire x,

$$R(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n z^n \tag{2.4}$$

A partir de

$$(1-z+p_1 z^2 - p_2 z^2 + \ldots)(1-z/\lambda)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n z^n$$

on déduit

$$\begin{gathered} r_0 = 1, \qquad r_1 = \frac{1}{\lambda}(-\lambda+1), \qquad r_2 = \frac{1}{\lambda^2}(p_1\lambda^2 - \lambda + 1), \\ r_3 = \frac{1}{\lambda^3}(-p_2\lambda^3 + p_1\lambda^2 - \lambda + 1), \ \ldots \end{gathered} \tag{2.5}$$

λ étant un zéro de $1-z+p_1 z^2 - p_2 z^3 + \ldots +$ on a aussi

$$r_n = \frac{1}{\lambda^n}\left(- \sum_{t=n+1}^{\infty} (-1)^t p_{t-1} \lambda^t \right), \qquad n \geqq 1$$

d'où

$$\frac{|r_n|}{\lambda} = |\delta_n - \lambda\delta_{n+1}| = |p_n - \lambda\delta_{n+1} + \lambda^2 \delta_{n+2}|, \qquad n \geqq 1 \tag{2.6}$$

en définissant δ_n comme

$$\delta_n = p_n + p_{n+2}\lambda^2 + p_{n+4}\lambda^4 + \ldots \leqq p_n(1 + p_1\lambda^2 + p_1^2\lambda^4 + \ldots) = p_n \frac{1}{1-\lambda^2 p_1}$$

Posons $U_n = \delta_n - \lambda\delta_{n+1}$. Les δ_n étant monotones on a :

$$-(\lambda-1)\,\delta_{n+1} \leqq U_n = p_n - \lambda\delta_{n+1} + \lambda^2\delta_{n+2} \leqq p_n + \lambda(\lambda-1)\,\delta_{n+2}$$

$$\leqq p_n + \lambda(\lambda-1)p_{n+2}\frac{1}{1-\lambda^2 p_1} \leqq p_n \frac{1-\lambda p_1}{1-\lambda^2 p_1}$$

et

$$0 < (\lambda-1)\,\delta_{n+1} \leqslant \frac{(\lambda-1)p_n}{1-\lambda^2 p_1}$$

Lorsque $x \searrow 0$ $\lambda - 1 \sim p_1 \searrow 0$ et $1-\lambda p_1 \sim 1$ donc pour x suffisamment petit on a

$$|r_n| = \lambda\,|U_n| \leqq \frac{\lambda(1-\lambda p_1)}{1-\lambda^2 p_1}.\,p_1^{n/2} \tag{2.7}$$

Posons

$$\hat{R} = \sum_{n=1}^{\infty} |r_n|\,z^n \tag{2.8}$$

et observons que les coefficients de

$$S := \frac{1}{R(z)} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} s_n z^n \tag{2.9}$$

sont majorés par ceux de

$$S := \sum_{m=1}^{\infty} \hat{R}^m(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{s}_n z^n \tag{2.10}$$

En désignant par $\hat{R}_n^m$ le n-ième coefficient de $\hat{R}^m$, $m \geqq 1$, on a :

$$\hat{R}_n^m = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \displaystyle\sum_{j_1+j_2+\ldots+j_m=n} |r_{j_1}| \times |r_{j_2}| \times \ldots \times |r_{j_m}| & \text{si } n \geqq m \end{cases}$$

Il y a $\binom{n-1}{m-1}$ termes dans la somme précédente.

En appliquant (2.7) il vient

$$\hat{R}_n^m \leqq \binom{n-1}{m-1} \frac{\lambda(1-\lambda p_1)}{1-\lambda^2 p_1} p_1^{n/2}, \qquad n \geqq m \geqq 1$$

d'où

$$\hat{s}_n = \sum_{m=1}^{n} \hat{R}_n^m \leqq p_1^{n/2} g(1+g)^{n-1}, \qquad n \geqq 1 \tag{2.11}$$

avec

$$g = \frac{\lambda(1-\lambda p_1)}{1-\lambda^2 p_1}$$

En combinant (2.1) et (2.3) on a quel que soit $n \geqq 1$

$$q_n = P\{\operatorname{Min}(U_1, \ldots, U_n) > x\}$$
$$= \frac{1}{\lambda^{n+1}}(1+\lambda s_1+\lambda^2 s_2+ \ldots +\lambda^{n+1} s_{n+1})$$

d'où, en posant $\mu = \frac{1}{\lambda}$

$$\frac{q_n}{\mu^n} - 1 = \frac{1}{\lambda} - 1 + \sum_{p=0}^{n} \lambda^p s_{p+1}, n \geqq 1. \tag{2.12}$$

De la relation

$$S = \frac{1}{R} - 1 = -(R-1) + (R-1)^2 - (R-1)^3 \ldots$$

on déduit

$$s_1 = -r_1, \qquad s_2 = -r_2 + r_1^2. \quad s_3 = -r_3 + 2 r_1 r_2 - r_1^3$$

ce qui combiné avec (2.5), et comme $\lambda = 1 + p_1 - p_2 + O(p_1^2)$, donne :

$$\frac{1}{\lambda} - 1 + s_1 = 0, \qquad \lambda s_2 = -p_2 + O(p_1^2), \qquad \lambda^2 s_3 = O(p_1^2).$$

Pour $n=1$ et 2 on obtient

$$\frac{q_n}{\mu^n} - 1 = -p_2 + O(p_1^2)$$

Pour $n \geqq 3$ (2.12) s'écrit

$$\frac{q_n}{\mu^n} - 1 = -p_2 + O(p_1^2) + (\lambda^3 s_4 + \lambda^4 s_5 + \ldots)$$

et, d'après (2.9), (2.10) et (2.11) on a

$$(\lambda^3 s_4 + \lambda^4 s_5 + \ldots) \leqq (\lambda^3 \hat{s}_4 + \lambda^4 \hat{s}_5 + \ldots) = O(p_1^2)$$

On a donc quel que soit $n \geqq 1$

$$\frac{q_n}{\mu^n} - 1 = -p_2 + O(p_1^2) \tag{2.13}$$

avec

$$\mu = \frac{1}{\lambda} = 1 - p_1 + p_2 + O(p_1^2) \tag{2.14}$$

ce qui donne (3′) et (4′) dans le cas $m = 2$.

Démontrons maintenant (3′) et (4′) dans le cas $m > 2$.

Pour cela appliquons (2.13) et (2.14) à la suite 2-dépendante

$$Y_n = \operatorname{Min}\{U_i,\ i = (n-1)m + 1, \ldots, nm\},\ n \geqq 1.$$

D'après (2.14) la fonction μ associée à $\{Y_n, n \geqq 1\}$, notée $\mu_Y(x)$, vérifie lorsque $x \searrow 0$

$$\mu_Y(x) = 1 - P(Y_1 < x) + P(Y_1 < x, Y_2 < x) + O(P(Y_1 < x)^2 \tag{2.15}$$

Appliquons l'identité

$$1 - P(A_1) + P(A_1 \cap A_2) = 1 - P(A_1^c) + P(A_1^c \cap A_2^c)$$

vraie quels que soient A_1 et A_2 tels que $P(A_1) = P(A_2)$, aux événements

$$A_1 = \{Y_1 < x\} \qquad \text{et} \qquad A_2 = \{Y_2 < x\}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} 1 - P(Y_1 < x) + P(Y_1 < x, Y_2 < x) &= 1 - P\{\operatorname{Min}(U_i, i = 1, \ldots, m) > x\} \\ &\quad + P\{\operatorname{Min}(U_j, j = 1, \ldots, 2m) > x\}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Posons quels que soient $1 \leqq k \leqq n$ et $0<x<1$

$$S_{k,n}(x)=\sum_{1 \leqq i(1)<i(2)<\ldots<i(k) \leqq n} P\{U_{i(1)}<x, \ldots, U_{i(k)}<x\} \quad (2.17)$$

D'après les formules de Poincaré on a

$$P\{\operatorname{Min}(U_i, i=1, \ldots, m)>x\} = 1-S_{1,m}(x)+S_{2,m}(x)+\ldots+(-1)^m S_{m,m}(x)$$

et

$$P\{\operatorname{Min}(U_i, i=1, \ldots, 2m)>x\} = 1-S_{1,2m}(x)+S_{2,2m}(x)+\ldots+S_{2m,2m}(x) \quad (2.18)$$

La combinaison de (2.16) et (2.18) donne

$$\bar{\mu}_Y := 1-P(Y_1<x)+P(Y_1<x, Y_2<x) = 1-\sum_{k=1}^{m}(-1)^k(S_{k,m}-S_{k,2m})+\sum_{k=m+1}^{2m}(-1)^k S_{k,2m} \quad (2.19)$$

Posons pour tout $0<x<1$

$$S_1(x)=P\{U_1<x\}=x$$

et, si $2 \leqq k \leqq m$

$$S_k(x)=\sum_{1<i(2)<\ldots<i(k) \leqq m} P\{U_1<x, U_{i(2)}<x, \ldots, U_{i(k)}<x\} \quad (2.20)$$

Posons également pour tout $2 \leqq k \leqq m$

$$S'_{k,2m}(x)=\sum_{\substack{1 \leqq i(1)<i(2)<\ldots<i(k) \leqq 2m \\ i(k)-i(1) \leqq m-1}} P\{U_{i(1)}<x, \ldots, U_{i(k)}<x\} \quad (2.21)$$

D'après l'hypothèse de stationnarité on a pour tout $2 \leqq k \leqq m$

$$S'_{k,2m}-S_{k,m}=m S_k \qquad \text{soit} \quad S_{k,m}=S'_{k,2m}-m S_k \quad (2.22)$$

En combinant (2.19) et (2.22) il vient

$$\bar{\mu}_y=1+m\sum_{k=1}^{m}(-1)^k S_k+\sum_{k=2}^{m}(-1)^k(S_{k,2m}-S'_{k,2m})$$

$$+\sum_{k=m+1}^{2m}(-1)^k S_{k,2m} \quad (2.23)$$

Observons que pour tout $2 \leqq k \leqq m$ on a :

$$S_{k,2m}-S'_{k,2m}=\sum_{\substack{1\leqq i(1)<\ldots<i(k)\leqq m\\ i(k)-i(1)\geqq m}}{}' P\{U_{i(1)}<x, \ldots, U_{i(k)}<x\} \quad (2.24)$$

de sorte que la somme des deux derniers termes de (2.23) est

$$\sum_{k=2}^{2m}(-1)^k \sum_{\substack{1\leqq i(1)<\ldots<i(k)\leqq 2m\\ i(k)-i(1)\geqq m}} P\{U_{i(1)}<x, \ldots, U_{i(k)}<x\}$$

On déduit, en appliquant une fois de plus Poincaré :

$$\sum_{k=2}^{m}(-1)^k(S_{k,2m}-S'_{k,2m})+\sum_{k=m+1}^{2m}(-1)^k S_{k,2m}$$

$$=\sum_{\substack{1\leqq i<j\leqq 2m\\ j-i\geqq m}} P\{X_i<x, \operatorname{Min}(X_{i+1}, \ldots, X_{j-1})>x, X_j<x\}$$

$$\leqq \sum_{\substack{1\leqq i<j\leqq 2m\\ j-i\geqq m}} P\{X_i<x, X_j<x\}=\frac{m(m-1)}{2}x^2 \quad (2.25)$$

En combinant (2.15), (2.23) et (2.25) et comme $P(Y_1<x)\leqq mx$ on obtient

$$\mu_y=1-m(S_1-S_2+\ldots+(-1)^m S_m)+m^2 O(x^2)$$

$$=1-m P\{\operatorname{Min}(U_i, \ldots, U_n)>x, U_m<x\}+m^2 O(x^2) \quad (2.26)$$

Posons quel que soit $n\geqq 1$

$$\eta_n(x)=\frac{P\{\operatorname{Min}(U_i, i=1, \ldots, nm)>x\}}{\mu_y(x)^n}-1 \quad (2.27)$$

Les inégalités vraies quels que soient $n\geqq 1$ et $1\leqq p\leqq m$

$$P\{\operatorname{Min}(U_i, i=1, \ldots, (n+1)m)\geqq x\}$$

$$\leqq P\{\operatorname{Min}(U_i, i=1, \ldots, nm+p)>x\}$$

$$\leqq P\{\operatorname{Min}(U_i,\ i=1,\ \ldots,\ nm)>x\}$$

s'écrivent

$$\mu_Y^{n+1}(x)(1+\eta_{n+1}(x))\leqq P\{\operatorname{Min}(U_i,\ i=1,\ \ldots,\ nm+p)>x\}$$
$$\leqq \mu_Y^n(x)(1+\eta_n(x))$$

soit, en posant $\mu(x)=\mu_Y(x)^{1/m}$,

$$\mu(x)^{nm+p}\mu(x)^{m-p}(1+\eta_{n+1}(x))$$
$$\leqq P\{\operatorname{Min}(U_i,\ i=1,\ \ldots,\ nm+p)>x\}$$
$$\leqq \mu(x)^{nm+p}\mu(x)^{-p}(1+\eta_n(x)) \quad (2.28)$$

D'après (2.17) et (9), lorsque $mx \searrow 0$,

$$\mu(x)=1-S_1(x)+\ \ldots\ +(-1)^m S_m+\frac{1}{m}O_3((\mathrm{mx})^2)$$

avec (2.29)

$$|O_3(y)|<Cy, \qquad \text{C indépendant de } n.$$

D'après (2.13) et (2.27) pour x suffisamment petit

$$\operatorname*{Max}_{n\geqq 1}|\eta_n(x)|\leqq 2P(Y_1<x,\ Y_2<x)\leqq C_2 m^2 \sup_{1\leqq j<m} P(U_j<x,\ U_m<x)$$
(2.30)

En combinant (2.28), (2.29) et (2.30) on déduit immédiatement (i).

(ii) étant une conséquence directe des formules de Poincaré [*voir* remarques 1, 1°, (9)-(10)], démontrons maintenant (iii).

On a, quel que soit $n>m$

$$P\{\operatorname{Min}(U_1,\ \ldots,\ U_n)>x,\ z\leqq U_{n+1}\leqq y\}$$
$$=P\{\operatorname{Min}(U_1,\ \ldots,\ U_{n-m})>x,\ z\leqq U_{n+1}\leqq y\}$$
$$-P\left\{\bigcup_{p=1}^{m}(\operatorname{Min}(U_1,\ \ldots,\ U_{n-m+p-1})>x,\ U_{n-m+p}\leqq x,\right.$$
$$\left. z\leqq U_{n+1}\leqq y)\right\} \quad (2.31)$$

D'après l'hypothèse de m-dépendance

$$P\{\operatorname{Min}(U_1,\ \ldots,\ U_{n-m})>x,\ z\leqq U_{n+1}\leqq y\}$$

$$=P\{\operatorname{Min}(U_1, \ldots, U_{n-m})>x\} \times P\{z \leqq U_1 \leqq y\} \quad (2.32)$$

D'après (i) et (ii), si l'on pose

$$\begin{aligned} P(U_1>x, \ldots, U_{n-m}>x) &= \mu^{n-m}(x)(1-\nu_{n-m}(x)) \\ &= \mu^n(x) \times (\mu^{-m}(x) \times (1-\nu_{n-m}(x))) \quad (2.33) \end{aligned}$$

il existe $K>0$ tel que quel que soit $0<x<u$

$$\operatorname*{Max}_{n \geqq m} |\mu^{-m}(x)(1-\nu_{n-m}(x))-1| \leqq K x \quad (2.34)$$

D'autre part

$$P\{z \leqq U_1 \leqq y\} = \frac{y-z}{x}(1-\mu(x))\frac{x}{1-\mu(x)}$$

et comme (H^2) entraîne (H^1), (6′) est satisfaite et

$$\frac{x}{1-\mu(x)} = \frac{1}{1+O(mx^{\min(\beta, 1)})} = 1+O(mx^{\min(\beta, 1)}) \quad (2.35)$$

En combinant (2.32), (2.33), (2.34) et (2.35), on déduit qu'il existe $C_1>0$ tel que quel que soit $0<x<u$

$$\operatorname*{Max}_{n>m} \left| \frac{P\{\operatorname{Min}(U_1, \ldots, U_{n-m})>x,\ z \leqq U_{n+1} \leqq y\}}{\mu^n(x)(1-\mu(x))((y-z)/x)} - 1 \right| \leqq C_1 x^{\operatorname{Min}(\beta, 1)} \quad (2.36)$$

Considérons maintenant le deuxième terme de (2.31). On a

$$\begin{aligned} P\left\{\bigcup_{p=1}^{n} (\operatorname{Min}(U_1, \ldots, U_{n-m+p-1})>x,\ U_{n-m+p} \leqq x,\ z \leqq U_{n+1} \leqq y)\right\} \\ \leqq \sum_{p=1}^{m} P\{\operatorname{Min}(U_1, \ldots, U_{n-m})>x, \\ U_{n-m+p} \leqq x,\ z \leqq U_{n+1} \leqq y\} := A_n \quad (2.37) \end{aligned}$$

Si $n \geqq 2m$

$$\begin{aligned} A_n \leqq \sum_{p-1}^{m} \{\operatorname{Min}(U_1, \ldots, U_{n-2m})>x,\ U_{n-m+p} \leqq x,\ z \leqq U_{n+1} \leqq y\} \\ = P\{\operatorname{Min}(U_1, \ldots, U_{n-2m})>x\} \end{aligned}$$

$$\times \sum_{p=0}^{m} \mathrm{P}\{\mathrm{U}_{n-m+p} \leqq x,\ z \leqq \mathrm{U}_{n+1} \leqq y\} \quad (2.38)$$

Écrivons

$$\mathrm{P}(\mathrm{Min}(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_{n-2m}) > x) = \mu^{n-2m}(x)(1-\nu_{n-2m}(x))$$
$$= \mu^n(x)(1-\mu(x))\left(\frac{\mu(x)^{-2m}}{1-\mu(x)}\right)(1-\nu_{n-2m}(x)) \quad (2.39)$$

et observons que, d'après l'hypothèse (H^2), lorsque $x \searrow 0$

$$\frac{1}{1-\mu(x)} = \frac{1}{x}(1+O(x^{\min(\beta,1)}))$$

et (2.40)

$$\sum_{p=0}^{m} \mathrm{P}\{\mathrm{U}_{n-m+p} \leqq x,\ z \leqq \mathrm{U}_{n+1} \leqq y\} = O(x^\beta(y-z)).$$

On déduit qu'il existe une constante $\mathrm{C}_2 > 0$ telle que

$$\underset{0 \leqq z < y \leqq x < u}{\mathrm{Max}} |\mathrm{A}_n| \leqq \mu^n(x)(1-\mu(x))\frac{y-z}{x} \times \mathrm{C}_2 \times x^\beta \quad (2.41)$$

Si $m < n < 2m$, lorsque $x \searrow 0$

$$\underset{0 \leqq z < y \leqq x < u}{\mathrm{Max}} |\mathrm{A}_n| \leqq O(x^\beta(y-x)) = \mu^n(x)(1-\mu(x))\frac{y-z}{x}$$
$$\times \frac{x}{(y-z)} \cdot \frac{1}{\mu^n(x)(1-\mu(x))} O(x^\beta(y-z))$$

donc il existe une constante $\mathrm{C}_3 > 0$ telle que

$$\underset{0 \leqq z < y \leqq x < u}{\mathrm{Max}} |\mathrm{A}_n| \leqq \mu^n(x)(1-\mu(x))\frac{y-z}{x} \times \mathrm{C}_3 \times x^\beta \quad (2.42)$$

Si $n \leqq m$, on a

$$\mathrm{P}\{\mathrm{Min}(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_n) > x,\ z \leqq \mathrm{U}_{n+1} \leqq y\}$$
$$= \mathrm{P}\{z \leqq \mathrm{U}_{n+1} \leqq y\}$$
$$- \sum_{p=1}^{n-1} \mathrm{P}\{\mathrm{Min}(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_p) > x,\ u_{p+1} \leqq x,\ z \leqq \mathrm{U}_{n+1} < y\}$$

avec

$$\mathrm{P}\{z \leqq \mathrm{U}_{n+1} \leqq y\} = \mu^n(x)(1-\mu(x))\frac{y-z}{x}\left(\frac{1}{\mu^n(x)}\frac{x}{1-\mu(x)}\right)$$

$$= \mu^n(x)(1-\mu(x))\frac{y-z}{x}(1+O(x^{\min(\beta,1)})) \quad \text{lorsque} \quad x \searrow 0 \quad (2.43)$$

et

$$\sum_{p=1}^{n-1} \mathrm{P}\{\mathrm{Min}(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_p) > x, \mathrm{U}_{p+1} \leqq x, z \leqq \mathrm{U}_{n+1} \leqq y\}$$

$$\leqq \mu^n(x)(1-\mu(x))\frac{y-z}{x}O(x^\beta), \quad \text{lorsque} \quad x \searrow 0, \quad (2.44)$$

En combinant (2.31), (2.36), (2.37), (2.41), (2.42), (2.43) et (2.44) on déduit (iii) dans le cas général ce qui achève la démonstration du théorème 1. △

Démonstration du théorème 2. — *Démontrons d'abord* (22) *pour T entier.* Soit la suite 2-dépendante

$$\mathrm{Y}_n = \sup_{n-1 \leqq s \leqq n} (\mathrm{W}(s+1) - \mathrm{W}(s)), \quad n \geqq 1 \quad (3.1)$$

D'après le théorème 1 il existe $-\infty < u_0 < \infty$ et une fonction $\mu(u)$, $u_0 \leqq u$, $0 < \mu(u) < 1$, telle que

$$\mu(u) = 1 - \mathrm{P}\{\mathrm{Y}_1 \geqq u\} + \mathrm{P}\{\mathrm{Y}_1 \geqq u, \mathrm{Y}_2 \geqq u\} + O((\mathrm{P}\{\mathrm{Y}_1 \geqq u\})^2), \quad u \nearrow \infty, \quad (3.2)$$

et telle qu'il existe $\mathrm{C} > 0$ tel que

$$\operatorname*{Max}_{n \geqq 1}\left|\frac{\mathrm{P}\{\operatorname*{Max}_{1 \leqq p \leqq n} \mathrm{Y}_p \leqq u\}}{\mu(u)^n} - 1\right| \leqq \mathrm{CP}(\mathrm{Y}_1 > u, \mathrm{Y}_2 > u) \quad (3.3)$$

D'après (17) [ou (18)] on a

$$\mathrm{P}_u(1) - 1 - \mathrm{P}\{\mathrm{Y}_1 \geqq u\} = \int_{-\infty}^{u} \mathrm{P}_u(1/x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x^2/2)}dx$$

$$=\Phi^2(u)-\frac{e^{-1/2\,u^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}\Phi(v)\,dv \quad (3.4)$$

donc

$$P\{Y_1 \geqq u\}=\frac{u}{\sqrt{2\pi}}e^{-(u^2/2)}(1+o(1))=O(ue^{-(u^2/2)}), \qquad u \nearrow \infty \quad (3.5)$$

Il reste à montrer que $\mu(u)$ vérifie (21).

Pour tout $u \in \mathbb{R}$ on a

$$P\{Y_1 \geqq u\}-P\{Y_1 \geqq u,\ Y_2 \geqq u\}=P_u(1)-P_u(2) \quad (3.6)$$

D'après (18)

$$P_u(2)=\int_{-\infty}^{u}\left(\iint_{\Delta(x)}\det g(y_i-y_{j+1}+u)\,dy_2\,dy_3\right)dx \quad (3.7)$$

avec

$$\Delta(x)=\{u-x<y_2<y_3\}, \qquad 0 \leqq i,\quad j \leqq 2,\quad y_0=0 \quad \text{et} \quad y_1=u-x.$$

Le développement de (3.7) donne, après l'intégration par rapport à y_3 et en faisant le changement de variable $z=y_2+x-a$,

$$P_u(2)=\Phi(u)\,P_u(1)-\iint_{\substack{z>0\\x<u}}\Phi(u-z)$$

$$\times\{\varphi(x^2+u^2)-\varphi((x-z)^2+(u+z)^2)\}\,dz\,dz$$

$$+\iint_{\substack{z>0\\x<u}}\Phi(x-z)\{\varphi(2u^2)-\varphi((u-z)^2+(u+z)^2)\}\,dx\,dz \quad (3.8)$$

avec

$$\varphi(v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{v}{2}\right\}.$$

On a, lorsque $u \nearrow \infty$

$$\Phi(u)\,P_u(1)=P_u(1)+O\left(\frac{e^{-(u^2/2)}}{u}\right) \quad (3.9)$$

Examinons les autres termes de (3.8) :

On a :

$$\iint_{\substack{z>0\\x<u}} \Phi(u-z)\,\varphi(x^2+u^2)\,dx\,dz$$

$$=\varphi(u^2)\,\Phi(u)\int_{-\infty}^{u}\Phi(s)\,ds$$

$$\sim(u+o(u))\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(u^2/2)},\qquad u\nearrow\infty \qquad (3.10)$$

et

$$\iint_{\substack{z>0\\x<u}} \Phi(u-z)\,\varphi\{(x-z)^2+(u+z)^2\}\,dx\,dz$$

$$=\iint_{\substack{z>0\\x<u}} \frac{1-\Phi(z-u)}{g(z-u)}\,\varphi\{(x-z)^2+(u+z)^2+(z-u)^2\}\,dx\,dz$$

$$=\frac{\exp(-u^2)}{2\pi}\int_0^u \exp\left\{-\frac{x^3}{3}\right\}$$

$$\times\left(\int_{z=0}^{+\infty}\frac{1-\Phi(z-u)}{g(z-u)}\exp\left\{-\frac{(z\sqrt{3}-\sqrt{x/3})^2}{2}\right\}dz\right)dx \qquad (3.11)$$

En observant que

$$\frac{1-\Phi(z-u)}{g(z-u)}\leqq\exp\left(\frac{u^2}{2}\right) \qquad (3.12)$$

on déduit immédiatement que la dernière expression dans (3.11) est majorée par une quantité proportionnelle à $\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$.

On voit facilement que le dernier terme de (3.8) est également $O\left(u\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right)$ lorsque $u\nearrow\infty$.

En combinant (3.2) et (3.5)-(3.12) on déduit (21).

La généralisation de (22) au cas continu est immédiate du fait que

$$\operatorname*{Max}_{0\leqq t<T}\,(W(t+1)-W(t))$$

est une fonction croissante de T. Il suffit d'utiliser (20) avec $T=[T]+\theta$, $0<\theta<1$, en observant que lorsque $x \searrow 0$

$$(1+x)^{\theta} \sim (1+\theta x)=1+O(x)=1+O(\sqrt{x})$$

Démonstration du corollaire 1. — (23) se déduit directement du théorème 2. Pour démontrer (24) nous appliquons le :

LEMME 2.1 (Ortega et Wschebor, 1984). — *Soit* $0<h\leqq T$ *et* $v\geqq 1$. *Alors*

$$q(T, h, v)=P\{\sup_{\substack{0\leqq t<t'\leqq T\\ t'-t\leqq h}}(W(t')-W(t))\geqq v\sqrt{h}\}\leqq c(v)\frac{T}{h}ve^{-v^2/2} \tag{3.13}$$

$c(v)$ étant bornée. De plus, pour tout $\delta>0$ il existe $-\infty<v_0<\infty$ tel que pour tout $v\geqq v_0$ (3.13) est satisfaite avec $c(v)=e(2/\pi)^{1/2}+\delta$.

Démonstration. — *Voir* [5], lemme 1.

D'après le théorème 1 appliqué à la suite 2-dépendante :

$$Z_n=\max_{n-1\leqq t\leqq n}\ \max_{0<s\leqq 1}(W(t+s)-W(t)),\qquad n\geqq 1, \tag{3.14}$$

il existe $-\infty<u_1<\infty$ et une fonction $\nu(u)$, $u_1<u$, $0<\nu(u)<1$ telle que :

$$\begin{aligned}\nu(u)&=1-P\{Z_1\geqq u\}+P\{Z_1\geqq u, Z_2\geqq u\}+O((P\{Z_1\geqq u\})^2), \qquad u\nearrow\infty\\ &\geqq 1-P\{Z_1\geqq u\}+O(P\{Z_1\geqq u\}^2))\end{aligned} \tag{3.15}$$

et telle qu'il existe $C>0$ tel que

$$\max_{n\geqq 1}\left|\frac{P\{\max_{1\leqq p\leqq n} Z_p\leqq u\}}{\nu(u)^n}-1\right|\leqq C\times P\{Z_1\geqq u\} \tag{3.16}$$

D'autre part, observons que d'après (3.13) il existe $-\infty<u_2<\infty$ tel que pour tout $u_2\leqq u$

$$P\{Z_1\geqq u\}\leqq q(2, 1, u)\leqq(e(2/\pi)^{1/2}+\delta)\times 2ue^{-(u^2/2)} \tag{3.17}$$

En combinant (3.15)-(3.17) on déduit (24).

CHAPITRE II

1. INTRODUCTION

Soit $\{U_n, n \geqq 1\}$ une suite stationnaire de variables aléatoires de loi marginale uniformément distribuée sur (0, 1).

$0 < \mathcal{O}_0 < 1$ étant un seuil initial donné, définissons la suite des temps de records et de records $< \mathcal{O}_0$ par :

$$T_1 = \mathrm{Min}\{k \geqq 1, U_k < \mathcal{O}_0\}, \qquad \mathcal{O}_1 = U_{T_1}$$

et pour tout $n \geqq 1$ (1)

$$T_{n+1} = T_n + \mathrm{Min}\{k \geqq 1, U_{T_n+k} < \mathcal{O}_n\}, \qquad \mathcal{O}_{n+1} = U_{T_{n+1}}$$

Lorsque les variables aléatoires U_n sont indépendantes on a le :

THÉORÈME A (Deheuvels, 1974). — (i) *Pour tout entier* $s \geqq 1$ *et* $0 < r < \mathcal{O}_0$

$$P\{T_1 = s, \mathcal{O}_1 < r\} = (1 - \mathcal{O}_0)^{s-1} r \tag{2}$$

(ii) *Quels que soient les entiers* $n \geqq 1$, $1 < s_1 < \ldots < s_n < s_{n+1}$ *et* $0 < r_{n+1} < r_n < \ldots < r_1 < \mathcal{O}_0$

$$\begin{aligned} P\{T_{n+1} - T_n = s_{n+1} - s_n, \mathcal{O}_{n+1} < r_{n+1} \mid \\ T_1 = s_1, \mathcal{O}_1 = s_1, \ldots, T_n = s_n, \mathcal{O}_n = r_n\} \\ = P\{T_{n+1} - T_n = s_{n+1} - s_n, \mathcal{O}_{n+1} < r_{n+1} \mid \mathcal{O}_n = r_n\} \\ = (1 - r_n)^{s_{n+1} - s_n - 1} r_{n+1} \end{aligned} \tag{3}$$

Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit* $\{U_n, n \geqq 1\}$ *une suite stationnaire m-dépendante de variables aléatoires dont les lois marginales sont uniformément distribuées sur* (0, 1), *vérifiant l'hypothèse*

(H) *Il existe* $\beta > 0$ *tel que pour tout* $1 < i \leqq m$

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\sup_{\substack{0 < v < w < \varepsilon \\ 0 < u < \varepsilon}} \frac{P\{U_1 < u, v < U_i < w\}}{u^\beta (w - v)} \right) < \infty \tag{4}$$

Alors il existe $0 < \mathcal{O}_0 < 1$ *et une suite* $\{(S_n, R_n), n \geqq 1\}$ *de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité que* $\{U_n, n \geqq 1\}$, S_n *étant une suite croissante d'entiers et* R_n *une suite décroissante de réels* > 0 *et* $< \mathcal{O}_0$, *telle que :*

(i) $\{(S_n, R_n), n \geqq 1\}$ *vérifie* (2) *et* (3) *avec* S_n *à la place de* T_n *et* R_n *à la place de* $\mathcal{O}_n$.

(ii) *Presque sûrement il existe deux entiers* n_0 *et* q *tels que pour tout* $n \geqq n_0$ *on a*

$$T_n = S_{n-q} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{O}_n = R_{n-q} \tag{5}$$

Remarques. — (1) Nous avons utilisé l'hypothèse (H) dans (Haiman, 1981). Celle-ci est vérifiée par exemple par $\{U_n = 1 - F(X_n), n \geqq 1\}$, $\{X_n\}$ étant gaussienne et $F(x) = P\{X_1 < x\}$.

(2) Le théorème 1 permet d'étendre aus suites considérées la plupart des résultats concernant les extrêmes des suites de variables indépendantes.

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

LEMME . — *Soit* Y *une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble* $\mathcal{Y}$. *Soit* φ *un sous-ensemble de* $\mathcal{Y}$ *une probabilité sur* $\mathcal{Y}$ *telle que* $0 < \hat{P}(\varphi) < 1$. *On suppose que sur* φ *la loi de* Y *est absolument continue par rapport à* $\hat{P}$ *et*

$$\operatorname*{Max}_{y \in \varphi} \left| \frac{dP_Y}{d\hat{P}}(y) - 1 \right| (1 - \hat{P}(y))^{-1} = q < 1 \tag{2.1}$$

Soit Q *une variable de Bernoulli, indépendante de* Y *et telle que* $P\{Q = 0\} = q$. *Il existe deux variables aléatoires,* Y', *à valeurs dans* $\mathcal{Y}$ *et* $\bar{Y}$ *à valeurs dans* $\bar{\varphi}$, *indépandantes de* Y *et* Q, *telles que si l'on pose*

$$\hat{Y} = Q(Y \,.\, 1_{\{Y \in \varphi\}} + \bar{Y} \,.\, 1_{\{Y \in \bar{\varphi}\}}) + (1 - Q)\, Y' \tag{2.2}$$

alors la loi de $\hat{Y}$ *est* $\hat{P}$.

Démonstration. — Soit Δ une variable aléatoire à valeurs dans un d'ensemble D. Soit $\tilde{P}$ une probabilité sur D telle que la loi de Δ est absolument continue par rapport à $\tilde{P}$ et

$$\operatorname*{Max}_{d \in D} \left| \frac{dP_\Delta}{d\tilde{P}}(d) - 1 \right| = q' < 1 \tag{2.3}$$

Posons pour tout $d \in \mathrm{D}$

$$\nu(d) = \frac{d\mathrm{P}_\Delta}{d\tilde{\mathrm{P}}}(d) - 1$$

D'après (2.3) on a $1 + \left(1 - \frac{1}{q'}\right)\nu(d) > 0$.

Soit Q' une variable aléatoire à valeurs 0 et 1, indépendante de Δ et telle que $\mathrm{P}\{\mathrm{Q}'=0\} = q'$.

Soit Δ' une variable aléatoire indépendante de Δ et Q' vérifiant pour tout $d \in \mathrm{D}$

$$\frac{d\mathrm{P}_{\Delta'}}{d\tilde{\mathrm{P}}}(d) = 1 + \left(1 - \frac{1}{q}\right)\nu(d) \qquad (2.4)$$

On vérifie que si l'on pose

$$\tilde{\Delta} = \mathrm{Q}'\Delta + (1-\mathrm{Q})\,\Delta' \qquad (2.5)$$

alors la loi de $\tilde{\Delta}$ est $\tilde{\mathrm{P}}$.
Posons

$$\mathrm{Y}^* = \begin{cases} \mathrm{Y} & \text{si } \mathrm{Y} \in \varphi \\ \text{« } \infty \text{ »} & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après (2.1)

$$\underset{y \in \varphi}{\mathrm{Max}} \left| \frac{d\mathrm{P}_\mathrm{Y}}{d\hat{\mathrm{P}}}(y) - 1 \right| \leqq q$$

et

$$\left| \frac{\mathrm{P}\{\mathrm{Y}^* = \text{« } \infty \text{ »}\}}{\hat{\mathrm{P}}\{\bar{\varphi}\}} - 1 \right| = \left| \int_\varphi \left(\frac{d\mathrm{P}_\mathrm{Y}}{d\hat{\mathrm{P}}}(y) - 1 \right) d\hat{\mathrm{P}}(y) \right| \hat{\mathrm{P}}(\bar{\varphi})^{-1}$$

$$\leqq \underset{y \in \varphi}{\mathrm{Max}} \left| \frac{d\mathrm{P}_\mathrm{Y}}{d\hat{\mathrm{P}}}(y) - 1 \right| \hat{\mathrm{P}}(\bar{\varphi})^{-1} = q$$

Ceci autorise de poser $\Delta := \mathrm{Y}^*$ et $q' := q$ et d'appliquer (2.3)-(2.5). Soit $\bar{\mathrm{Y}}$ une variable aléatoire indépendante de Y, Q' et Δ' telle que pour tout

$y \in \bar{\varphi}$

$$\frac{d\mathrm{P}_{\bar{\mathrm{Y}}}}{d\hat{\mathrm{P}}}(y) = \frac{1}{\hat{\mathrm{P}}(\bar{\varphi})}$$

Posons $\mathrm{Q} := \mathrm{Q}'$ et $\mathrm{Y}' := \Delta' . 1_{\{\Delta \in \varphi\}} + \bar{\mathrm{Y}} . 1_{\{\Delta' = « \infty »\}}$.

Il est clair que la loi de $\hat{\mathrm{Y}}$ définie par (2.2) est $\hat{\mathrm{P}}$. ▲

$0 < r < 1$ étant fixé, posons

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}(r) = \inf\{k \geqq 1,\ \mathrm{U}_k < r\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{O} = \mathcal{O}(r) = \mathrm{U}_{\mathrm{T}} \tag{2.6}$$

Notons par $\hat{\mathrm{P}}$ la loi de probabilité de $\mathrm{Y} := (\mathrm{T}, \mathcal{O})$ lorsque les U_k sont indépendantes et observons que la densité de probabilité de $\hat{\mathrm{P}}$ est :

$$\hat{\mathrm{P}}(s, \rho) = (1 - r)^{s-1}, \qquad (s, \rho) \in \mathcal{Y} := \mathbb{N} \times (0, r) \tag{2.7}$$

Nous supposons dorénavant $0 < \beta < 1$. Soit $0 < a < \beta$ fixé et soit

$$\varphi = \varphi(r) = \left\{ (s, \rho) \in \mathcal{Y};\ 1 \leqq s \leqq a \times \frac{\mathrm{Log}(1/r)}{r} \right\} \tag{2.8}$$

LEMME 2. — *Il existe* $0 < r_0 < 1$ *tel que pour tout* $0 < r \leqq r_0$ *la loi de* Y *notée* P_{Y} *est absolument continue par rapport à* $\hat{\mathrm{P}}$ *et il existe* $\mathrm{K} > 0$ *tel que*

$$\underset{(s,\, \rho) \in \varphi}{\mathrm{Max}} \left| \frac{d\mathrm{P}_{\mathrm{Y}}}{d\hat{\mathrm{P}}}(s, \rho) - 1 \right| \hat{\mathrm{P}}(\bar{\varphi})^{-1} \leqq \mathrm{K}\left(\mathrm{Log}\frac{1}{r} \right) \times r^{\beta - a} \tag{2.9}$$

Démonstration. — D'après le théorème 1′ du paragraphe 1 (et avec les notations de celui-ci) on déduit qu'il existe $0 < r_0 < 1$ tel que si $0 < r < r_0$, P_{Y} admet une densité de probabilité $\mathrm{P}(s, \rho)$, $(s, \rho) \in \mathcal{Y}$, vérifiant :

$$\underset{\substack{s \geqq 1 \\ 0 < \rho \leqq r}}{\mathrm{Max}} \left| \frac{(\mathrm{P}\,(s, \rho)}{\mu^{s-1}(r)\,(1 - \mu(r))\,(1/r)} - 1 \right| \leqq c r^{\beta} \tag{2.10}$$

où c est une constante $\geqq 0$ et

$$\mu(x) = 1 - x + O(x^{1+\beta}), \qquad x \searrow 0 \tag{2.11}$$

Si maintenant on écrit

$$\frac{d\mathrm{P}_{\mathrm{Y}}}{d\rho} = \frac{d\mathrm{P}_{\mathrm{Y}}}{d\hat{\mathrm{P}}} \times \frac{d\hat{\mathrm{P}}}{d\rho}$$

la combinaison de (2.7), (2.10) et (2.11) entraîne que pour tout $s \geqq 1$

$$\operatorname*{Max}_{0<\rho\leqq r}\left|(1+\varepsilon(r^{1+\beta}))^s \frac{dP_Y}{d\hat{P}}(s,\rho)-1\right| \leqq c' r^\beta \tag{2.12}$$

où c' est une constante $\geqq 0$ et $\varepsilon(u)=0(u)$, $u \searrow 0$.

Il suffit maintenant pour déduire (2.9) de (2.12) de remarquer que

$$\hat{P}(\bar{\varphi})=(1-r)^{[a(\mathrm{Log}(1/r)/r)]} \sim r^a, \qquad r \searrow 0 \tag{2.13}$$

et que si $1 \leqq s \leqq a \times \dfrac{\mathrm{Log}(1/r)}{r}$ alors on a

$$(1+\varepsilon(r^{1+\beta}))^s = 1 + O\left(\left(\mathrm{Log}\frac{1}{r}\right)\times r^\beta\right)$$

Construction de $\{(S_n, R_n), n \geqq 1\}$

Soit $0<\mathcal{O}_0 \leqq r_0$ tel que pour tout $0<r<\mathcal{O}_0$ le terme majorant de (2.9) soit <1. Pour $0<r<\mathcal{O}_0$ donné soit $L=L(r)$ une variable aléatoire à valeurs 0 et 1 telle qu'avec les notations (2.6) et (2.7) on ait :

$$P\{L=0\}=\hat{P}\{T(r)\leqq m-1\}=1-(1-r)^{m-1} \tag{2.14}$$

Soit $\mathbf{Y}(r)=(\mathbf{T}(r), \mathcal{O}(r))$ une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \ldots, m-1\}\times(0, r)$ dont la densité de probabilité est

$$P(s,\rho)=\hat{P}(s,\rho/T\leqslant m-1=\frac{(1-r)^{s-1}}{1-(1-r)^{m-1}}, \tag{2.15}$$

$$(s,\rho)\in\{1, \ldots, m-1\}\times(0, r)$$

Pour tout entier $\tau \geqq 1$ posons

$$T^{(\tau)}=\inf\{k \geqq 0, U_{\tau+k}<r\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{O}^{(\tau)}=U_{T^{(\tau)}} \tag{2.16}$$

Il est clair que $Y^{(\tau)} := (T^{(\tau)}, \mathcal{O}^{(\tau)})$ vérifie (2.7) et 2.9) avec $T^{(\tau)}$, $\mathcal{O}^{(\tau)}$ et $Y^{(\tau)}$ respectivement à la place de T, $\mathcal{O}$ et Y.

D'après la définition de $\mathcal{O}_0$, (2.9) appliqué à $Y^{(m)}$ entraîne :

$$\operatorname*{Max}_{(s,\rho)\in\varphi}\left|\frac{dP_Y{}^{(m)}}{dP}(s,\rho)-1\right| \hat{P}(\bar{\varphi})^{-1} \leqq q < 1. \tag{2.17}$$

On peut donc appliquer le lemme 1 à $Y := Y^{(m)}$.

Soit $\hat{Y}^{(m)}$ la variable aléatoire correspondante dont la construction est donnée par le lemme. On a

$$\hat{Y}^{(m)} = Q(Y^{(m)} . 1_{\{Y^{(m)} \in \varphi\}} + \bar{Y} . 1_{\{Y^{(m)} \in \bar{\varphi}\}}) + (1-Q) . Y' \qquad (2.18)$$

avec

$$\hat{P}^{(m)}(s, \rho) = (1-\mathcal{O}_0)^{s-1}, (s, \rho) \in \mathbb{N} \times (0, \mathcal{O}_0) \qquad (2.19)$$

Soient $L = L(\mathcal{O}_0)$ et $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\mathcal{O}_0)$ des variables aléatoires indépendantes et indépendantes des U_k, $k \geqq 1$, ayant des lois de probabilité données par (2.14) et (2.15).

Si l'on pose :

$$S_1 = L(\hat{T}^{(m)} + m - 1) + (1-L)\mathbf{T} \qquad (2.20)$$

et

$$R_1 = L \times \mathcal{O}^{(m)} + (1-L)\mathcal{O}$$

on vérifie sans difficulté que pour tout $s \geqq 1$ et $0 < r < \mathcal{O}_0$ on a

$$P\{S_1 = s, R_1 < r\} = (1-\mathcal{O}_0)^{s-1} \times r \qquad (2.21)$$

La construction précédente de S_1 et R_1 définit un algorithme que nous utiliserons également pour construire (S_n, R_n) pour $n > 1$.

Cet algorithme est caractérisé par la :

Proposition 1. — *Pour tout $0 < r < \mathcal{O}_0$ et $\tau \geqq 1$ il existe un algorithme*

$$\mathcal{A}_r : \quad \{U_{\tau+1}, U_{\tau+r}, \ldots\} \to (\Delta S, \mathcal{R}) \in \mathbb{N} \times (0, r)$$

tel que :

(i) *si* $1 \leqq \Delta S \leqq m-1$ *alors* $(\Delta S, \mathcal{R})$ *est indépendant de* $\sigma\{U_1, \ldots\}$, *si* $\Delta S > m-1$ *alors* $(\Delta S, \mathcal{R})$ *est indépendant de* $\sigma\{U_1, \ldots, U_\tau\}$;

(ii) *pour tout* $s \geqq 1$ *et* $0 < \rho < r$ *on a :*

$$P\{\Delta S = s, \mathcal{R} = \rho\} = (1-r)^{s-1} \times \rho \qquad (2.22)$$

(iii) $\mathcal{A}_r$ *fait intervenir deux variables aléatoires à valeurs* 0 *et* 1, Q *et* L, *mutuellement indépendantes et indépendantes de* $\sigma\{U_1, \ldots\}$ *telles que :*

$$\{\Delta S = m - 1 + \mathrm{Min}\{t \geqq 0, U_{\tau+m+t} < r\}, \mathcal{R} = U_{\tau+\Delta S}\}$$

$$=\{L=1\}\cap\{Q=1\}\cap\left\{T^{(\tau+m)}\leqq a\frac{\operatorname{Log}(1/r)}{1/r}\right\} \tag{2.23}$$

avec

$$P\{L=1\}=(1-r)^{m-1}, \tag{2.24}$$

$$P\{Q=1\}=1-K\left(\operatorname{Log}\frac{1}{r}\right)r^{\beta-a} \tag{2.25}$$

et

$$P\left\{T^{(\tau+m)}\leqq a\frac{\operatorname{Log}(1/r)}{1/r}\right\}=P\{Y^{(\tau+m)}\in\varphi(r)\}$$
$$=(1+O(r^{\beta})(1-r^{a(1+O(r^{\beta}))}_{r\searrow 0}), \tag{2.26}$$

Démonstration. — $\mathscr{A}_r$ est l'algorithme de construction de S_1, R_1 dans lequel $Y^{(m)}$ est remplacé par $Y^{(m+\tau)}$.

(2.24) et (2.25) découlent directement des définitions de L et Q. (2.26) se déduit de (2.10). △

La construction de (S_n, R_n) pour $n>1$ peut maintenant être faite en utilisant l'algorithme $\mathscr{A}_r$ de manière récursive comme suit :

D'après la construction précédente de S_1, R_1, pour tout $s\geqq 1$ et $0<r<\mathscr{O}_0$, on a :

$$\{S_1=s,\ R_1<r\}\in\sigma\{U_1,\ \ldots,\ U_s,\ L_1,\ Q_1,\ \bar{Y}_1,\ Y'_1\} \tag{2.27}$$

L_1, Q_1, $\bar{Y}_1$, Y'_1 étant les variables aléatoires introduites en (2.14) et (2.18).

Soit $n\geqq 1$ et supposons que pour tout $1\leqq k\leqq n$:

(S_k, R_k) a été construite de telle sorte que quels que soient $1\leqq s_1<s_2<\ldots<s_n$ et $0<r_n<\ldots<r_1<\mathscr{O}_0<1$

$$\{S_1=s_1,\ R_1<R_1,\ \ldots,\ S_n=s_n,\ R_n<r_n\}\in\sigma\{U_1,\ \ldots,\ U_{s_n}\}\cap\sigma'_n \tag{2.28}$$

σ'_n étant une σ-algèbre indépendante de $\sigma\{U_{s_n+1},\ \ldots\}$. Posons :

$$S_{n+1}=S_n+\Delta S_{R_n}(U_{s_n+1},\ \ldots) \tag{2.29}$$

et

$$R_{n+1}=\mathscr{R}_{R_n}(U_{s_n+1},\ \ldots)$$

Il est clair que $\{(S_k, R_k), k=1, \ldots, n+1\}$ satisfait (3) avec (S_k, R_k) à la place de (T_k, Θ_k), et que quels que soient $1 \leqq s_1 < s_2 < \ldots < s_{n+1}$ et $0 < r_{n+1} < r_n < \ldots < r_1 < \mathcal{O}_0$, *on a*

$$\{S_1 = s_1, R_1 = r_1, \ldots, S_{n+1} = s_{n+1}, R_{n+1} = r_{n+1}\}$$
$$\in \sigma\{U_1, \ldots, U_{s_{n+1}}\} \cap \sigma'_n \cap \sigma\{L_{n+1}, Q_{n+1}, \bar{Y}_{n+1}, Y'_{n+1} \quad (2.30)$$

les variables L_{n+1}, Q_{n+1}, $\bar{Y}_{n+1}$ et Y'_{n+1} introduites par $\mathscr{A}_{R_n}$ étant bien entendu choisies de sorte qu'elles ne dépendent des $\{U_k\}_{k \geqq 1}$ et de σ'_n que par l'intermédiaire de R_n.

Si l'on pose $\sigma'_{n+1} = \sigma_n \cap \sigma\{L_{n+1}, Q_{n+1}, \bar{Y}_{n+1}, Y'_{n+1}\}$ alors il est clair que (2.28) est vérifiée à l'échelon $n+1$.

Ayant construit une suite $\{(S_n, R_n), n \geqq 1\}$ vérifiant l'assertion (i) du théorème 1, montrons maintenant qu'elle vérifie (ii).

Démonstration de (ii). — Nous utiliserons deux lemmes :

LEMME 3. — *Quel que soit* $0 < \varepsilon < 1$ *on a :*

$$P\{R_n > e^{-n(1-\varepsilon)} \text{ i. s.}\} = 0 \qquad (2.31)$$

et

$$P\{R_n < e^{-n(1+\varepsilon)} \text{ i. s.}\} = 0 \qquad (2.32)$$

Démonstration. — Il suffit d'observer que $\left\{Z_n = \operatorname{Log} \frac{1}{R_n}, n \geqq 1\right\}$ est la suite des instants d'arrivée d'un processus de Poisson normalisé débutant en $Z_0 = \operatorname{Log} \frac{1}{\mathcal{O}_0}$. On applique alors la loi forte des grands nombres

$$\lim_{n \to \infty} \frac{Z_n}{n} = 1 \text{ p. s.}$$

et on déduit immédiatement (2.31) et (2.32). △

LEMME 4. — *Soit* $\{(T'_n, \mathcal{O}'_n), n \geqq 1\}$ *une suite telle que presque sûrement il existe* $p \geqq 1$ *tel que pour tout* $n \geqq p$ *on a :*

$$T'_{n+1} = T'_n + \operatorname{Min}\{k \geqq 1 - U_{T'_n + k} < \mathcal{O}'_n\}, \qquad \mathcal{O}_{n+1} = U_{T'_{n+1}} \qquad (2.32)$$

Alors presque sûrement il existe deux entiers n_0 *et* q *tels que pour tout* $n \geqq n_0$ *on a :*

$$T_n = T'_{n-q} \qquad et \qquad \mathcal{O}_n = \mathcal{O}'_{n-q} \qquad (2.33)$$

la suite $\{(T_n, \mathcal{O}_n), n \geqq 1\}$ *étant définie par* (1).

Démonstration. — Soit

$$n_1 = \inf\{t, T'_{p+1} < T_t\}$$

et

$$r(n_1) = \sup\{k \geqq p+1. T'_k \leqq T_{n_1}\}$$

D'après la définition de $\{(T_n, \mathcal{O}_n), n \geqq 1\}$ on ne peut pas avoir $\mathcal{O}'_r < \mathcal{O}_{n_1}$. Si $\mathcal{O}'_r > \mathcal{O}_{n_1}$ alors $\mathcal{O}'_{r+1} = \mathcal{O}_{n_1}$ et $T'_{r+1} = T_{n_1}$ d'où le résultat recherché avec $n_0 = n_1$ et $q = n_1 - (r+1)$.

Démontrons maintenant (ii).

Montrons d'abord que

$$P\{(S_{n+1} - S_n, R_{n+1}) \neq (m-1 + \operatorname{Min}\{t \geqq m, U_{S_n+t} < R_n\}, U_{S_{n+1}}) \text{ i. s.}\} = 0 \quad (2.34)$$

D'après (2.23) il suffit de démontrer que :

$$P\{L_n = 0 \text{ i. s.}\} = P\{Q_{n+1} = 0 \, i. s.\} = P\{Y^{(S_n+m)} \notin \varphi(R_n) \text{ i. s.}\} = 0 \quad (2.35)$$

D'après (2.31)

$$P\{L_n = 0 \text{ i.s.}\} = P\{(L_{n+1} = 0, R_n < e^{-n(1-\varepsilon)}) \text{ i.s.}\} \quad (2.36)$$

et d'après (2.24)

$$P\{L_{n+1} = 0, R_n < e^{-n(1-\varepsilon)}\} = \int_{r < e^{-n(1-\varepsilon)}} (1 - (1-r)^{m-1}) \, dP_{R_n}(r) \leqq (\text{Cte}) \, e^{-n(1-\varepsilon)} \quad (2.37)$$

Le majorant de (2.37) étant le terme général d'une série convergente on déduit par Borel Cantelli que :

$$P\{L_n = 0 \text{ i. s.}\} = 0$$

En procédant de manière analogue avec les autres termes on obtient respectivement d'après (2.25) et (2.26)

$$P\{Q_{n+1} = 0, R_n < e^{-n(1-\varepsilon)}\} \leqq (\text{Cte}) \, n \, . \, e^{-n(1-\varepsilon)(\beta - a)}$$

et

$$P\{Y^{(T_n+m)} \in \bar{\varphi}(R_n),\ R_n < e^{-n(1-\varepsilon)}\} \leqq (\mathrm{Cte})\, e^{-n(1-\varepsilon)(a/2)}$$

d'où (2.35) donc (2.34).

Ayant démontré (2.34), si l'on montre de plus que

$$P\{\operatorname{Min}(U_{S_n+1}, \ldots, U_{S_n+m-1}) < R_n \text{ i. s.}\} = 0 \tag{2.38}$$

cela entraîne que presque sûrement pour n assez grand $\{(S_n, R_n), n \geqq 1\}$ satisfait la relation de récurrence (2.32), d'où le résultat par le lemme 4.

Il nous reste à démontrer (2.38).

Posons :

$$A_n = \{\operatorname{Min}(U_{S_n+1}, \ldots, U_{S_n+m-1}) < R_n\} \tag{2.39}$$

et

$$B_n = A_{n+1} \cap \{L_n = 1\} \cap \{Q_n = 1\} \cap \{Y^{(T_n+m)} \in \varphi(R_n)\} \cap \{R_n < e^{-n(1-\varepsilon)}\} \tag{2.40}$$

D'après (3.35) et (2.31) il est équivalent de démontrer (2.38) et

$$P\{B_n \text{ i. s.}\} = 0 \tag{2.41}$$

On a, en appliquant la m-dépendance et la stationnarité

$$P\{B_n\} = \iint_{\substack{s \geqq n \\ r < e^{-n(1-\varepsilon)}}} dP\{S_n = s, R_n = r\} \times \left(\sum_{t=1}^{\varphi(r)} \sum_{t'=1}^{m} \int_{r' < r} dP\{U_1 > r, \ldots, U_{t-1} > r, U_t = r, U_{t+1} > r', \ldots, U_{t+t'-1} > r', U_{t+t'} < r'\} \right) \tag{2.42}$$

Si l'on note par $\sum_{t=1}^{\varphi(r)} (r)$ le terme entre parenthèses dans (2.42), il vient

$$P(B_n) \leqq \int_{r < e^{-n(1-\varepsilon)}} dP\{R_n = r\} \sum_{t=1}^{\varphi(r)} (r)$$

En écrivant

$$\sum_{t=1}^{\varphi(r)} = \sum_{t=1}^{m-1} + \sum_{t=m}^{\varphi(r)}$$

on obtient la majoration

$$\sum_{t=1}^{\varphi(r)} \leqq (\text{Cte})\, r^{\beta}$$

d'où

$$P\{B_n\} \leqq (\text{Cte})\, e^{-n(1-\varepsilon)\beta}$$

On déduit (2.41) par Borel Cantelli ce qui achève la démonstration. △

REMERCIEMENTS

Je remercie M. le Professeur Jean Brétagnolle pour sa lecture attentive et ses remarques qui m'ont permis d'améliorer bon nombre des résultats présentés.

RÉFÉRENCES

[1] P. DEHEUVELS, Strong Approximation in Extreme Value Theory and Applications, *Proc. Coll. Math. Soc. Janos Bolay*, 1982, p. 369-403.

[2] J. GALAMBOS, *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*, 1978, Wiley, New York.

[3] G. HAIMAN, Valeurs extrêmales de suites stationnaires de variables aléatoires m-dépendantes, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. **XVII**, n° 3, 1981, p. 309-330.

[4] S. CARLIN et J. MCGREGOR, Coincidence Probabilities, *Pacific J. Math.*, vol. **911**, 1959, p. 41-64.

[5] J. ORTEGA et M. WSCHEBOR, On the Increments of the Wiener Process, *Z. Wahrsheinlichkeit verv. Gebiete, vol.* **65**, 1984, p. 329-339.

[6] P. REVESZ, On the Increments of Wiener and Related Processes, *The Annals of Probability*, vol. **10**, n° 3, 1982, p. 613-622.

[7] L. A. SHEPP, First Passage Time for a Particular Gaussian Process, *Ann. Math. Stat.*, vol. **42**, n° 3, 1971, 946-951.

[8] D. SLEPIAN, The One-Sided Barrier Problem for Gaussian Noise, *Bell System Tech. J.*, vol. **41**, 1962, p. 463-501.

[9] G. S. WATSON, Extreme Values in Samples from m-dependant Stationary Stochastic Processes, *Ann. Math. Statist.*, vol. **25**, 1954, p. 798-800.

[10] G. F. NEWELL, Asymptotic Extremes for m-dependent Random Variables, *Ann. Math. Statist.*, vol. **35**, 1964, p. 1322-1325.

(*Manuscrit reçu le* 10 *avril* 1986)
(*révisé le* 21 *mai* 1986.)