Annales de l'I. H. P., section B

I. Assani

# Quelques théorèmes ergodiques dans les espaces $L_E^p$

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 23, nº 2 (1987), p. 209-224
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1987__23_2_209_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*
Vol. 23, n° 2, 1987, p. 209-224. *Probabilités et Statistiques*



# Quelques théorèmes ergodiques dans les espaces $L^p_E$

par

**I. ASSANI**
Université Paris VI, Laboratoire de Probabilités, 4, place Jussieu,
Tour 56, 3e étage, 75252 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — Soient E un espace de Banach (séparable), $p$, $1 < p < +\infty$, et T un opérateur à puissances bornées sur $L^p_E$. Nous établissons des théorèmes ergodiques dominés et ponctuels étendant ceux déjà obtenus dans $L^p$ par A. Ionescu-Tulcea, C. H. Kan [*7*] [*8*] et A. de la Torre [*14*]. Une extension à plusieurs paramètres est aussi étudiée. Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes assurant la convergence p. s. des moyennes de Césaro d'une fonction $f \in L^p_E$.

*Mots-clés :* Théorèmes ergodiques, espaces de Banach, convergence presque sûre.

ABSTRACT. — Let E a (separable) Banach space, $p$, $1 < p < +\infty$ and T a power bounded operator on $L^p_E$. We extend to these spaces some dominated and pointwise ergodic theorems proved in $L^p$ by A. Ionescu-Tulcea, C. H. Kan and A. de la Torre [*14*] [*7*] [*8*]. A multiparameter version of these results is also studied. Necessary and sufficient conditions are given to get the pointwise convergence of the Cesaro means of a function $f \in L^p_E$.

## INTRODUCTION

Soit F un espace de Banach. Un opérateur linéaire (tous les opérateurs dans cet article sont linéaires) $T : F \to F$ est une contraction si $\|T\| \leqq 1$.

L'opérateur T est à puissances bornées (resp. à moyennes de Césaro bornées ou plus simplement à moyennes bornées) si $\sup_{n \geqq 0} \| T^n \| < +\infty$

$$\left(\text{resp. } \sup_{n \geqq 1} \| M_n(T) \| < +\infty, \qquad \text{où} \quad M_n(T) = \frac{I + T + T^2 + \ldots + T^{n-1}}{n}\right).$$

Nous utiliserons aussi dans le cadre des espaces $L_E^p$ une autre norme pour un opérateur linéaire $S : L_E^p \to L_E^p$. Nous dirons que S est scalairement à puissances bornées (resp. à moyennes bornées) s'il existe $M > 0$, $M \in \mathbb{R}$ telle que $\forall y \in E^*$ dual de E on a :

$$\left(\int | \langle y, T^n f(\omega) \rangle |^p d\mu\right)^{1/p} \leqq M\left(\int | \langle y, f(\omega) \rangle |^p d\mu\right)^{1/p},$$

$\forall f \in L_E^p$, et $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\left(\text{resp. } \left(\int | \langle y, M_n(T) f(\omega) \rangle |^p d\mu\right)^{1/p} \leqq M\left(\int | \langle y, f(\omega) \rangle |^p d\mu\right)^{1/p}\right).$$

R. V. Chacon a établi [*4*], le résultat suivant : soit T une contraction de $L_E^1$ et $L_E^\infty$ (construits sur un espace mesuré $\sigma$-fini) et E un espace de Banach alors

$$\forall f \in L_E^1, \mu \{ \omega ; \sup_{n \geqq 1} \| M_n(T) f(\omega) \| > \lambda \} \leqq \frac{1}{\lambda} \int_{\{\sup_n \| M_n(T) f(\omega) \| > \lambda\}} \| f(\omega) \| d\mu.$$

Après intégration on obtient l'estimation maximale suivante (que nous désignerons sous le nom de théorème ergodique dominé) dans $L_E^p$ sans supposer que l'espace E est réflexif.

$$\forall p, \quad 1 < p < +\infty \qquad \text{et} \qquad \forall f \in L_E^p \left(\int \sup_n \| M_n(T) f(\omega) \|^p d\mu\right)^{1/p} \leqq \frac{p}{p-1}\left(\int \| f(\omega) \|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

Les résultats de R. V. Chacon étendent ceux obtenus par N. Dunford et J. T. Schwartz sur les contractions de $L^1$ et $L^\infty$ [*5*].

Dans cet article nous allons chercher à étendre certains théorèmes ergodiques dominés et ponctuels établis dans $L^p$ au cadre des espaces $L_E^p$.

Dans une première partie, nous montrons que si T est un opérateur inversible à puissances bornées par M séparant les $p$-supports (resp. faiblement à puissances bornées par M séparant faiblement les supports) dans $L_E^p$, $1 < p < +\infty$, E séparable alors T vérifie un théorème ergodique dominé (resp. un théorème ergodique scalairement dominé) avec une constante $\dfrac{Mp}{p-1}$. Les isométries de $L^p$, $p \neq 2$ (positive pour $p = 2$) séparant les $p$-supports *(scalairement ou non)* ce premier résultat étend ceux de A. Ionescu-Tulcea [*7*] et de C. H. Kan [*8*].

Pour certains espaces de Banach réticulés ($\mathscr{C}(K)$, $l^r$, $(1 < r < +\infty)$, UMD à base inconditionnelle) les opérateurs positifs inversibles sur $L_E^p$ à puissances bornées vérifient aussi un théorème ergodique dominé ceci en étendant la méthode utilisée par A. de la Torre [*14*].

Une version à plusieurs paramètres de ces résultats est aussi étudiée. Ces estimations (sauf dans le cas de $L_K^2$) étant obtenus sans la réflexivité de l'espace $L_E^p$ nous cherchons à savoir dans quels cas on peut obtenir la convergence p. s. Ce pourquoi dans une deuxième partie nous donnons tout d'abord des conditions nécessaires et suffisantes permettant d'obtenir la convergence p. s. des moyennes de Césaro d'une fonction $f \in L_E^p$. Nous montrons que si $\sup_n \| M_n(T)f(.) \| \in L^p$ et si nous notons $L_\Gamma^p = \{ f \in L_E^p ; f(\omega) \in \text{adh} \{ M_n(T)f(\omega); n \in \mathbb{N} \text{ p. s.} \}$ alors on a l'équivalence suivante : $L_\Gamma^p$ est relativement faiblement compact $\Leftrightarrow \Gamma(\omega) = \text{adh} \{ M_n(T)f(\omega); n \in \mathbb{N} \}$ est p. s. relativement faiblement compact dans E.

Nous utilisons ce résultat pour établir le théorème II.6: équivalence entre la convergence presque sûre faible (i. e. $\forall y \in E^*, \langle y, M_n(T)f(\omega) \rangle \to \langle y, X_\infty(\omega) \rangle$ p.s. où $X_\infty \in L_E^p$ et le négligeable ne dépend pas de $y$), la convergence en norme p. s. vers un point fixe de T, la compacité faible de $L_\Gamma^p$ et celles des moyennes de Césaro de $f$ lorsque l'on a un théorème ergodique dominé.

## I. THÉORÈMES ERGODIQUES DOMINÉS DANS $L_E^p$

### 1) Opérateurs séparant les supports.

Soient donc E un espace de Banach séparable, $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p$ un nombre réel, $1 < p < +\infty$. Nous supposons ce qui ne nuit pas trop à la généralité que $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ est un espace de Lebesgue, c'est-à-dire isomorphe à $([0, 1], \mathscr{B}[0, 1], \mu)$.

Nous considérons sur les espaces $L_E^p$ construit sur l'espace $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ des opérateurs $T : L_E^p \to L_E^p$ à puissances bornées ou faiblement bornées.

DÉFINITION I.1.1. — Un opérateur $T : L_E^p \to L_E^p$ sépare les $p$-supports si $\forall f, g \in L_E^p$ vérifiant $\| f(\omega) \|_E \times \| g(\omega) \|_E = 0$ p. s. alors

$$\| Tf(\omega) \|_E \times \| Tg(\omega) \|_E = 0 \quad \text{p. s.}$$

DÉFINITION I.1.2. — Un opérateur : $L_E^p \to L_E^p$ sépare scalairement les supports si $\forall f, g \in L_E^p$ vérifiant

$$\forall y \in E^* \quad \langle y, f(\omega) \rangle \times \langle y, g(\omega) \rangle = 0 \qquad \text{p. s.}$$

alors

$$\forall y \in E^* \quad \langle y, Tf(\omega) \rangle \times \langle y, Tg(\omega) \rangle = 0 \quad \text{p. s.}$$

Des exemples d'opérateurs séparant les supports au sens des définitions précédentes peuvent être donnés par ceux de la forme $Tf = f \circ \phi$.

Dans cette première partie nous nous intéressons en premier lieu aux opérateurs séparant les $p$-supports.

PROPOSITION I.1.3. — [*13*] Soit T un opérateur borné inversible sur $L_E^p$, $1 \leqq p \leqq +\infty$ séparant les $p$-supports. Alors il existe

*i*) une application mesurable $A : \Omega \to \mathscr{B}(E)$ (ensemble des opérateurs linéaires bornés de E dans E);

*ii*) une transformation ponctuelle $\phi : \Omega \to \Omega$ non singulière vérifiant $\phi^{-1}(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$ telles que

$$\forall f \in L_E^p \quad \text{on ait} \quad Tf(\omega) = A(\omega)(f \circ \phi(\omega)) \quad \text{p. s.}$$

De plus $\| A(\omega) \| \leqq \| T \| \times h(\omega)$ p. s. où $h = \left( \dfrac{d\mu \circ \phi^{-1}}{d\mu} \right)^{1/p}$.

REMARQUE I.1.4. — La proposition I.1.3 provient du théorème 3.1 de Sourour [*13*]. Elle peut se démontrer par les mêmes arguments. Néanmoins il nous semble que l'hypothèse $\phi(\Sigma) = \Sigma$ soit nécessaire dans la démonstration que Sourour donne de ce théorème 3.1 pour que l'on ait $\| A(\omega) \| \leqq \| T \| h(\omega)$ p. s. (au bas de la page 371). Dans notre cadre d'hypothèse cette condition est vérifiée. Le fait que $\phi$ provienne d'une transformation ponctuelle non singulière découle d'un théorème de Sikorski ([*11*], p. 328).

THÉORÈME I.1.5. — Soit T un opérateur sur $L_E^p$ à puissances bornées, inversible ($\sup_{n \geqq 0} \| T^n \| \leqq M < +\infty$) séparant les $p$-supports, $1 < p < +\infty$. Alors :

$$\forall f \in L_E^p, \quad \left( \int \sup_n \| M_n(T) f(\omega) \|_E^p d\mu \right)^{1/p} \leqq M \frac{p}{p-1} \left( \int \| f(\omega) \|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

*Démonstration.* — Posons $S(\omega) = \dfrac{A(\omega)}{h(\omega)}$ où A et $h$ sont l'opérateur aléatoire et la fonction $h$ de la proposition I.1.2.

On a donc la représentation suivante :

$$\forall n \geqq 1 \quad \forall f \in L_E^p \qquad T^n f(\omega) = h(\omega) \times \ldots \times h \circ \phi^{n-1}(\omega) \times S(\omega) \circ S(\phi(\omega)) \circ \ldots \circ S(\phi^{n-1}(\omega))(f \circ \phi^n(\omega)) \quad \text{p. s.}$$

Nous allons montrer que :

$$\| S(\omega) \circ S(\phi(\omega) \circ \ldots \circ S(\phi^{n-1}(\omega))(f \circ \phi^n(\omega)) \| \leqq M \| f \circ \phi^n(\omega) \| \text{ p. s. } \forall f \in L_E^p.$$

Si ce n'était le cas il existerait $B \in \mathscr{A}$ et $f \in L_E^p$ tels que :

$$1_B \| S(\omega) \circ S(\phi(\omega)) \circ \ldots \circ S(\phi^{n-1}(\omega))(f \circ \phi^n(\omega) \| > 1_B M \| f \circ \phi^n(\omega) \|$$

avec $\mu(B) > 0$. Puisque $\phi^{-n}(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$ on a $B = \phi^{-n}(c)$ avec $\mu(C) > 0$. Par suite :

$$S(\omega)S(\phi(\omega)) \circ \ldots \circ S(\phi^{n-1}(\omega)(1_C \circ \phi^n(\omega).f \circ \phi^n(\omega)) > M 1_C \circ \phi^n(\omega) \| f \circ \phi^n(\omega) \| .$$

Après intégration on en déduirait que :

$$\| T^n \| > M \quad \text{ce qui est absurde.}$$

On a donc $\forall f \in L_E^p$

$$\| T^n f(\omega) \| \leqq M \times h(\omega) \times \ldots \times h \circ \phi^{n-1}(\omega) \| f \circ \phi^n(\omega) \| \quad \text{p. s.}$$

soit

$$\| T^n f(\omega) \| \leqq M \times R^n( \| f(.) \| )(\omega)$$

où R est l'isométrie de $L^p$ définie par $R(g) = h \times g \circ \phi$.

On a alors :

$$\sup_n \| M_n(T) f(\omega) \| \leqq M \sup_n M_n(R)( \| f(.) \| (\omega) \quad \text{p. s.}$$

et

$$\left( \int \sup_n \| M_n(T) f(\omega) \|^p d\mu \right)^{1/p} \leqq M \frac{p}{p-1} \left( \int \| f(\omega) \|^p d\mu \right)^{1/p}$$

en appliquant le théorème ergodique dominé $\left(\text{donnant la constante } \dfrac{p}{p-1}\right)$ de A. Ionescu-Tulcea à l'isométrie R.

COROLLAIRE I.1.6. — Soit K un espace de Hilbert, $p$, $1 < p < +\infty$, $p \neq 2$ et T une isométrie inversible de $L_K^p$ alors :

$$\left( \int \sup_n \| M_n(T) f(\omega) \|^p d\mu \right)^{1/p} \leqq \frac{p}{p-1} \left( \int \| f(\omega) \|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

*Démonstration.* — Elle découle du fait suivant : une isométrie (pas forcément inversible) de $L_K^p$ sépare les $p$-supports ([3], p. 11). On applique alors le Théorème I.1.4 pour conclure :

THÉORÈME I.1.7. — *(Version à plusieurs paramètres).*
Soit $T_1, T_2, \ldots, T_k$, $k$ opérateurs inversibles sur $L_E^p$ $(1 < p < +\infty)$ séparant les $p$-supports à puissances bornées par M, alors :

$$\left(\int\left(\sup_{n_i}\left\|\frac{1}{n_1 n_2 \ldots n_k}\sum_{j_1=0}^{n_1-1}\cdots\sum_{j_k=0}^{n_k-1} T_1^{j_1}\ldots T_k^{j_k} f(\omega)\right\|^p d\mu\right)\right)^{1/p}$$
$$\leqq M^k\left(\frac{p}{p-1}\right)^k\left(\int\| f(\omega)\|^p d\mu\right)^{1/p} \quad \forall f \in L_E^p .$$

*Démonstration.* — Si $R_i$; $i = 1, \ldots, k$ sont les isométries de $L^p$ induites par les $\phi_i$ (en reprenant les notations de la démonstration du Théorème I.1.4) on a

$$\left\|\frac{1}{n_1 n_2 \ldots n_k}\sum_{j_1=0}^{n_1-1}\cdots\sum_{j_k=0}^{n_k-1} T_1^{j_1}\ldots T_k^{j_k} f(\omega)\right\|$$
$$\leqq M^k M_{n_1}(R_1) M_{n_2}(R_2)\ldots M_{n_k}(R_k)(\| f(.)\|)(\omega) \quad \text{p. s.}$$

L'estimation maximale découle de la positivité des opérateurs $R_i$ et du résultat déjà signalé sur les isométries positives de $L^p$.

REMARQUE I.1.8. — Dans la situation précédente, sans structure d'ordre sur E, mais grâce à celle de $L^p$ on peut obtenir une domination maximale pour les moyennes de Cesaro d'un opérateur ou pour celles de plusieurs opérateurs.

THÉORÈME I.1.9. — Soit T un opérateur scalairement borné par M, inversible sur $L_E^p$, $1 \leqq p \leqq +\infty$, séparant scalairement les supports. Alors $\forall y \in E^*$, il existe une isométrie positive $\tilde{T}$ de $L^p$ telle que $\forall f \in L_E^p$,

$$|\langle y, Tf(\omega\rangle| \leqq M\tilde{T}(|\langle y, f(.)\rangle|(\omega) \quad \text{p. s.}$$

Si de plus T est scalairement à puissances bornées par M alors $\forall y \in E^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $|\langle y, T^n f(\omega)\rangle| \leqq M\tilde{T}^n(|\langle y, f(.)\rangle)(\omega)$ p. s.

*Démonstration.* — Si $y$ est nul il n'y a rien à démontrer. Supposons donc le contraire et considérons $(e_i)$ une suite dense en norme dans E

$$\forall A \in \mathscr{A} \quad \text{posons} \quad \phi(A) = \bigcup_i \operatorname{supp}(\langle y, T(1_A e_i)\rangle).$$

Les hypothèses faites sur T permettent de conclure que $\Phi$ est homomorphisme régulier qui satisfait aux conditions

$$\mu(A) = 0 \Leftrightarrow \mu(\phi(A)) = 0 \quad \text{et} \quad \phi(\mathscr{A}) = \mathscr{A}.$$

L'espace mesuré étant de Lebesgue d'après le théorème de Sikorski $\phi$ est induit par une transformation non singulière que nous notons $\phi$. Si $h=\left(\frac{d\mu\circ\phi^{-1}}{d\mu}\right)^{1/p}$ l'opérateur T: $L^p \to L^p$ défini par $\tilde{T}g(\omega) = h(\omega) \times g\circ\phi(\omega)$ est une isométrie de $L^p$.

On a $T(1_A x_i) = 1_A\circ\phi \,.\, T(x_i)$ et donc pour les fonctions $f = \sum_{i=1}^{N} 1_{A_i}x_i$, $f \in L_E^p$ et quel que soit $B \in \mathscr{A}$

$$\int_{\phi^{-1}(B)} \left|\left\langle y, T\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{A_i}x_i\right)\right\rangle\right|^p d\mu = \int_{\phi^{-1}(B)} \sum_{i=1}^{N} |\langle y, T(1_{A_i}x_i | \rangle^p d\mu$$

$$= \sum_{i=1}^{N} |\langle y, 1_B\circ\phi T(1_{A_i}x_i)\rangle|^p d\mu = \sum_{i=1}^{N} \int |\langle y, T(1_{A_i\cap B}x_i)\rangle|^p d\mu$$

$$= \int \left|\left\langle y, T\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{A_i\cap B}x_i\right)\right\rangle\right|^p d\mu \leq M^p \int \left|\left\langle y, \sum_{i=1}^{N} 1_{A_i\cap B}x_i\right\rangle\right|^p d\mu$$

$$= M^p \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i \cap B)\,|\langle y, x_i\rangle|^p$$

$$= M^p \sum_{i=1}^{N} \int h(\omega)^p\,|\langle y, x_i\rangle|^p 1_{A_i\cap B}\circ\phi\, d\mu$$

$$= M^p \int_{\phi^{-1}(B)} \sum_{i=1}^{N} h(\omega)^p\,|\langle y, x_i\rangle|^p 1_{A_i}\circ\phi(\omega)\, d\mu.$$

Puisque $\phi^{-1}(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$ on a

$$\left|\left\langle y, T\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{A_i}x_i\right)\right\rangle\right| \leq M h(\omega)\left(\sum_{i=1}^{N} |\langle y, x_i\rangle| \times 1_{A_i}\circ\phi(\omega)\right) \quad \text{p. s.}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\left|\left\langle y, T\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{A_i}x_i\right)\right\rangle\right| \leq M\tilde{T}\left(\left|\left\langle y, \sum_{i=1}^{N} 1_{A_i}(\,.\,)x_i\right\rangle\right|\right).$$

Ayant l'égalité sur un espace dense il nous reste à l'obtenir pour toute fonction $f$ de $L^p_E$. Soit $f_n = \sum_{i=1}^{N(n)} 1_{A_i^n} x_i$ une suite convergeant en norme vers $f$. On peut supposer aussi que $f_n$ converge p. s. vers $f$ de sorte que $\tilde{T}(|\langle y, f_n(.)\rangle|)$ converge p. s. vers $\tilde{T}(|\langle y, f(.)\rangle|)$. On a

$$\int |\langle y, Tf\rangle - \langle y, Tf_n\rangle|^p d\mu \leqq M^p \int |\langle y, f - f_n\rangle|^p d\mu$$
$$\leqq M^p \| y \|^p \left( \int \| f(\omega) - \Sigma 1_{A_i^n}(\omega) x_i \|^p d\mu \right)^{1/p}$$

puisque $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ est un espace probabilisé.

Par suite $|\langle y, Tf(\omega)\rangle| \leqq M\tilde{T}(|\langle y, f(.)\rangle|)(\omega)$ p. s.

Supposons que T soit scalairement à puissances bornées par M et que l'on n'ait pas l'inégalité précédente pour un $n_0 > 1$ et une fonction $f = \sum_{i=1}^{N} 1_{A_i} x_i$. (Il suffit en raisonnant comme précédemment de considérer des fonctions de cette forme). Alors

$$1_A(\omega) |\langle y, T^{n_0} f(\omega)\rangle| > 1_{A(\omega)} M\tilde{T}^{n_0}(|\langle y, f(.)\rangle|)(\omega)$$
ou $\quad 1_B \circ \phi^{n_0}(\omega) |\langle y, T^{n_0} f(\omega)\rangle| > 1_B \circ \phi^{n_0}(\omega) \times M \times \tilde{T}^{n_0}(|\langle y, f(.)\rangle|)(\omega)$

Puisque $1_B \circ \phi^{n_0}(\omega) |\langle y, T^{n_0} f(\omega)\rangle| = |\langle y, T^{n_0}(1_B . f)\rangle|(\omega)$ et que

$$1_B \circ \phi^{n_0}(\omega) \times M\tilde{T}^{n_0}(|\langle y, f(.)|\rangle)(\omega) = M\tilde{T}^{n_0}(1_B(.)|\langle y, f(.)\rangle|)(\omega)$$

après intégration on aurait $\int |\langle y, T^{n_0} f(\omega)\rangle|^p d\mu > M^p \int |\langle y, f(\omega)\rangle|^p d\mu$, $\tilde{T}^{n_0}$ étant une isométrie ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur les itérés de T.

COROLLAIRE I.1.10. — Soit un opérateur inversible, à puissance scalairement bornées par M sur $L^p_E$, $1 < p < +\infty$, séparant scalairement les supports. Alors

$$\forall y \in E^*, \quad \forall f \in L^p_E \qquad \left( \int \sup_{n \geqq 1} |\langle y, M_n(T) f(\omega)\rangle|^p d\mu \right)^{M/p}$$
$$\leqq M \frac{p}{p-1} \left( \int |\langle y, f(\omega)\rangle|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

COROLLAIRE I.1.11. — Soient $T_1, T_2, \ldots, T_k$, $k$ opérateurs inversibles sur $L_E^p$, $(1 < p < +\infty)$ séparant scalairement les supports et à puissances scalairement bornées par M. Alors

$$\forall y \in E^*, \forall f \in L_E^p \left( \int \left( \sup_{n_i} \frac{1}{n_1 n_2 \ldots n_k} \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \ldots \sum_{j_k=0}^{n_k-1} | \langle y, T_1^{j_1} \ldots T_k^{j_k} f(\omega) \rangle | \right)^p d\mu \right)^{1/p}$$
$$\leqq M^k \left( \frac{p}{p-1} \right)^k \left( \int | \langle y, f(\omega) \rangle |^p d\mu \right)^{1/p}.$$

2) E est un espace de Banach réticulé et T un opérateur positif inversible sur $L_E^p$.

Nous supposons que E est muni d'une structure d'ordre qui en fait un espace de Banach réticulé ou un treillis de Banach. Une fonction $f$ de $L_E^p$ sera positive si $f(\omega) \geqq 0$ p. s. Un opérateur T sera positif si $f \geqq 0$ alors $Tf \geqq 0$.

Nous supposons aussi que T est inversible et que son inverse $T^{-1}$ est à puissances bornées. On a donc $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \| T^n \| \leqq M < +\infty$.

Étant donné un Banach réticulé E à norme continue pour l'ordre nous dirons qu'il possède la propriété (P) s'il vérifie la condition suivante :

$$(P) \begin{cases} \text{si } \phi \text{ est le shift } (\phi(i) = i+1) \text{ sur } (\mathbb{N}) \text{ muni de la mesure } \mu(i) = 1 \text{ pour} \\ \text{tout } i \text{ alors il existe } C > 0 \text{ telle que} \\ \left\| \sup_n \dfrac{f + f\circ\phi + \ldots + f\circ\phi^{n-1}}{n} \right\|_{l_E^p} \leqq C . \| f \|_{l_E^p} \quad \forall f \in l_E^p. \end{cases}$$

PROPOSITION I.2.1. — Les espaces du type $\mathscr{C}(K)$ (co, $l^\infty$, ...), les espaces $l^r$, $1 < r < +\infty$ et les Banach réticulés UMD ayant une base inconditionnelle vérifient la propriété (P).

*Démonstration.*

— Les espaces $\mathscr{C}(K)$ vérifient la propriété (P). En effet pour une transformation $\phi$ préservant la mesure sur un espace mesuré $\sigma$ fini on a l'estimation maximale suivante conséquence de celle obtenue dans $L^p$

$$\left( \int \sup_n \left\| \frac{f + f\circ\phi + \ldots + f\circ\phi^{n-1}}{n} \right\|^p d\mu \right)^{1/p} \leqq \frac{p}{p-1} \left( \int \| f(\omega) \|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Pour les espaces $\mathscr{C}(K)$ on a :

$$\| \sup_n M_n(T) f(\omega) \| = \sup_n \| M_n(T) f(\omega) \| \quad \text{p. s.}$$

On a donc pour le shift sur $\mathbb{N}$

$$\| \sup_n \mathrm{M}_n(\mathrm{T}) f \|_{l^p_{\mathrm{E}}} \leqq \frac{p}{p-1} \| f \|_{l^p_{\mathrm{E}}}.$$

— Les espaces $l^r$, $1 < r < +\infty$ vérifient la propriété (P); c'est une conséquence des résultats de Fefferman et Stein [*6*].

— Les espaces UMD à base inconditionnelle vérifient la propriété (P). Ceci découle des résultats de Bourgain [*2*].

THÉORÈME I.2.2. — Soit E un Banach réticulé possédant la propriété (P) et T un opérateur positif à puissances bornées inversible sur $\mathrm{L}^p_{\mathrm{E}}$ ($\sup_{n \in \mathbb{Z}} \| \mathrm{T}^n \| \leqq \mathrm{M} < +\infty$).

Alors $\exists \mathrm{C}(p) > 0$ tel que

$$\left( \int \sup_n \| \mathrm{M}_n(\mathrm{T}) f(\omega) \|^p d\mu \right)^{1/p} \leqq \mathrm{C}(p) \left( \int \| f(\omega) \|^p d\mu \right)^{1/p}, \qquad \forall f \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{E}}.$$

*Démonstration.* — Il est clair qu'il suffit d'établir une estimation maximale pour des fonctions positives.

Soit $\mathrm{N} > 1$, $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, et $f \geqq 0$, $f \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{E}}$, et $k \in \mathrm{N}$.

$\forall n \leqq \mathrm{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{T}^i f = \mathrm{T}^k \left( \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{T}^i (\mathrm{T}^{-k} f) \right)$$

d'où

$$\sup_{n \leqq \mathrm{N}} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{T}^i f \leqq \mathrm{T}^k \left( \sup_{n \leqq \mathrm{N}} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{T}^i (\mathrm{T}^{-k} f) \right).$$

Par suite

$$\int \left\| \sup_{n \leqq \mathrm{N}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{T}^i f(\omega) \right\|^p d\mu \leqq \frac{1}{\mathrm{L}} \sum_{k=1}^{\mathrm{L}} \int \left\| \mathrm{T}^k \left( \sup_{n \leqq \mathrm{N}} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{T}^i (\mathrm{T}^{-k} f)(\omega) \right) \right\|^p d\mu$$

$$\leqq \frac{\mathrm{M}^p}{\mathrm{L}} \sum_{k=1}^{\mathrm{L}} \int \left\| \sup_{n \leqq \mathrm{N}} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{T}^i (\mathrm{T}^{-k} f) \right\|^p d\mu.$$

E ayant la propriété (P), on applique (P) point par point pour $\omega$ fixé et on obtient :

$$\int \sup_{n \leqq \mathrm{N}} \| \mathrm{M}_n(\mathrm{T}) f(\omega) \|^p d\mu \leqq \int \left\| \sup_{n \leqq \mathrm{N}} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{T}^i f(\omega) \right\|^p d\mu$$

$$\leqq \mathrm{M}^{2p} \times \mathrm{A}^p \int \| f(\omega) \|^p d\mu.$$

Ceci étant vrai, $\forall \mathbb{N}$ on en déduit que

$$\left(\int \sup_n \| M_n(T)f(\omega) \|^p d\mu\right)^{1/p} \leqq M^2 A\left(\int \| f(\omega) \|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

THÉORÈME I.2.3. — Soit E un Banach réticulé possédant la propriété (P) et $T_1, T_2, \ldots, T_k$, $k$ opérateurs positifs inversibles sur $L_E^p$, $1 < p < +\infty$, tels que $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \| T_i^n \| \leqq M < +\infty, i = 1, \ldots, p$. Alors il existe une constante C telle que :

$$\left(\int \sup_{n_i} \left\| \frac{1}{n_1 n_2 \ldots n_k} \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \ldots \sum_{j_k=0}^{n_k-1} T_1^{j_1} \ldots T_k^{j_k} f(\omega) \right\|^p d\mu\right)^{1/p} \leqq C\left(\int \| f(\omega) \|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

## II. THÉORÈMES DE CONVERGENCE

La première partie nous montrons que l'on peut obtenir des théorèmes ergodiques dominés sans que l'espace $L_E^p$ soit réflexif. L'exemple suivant montre qu'en général l'on n'a pas la convergence p. s. en norme de E pour des opérateurs inversibles à puissances bornées si l'espace n'est pas réflexif.

EXEMPLE II.1. — Sur $l^1(\mathbb{Z})$ considérons l'opérateur T shift sur $l^1(\mathbb{Z})$ $Tx = (x_{i+1})$ pour $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. T est une isométrie inversible positive de $l^1(\mathbb{Z})$ qui ne vérifie pas le théorème en moyenne dans $l^1(\mathbb{Z})$. Prenons $x = (0, 0, x_0, x_1, x_2)$ $l^1(\mathbb{Z})$ avec $x_i \geqq 0$ on a

$$\| M_n(T)(x) \|_{l^1(\mathbb{Z})} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \| T^i x \|_{l^1(\mathbb{Z})} = \| x \|_{l^1(\mathbb{Z})}$$

et $M_n(T)(x)$ ne peut donc converger vers $(0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ seule limite possible *a priori.*

En prenant alors un espace réduit à un point on obtient un espace $L_{l^1(\mathbb{Z})}^p$ et une isométrie inversible de $L_{l^1(\mathbb{Z})}^p$ pour laquelle les moyennes de Césaro ne convergent pas p. s.

Néanmoins si l'on a un théorème ergodique dominé, l'ensemble des fonctions pour lesquelles on a la convergence p. s. en norme de E est fermé dans $L_E^p$ [*1*]. Il est aussi un autre type de convergence *a priori* plus faible : la convergence presque sûre faible (i. e. $\forall y \in E^* \langle y, M_n(T)f(\omega)\rangle \to \langle y, X_\infty(\omega)\rangle$ p. s. où $X_\infty \in L^p_E$ et le négligeable ne dépend pas de $y$.

Nous allons chercher à caractériser les fonctions $f$ de $L^p_E$ pour lesquelles on a la convergence ponctuelle p. s. (en norme ou faible) par le biais de la caractérisation de certaines parties faiblement compactes de $L^p_E$. Pour ce faire nous aurons besoin de quelques notations. Étant donné une suite $(f_n)$, $f_n \in L^p_E$, telle que :

$$\left(\int \sup_n \| f_n(\omega) \|^p d\mu\right)^{1/p} < +\infty$$

nous posons

$$\Gamma(\omega) = \mathrm{adh}\{ f_n(\omega) ; n \in \mathbb{N} \} \text{ p. s.} \qquad \text{et} \qquad L^p_\Gamma = \{ f \in L^p_E ; f(\omega) \in \Gamma(\omega) \ \text{ p. s.}$$

L'équivalence entre la relative compacité faible de $L^p_\Gamma$ et celle de $\Gamma(\omega)$ p. s. que nous allons établir (Théorème II.5) s'applique dans le cadre général d'une suite $(f_n)$ de $L^p_E$. Nous allons garder la notation $M_n(T)f$ pour rester dans le cadre de la première partie.

Remarquons que si T vérifie un théorème ergodique dominé alors

$$\left(\int \sup_n \| M_n(T)f(\omega) \|^p d\mu\right)^{1/p} < +\infty .$$

La démonstration du théorème II.5 étant analogue à celle établie dans [*1*] et [*9*] $L^1_E$ nous ne développons pas les arguments nous indiquons sous forme de proposition les principales étapes.

PROPOSITION II.2. — On a

$$\sup_{g \in L^p_\Gamma} \| g \| = \left(\int \sup_n \| M_n(T)f(\omega) \|^p d\mu\right)^{1/p} = \left(\int \sup_{x \in \Gamma(\omega)} \| x \|^p d\mu\right)^{1/p} .$$

*Démonstration.* — Il est clair qu'on a la deuxième égalité. Cela découle de la définition de $\Gamma(\omega)$.

Par conséquent on a :

$$\| g \| \leqq \left(\int \sup_{x \Gamma(\omega)} \| x \|^p d\mu\right)^{1/p}$$

et donc

$$\sup_{g \in L^p_\Gamma} \| g \| \leqq \left(\int \sup_n \| M_n(T)f(\omega) \|^p d\mu\right)^{1/p} .$$

Réciproquement soit $N \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\left(\int \sup_{n \leq N} \| M_n(T)f(\omega) \|^p d\mu\right)^{1/p} = \left(\int \sum_{i=1}^{N} 1_{A_i} \| M_i(T)f(\omega) \|^p d\mu\right)^{1/p}$$
$$= \left(\int \| g^*(\omega) \|^p d\mu\right)^{1/p}$$

où $g^*(\omega) = \sum_{i=1}^{N} 1_{A_i}(\omega) M_i(T)f(\omega)$ on a $g^*(\omega) \in \Gamma(\omega)$ et donc $g \in L_\Gamma^p$ par suite

$$\left(\int \sup_{n \in N} \| M_n(T)f(\omega) \|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \sup_{g \in L_\Gamma^p} \| g \|.$$

PROPOSITION II.3. — Soit E un espace de Banach séparable, si $\Gamma(\omega) = \text{adh}\{ M_n(T)f(\omega) ; n \in \mathbb{N} \}$ est faiblement relativement compact p. s. alors $L_\Gamma^p$ est faiblement relativement compact.

*Démonstration.* — Chaque élément de $(L_E^p)^*$ dual de $L_E^p$ atteint son maximum sur $\overline{\text{Conv}}\, L^p$ enveloppe convexe de $L_\Gamma^p$. Grâce à la proposition I.2, $L_\Gamma^p$ est borné.

PROPOSITION II.4. — Si $L_\Gamma^p$ est relativement faiblement compact alors $\Gamma(\omega) = \text{adh}\{ M_n(T)f(\omega) ; n \in \mathbb{N} \}$ ne contient aucune suite équivalente à la base canonique de $l^1$ p. s.

*Démonstration.* — Elle peut se faire par contraposition en utilisant le fait que les suites équivalentes à la base canonique de $l^1$ forment un borélien de $E^{\mathbb{N}}$ (voir [*1*]).

THÉORÈME II.5. — On a l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

*i*) $L_\Gamma^p$ est relativement faiblement compact.

*ii*) $\Gamma(\omega) = \text{adh}\{ M_n(T)f(\omega) ; n \in \mathbb{N} \}$ est relativement faiblement compact p. s.

*Démonstration.* — Grâce à la Proposition II.3 on a *ii*) $\Rightarrow$ *i*).

*Réciproquement.* — Si $\Gamma(\omega)$ n'est pas relativement faiblement compact p. s. alors d'après la Proposition II.4 $\Gamma(\omega)$ ne peut contenir p. s. de suite équivalente à la base canonique de $l^1$. Il reste à considérer les suites de Cauchy faible qui ne convergent pas dans E grâce au théorème de Rosenthal [*10*]. Alors grâce à un théorème de sélection de Srebrny [*12*], sur l'uniformisation des PCA (image continue des coanalytiques) on obtient une sous-suite de

$M_n(T)f(\omega)$ qui sur un ensemble A de $\mathscr{A}$ est de Cauchy faible et non faiblement convergente. Mais en utilisant la relative compacité faible de $L^p$ la limite de cette sous-suite doit obtenir p. s. à E.

Le théorème suivant nous permet d'obtenir les critères annoncés.

THÉORÈME II.6. — Soit T un opérateur à puissances bornées sur $L_E^p$, $1 < p < +\infty$, E Banach séparable vérifiant un théorème ergodique dominé (c'est le cas des opérateurs considérés à la première partie) et $f$ une fonction de $L_E^p$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

*i*) $\{ M_n(T)f ; n \in \mathbb{N} \}$ est relativement faiblement compact dans $L_E^p$.

*ii*) $f \in \operatorname{Inv} T + \overline{(I - T)(L_E^p)}$.

*iii*) $M_n(T)f$ converge en norme p. s. vers un point fixe de T.

*iv*) $\forall y \in E^*$, $\langle y, M_n(T)f(\omega) \rangle$ CV p. s. vers une fonction $X_\infty \in L_E^p$ en dehors d'un négligeable indépendant de $y$.

*v*) $\{ M_n(T)f(\omega) ; n \in \mathbb{N} \}$ est relativement faiblement compact p. s.

*vi*) $L_F^p$ est relativement faiblement compact.

*vii*) Pour toute suite $g_n \in L_\Gamma^p$, $(g_n)$ est relativement faiblement compact et $\{ g_n(\omega) ; n \in \mathbb{N} \}$ est relativement faiblement compact p. s.

*Démonstration.* — *i*) $\Rightarrow$ *ii*).

Soit $f^*$ une valeur d'adhérence faible de la suite $\{ M_n(T)f ; n \in \mathbb{N} \}$. Puisque $\| (TM_{n_K}(T) - M_{n_K})(f) \|_{L_E^p} \to 0$ on a $Tf^* = f^*$ et $f^* \in \operatorname{Inv} T$. Or $f = f^* + (f - f^*)$ il reste à montrer que $f - f^* \in \overline{(I-T)(L^p)}$. Mais

$$\begin{aligned} f - f^* &= \text{lim faible } (f - M_{n_K}(T)f) \\ &= \text{lim faible } (I - M_{n_K}(T))f \in \overline{(I - T)(L^p)}. \end{aligned}$$

Car
$$(I - M_{n_K}(T)) = (I - T)(B_{n_K}(T)).$$

$$(ii) \Rightarrow (iii)$$

$$M_n(T)f = f^* + M_n(T)(f - f^*)$$

avec
$$f - f^* = \lim_{(\text{norme})} f_K \quad \text{avec} \quad f_K \in (I - T)(L^p).$$

Montrons que $M_n(T)(f - f^*) \underset{n}{\to} 0$ p. s. on a :

$$\begin{aligned} \limsup_n \| M_n(T)(f - f^*)(\omega) \| &\leq \limsup \| M_n(T)(f - f^* - f^* - f_K)(\omega) \| \\ &\quad + \limsup \| M_n(T) f_K)(\omega) \| \end{aligned}$$

$$f_K \in (I - T)(L^p) \quad \text{et donc} \quad \| \lim_n M_n(T)(f_K)(\omega) \| = 0 \quad \text{p. s.}$$

Grâce au théorème ergodique dominé on a :

$$\int \limsup_n \| M_n(T)(f - f^*) \|^p d\mu \leqq \int \limsup_n \| M_n(T)(f - f^* - f_K) \|^p d\mu$$
$$\leqq \int \sup_n \| M_n(T)(f - f^* - f_K) \|^p d\mu$$
$$\leqq C \int \| f - f^* - f_K) \|^p d\mu, \quad \forall k \to 0 .$$

Les implications *iii)* $\Rightarrow$ *iv)*, *iv)* $\Rightarrow$ *v)*, *vii)* $\Rightarrow$ *i)* sont aisées à établir ; *v)* $\Rightarrow$ *vi)* et *vi)* $\Rightarrow$ *vii)* découlent du théorème II.5.

COROLLAIRE II.7. — Si pour les théorèmes I.1.5, I.1.6, I.1.7, I.2.2, I.2.3 on suppose que l'espace E est réflexif alors on obtient la convergence presque sûre en norme des moyennes de Césaro vers un point fixe de T (ou des $T_i$ dans le cas à plusieurs paramètres).

PROPOSITION II.8. — Soit T un opérateur borné sur $L^p_E$, à puissances scalairement bornées vérifiant un théorème ergodique scalairement dominé. Alors pour toute fonction $f$ appartenant à l'espace $\text{Inv}\, T + \overline{(I - T)(L^p_E)}$ (adhérence pour $\sigma((L^p_E), (L^p_E)^*)$ il existe $X_\infty \in L^p_E$ telle que

$$\forall y \in E^* \quad \langle y, M_n(T)f(\omega) \rangle \to \langle y, X(\omega) \rangle \quad \text{p. s.}$$

et donc si $E^*$ est séparable $M_n(T)f)$ converge scalairement p. s.

*Démonstration.* — On raisonne comme dans la démonstration du théorème II.6. La fonction $f$ s'écrit sous la forme $f^* + (f - f^*)$ avec $(f - f^*) \in \overline{(I - T)(L^p_E)}$ adhérence pour $\sigma((L^p_E), (L^p_E)^*)$. Cette adhérence étant la même que l'adhérence en norme il existe une suite $g_K \in (I - T)(L^p_E)$ convergeant en norme vers $f - f^*$

$$|\langle y, M_n(T)(f - f^*)(\omega) \rangle| \leqq |\langle y, M_n(T)(g - g_K)(\omega) \rangle| + |\langle y, M_n(T)(g_K)(\omega) \rangle|$$

d'où $$\limsup_n | \qquad | \leqq \limsup | \qquad |$$

et $$\int \limsup_n | \qquad |^p d\mu \leqq \int \sup_n | \qquad |^p d\mu .$$
$$\leqq M \int | \langle y, (g - g_K)(\omega) \rangle |^p d\mu$$
$$\leqq M \| y \|^p \quad \| g - g_K \|^p_{L^p_E} \quad \forall k$$

d'où $$\limsup_n | \langle y, M_n(T)(f - f^*)(\omega) \rangle | = 0$$

ce qui indique que

$$\forall y \in \mathrm{E}^*, \quad \langle y, \mathrm{M}_n(\mathrm{T})f(\omega) \rangle \to \langle y, \mathrm{X}_\infty(\omega) \rangle \quad \text{p. s.}$$

Si E* est séparable on peut obtenir un négligeable ne dépendant pas de $y$ en prenant ceux correspondant à une suite dense en norme dans E*.

REMERCIEMENTS

Nous remercions S. Guerre et Y. Raynaud pour les conversations stimulantes que nous avons eues avec eux.

## RÉFÉRENCES

[1] I. ASSANI, *Contribution à la théorie ergodique des opérateurs et applications multivoques à valeurs dans un espace de Banach.* Thèse d'État. Université Paris VI, 3 mars 1986.
[2] J. BOURGAIN, Extension of a result of Benedek, Calderon' and Panzone. *Arkiv. Mat.*, t. **22**, 1984, p. 91-95.
[3] M. CAMBERN, The Isometries of $L^p(X, K)$. *Pacific J. Math.*, t. **55**, 1974, p. 9-17.
[4] R. V. CHACON, An ergodic theorem for operators satisfying norm conditions. *J. Math. Mech.*, t. **11**, 1962, p. 165-172.
[5] N. DUNFORD, J. T. SCHWARZ, *Linear operators.* Part 1, Interscience, New York, 1958.
[6] C. L. FEFFERMAN, E. M. STEIN, *Some maximal inequalities. Amer J. Math.*, t. **1**, 1971, p. 107-115.
[7] A. IONESCU-TULCEA, Ergodic properties of isometries in $L^p$ spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **70**, 1964, p. 336-371.
[8] C. H. KAN, Ergodic properties of Lamperti operators. *Canad. J. of Math.*, 1978, t. **30**, 1978, p. 1206-1214.
[9] H. A. KLEI, Compacité faible de parties décomposables de $L^1_E$. *Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences*, Paris, t. **296**, Série I, 1983, p. 965.
[10] H. P. ROSENTHAL, A characterization of Banach spaces containing $l^1$. *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. **71**, 1974, p. 2411-2413.
[11] H. L. ROYDEN, *Real analysis*, 2nd ed, MacMillan Co, New York, 1968.
[12] M. SREBRNY, Measurable selectors of PCA multifunctions with applications. *Mem. Amer. Math. Soc.*, t. **52**, n° 311, 1984.
[13] A. R. SOUROUR, The isometries of $L^p$ $(\Omega, X)$. *Journal of Functional Analysis*, t. **30**, 1978, p. 276-285.
[14] A. DE LA TORRE, A simple proof of the maximal ergodic theorem. *Can. J. Math.*, t. **28**, 1976, p. 1073-1075.

*(Manuscrit reçu le 13 mars 1986)*