

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MARIE COTTRELL

JEAN-CLAUDE FORT

Étude d'un processus d'auto-organisation

Annales de l'I. H. P., section B, tome 23, n° 1 (1987), p. 1-20

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1987__23_1_1_0

© Gauthier-Villars, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Echanges Annales

Étude d'un processus d'auto-organisation

par

Marie COTTRELL

Université Paris-Sud
U. A. 743 C. N. R. S.
Mathématiques, Statistique Appliquée
Bât. 425
F-91405 Orsay (France)

Jean-Claude FORT

Université Paris V
Laboratoire de Statistiques
Médicales
45, rue des Saints-Pères
F-75270 Paris Cedex 06 (France)

RÉSUMÉ. — T. Kohonen a défini en [2] un algorithme pour modéliser le phénomène biologique appelé rétinitopie : il s'agit de l'établissement de relations structurées entre la rétine et le cortex, qui préservent la topologie de la rétine. Il a observé la convergence de l'algorithme par simulation et proposé en [4] un schéma de démonstration avec quelques éléments de preuves. Dans cet article, nous démontrons la convergence vers une distribution stationnaire, dans le cas uni-dimensionnel.

Mots-clés : Chaînes de Markov, distribution invariante, rétinitopie.

ABSTRACT. — T. Kohonen defined in [2] a mathematical algorithm in order to modelize the biological phenomena called retinotopy: that is the self-organized formation of maps between retina and cortex preserving the topological structure of the retina. He observed the convergence of the algorithm by simulation and presented in [4] a sketch of proof. In this paper we prove the convergence toward an invariant distribution in the one dimensional case.

Key-words: Markov chains, invariant distribution, retinotopy.

INTRODUCTION

T. Kohonen (1982) a proposé un modèle qui décrit l'établissement de relations structurées entre les cellules du cortex et de la rétine.

Initialement, la liaison rétine-cortex est anarchique. Au cours de la vie embryonnaire, et par l'activité visuelle, s'établit une relation qui conserve la topologie de la rétine.

Le principe de Hebb affirme que la variation de l'efficacité de la liaison synaptique entre un neurone de la rétine et un neurone du cortex est proportionnelle au produit de l'activité pré-synaptique (stimulus) et post-synaptique (excitation d'une cellule du cortex et de ses voisines).

En conséquence, si une cellule de la rétine est excitée, elle transmet cette excitation à une zone du cortex et les cellules excitées dans le cortex renforcent alors leur liaison avec la cellule « émettrice ».

Kohonen (dans [2] [3]) a proposé l'algorithme suivant :

La rétine est représentée par le carré $[0, 1]^2$. Le cortex est un réseau discret bidimensionnel : $\{1, \dots, n\}^2$. Ses cellules sont notées (i, j) . Il est clair qu'une cellule du cortex est contactée par plusieurs cellules de la rétine, et réciproquement.

Par souci de simplification, on suppose qu'une cellule du cortex (i, j) est reliée à une cellule de la rétine notée x_{ij} , centre de gravité des cellules de la rétine reliées à (i, j) pondérées par les efficacités synaptiques.

A l'instant t , on note $X^t = (X_{ij}^t, (i, j) \in [1, n]^2)$ l'état des liaisons. Initialement X^0 correspond au tirage de n^2 variables aléatoires uniformes indépendantes.

A chaque instant $t = 1, \dots, n$, on excite la rétine en un point ω^{t+1} (tiré suivant une loi uniforme). On détermine ainsi, presque sûrement, l'indice « appelé » (i_0, j_0) tel que X_{i_0, j_0}^t soit le point le plus proche de ω^{t+1} .

L'excitation est alors transmise à la cellule (i_0, j_0) du cortex, et à une zone voisine.

Le renforcement des liaisons se traduit par une homothétie de centre ω^{t+1} et de rapport $(1 - \varepsilon)$, ε étant petit, compris entre 0 et 1, qui rapproche de ω^{t+1} et entre elles les liaisons concernées.

Cet algorithme se généralise immédiatement en dimension quelconque finie.

Ce type d'algorithme d'auto-organisation est utilisé pour des applica-

tions variées : reconnaissance de la parole, choix de la dimension d'une représentation réduite d'un ensemble de points de \mathbb{R}^n , construction de représentations hiérarchisées (Kohonen (1984) [4]).

Les simulations.

Kohonen dans [2] a exposé les résultats des simulations faites à partir de cet algorithme, pour $(i, j) \in [1, 8]^2$ et 8 voisins. On constate effectivement la convergence de l'algorithme lorsque $t \rightarrow +\infty$, non pas vers une disposition constante, mais vers une configuration aléatoire reproduisant la disposition du carré des (i, j) .

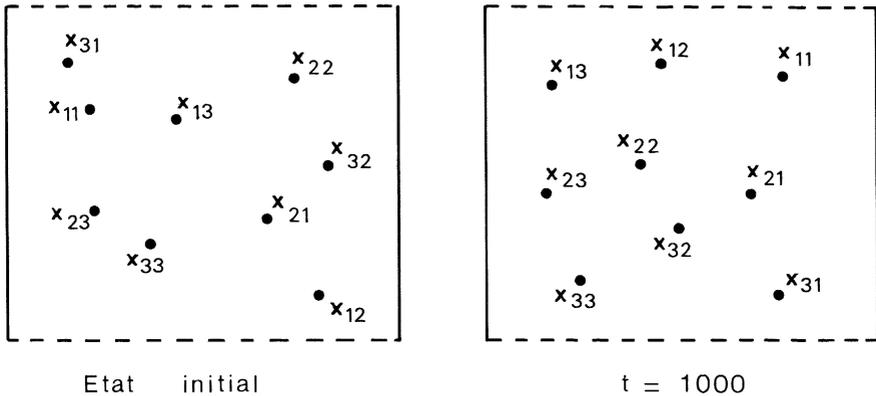


FIG. 1. — $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$, $\varepsilon = 0,05$.

En dimension 1, on obtient une configuration (aléatoire) monotone, application de $\{1, 2, \dots, n\}$ dans $[0, 1]$.

Dans cet article, nous démontrons la convergence de la chaîne X^t dans le cas unidimensionnel.

1. ALGORITHME DE KOHONEN EN DIMENSION 1

En dimension 1, l'algorithme est défini par :

- Un scalaire ε compris entre 0 et 1.
- Une suite $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^t, \dots$ de v. a. iid, de loi uniforme sur $[0, 1]$.

c) La chaîne de Markov (X^t) à valeurs dans $[0, 1]^n$, de loi initiale la loi uniforme, vérifiant

$$X_i^{t+1} = X_i^t + g(\omega^{t+1} - X_i^t) \quad \text{pour } i \in \{i_0 - 1, i_0, i_0 + 1\} \cap [1, n]$$

$$X_i^{t+1} = X_i^t \quad \text{pour } i \notin \{i_0 - 1, i_0, i_0 + 1\} \cap [1, n],$$

où $i_0 = i(X^t, \omega^{t+1})$ est défini presque sûrement par

$$|\omega^{t+1} - X_{i_0}^t| = \inf_i |\omega^{t+1} - X_i^t|.$$

On note $X^{t+1} = H(X^t, \omega^{t+1})$, on remarque que H est définie sur l'ensemble E où

$$E = \{ (x, \omega) / x \in [0, 1]^n, \omega \in [0, 1], x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j, i(x, \omega) \text{ unique} \}$$

Il est commode de représenter une réalisation de X^t par un graphe

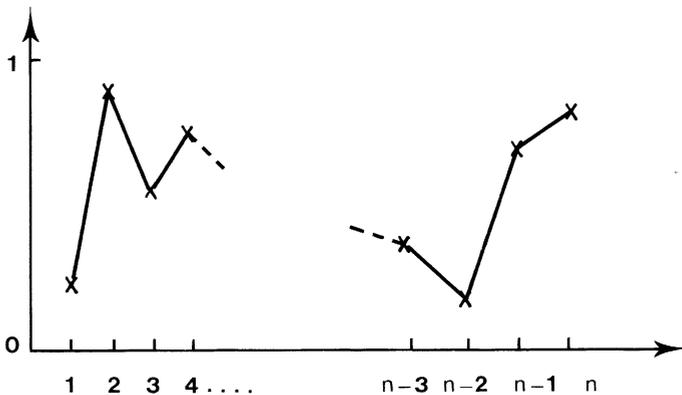


FIG. 2. — Graphe de (X^t) à l'instant t .

Pour bien faire comprendre le fonctionnement de l'algorithme, nous commençons par faire les observations suivantes :

DÉFINITION 1.1. — *Le nombre d'inversions de X^t est*

$$N_t = \text{Card} \{ i \in \{2, \dots, n-1\} / (X_{i+1}^t - X_i^t)(X_i^t - X_{i-1}^t) < 0 \}.$$

PROPOSITION 1.1. — *Le nombre d'inversions du graphe X^t est une fonction décroissante (au sens large) du temps.*

Démonstration. — Supposons $X^t = (x_1, \dots, x_n)$ et $X^{t+1} = (x'_1, \dots, x'_n)$

et pour envisager le cas général $i_0 = i(\omega^{t+1}, X^t)$ avec $i_0 \in [4, n - 3]$. Posons pour plus de commodité $\omega^{t+1} = z$. Si

$$S'(i_0 - 1, i_0, i_0 + 1) = \text{Signe}(x_{i_0} - x_{i_0-1})(x_{i_0+1} - x_{i_0})$$

il est bien clair que $S^{t+1}(i_0 - 1, i_0, i_0 + 1) = S^t(i_0 - 1, i_0, i_0 + 1)$.

Le nombre des inversions n'est jamais modifié en i_0 . Donc seules nous intéressent les inversions possibles en $i_0 - 2, i_0 - 1$ (ou $i_0 + 2, i_0 + 1$, ce qui se traite de la même manière).

En tenant compte des symétries, seuls 4 cas se présentent :

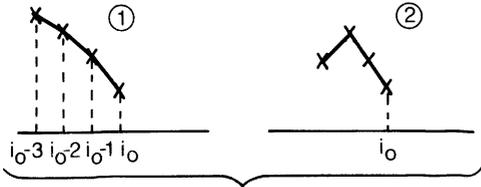


FIG. 3. — Pas d'inversion en $i_0 - 1$.

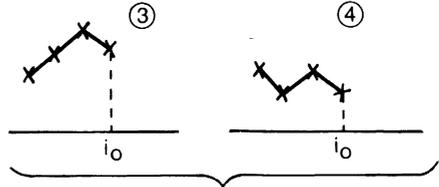


FIG. 4. — Une inversion en $i_0 - 1$.

Dans tous les cas $x'_{i_0-3} = x_{i_0-3}$ et $x'_{i_0-2} = x_{i_0-2}$.

⊙ 1 et 2 :

$x'_{i_0-2} - x'_{i_0-1} = (x_{i_0-2} - x_{i_0-1}) - \varepsilon(z - x_{i_0-1})$ reste > 0 , car dans ce cas $x_{i_0-1} > z$.

Donc $N^{t+1} = N^t$.

⊙ 3 et 4 :

a) Si $x_{i_0-1} - x_{i_0-2} < \varepsilon(x_{i_0-1} - z)$ alors $x'_{i_0-2} - x'_{i_0-1} > 0$, alors dans le cas 3, $S^{t+1}(i_0 - 3, i_0 - 2, i_0 - 1) < 0$ mais $S^{t+1}(i_0 - 2, i_0 - 1, i_0) > 0$ donc $N^{t+1} = N^t$: la pointe se déplace de $i_0 - 1$ à $i_0 - 2$.

Dans le cas 4, $S^{t+1}(i_0 - 3, i_0 - 2, i_0 - 1) > 0$ et également $S^{t+1}(i_0 - 2, i_0 - 1, i_0) > 0$ donc $N^{t+1} = N^t - 2$: 2 points s'effacent simultanément.

b) Si $x_{i_0-1} - x_{i_0-2} \geq \varepsilon(x_{i_0-1} - z)$ comme précédemment $N^{t+1} = N^t$.

Les cas particuliers $i_0 = 1, 2, 3, n - 2, n - 1, n$ se traitent de la même manière avec cependant la possibilité d'avoir $N^{t+1} = N^t - 1$: une pointe « tombe » au bord du graphe. □

La fonction N^t n'est pas strictement décroissante et de ce fait ne peut pas être utilisée directement comme fonction de Lyapounov associée au problème.

Toutefois on en déduit que l'ensemble des graphes strictement mono-

tones est absorbant pour X^t . Il est constitué de deux classes absorbantes qui ne communiquent pas : A , les graphes strictement croissants, A' , les graphes strictement décroissants.

Dans la suite, nous démontrons deux résultats essentiels.

THÉORÈME 1.1. — Soit $\tau_{A \cup A'}$ le temps d'entrée dans $A \cup A'$. Soit \mathbb{P}_x la loi de la chaîne de Markov X^t , partant de l'état x à coordonnées toutes distinctes, alors

$$\mathbb{P}_x(\tau_{A \cup A'} < +\infty) = 1.$$

La démonstration de ce théorème fait l'objet du § 2.

THÉORÈME 1.2. — Conditionnellement à l'entrée dans A (resp. A'), la chaîne (X^t) converge en loi vers une distribution stationnaire unique ${}^e\pi$ qui possède une partie absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Ce résultat est démontré au § 3.

Le § 4 est consacré à quelques propriétés complémentaires.

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1. (MISE EN ORDRE)

Tout d'abord, on peut mettre en évidence une conséquence de la proposition 1.1 :

LEMME 2.1. — Si les deux inégalités suivantes sont réalisées

$$\begin{aligned} X_{i_0}^t &< X_{i_0-2}^t < X_{i_0-1}^t \\ X_{i_0-1}^t - X_{i_0-2}^t &< \varepsilon(X_{i_0-1}^t - X_{i_0}^t) \end{aligned}$$

alors un tirage de ω^{t+1} très proche de $X_{i_0}^t$ réordonne le triplet dans l'ordre décroissant.

$$\begin{aligned} \text{On a } \quad A &= \{x = (x_1, \dots, x_n) / 0 < x_1 < \dots < x_n < 1\} \\ A' &= \{x = (x_1, \dots, x_n) / 0 < x_n < \dots < x_1 < 1\} \end{aligned}$$

On note $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$.

Le théorème 1.1 est un corollaire immédiat du résultat suivant.

THÉORÈME 2.1. — Soit $\tau_{A \cup A'}$ le temps d'entrée dans $A \cup A'$. Il existe $T < +\infty$ et $\alpha(n, \varepsilon) > 0$ tels que

$$\forall x^0 \in [0, 1]^n, \text{ à coordonnées toutes distinctes } \quad \mathbb{P}_{x^0}(\tau_{A \cup A'} \leq T) \geq \alpha(n, \varepsilon).$$

Nous décomposons la preuve du Théorème 2.1 en deux lemmes dans les démonstrations desquels nous laisserons quelques détails techniques au lecteur.

DÉFINITION 2.1. — On dit que $x \in [0, 1]^n$ contient une (k, η) chaîne de début p et de fin q si $p < q$, $q - p + 1 = k$, et $\eta > 0$ avec

- i) $x_p < x_{p+1} < \dots < x_q$ (1)
- ou $x_p > x_{p+1} > \dots > x_q$ (2)
- ii) $\inf \{ |x_{i+1} - x_i| / i \mid i = p, p + 1, \dots, q - 1 \} \geq \eta$
- iii) $\forall j = 1, \dots, p - 1, q + 1, \dots, \eta$
 $x_j < x_p - \eta$ ou $x_j > x_q + \eta$ dans le cas (1)
 $x_j > x_p + \eta$ ou $x_j < x_q - \eta$ dans le cas (2)

η est le module de la (k, η) chaîne.

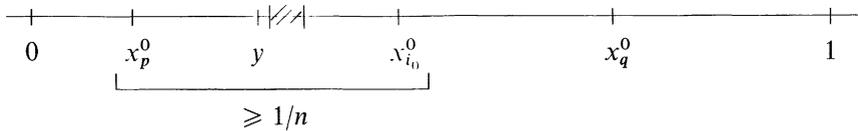
En notant $B_{k,\eta}$ l'ensemble des x contenant une (k, η) chaîne, il est clair que

$$A \cup A' = \bigcup_{\eta > 0} B_{n,\eta}$$

Soit $\tau_{B_{k,\eta}}$ le temps d'entrée dans $B_{k,\eta}$.

LEMME 2.1. — Construction d'une 3-chaîne. — Il existe $T_3 < + \infty$, $\eta > 0$ et $\alpha(\epsilon, n)$ tels que quel que soit x de $[0, 1]^n$ à coordonnées toutes distinctes, $\mathbb{P}_{x_0}(\tau_{B_{3,\eta}} \leq T_3) \geq \alpha(\epsilon, n) > 0$.

Démonstration. — a) Soit $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ un point quelconque de $[0, 1]^n$, à coordonnées toutes distinctes. Il existe nécessairement un couple de points écartés de plus de $1/n$.



On peut trouver $i_0, p \neq i_0 - 1$ et $i_0 + 1, q \neq i_0 - 1, i_0 + 1$ tels que

$$x_{i_0}^0 - x_p^0 \geq \frac{1}{n}$$

x_p^0 est le point le plus proche sur la gauche de x_{i_0} , avec $p \neq i_0 \pm 1$.

x_q^0 est le point le plus proche sur la droite de x_{i_0} , avec $q \neq i_0 \pm 1$.

On note $y = \frac{1}{2}(x_p^0 + x_{i_0}^0)$.

Soit T un entier > 0 . Pour α et β positifs tels que

$$\beta(1 - (1 - \varepsilon)^T) < \alpha < \beta < \frac{(1 - \varepsilon)^T}{2n}$$

et si $\omega^1, \dots, \omega^T$ appartiennent à $]y + \alpha, y + \beta[$, on a pour tout $t = 1, \dots, T$,

$$i) \quad X_{i_0}^t > (1 - \varepsilon)^T x_{i_0}^0 + (1 - (1 - \varepsilon)^T)y$$

et comme

$$X_{i_0}^t > (1 - \varepsilon)^T \left(\frac{x_{i_0}^0 - x_p^0}{2} \right) + y > \beta + y$$

et de même que

$$\frac{1}{2}(X_{i_0}^t + X_p^t) < (1 - \varepsilon)^T y + (1 - (1 - \varepsilon)^T)(y + \beta)$$

(car le déplacement du point X_{i_0} est maximum pour $\omega^t = y + \alpha$), on a

$$\frac{1}{2}(X_{i_0}^t + X_p^0) < y + (1 - (1 - \varepsilon)^T)\beta < y + \alpha$$

et par conséquent

$$ii) \quad i(X^{t-1}, \omega^t) = i_0 \quad \text{pour } t = 1, \dots, T.$$

Après T tirages dans $]y + \alpha, y + \beta[$ on a :

$$iii) \quad \sup(|X_{i_0}^T - X_{i_0-1}^T|, |X_{i_0}^T - X_{i_0+1}^T|) \leq (1 - \varepsilon)^T$$

$$iv) \quad X_{i_0}^T \in]y + \beta, y + \beta + (1 - \varepsilon)^T[.$$

$$\text{D'où } \begin{cases} X_{i_0}^T, X_{i_0-1}^T, X_{i_0+1}^T \in]y + \beta - (1 - \varepsilon)^T, y + \beta + 2(1 - \varepsilon)^T[\\ \text{et } \forall j \neq i_0, i_0 - 1, i_0 + 1, X_j^T = x_j^0. \end{cases}$$

La probabilité de cet événement est $\geq (\beta - \alpha)^T$.

Au temps T , on se trouve donc dans l'une des 6 configurations suivantes :

$$(1) \quad \begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ \hline X_{i_0-1}^T \quad X_{i_0}^T \quad X_{i_0+1}^T \\ \hline \end{array}$$

$$(4) \quad \begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ \hline X_{i_0+1}^T \quad X_{i_0-1}^T \quad X_{i_0}^T \\ \hline \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ \hline X_{i_0+1}^T \quad X_{i_0}^T \quad X_{i_0-1}^T \\ \hline \end{array}$$

$$(5) \quad \begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ \hline X_{i_0}^T \quad X_{i_0-1}^T \quad X_{i_0+1}^T \\ \hline \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ \hline X_{i_0-1}^T \quad X_{i_0+1}^T \quad X_{i_0}^T \\ \hline \end{array}$$

$$(6) \quad \begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ \hline X_{i_0}^T \quad X_{i_0+1}^T \quad X_{i_0-1}^T \\ \hline \end{array}$$

b) Avec une probabilité minorée, on peut ramener les situations (3) et (5) à la situation (1) (resp. (4) et (6) à (2)), au temps $T + 1$ (en choisissant T convenablement).

Prenons par exemple le cas de la situation (3).

Si l'on choisit $\omega^{T+1} \in]u + \alpha, u + \beta [$ avec $u = \frac{1}{2}(x_p^0 + y)$, l'indice « appelé » est $i_0 - 1$ et X_{i_0} est déplacé.

On peut alors appliquer le lemme 2.1 en imposant $4n(1 - \varepsilon)^T \leq \varepsilon$, et on est ramené à la situation (1).

Pour les calculs qui suivent, on prend en réalité T défini par

$$15n(1 - \varepsilon)^T \leq \varepsilon < 15n(1 - \varepsilon)^{T-1}.$$

Au temps T + 1, on se retrouve donc dans l'un des cas (1) ou (2). On suppose dans la suite qu'il s'agit du cas (1).

c) Module d'espacement de la 3-chaîne.

On a au temps T + 1

$$u = \frac{1}{2}(x_p^0 + y) < X_{i_0-1}^{T+1} < X_{i_0}^{T+1} < X_{i_0+1}^{T+1} < \frac{1}{2}(y + x_{i_0}^0) = v,$$

avec $v - u \geq \frac{1}{2n}$ et $X_{i_0}^{T+1} - X_{i_0-1}^{T+1} \geq \frac{\varepsilon}{5n}$.

Alors on vérifie qu'il existe $a > 0$ indépendant de x^0 , tel que si $\omega^{T+2} \in]u, u + a [$ et $\omega^{T+3} \in]v - a, v [$, on obtient au temps T + 3, une 3-chaîne $(i_0 - 1, i_0, i_0 + 1)$ de module d'espacement indépendant de x^0 . □

LEMME 2.2. — Pour $k \geq 3$, il existe une fonction h continue de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ , vérifiant $h(0) = 0$, un entier $T_{k+1} > 0$, et $\alpha_{k+1}(n, \varepsilon, \eta) > 0$ tels que

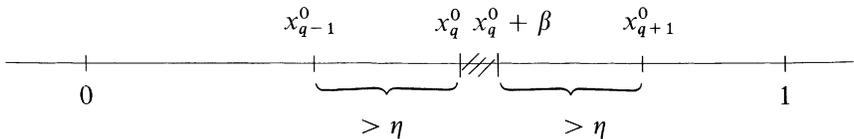
$$\forall x^0 \in B_{k,\eta} \quad \mathbb{P}_{x^0}(\tau_{B_{k+1},h(n)} \leq T_{k+1}) \geq \alpha_{k+1}(n, \varepsilon, \eta).$$

Ce lemme donne une minoration uniforme de la probabilité de passer d'une k -chaîne ordonnée à une $k + 1$ -chaîne, en conservant un module d'espacement pouvant être différent, mais que l'on sait calculer.

Démonstration. — Il n'y a rien à démontrer si $n \leq 3$. On se borne au cas d'une chaîne croissante, lorsque $n > 3$.

1^{er} cas :

$$x_q^0 < x_{q+1}^0$$



On cherche à déterminer un β non nul, tel que si $\omega^t \in]x_q^0, x_q^0 + \beta [$ pour tout t moindre que T, on ait $i(x^{t-1}, \omega^t) = q$, de manière à « attirer

au plus vite x_{q+1} » et constituer une $(k + 1)$ chaîne de module $h(\eta)$ calculable, cela en majorant le temps T nécessaire.

Soit T tel que $(1 - \varepsilon)^T \leq \frac{\eta}{2} < (1 - \varepsilon)^{T-1}$ et $\beta = \inf \left\{ \frac{\eta}{2}(1 - \varepsilon)^T, \frac{\eta}{2} - \frac{\eta^2}{2}(1 - \varepsilon) \right\}$.

Alors on voit, par récurrence, que si pour $t \leq T$, $x_q^0 < \omega^t < x_q^0 + \beta$, on a pour tout $t = 1, \dots, T$,

$$i) \quad x_q^0 < X_q^t < x_q^0 + \beta$$

$$ii) \quad i(X^{t-1}, \omega^t) = q$$

et que X^t contient une $(k + 1, h(\eta))$ chaîne de début p et de fin $q + 1$, avec $h(\eta) \frac{\eta^2}{2}(1 - \varepsilon)$. D'où le résultat avec $T_{k+1} = T$ et $\alpha_{k+1}(n, \varepsilon, \eta) = \beta^T$.

On traite le cas symétrique $x_{p-1}^0 < x_p^0$ de la même façon. Reste donc le

$$2^e \text{ cas :} \quad x_{q+1}^0 < x_p^0 \quad \text{et} \quad x_{p-1}^0 > x_q^0.$$

a) Soit $a = \frac{\varepsilon^2 \eta}{2(1 + \varepsilon)}$, T défini par $(1 - \varepsilon)^T \leq a < (1 - \varepsilon)^{T-1}$, et $\beta \leq \frac{\eta}{2}(1 - \varepsilon)^T$.

Alors si pour $t = 1, \dots, T$, $\omega^t \in]x_q^0 - \beta, x_q^0[$, on a

$$i) \quad i(X^{t-1}, \omega^t) = q \text{ pour } t = 1, \dots, T, \text{ et}$$

$$ii) \quad X_q^T - X_{q+1}^T < a.$$

b) En choisissant $\omega^{T+1} \in]x_{q-2}^0 - \frac{\eta}{2}, x_{q-2}^0[$, on a

$$i) \quad i(X^T, \omega^{T+1}) = q - 2 \text{ et}$$

$$ii) \quad X_{q-1}^{T+1} < X_q^{T+1} - \frac{\varepsilon \eta}{\varepsilon + 1} < x_q^0 - a.$$

c) Enfin pour $\omega^{T+2} \in]X_{q-1}^{T+1} - \frac{(1 - \varepsilon)\eta}{2}, X_{q-1}^{T+1}[$ on a $i(X^{T+1}, \omega^{T+2}) = q - 1$

et on obtient alors une $(k + 1)$ chaîne de début p et de fin $q + 1$.

On peut vérifier que son module d'espacement est minoré par $\frac{(1 - \varepsilon)^2 \varepsilon^2 \eta^2}{2(1 + \varepsilon)}$. \square

De ces deux lemmes, découlent par récurrence immédiate le théorème 2.1 et son corollaire le théorème 1.1.

**3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2.
(EXISTENCE D'UNE DISTRIBUTION STATIONNAIRE)**

Nous étudions l'existence d'une distribution stationnaire sur A (resp. sur A'). Pour cela, nous montrons que la chaîne est Doeblin [1].

Nous pouvons déjà remarquer que la transition $\mathbb{P}(\cdot, \cdot)$ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n possède un support de dimension 1 et est donc singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. La plus petite itérée de \mathbb{P} susceptible de posséder une partie absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue est donc \mathbb{P}^n , nous allons voir que c'est effectivement le cas.

La démonstration est faite pour l'ensemble absorbant A.

Nous démontrons tout d'abord le

THÉORÈME 3.1. — *Pour tout x de A, il existe un borélien C_x , deux réels strictement positifs a et δ tels que*

i) C_x soit de mesure de Lebesgue strictement positive ;

ii) Uniformément sur le voisinage $\prod_{i=1}^n \left[x_i - \frac{a}{2}, x_i + \frac{a}{2} \right]$ on ait :

$$\mathbb{P}^n(\xi, d\zeta) \geq \delta \mathbb{1}_{C_x}(\zeta) d\zeta.$$

Bien entendu C, a, δ dépendent aussi de n et du rapport d'homothétie $1 - \varepsilon$.

Démonstration. — Soit $x \in A$. Si $X^0 = x$, nous construisons une suite d'intervalles I_1, I_2, \dots, I_n telle que

$$(\forall \omega^j \in I_j) \quad i(X^{j-1}, \omega^j) = j \text{ si } n \equiv 0 \text{ ou } 1 \text{ modulo } 3.$$

$$(\forall \omega^j \in I_j) \quad i(X^{j-1}, \omega^j) = j + 1 \text{ et } i(X^{n-1}, \omega^n) = 1 \text{ si } n \equiv 2 \text{ modulo } 3.$$

1) Supposons une telle suite d'intervalles construite. On a $X^n = H(\dots H(H(x, \omega^1), \omega^2) \dots, \omega^n)$ (notations du § 1).

a) Si $n \equiv 0$ ou 1 modulo 3, en notation matricielle :

$$X^n = \text{diag} \begin{bmatrix} (1 - \varepsilon)^2 \\ (1 - \varepsilon)^3 \\ \vdots \\ (1 - \varepsilon)^3 \\ (1 - \varepsilon)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + D_n \begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \\ \omega^n \end{bmatrix} = C_n x + D_n \omega$$

Si donc $V_x \subset J_1 \times \dots \times J_n$ où les J_k sont des intervalles centrés sur x_k inclus strictement dans I_k , l'ensemble

$$C_x = \bigcap_{X^0 \in V_x} [\mathcal{D}_n(I_1 \times I_2 \dots \times I_n) + \mathcal{C}_n X^0]$$

est de mesure de Lebesgue non nulle et on a :

$$(\forall X^0 \in V_x) \quad \mathbb{P}^n(X^0, d\zeta) \geq \frac{1}{|\det D_n|} \mathbb{1}_{C_x}(\zeta) d\zeta.$$

2) Il reste donc à prouver l'existence des I_j . Il est facile de montrer que la restriction de la fonction H à l'ensemble $(A \times [0, 1]) \cap E$ (resp. $(A' \times [0, 1]) \cap E$) est continue.

On en déduit le lemme suivant (la norme choisie est $\|x\| = \sup_i |x_i|$).

LEMME 3.1. — Soit z_1, \dots, z_l , appartenant à $[0, 1]$. Soit $x \in A$. On pose $x^0 = x, x^j = H(x^{j-1}, z_j)$ pour $j = 1, \dots, l$. Pour tout $\gamma > 0$, il existe $\beta > 0$, tel que $\|X^0 - x^0\| < \beta$ et $\omega^k \in]z_k - \beta, z_k + \beta[$ pour $k = 1, \dots, l$, implique $\|X^k - x^k\| < \gamma$ pour $k = 1, \dots, l$ et on a donc

$$\|X^0 - x^0\| < \beta \Rightarrow \mathbb{P}_{X^0}(\|X^k - x^k\| < \gamma, k = 1, \dots, l) \geq (2\beta)^l.$$

Preuve. — Soit $\gamma > 0$. La continuité de H sur $(A \times [0, 1]) \cap E$ entraîne que l'on peut choisir $\beta > 0$ tel que $\|X^0 - x^0\| < \beta$ et $|\omega^1 - z| < \beta \Rightarrow \|X^1 - x^1\| < \gamma$, c'est-à-dire que

$$\|X^0 - x^0\| < \beta \Rightarrow \mathbb{P}_{X^0}(\|X^1 - x^1\| < \gamma) > 2\beta.$$

Par récurrence, en appliquant l fois la propriété de Markov, on obtient le résultat. \square

Ce lemme étant démontré, on construit les intervalles I_1, \dots, I_m en se bornant au cas $n \not\equiv 2$ modulo 3, la démonstration étant similaire pour $n \equiv 2$ modulo 3.

On sait que $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$.

On définit par récurrence

$$x^0 = x, \quad x^j = H(x^{j-1}, x_j^{j-1}) \quad \text{et} \quad z_j = x_j^{j-1},$$

pour $j = 1, \dots, n$, de manière à ce que $i(x^{j-1}, z_j) = j$.

Alors d'après le lemme 3.1, on sait que pour tout $\gamma > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que

$$\|X^0 - x^0\| < \gamma \Rightarrow \mathbb{P}_{X^0}(\|X^j - x^j\| < \gamma, j = 1, \dots, n) \geq (2\beta)^n.$$

et $T_k(x) \leq T$ pour $k = 1, \dots, n - 1$.

Par conséquent : $\mathbb{P}_x(\tau_{E_1} \leq (n-1)T) \geq \gamma^{(n-1)T}$ d'où $T_0(n, \varepsilon, a) = (n-1)T$. \square

LEMME 3.3 (Lemme d'attente). — Soit $x \in A$. Supposons $X_1^0 \in [x_1, x_1 + a[$, $a > 0$ et $t_0 \in \mathbb{N}^*$. Il existe alors β et γ , $\beta > \gamma > 0$ tels que $(\forall t \leq t_0)$, $\omega^t \in [x_1 - \beta, x_1 - \gamma]$.

On a

- i) $i(X^t, \omega^{t+1}) = 1, \quad \forall t \leq t_0$
- ii) $X_1^t \in [x_1 - a, x_1 + a], \quad \forall t \leq t_0$.

Preuve. — On a $X_1^{t+1} = (1 - \varepsilon)X_1^t + \varepsilon\omega^{t+1} \geq (1 - \varepsilon)X_1^t + \varepsilon(x_1 - \beta)$, par conséquent $X_1^{t+1} - (x_1 - \gamma) \geq (1 - \varepsilon)(X_1^t - (x_1 - \gamma)) - \varepsilon(\beta - \gamma)$, en posant $u_t = X_1^t - (x_1 - \gamma)$ on obtient

$$u_t \geq (1 - \varepsilon)^t [u_0 + \beta - \gamma] - (\beta - \gamma) \quad \text{et} \quad u_0 \geq \gamma.$$

Il suffit donc que $\frac{\beta}{\gamma} \geq 1 + (1 - \varepsilon)^{t_0}$ pour que $u_{t_0} \geq 0$ et pour assurer

$X_1^t \geq x_1 - a$. On choisit donc $\beta \leq a$ et $\gamma \leq (1 + (1 - \varepsilon)^{-t_0})\beta$. \square

Ce lemme permet de remplacer l'inégalité du Lemme 3.2 par une égalité puisque l'on peut prendre patience jusqu'au temps $T(n, \varepsilon, a)$ en tirant le point n° 1, mais tout en restant dans un voisinage qu'on s'est fixé à l'avance.

Une fois ces deux lemmes acquis, la démonstration comprend deux étapes.

Démonstration (Théorème 3.2). — 1) La première étape consiste à placer X_1^t et X_2^t, X_3^t et $X_4^t, X_5^t, \dots, X_n^t$ respectivement dans des voisinages de points $y_1, y_4, y_5, \dots, y_n$ ($y_1 < y_4 < \dots < y_n$) fixés, de demi-largeur a , en un temps fixé fini, avec une probabilité minorée. On procède de la manière suivante :

On applique le lemme 3.2 pour attirer tous les points « en 1 ».

On applique ce même lemme (ou son frère jumeau) pour attirer tous les points en y_n , puis on recommence en prenant pour point d'attraction y_{n-1} en évitant cependant d'attirer X_n^t hors du voisinage de y_n . Il suffit de s'arrêter lorsqu'on a fait rentrer X_{n-1}^t dans le voisinage de y_{n-1} et ainsi de suite, en laissant à chaque fois X_i^t au voisinage de y_i , jusqu'à ce que seuls se trouvent au voisinage de y_4 les points $X_1^t, X_2^t, X_3^t, X_4^t$. On recommence encore, mais cette fois en laissant sur place X_3^t, X_4^t , ceci en s'arrêtant dès que X_2^t (entraîné par X_1^t) est entré dans le voisinage de y_1 .

Le temps nécessaire pour effectuer ces opérations peut être rendu indé-

pendant du point initial x , en appliquant à chaque fois le lemme 3.3. Notons-le $T_1(n, \varepsilon, a)$.

Nous avons donc la situation suivante, avec une probabilité minorée indépendamment du point initial x :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & X_1, X_2 & X_3, X_4 & X_5 & & X_n & \\
 | & () & () & () & \text{---} & () & | \\
 0 & y_1 & y_4 & y_5 & & y_n & 1
 \end{array}$$

2) La deuxième étape beaucoup plus courte, consiste à séparer X_1 de X_2 et X_3 de X_4 . Nous commençons par décrire une procédure déterministe : Choisissons z_1 et z_2 tels que :

$$y_1 < z_1 < \frac{(1 - \varepsilon)y_1 + \varepsilon z_1 + y_4}{2} < z_2 < y_4.$$

Si $X_1^0 = X_2^0 = y_1$ et $X_3^0 = X_4^0 = y_4$, alors si $(\omega^1, \omega^2) = (z^1, z^2)$, on a à l'instant 2 (seuls les quatre premiers points bougent) :

$$\begin{aligned}
 X_2^2 - X_1^2 &\geq \varepsilon(z_2 - \varepsilon z_1), \quad \text{idem pour } X_3^2, X_4^2, \\
 X_3^2 - X_2^2 &\geq (1 - \varepsilon)^2(y_4 - y_1)
 \end{aligned}$$

et pour a assez petit, on applique le lemme 3.1, pour trouver un intervalle où tirer ω^1 et ω^2 tout en préservant les positions obtenues à a près.

Ces deux étapes conduisent donc au théorème 3.2 avec :

$$\begin{aligned}
 T(n, \varepsilon, a) &= T_1(n, \varepsilon, a) + 2, \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 x_1^\varepsilon = (1 - \varepsilon)y_1 + \varepsilon z_1 \\
 x_2^\varepsilon = (1 - \varepsilon)^2 y_1 + \varepsilon(1 - \varepsilon)z_1 + \varepsilon z_2 \\
 x_3^\varepsilon = (1 - \varepsilon)^2 y_4 + \varepsilon(1 - \varepsilon)z_1 + \varepsilon z_2 \\
 x_4^\varepsilon = (1 - \varepsilon)y_4 + \varepsilon z_2 \\
 x_j = y_j \quad \text{pour } j \geq 5.
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Le point x^ε appartient à A et la probabilité de rentrer dans un voisinage de x^ε , de demi-largeur a est minorée indépendamment du point initial x . On a alors le

THÉORÈME 3.3. — *La chaîne (X^t) restreinte à A (resp. A') est Doeblin pour la mesure de Lebesgue.*

Preuve. — On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{T(n,\varepsilon,a)+n}(\xi, d\xi) &\geq \int_{\mathbf{V}_x^\varepsilon} \mathbb{P}^{T(n,\varepsilon,a)}(\xi, du) \mathbb{P}^n(u, d\xi) \\ &\geq \gamma(n, \varepsilon, a) \frac{1}{|\det D_n|} 1_{C_x^\varepsilon}(\xi) d\xi. \quad \square \end{aligned}$$

D'où le théorème 1.2.

4. QUELQUES PROPRIÉTÉS COMPLÉMENTAIRES

Notons ${}^\varepsilon m = ({}^\varepsilon m_1, \dots, {}^\varepsilon m_n)$ l'espérance de la loi stationnaire ${}^\varepsilon \pi(\cdot)$.

a) Équations sur les moments de ${}^\varepsilon \pi(\cdot)$.

Soit $x \in A$, $x = (x_1, \dots, x_n)$.

En prenant les espérances pour la loi ${}^\varepsilon \pi$, on a

$$E(X_{i+2} + X_{i+1} - X_{i-1} - X_{i-2})(X_{i+2} + X_{i+1} + X_{i-1} + X_{i-2} - 4X_i) = 0$$

pour $i \neq 1, 2, n-1, n$.

$$E(X_{j+2} + X_{j+1})(X_{j+2} + X_{j+1} - 4X_j) = 0 \quad \text{pour } j = 1, 2$$

$$E(2 - X_{j-1} - X_{j-2})(2 + X_{j-2} + X_{j-1} - 4X_j) = 0 \quad \text{pour } j = n-1, n.$$

Ces équations portent sur les moments d'ordre 2 de la loi ${}^\varepsilon \pi(\cdot)$ et ne permettent pas de déterminer l'espérance ${}^\varepsilon m$.

Remarque. — Si X^0 suit la loi stationnaire ${}^\varepsilon \pi$, on a

$${}^\varepsilon m = EX^1 = E(EX^1/X^0) = \int d{}^\varepsilon \pi(x) \int y d\mathbb{P}_x(y) = \int d{}^\varepsilon \pi(x) h(x).$$

Si $h(x)$ était linéaire en x , $h(x) = Hx$, on obtiendrait l'espérance ${}^\varepsilon m$ par la résolution d'un système linéaire. Ce n'est pas le cas ici.

b) Convergence de l'algorithme lorsque ε dépend du temps.

On impose $X^0 \in A$ et ε dépendant du temps avec les conditions classiques des algorithmes de Robbins-Monro :

$$\varepsilon_t \geq 0; \quad \sum_0^\infty \varepsilon_t = +\infty; \quad \sum_0^\infty \varepsilon_t^2 < +\infty.$$

(Voir par exemple Métivier [5]).

On écrit

$$X^{t+1} = X^t + \varepsilon_t V(X^t, \omega^{t+1})$$

La fonction $H(x)$ s'écrit donc

$$H(x) = C(x)M(x - x^*) = B(x)(x - x^*).$$

D'après le théorème de Gerschgorin (cf. [6]), toutes les valeurs propres de la matrice $B(x)$ ont leur partie réelle strictement négatives puisque

$$\sum_{j=1}^n |b_{ij}(x)| + b_{ii}(x) \leq 0 \text{ quel que soit } i \text{ et que ces valeurs propres sont}$$

différentes de 0 (Kohonen fait cette remarque pour la matrice M dans [3]).

THÉORÈME 4.1. — *Supposons $\varepsilon_t \geq 0$, $\sum_0^\infty \varepsilon_t = +\infty$, $\sum_0^\infty \varepsilon_t^2 < +\infty$. Alors*

si $X^0 \in A$, le processus X^t converge p. s. et dans L^2 vers x^ unique solution de $Mx = a$. (Un résultat analogue s'obtient si $X^0 \in A'$.)*

Démonstration. — Le système différentiel déterministe

$$\frac{dx}{dt} = H(x)$$

admet la solution $x = x^*$ comme solution uniformément exponentiellement stable au sens large, car toutes les valeurs propres de $B(x)$ ont leur partie réelle strictement négative.

On remarque ensuite que les dérivées premières et secondes de $H(x)$ sont bornées sur A et on conclut à la convergence p. s. et dans L^2 du processus $X(t)$ vers x^* , lorsque $t \rightarrow +\infty$ (cf. Nevelson et Khaminski [7], § IV.4.3). \square

CONCLUSION

Bien que l'algorithme étudié soit simple à définir (et à simuler) quelle que soit la dimension, en démontrer la convergence en dimension 1, a nécessité beaucoup de calculs très spécifiques, et longs à expliciter (§ 2 et 3).

Il nous semble qu'il resterait trois points à vérifier :

— que lorsque ε tend vers 0 comme $\frac{1}{\log t}$, le processus réordonne les points (x_1, \dots, x_n) . Les minoration de probabilités et les majorations de temps d'attente du § 2 permettent d'avancer ce résultat ;

- que les mesures stationnaires (sur A et A') sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue ;
- que le point x^* (cf. § 4. *b*) est l'espérance de la mesure stationnaire quel que soit ε .

REMERCIEMENTS

Nous remercions chaleureusement J. Bretagnolle pour l'aide qu'il nous a rapportée.

RÉFÉRENCES

- [1] J. L. DOOB, *Stochastic Processes*, Wiley, 1956.
- [2] T. KOHONEN, Self-organized formation of topologically correct feature maps, *Biol. Cybern.*, t. **43**, 1982, p. 59 à 69.
- [3] T. KOHONEN, Analysis of a simple self-organizing process, *Biol. Cybern.*, t. **44**, 1982, p. 135-140.
- [4] T. KOHONEN, *Self-organization and associative memory*, Springer-Verlag, 1984.
- [5] M. MÉTIVIER, *Semi-martingales*, de Gruyter, 1982.
- [6] A. CODDINGTON et N. LEVINSON, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mc Graw-Hill, 1955.
- [7] M. B. NEVEL'SON et R. Z. HAS'MINSKII, Stochastic approximation and recursive estimation. *A. M. S. Translations*, t. **47**, 1973.
- [8] G. W. STEWART, *Introduction to matrix computations*. Academic Press, 1973.

(Manuscrit reçu le 15 janvier 1985)