

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

Y. LE JAN

## **Équilibre statistique pour les produits de difféomorphismes aléatoires indépendants**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 23, n° 1 (1987), p. 111-120

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1987\\_\\_23\\_1\\_111\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1987__23_1_111_0)

© Gauthier-Villars, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Echanges Annales

## Équilibre statistique pour les produits de difféomorphismes aléatoires indépendants

par

Y. LE JAN

Université Paris 6, Laboratoire de Probabilités,  
4, place Jussieu, Tour 56, 75252 Paris Cedex 05

---

RÉSUMÉ. — Étant donnée une suite de difféomorphismes aléatoires i. i. d., on étudie les propriétés de la mesure aléatoire stationnaire associée en fonction des exposants de Lyapounov du flot.

ABSTRACT. — Given a sequence of i. i. d. random diffeomorphisms we study properties of the associated stationary random measure related to the Lyapounov exponents of the system.

Liste de mots-clés : Flots stochastiques, Exposants de Lyapounov, Mesures aléatoires.

Classification AMS : 60 G 57, 60 J 30.

---

1) Soit  $V$  une variété riemannienne compacte de dimension  $d$ ,  $G$  le groupe des difféomorphismes de  $V$  et  $\nu$  une probabilité sur  $G$ .

Notons  $P$  le noyau markovien défini par l'identité  $Pf(x) = \int_G f(Tx)\nu(dT)$ ,  $f$  étant une fonction borélienne positive quelconque.

Soit  $m$  une probabilité  $P$ -invariante sur  $V$ . Nous supposons  $P$  ergodique dans  $L^1(m)$ .

Posons  $\Omega = G^{\mathbb{Z}}$ . Nous notons  $T_i$  les applications coordonnées et  $\tau$  l'opérateur de translation naturel sur  $\Omega$  :  $T_i(\tau\omega) = T_{i+1}(\omega)$ .

$\Omega$  est toujours supposé muni de la probabilité produit  $\mathbb{P} = \nu^{\otimes \mathbb{Z}}$ . Notons  $\Pi(V)$  le convexe des probabilités sur  $V$ .

LEMME 1. — a) Pour presque tout  $\omega \in \Omega$ , les mesures images de  $m$  par  $T_0 \circ T_{-1} \dots \circ T_{-n}(\omega)$  convergent vaguement vers une mesure  $\mu_\omega \in \Pi(V)$ .

b) Les mesures images de  $m$  par  $S_n(\omega) = T_n \circ T_{n-1} \dots \circ T_1(\omega)$  convergent en loi vers  $\mu_\omega$ .

Preuve. — a) Pour tout borélien  $B \subset V$ ,  $M_n^B(\omega) = m(T_n^{-1} \dots T_0^{-1}(B))$  est une martingale positive bornée par 1, qui converge p. s. et dans  $L^1$  vers  $M_\infty^B$ , avec  $E(M_\infty^B) = m(B)$ .

On vérifie que  $M_\infty^B = 0$  P p. s. si  $m(B) = 0$  et que  $\sum M_\infty^{B_i} = M_\infty^{0B_i}$  si  $B_i$  est une suite d'ensembles deux à deux disjoints. D'après [N], V.4.3-4, on obtient l'existence d'une probabilité de transition  $\mu_\omega(dx)$ .

b)  $S_{n+1}$  et  $T_0 \circ T_{-1} \dots \circ T_{-n}$  ont même loi.

On a  $\mu_{\tau^n \omega} = S_n(\omega)\mu_\omega$  (mesure image). Les mesures  $\mu_{\tau^n \omega}$  forment une chaîne de Markov stationnaire sur  $\Pi(V)$ . Nous appelons la loi de  $\mu_\omega$  l'équilibre statistique associé à  $\nu$  (cf. [L1] [L2] [L3] [L4]).

Sur  $V \times \Omega$ , on définit une probabilité  $Q(dx, d\omega) = \mu_\omega(dx)\mathbb{P}(d\omega)$ , et une transformation  $\theta : \theta(x, \omega) = (T_1(\omega)x, \tau\omega)$ .

Puisque  $\mu_{\tau\omega} = T_1(\omega)\mu_\omega$ ,  $\theta$  préserve  $Q$  et elle est ergodique du fait de l'ergodicité de  $P$  dans  $L^1(m)$ .

2) Jusqu'ici, nous n'avons pas utilisé la différentiabilité des transformations. Supposons maintenant :

$$H1. \quad \int_G \nu(dT) \int_V m(dx) \text{Log}^+(\|DT(x)\|) \text{ est fini.}$$

Posons  $B(x, \omega) = [DT_1(\omega)](x)$ . Par simple application du théorème ergodique sous additif et du théorème ergodique, on sait que, si

$B^{(m)} = B \circ \theta^{m-1} \dots \circ B \circ \theta \cdot B$ ,  $\frac{1}{m} \text{Log}(\|B^{(m)}\|)$  et  $\frac{1}{m} \text{Log}(\det B^{(m)})$  convergent

p. s. vers  $\lambda$  et  $\alpha$  avec  $d\lambda \geq \alpha \geq -\infty$  et  $\alpha = \iint \nu(dT)m(dx) \text{Log}(|\det(DT(x))|)$

(les espaces tangents étant munis de la structure euclidienne induite par la métrique).

Notons  $\rho(dx)$  l'élément de volume riemannien sur  $V$ .

N. B. —  $\lambda$  est le plus grand exposant caractéristique et  $\alpha$  la somme des exposants.

PROPOSITION 1. — a) Si  $\alpha < 0$ ,  $\mu_\omega$  est  $\mathbb{P}$  p. s. étrangère à  $\rho$ .

b) Si  $m$  est équivalente à  $\rho$ ,  $\alpha$  est négatif ou nul.  $\alpha$  est nul si et seulement

si  $\nu$  est portée par les difféomorphismes qui préservent  $m$  (ce qui implique que  $\mu_\omega = m$ ).

*Preuve.* — a) Posons  $h(x, \omega) = \frac{d\mu_\omega}{d\rho}(x)$ . L'identité  $\mu_{\tau^n\omega} = S_n(\omega)\mu_\omega$  entraîne, du fait que  $S_n$  est un difféomorphisme, que :

$$h(x, \tau^n\omega)\rho(dx) = S_n(\omega)(h(x, \omega)\rho(dx)) ;$$

c'est-à-dire que pour tout  $f \in C(M)$ ,

$$\begin{aligned} & \int f(S_n x)h(x, \omega)\rho(dx) \\ &= \int f(x)h(x, \tau^n\omega)\rho(dx) = \int f(S_n x)h(S_n x, \tau^n\omega) |\det (DB^{(n)}(x, \omega))| \rho(dx) \end{aligned}$$

P. p. s. (par changement de variable).

$$\text{Donc } h(x, \omega) = h(\theta^n(x, \omega)) |\det (DB^{(n)}(x, \omega))| \rho \otimes \mathbb{P} \text{ p. s.}$$

Supposons  $E\left(\int h(x, \omega)\rho(dx)\right) = k > 0$ . Posons  $\tilde{Q} = \frac{1}{k}h(x, \omega)\rho(dx)\mathbb{P}(d\omega)$ .

L'identité ci-dessus est aussi valable  $\tilde{Q}$  p. s. Vu que

$$h(x, \tau\omega)\rho(dx) = T(\omega)(h(x, \omega)\rho(dx)) ,$$

$\theta$  préserve  $\tilde{Q}$ ,  $h$  et  $h \circ \theta^n$  ont même loi sous  $\tilde{Q}$ . Par ailleurs

$$\det |(DB^{(n)}(x, \omega))| \rightarrow 0$$

Q. p. s. et donc  $\tilde{Q}$  p. s. On en déduit que  $h = 0$   $\tilde{Q}$  p. s. d'où une contradiction.

b) Posons  $f(x) = \frac{dm}{d\rho}(x)$  et  $F(x, \omega) = |\det (B(x, \omega))|$ .

$$\text{On a } \alpha = \int \text{Log}(F)dQ .$$

Par ailleurs, vu que  $\int f(T(x)) |\det (DT(x))| \rho(dx) = 1$  pour tout difféomorphisme  $T$ ,

$$\text{on a } \int F(x, \omega)(f(T_1(\omega)x)/f(x))m(dx) = 1$$

et donc, du fait que  $T_1(\omega)$  et  $\mu_\omega$  sont indépendantes,

$$\int F(x, \omega)(f(T_1(\omega)x)/f(x))Q(dx, d\omega) = 1 ,$$

ou 
$$\int F \cdot (\tilde{f} \circ \theta / \tilde{f}) dQ = 1 \quad \text{avec} \quad \tilde{f}(x, \omega) \equiv f(x).$$

Par l'hypothèse H1,  $\text{Log}^+ F$  est  $Q$ -intégrable. Par ailleurs si

$$\int |\text{Log} \tilde{f}| dQ = \int_{\mathcal{V}} f(x) |\text{Log} f(x)| \rho(dx)$$

est fini, l'inégalité de Jensen s'écrit

$$0 = \text{Log} \left( \int [F \cdot (\tilde{f} \circ \theta) / \tilde{f}] dQ \right) \geq \int \text{Log}(F) dQ = \alpha$$

(du fait que  $\theta$  préserve  $Q$ ,  $\int \text{Log}(\tilde{f} \circ \theta) / \tilde{f} dQ = 0$ ).

On a égalité si et seulement si  $F \cdot (\tilde{f} \circ \theta) / \tilde{f} = 1$   $Q$  p. s. c'est-à-dire que  $|\det(DT(x))| \cdot f(Tx) / f(x) = 1$   $m \otimes \nu$  p. s. On en déduit que pour tout  $g \in C(\mathcal{V})$ ,

$$\int g(x) m(dx) = \int g(Tx) f(Tx) |\det(DT(x))| \rho(dx) = \int g(T(x)) m(dx) \quad \nu \text{ p. s.}$$

et donc,  $Tm = m$   $\nu$  p. s.

Dans le cas où  $\int |\text{Log}(f(x))| f(x) \rho(dx)$  n'est pas fini, un argument supplémentaire est nécessaire.

LEMME 2. — Soit  $\theta$  une transformation ergodique sur  $(X, \mathcal{F}, Q)$ . Soient  $F > 0$  et  $h > 0$  tels que

$$\int (F \cdot h \circ \theta / h) dQ = 1 \quad \text{et} \quad \int \text{Log}^+(F) dQ < \infty.$$

On a  $\int \text{Log}(F) \cdot dQ \leq 0$  avec égalité si et seulement si  $G = F \cdot h \circ \theta / h = 1$   $Q$  p. s.

*Preuve.* — Pour tout  $x \in X$ , notons  $\mu_n^x(dy)$  la mesure  $\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \delta_{\theta^m x}(dy)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int G d\mu_n^x = 1$   $Q$  p. s. d'après le théorème ergodique.

Donc  $0 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int \text{Log}(G) d\mu_n^x$ .

Or  $\text{Log}(G) = \text{Log}(F) + \text{Log}(h \circ \theta) - \text{Log} h$ , et donc

$$\int \text{Log}(G) d\mu_n^x = \int \text{Log}(F) d\mu_n^x + \frac{1}{n} [\text{Log}(h \circ \theta^{n+1}(x)) - \text{Log}(h(x))].$$

Définissons une sous-suite infinie  $n_k(x)$  en posant par exemple  $n_0 = 0$  ;  
 $n_{k+1} = \inf(m > n_k, h(\theta^{m+1}x) < \sqrt{m})$ .

L'inégalité procède alors du fait que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int \text{Log}(F) d\mu_{n_k}^x = \int \text{Log}(F) dQ$

Q p. s. Pour le cas d'égalité, raisonnons par l'absurde :

Si  $Q(\{G \neq 1\}) > 0$ , il existe  $a < 0$ ,  $\int \text{Log}(G) dQ < a$  et donc Q p. s.

il existe  $N(x)$ ,  $\int \text{Log}(G) d\mu_n^x < a/2$  pour tout  $n > N(x)$ . Il suffit de choisir  $n$  assez grand dans la suite  $n_k(x)$  pour pouvoir conclure.

b) a été établi dans [B2], sous l'hypothèse que  $f$  est de classe  $C^2$  et dans le cas d'un flot stochastique.

3) Nous introduisons maintenant une hypothèse supplémentaire.

Notons  $2I$  le rayon d'injectivité de  $V$  et posons :

$$\delta_1(T) = \sup(d(T_x, T_y) / \|\exp_x^{-1} y\|), (x, y) \in V^2, 0 < d(x, y) \leq I)$$

$$\text{et } \delta_2(T) = \sup(\|\exp_{T_x}^{-1}(T(y)) - DT(x) \exp_x^{-1}(y)\| / \|\exp_x^{-1}(y)\|,$$

$$(x, y) \in V^2, 0 < d(x, y) \leq I, d(T(x), T(y)) \leq I).$$

On suppose vérifiée :

$$H2 \quad \int \log^+ (\delta_1(T) + \delta_2(T)) \nu(dT) < \infty.$$

L'hypothèse H2, et *a fortiori* l'hypothèse H1, est assez peu restrictive. Elle est en particulier vérifiée lorsque dans un système de cartes, la norme uniforme des dérivées premières et secondes est  $\nu$ -intégrable. C'est le cas lorsque  $\nu$  est à support fini ou lorsqu'elle est induite par un flot brownien (cf. [L. W] [H] [B1] [K] [B] [E]) considéré au temps 1. Le principe de la preuve consiste alors à utiliser les inégalités de Sobolev.

LEMME 3. — Si  $\lambda < 0$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tel que, pour  $(x, \omega)$  en dehors d'un ensemble  $E$  de  $Q$ -mesure inférieure à  $\varepsilon$ ,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \text{Log}(d(S_n x, S_n y)) \leq \lambda + \varepsilon$ , dès que  $d(x, y) < \delta$ .

Ce résultat est un cas particulier du théorème des variétés stables de Pesin. (Cf. [R] [C]).

Ces résultats étant d'un abord assez difficile, donnons une preuve simple de ce lemme. (Elle emprunte son principe à Pesin).

D'après l'hypothèse H2 et le théorème de Birkhoff,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log}^+ (\delta_1(T_n) + \delta_2(T_n)) = 0.$$

Fixons  $\varepsilon$ ,  $\lambda 10^{-9} > \varepsilon > 0$ . Il existe  $A^\varepsilon(\omega)$ ,  $\infty > A^\varepsilon > 0$ , tel que  $\delta_1(T_n) + \delta_2(T_n) \leq A^\varepsilon e^{n\varepsilon}$  P-p. s. On a vu que  $\text{Log}(\|DS_n\|)/n$  converge vers  $\lambda$  Q-p. s. d'après le théorème ergodique sous additif.

Un corollaire de ce théorème (cf. [R2] p. 288) montre que si l'on pose :

$$C^\varepsilon(x, \omega) = \sup_{n \geq 0} \text{Log}(\|DS_n\|) - n\lambda - n\varepsilon,$$

il existe  $B^\varepsilon(x, \omega)$ ,  $\infty > B^\varepsilon > 0$ , tel que pour tout entier  $k$ ,  $C^\varepsilon \circ \theta^k \leq B^\varepsilon + k\varepsilon$ .

Pour tout  $u \in T_x V$ , posons  $\delta_{x,\omega}(u) = \sup_{n \geq 0} (\|DS_n(u)\| e^{-n(\lambda + \varepsilon)})$ . On a

$$\|u\| \leq \delta_{x,\omega} \leq e^{C^\varepsilon(x,\omega)} \|u\| \quad \text{et} \quad \delta_{\theta(x,\omega)}(DT(u)) \leq e^{\lambda + \varepsilon} \delta_{x,\omega}(u).$$

Posons  $x_n = S_n(x)$ ,  $y_n = S_n(y)$ ,  $\delta_n = \delta_{(x_n, \tau^n \omega)}$ ,  $V_n = \exp_{x_n}^{-1}(y_n)$  lorsque  $d(x_n, y_n) \leq I$ .

Il suffit, pour établir le lemme, de montrer l'existence de  $r(x, \omega) > 0$  et d'un entier  $N(x, \omega)$  tels que, pour  $d(x, y) \leq r$  et  $n \geq N$ , on ait  $d(x_n, y_n) \leq I$  et  $\delta_n(V_n) \leq e^{n(\lambda + 2\varepsilon)}$ . Si ces propriétés sont satisfaites, on a :

$$d(x_{n+1}, y_{n+1}) \leq \delta_1(T_{n+1}) \|V_n\| \leq A^\varepsilon e^{(n+1)\varepsilon} e^{n(\lambda + 2\varepsilon)}$$

et l'on peut choisir  $N(x, \omega)$  assez grand pour que cette quantité soit toujours inférieure à  $I$  ;

$$\begin{aligned} \delta_{n+1}(V_{n+1}) &\leq \delta_{n+1}(DT_{n+1}(V_n)) + \delta_{n+1}(V_{n+1} - DT_{n+1}(V_n)) \\ &\leq e^{\lambda + \varepsilon} \delta_n(V_n) + e^{C^\varepsilon \circ \theta^{n+1}} \|V_{n+1} - DT_{n+1}(V_n)\| \\ &\leq e^{\lambda + \varepsilon} \delta_n(V_n) + e^{B^\varepsilon + (n+1)\varepsilon} \delta_2(T_{n+1})(\delta_n(V_n))^2 \\ &\leq e^{n(\lambda + 2\varepsilon)} (e^{\lambda + \varepsilon} + A^\varepsilon e^{B^\varepsilon + 2(n+1)\varepsilon} e^{n(\lambda + 2\varepsilon)}). \end{aligned}$$

On peut choisir  $N(x, \omega)$  assez grand pour que cette quantité soit toujours inférieure à  $e^{(n+1)(\lambda + 2\varepsilon)}$ , ensuite  $r(x, \omega)$  de manière à avoir  $\delta_N(V_N) \leq e^{N(\lambda + 2\varepsilon)}$ .

La propriété est alors établie par récurrence.

Lorsque  $\int \text{Log}^+(\|DT^{-1}\|) \nu(dT) < \infty$ , on peut indiquer une autre démonstration, fondée sur le théorème d'Oseledetz (cf. [L]). Soit  $\lambda_k$  la suite des exposants caractéristiques du système, rangés par ordre décrois-

sant. Par hypothèse  $\lambda_d > -\infty$ . Soit  $E_k(x, \omega)$  la filtration correspondante de  $T_x V$ .

$$\begin{aligned} \text{Posons } \tilde{D}T(x, \omega) &= DT \left( I + \sum_{k \geq 2} (e^{-\lambda_k + \lambda_1} - e^{-\lambda_{k-1} + \lambda_1}) P_{E_k(x, \omega)} \right) \\ &= \left( I + \sum_{k \geq 2} (e^{-\lambda_k + \lambda_1} - e^{\lambda_1 - \lambda_{k-1}}) P_{E_k(Tx, \tau\omega)} \right) DT. \end{aligned}$$

D'après le théorème d'Oseledetz,  $\exists D^\varepsilon(\omega, x) > 0$  tel que :

$$\| \tilde{D}S_n \| \leq D^\varepsilon e^{(\lambda + \varepsilon)n} \quad \text{et} \quad \| \tilde{D}S_n^{-1} \| \leq D^\varepsilon e^{(-\lambda + \varepsilon)n}.$$

On pose  $\tilde{D}S_n^{-1}(V_n) = U_n$ . Il suffit de montrer l'existence de  $r(x, \omega)$  et  $N(x, \omega)$  tels que pour  $n \geq N$  et  $d(x, y) \leq r$ ,  $d(x_n, y_n) \leq I$  et  $\|U_n\| \leq e^{n\varepsilon}$ , (ce qui implique  $\|V_n\| \leq D_\varepsilon e^{(\lambda + 2\varepsilon)n}$ ). On peut choisir  $N$  de manière à avoir  $d(x_{n+1}, y_{n+1}) \leq \delta_1(T_{n+1}) \|V_n\| \leq I$ . De plus

$$\|U_{n+1}\| \leq \| \tilde{D}S_{n+1}^{-1} DT_{n+1}(V_n) \| + \| \tilde{D}S_{n+1}^{-1} \| \| DT_{n+1}(V_n) - V_{n+1} \|.$$

Le premier terme égale  $\| \tilde{D}T^{-1} \circ DT(U_n) \| \leq \|U_n\| \leq e^{n\varepsilon}$ , et le deuxième est majoré par

$$\delta^2(T_{n+1}) \|V_n\|^2 \| \tilde{D}S_{n+1}^{-1} \| \leq A^\varepsilon e^{(n+1)\varepsilon} (D^\varepsilon e^{(\lambda + \varepsilon)n})^2 D^\varepsilon e^{(-\lambda + \varepsilon)n} \leq e^{(n+1)\varepsilon} - e^{n\varepsilon}$$

pour  $N$  assez grand, ce qui permet de conclure.

**PROPOSITION 2.** — Si  $\lambda < 0$ ,  $\mu_\omega$  est p. s. constituée d'un nombre fini de mesures ponctuelles de même masse.

a) Si  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $[ab] \subset \mathbb{R}^+$ ,  $D(n, a, b) = \{ \omega, \mu_\omega \text{ possède } n \text{ atomes de masse comprise dans l'intervalle } [ab] \}$  est un ensemble mesurable  $\tau$ -invariant, puisque  $\mu_{\tau\omega} = T_1(\omega)\mu_\omega$ .  $\mathbb{P}(D(n, a, b))$  est donc 0 ou 1.

Les masses des atomes de  $\mu_\omega$  sont donc constantes ainsi que le nombre d'atomes de même masse.

Soit  $m$  une de ces masses. Posons  $F_m = \{ (x, \omega), \mu_\omega(x) = m \}$ . Du fait que  $\mu_{\tau\omega} = T_1(\omega)\mu_\omega$ , on vérifie que  $F_m$  est un ensemble  $\theta$ -invariant. On a donc  $Q(F_m) = 1$  et tous les atomes de  $\mu_\omega$  ont donc même masse, la somme de ces masses étant nécessairement égale à 1 (cf. [P] § IV.2).

b) Montrons maintenant que  $\mu_\omega$  ne peut être diffuse.

Soit  $\psi$  une fonction positive et mesurable, définie sur  $V^2 - \Delta$ , telle que  $\psi(x, y) \rightarrow +\infty$  si  $d(x, y) \downarrow 0$  et telle que :

$$E \left( \iint_{V^2 - \Delta} \psi(x, y) \mu_\omega(dx) \mu_\omega(dy) \right) < \infty.$$

Pour tout  $n$ , cette expression égale :

$$\begin{aligned} E \left( \int_{V^2 - \Delta} \psi(x, y) \mu_{\tau^n \omega}(dx) \mu_{\tau^n \omega}(dy) \right) \\ = E \left( \int_{V^2 - \Delta} \psi(S_n(\omega)x, S_n(\omega)y) \mu_\omega(dx) \mu_\omega(dy) \right) \\ \geq E \left( \int_{V^2 - \Delta} \psi(S_n x, S_n y) 1_{\{d(x, y) < \delta\}} 1_{E^c(x, \omega)} \mu_\omega(dx) \mu_\omega(dy) \right) \end{aligned}$$

où  $E$  a été défini dans le lemme précédent (nous fixons  $0 < \varepsilon < 1$ ). Mais  $\psi(S_n x, S_n y) \rightarrow +\infty$  lorsque  $(x, \omega) \in E^c$  et  $d(x, y) < \delta$ .

Il reste donc à montrer que si  $\mu_\omega$  est diffuse,

$$E \left( \int_{V^2 - \Delta} 1_{E^c(x, \omega)} 1_{\{d(x, y) < \delta\}} \mu_\omega(dx) \mu_\omega(dy) \right) > 0.$$

$$\text{Or} \quad E \left( \int 1_{E^c(x, \omega)} \mu_\omega(dx) \right) = Q(E^c) > 1 - \varepsilon.$$

Mais si  $\mu_\omega$  est diffuse,  $\int_{0 < d(x, y) < \delta} \mu_\omega(dy) > 0$   $\mu_\omega$  p. s., ce qui permet de conclure.

*Exemple.* — Si  $T$  est un difféomorphisme de  $S_1$ , notons  $T_\theta$  la transformation conjuguée  $R_\theta T R_{-\theta}$ .

Prenons  $V = S_1$  et  $\nu = \int_{S_1} d\theta \delta_{T_\theta}$ .  $m$  est alors la mesure de Lebesgue

sur  $S_1$ , et on a  $\lambda = \alpha = \int_{S_1} \text{Log}(|T'(\theta)|) d\theta \leq 0$ .

$\lambda = 0$  si et seulement si  $T$  est une rotation. Dans le cas contraire, la proposition 2 s'applique.

Lorsque  $T$  commute avec une rotation d'angle  $\frac{2\pi}{n}$ ,  $\mu_\alpha$  est constitué de  $n$  points. Un cas plus général est traité dans [Ka].

4) Appendice.

Supposons toujours H2 vérifiée et  $\lambda < 0$ . La proposition 2 s'applique. Notons  $\Sigma_\omega$  le support de  $\mu_\omega$  et posons  $n = \text{Card}(\Sigma_\omega)$ . Il existe  $n$  applications mesurables  $\sigma_i : \Omega \rightarrow V$  telles que :

$\Sigma_\omega = \{ \sigma_i(\omega), i = 1, \dots, n \}$ . On introduit une bijection mesurable entre  $V$  et  $[0, 1]$  et on prend  $\sigma_0(\omega) = \inf(x, \mu_\omega([0, x]) \neq 0)$ , etc.

Définissons le  $i$ ème domaine d'attraction  $V_i(\omega)$  comme

$$\{ y \in V, d(S_n y, S_n \sigma_i(\omega)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \}.$$

$V_i(\omega)$  est un ouvert aléatoire de  $V$ .

Notons  $G_i(\omega)$  la composante connexe contenant  $\sigma_i(\omega)$ , c'est aussi un ouvert aléatoire.

Il est clair que le  $n$ -uplet  $G_i(\tau\omega)$  est une permutation (dépendant de  $\omega$ ) de  $(T_1(\omega)G_i(\omega))$ .

PROPOSITION 3. —  $m(G_i) = \frac{1}{n}$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

*Preuve.* — Posons  $\mu_\omega^{(n)} = [T_0 \circ \dots \circ T_{-n}(\omega)](m)$ .

On sait que  $\mu_\omega^{(n)}$  converge étroitement vers  $\mu_\omega$  pour presque tout  $\omega$ .

En particulier, quel que soit  $i$ ,  $\mu_\omega^{(n)}(G_i(\omega))$  converge vers  $\frac{1}{n} P$  p. s. Ainsi, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $E \subseteq \Omega$ , avec  $P(E) < \varepsilon$ , et il existe un entier  $N$  tels que  $\mu_\omega^{(N)}(G_i(\omega)) > \frac{1}{n} - \varepsilon$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  et  $\omega \notin E$ .

On a donc  $m(T_{-N}^{-1} \circ \dots \circ T_0^{-1}(\omega)(G_i(\omega))) > \frac{1}{n} - \varepsilon$  pour tout  $i$  et  $\omega \notin E$ .

Or la famille d'ouverts  $\{T_{-N}^{-1} \circ \dots \circ T_0^{-1}(\omega)G_i(\omega), i = 1, \dots, n\}$  est identique à la famille  $\{G_j(\tau^{-N}\omega), j = 1, \dots, n\}$ .

On a donc  $m(G_j(\tau^{-N}\omega)) > \frac{1}{n} - \varepsilon$  pour tout  $j$  et  $\omega \notin E$ , c'est-à-dire  $m(G_i(\omega)) > \frac{1}{n} - \varepsilon$  pour tout  $i$  et  $\omega \notin \tau^{-N}(E)$ .  $\varepsilon$  étant arbitraire, la proposition en résulte.

Lorsque  $M = S_1$ , si pour toute rotation  $R_\theta$ ,  $R_\theta T R_{-\theta}$  a même loi que  $T$ ,  $m$  est la mesure de Lebesgue.  $T$  commute v-p. s. avec  $R_{\frac{2\pi}{n}}$  si et seulement si le support de  $\mu_\omega$  est constitué de  $n$  points. (Ceci résulte de l'invariance par rotation et de l'indépendance entre  $\mu_\omega$  et l'ensemble des  $n$  intervalles d'attraction.)

L'auteur tient à remercier F. Ledrappier, J. P. Thouvenot, G. Royer et un référent anonyme pour l'aide qu'ils ont apportée à l'élaboration de ce travail. On pourra pour certains résultats se référer à l'ouvrage tout récent de Kifer [Ki] dont nous avons eu connaissance après l'achèvement de ce travail. Ces résultats ont été annoncés dans une note (CRAS Paris, t. 302, série I, pages 351-354).

## RÉFÉRENCES

- [B1] P. BAXENDALE, Brownian motion in the diffeomorphism group I. *Compositio Math.*, t. **53**, 1984, p. 19-50.
- [B2] P. BAXENDALE, *The Lyapunov spectrum of a stochastic flow of diffeomorphisms*. Preprint.
- [Bi] J. M. BISMUT, Mécanique aléatoire. *Lectures notes n° 866*, Springer, 1981.
- [C] A. P. CARVERHILL, Flows of stochastic dynamical systems: ergodic theory, *Stochastics*, t. **14**, 1985, p. 273-318.
- [E] K. D. ELWORTHY, *Stochastic differential equations on manifolds*. Cambridge University Press, 1982.
- [H] T. H. HARRIS, Brownian motion on the homeomorphisms of the plane, *Ann. Probab.*, t. **9**, 1981, p. 232-254.
- [Ka] T. KAJSER, *On iterations of random mappings of the Institut Mittag Leffler*. Report n° 18, 1984.
- [Ki] Y. KIFER, *Ergodic theory of random transformations. Progress in probability and statistics*. Birkhauser, 1986.
- [K] H. KUNITA, Stochastic flows of diffeomorphisms. École d'Été de Probabilités de St-Flour XII. *Lecture notes*, n° 1097. Springer, 1984.
- [L] F. LEDRAPPIER, École d'Été de St-Flour, 1982. *Lectures notes in mathematics*, n° 1097, Springer.
- [L1] Y. LE JAN, Equilibrium state for turbulent flows of diffusion. Infinite dimensional analysis and stochastic processes. *Pitman notes*, 124, 1985.
- [L2] Y. LE JAN, Équilibre et exposants de Lyapunov de certains flots browniens. *C. R. A. S. Paris*, t. **398**, Série I, 1984, p. 361-364.
- [L3] Y. LE JAN, On isotropic brownian motions. *Z. F. W.*, t. **70**, 1985, p. 609-620.
- [L4] Y. LE JAN, Hausdorff dimension for the statistical equilibrium of stochastics flows *Proceedings of the BIBOS conference*. 1984. *Lecture Notes*, n° 1158, Springer.
- [LW] Y. LE JAN, S. WATANABE, *Stochastic analysis*. Proceedings of the Taniguchi symposium 1982. North Holland, 1984.
- [N] J. NEVEU, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*. Masson, Paris, 1964.
- [P] W. PARRY, *Entropy and generators in ergodic theory*. Benjamin New-York, Amsterdam, 1969.
- [R] D. RUELE, Ergodic theory of differentiable dynamical systems. *Publ. Math. IHES*, t. **50**, 1979, p. 275-305.
- [R2] D. RUELE, Characteristic exponents and invariant manifolds in Hilbert space. *Annals of Maths*, t. **115**, 1982, p. 243-289.

(Manuscrit reçu le 10 décembre 1985)