ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

B. CHAUVIN

Sur la propriété de Branchement

Annales de l'I. H. P., section B, tome 22, nº 2 (1986), p. 233-236
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1986__22_2_233_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 22, n° 2, 1986, p. 233-236. *Probabilités et Statistiques*

Sur la propriété de Branchement

par

B. CHAUVIN

RÉSUMÉ. — Dans tous les articles concernant les processus de branchement, les résultats s'appuient bien évidemment sur la propriété de branchement, et le but de ce qui suit est de montrer que la propriété de branchement énoncée en termes de lignes d'arrêt contient en particulier les propriétés énoncées au début de leurs dernières communications par Jagers et Nerman (cf. [*3*] et [*4*]).

ABSTRACT. — As expected, the branching property is the key of all the results given in papers about branching processes.

Here, our purpose is to prove that the new formulation of the branching property in terms of « stopping lines » includes the properties claimed by P. Jagers and O. Nerman at the beginning of their last communications.

Nous reprenons ici les notations et hypothèses de [*1*] pour un processus de Bellman-Harris. Pour Jagers et Nerman, le caractère markovien et les propriétés d'indépendance du branchement font l'objet de trois lemmes fondamentaux, qu'ils appellent « generation branching lemma », « time branching lemma » et « appearance lemma » ; ce sont ces lemmes que nous nous proposons de démontrer connaissant la Proposition de branchement de [*1*].

A. GÉNÉRATION BRANCHING LEMMA

Ce lemme exprime l'indépendance des individus de la $(n + 1)$-ième génération, connaissant le passé. Plus précisément, si $\mathscr{A}_n$ est la tribu engendrée par les vies des individus de longueur inférieure ou égale à n, le lemme affirme que conditionnellement par rapport à $\mathscr{A}_n$, les arbres translatés T_u, pour u de longueur $n + 1$, sont indépendants et de loi P_0.

Traduisons ceci en termes de ligne d'arrêt : z_{n+1}, ensemble des individus de longueur $n + 1$, est une ligne d'arrêt aléatoire et si l'on pose

$$\mathscr{A}_n = \sum_{L \in \mathscr{L}} \{ z_{n+1} = L \} \cap \tilde{\mathscr{F}}_L + \tilde{\mathscr{F}} \cap \{ z_{n+1} \notin \mathscr{L} \},$$

$\mathscr{A}_n$ est bien la tribu des individus de longueur inférieure ou égale à n. Il s'agit donc de montrer que si f et g sont deux fonctions mesurables positives, pour tout $x \geqslant 0$,

$$E_x^{\mathscr{A}_n}(f \circ T_u g \circ T_{u'}) = E_0(f)E_0(g) \qquad \text{sur} \qquad \{ u, u' \in z_{n+1} \}$$

ce qui se fait de manière analogue à celle employée pour montrer le lemme 2 de [*1*].

En effet, il s'agit de montrer que pour toute variable aléatoire Z $\mathscr{A}_n$-mesurable $\left(\text{donc de la forme } \sum_{L \in \mathscr{L}} Z_L 1_{\{z_{n+1} = L\}} + Z_\infty 1_{\{z_{n+1} \notin \mathscr{L}\}}\right)$:

$$E_x(Zf \circ T_u g \circ T_{u'}) = E_x(ZE_0(f)E_0(g))$$

donc de montrer que pour toute ligne d'arrêt L

$$X := E_x(Z_L 1_{\{z_{n+1} = L\}} f \circ T_u g \circ T_{u'}) = E_x(Z_L 1_{\{z_{n+1} = L\}} E_0(f)E_0(g)) .$$

Mais $\{ z_{n+1} = L \}$ est dans $\tilde{\mathscr{F}}_L$ (car il y a dans $\tilde{\mathscr{F}}_L$ la vie des ancêtres des éléments de L et par conséquent leur longueur) et en conditionnant par rapport à $\tilde{\mathscr{F}}_L$:

$$X = E_x(Z_L 1_{\{z_{n+1} = L\}} E^{\tilde{\mathscr{F}}_L}(f \circ T_u g \circ T_{u'})) .$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la Proposition 1 de [*1*] pour conclure :

$$X = E_x(Z_L 1_{\{z_{n+1} = L\}} E_0(f)E_0(g)) .$$

B. TIME BRANCHING LEMMA

Ce lemme exprime l'indépendance des individus nés juste après l'instant t, connaissant le passé avant t. Plus précisément, si $\mathscr{B}_t$ est la tribu engendrée par les vies de tous les individus nés avant t, alors conditionnellement par rapport à $\mathscr{B}_t$, les translatés T_{uj} pour $S_u \leqslant t < S_{uj}$ et $j = 1 \ldots \nu_u$, sont indépendants et de même loi P_0.

En termes de lignes d'arrêt, appelons z_t^+ les enfants des individus de z_t (population en vie à l'instant t) :

$$z_t^+ = \{ v \in \omega, v = uj, S_u \leqslant t < S_v = S_u + \sigma_u, j = 1, \ldots, \nu_u \}.$$

Pour les mêmes raisons que z_t (cf. [1]), z_t^+ est une ligne d'arrêt aléatoire et nous posons

$$\mathscr{B}_t = \sum_{L \in \mathscr{L}} \{ z_t^+ = L \} \cap \tilde{\mathscr{F}}_L + \tilde{\mathscr{F}} \cap \{ z_t^+ \notin \mathscr{L} \}.$$

Il s'agit bien de la tribu des individus nés avant l'instant t, et il s'agit donc de montrer, de façon tout à fait analogue au lemme 2 de [1] et à ce qui précède pour « generation branching lemma », que pour f et g mesurables positives, pour tout $x \geqslant 0$:

$$E_x^{\mathscr{B}_t}(f \circ T_u g \circ T_{u'}) = E_0(f)E_0(g) \qquad \text{sur} \quad \{ u, u' \in z_t^+ \}.$$

La démonstration est semblable à la précédente, vu que l'événement

$$\{ z_t^+ = L \} = \prod_{\substack{v \in L \\ v = uj}} 1_{\{S_u \leqslant t < S_{uj}\}} \prod_{\substack{v \notin L \\ v = uj}} (1_{\{S_u > t\}} + 1_{\{S_{uj} \leqslant t\}})$$

est dans $\tilde{\mathscr{F}}_L$ (puisque pour $v \in L$, $S_{uj} = S_u + \sigma_u$ pour u père de v, est $\tilde{\mathscr{F}}_L$-mesurable).

C. APPEARANCE LEMMA

Ce lemme exprime enfin le caractère markovien du processus des instants de naissance des individus : c'est-à-dire que si l'on numérote les individus dans l'ordre où ils naissent, et si $\mathscr{C}_n$ est la tribu engendrée par les n premiers individus, le lemme affirme que conditionnellement par rapport à $\mathscr{C}_{n-1}$, T_{u_n}, où u_n est le $n^{\text{ième}}$ individu à naître (u_n est aléatoire), est de loi P_0.

En termes de lignes d'arrêt, $\{ u_n \}$ est une ligne d'arrêt aléatoire triviale, et si nous posons

$$\mathscr{G}_n = \sum_{L \in \mathscr{L}} \{ L = \{ u_n \} \} \cap \tilde{\mathscr{F}}_L,$$

il suffit de montrer que pour toute fonction f mesurable positive

$$E_x^{\mathscr{G}_n}(f \circ T_{u_n}) = E_0(f) \ (*)$$

car en prenant alors l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathscr{C}_{n-1}$ (contenue dans $\mathscr{G}_n$, puisque si un individu est né dans les $(n-1)$ premiers, il est né avant u_n, donc ne fait pas partie des descendants de u_n) on obtiendra

$$E_x^{\mathscr{C}_{n-1}}(f \circ T_{u_n}) = E_0(f)$$

qui est le résultat d'appearance lemma.

Mais (*) est immédiat, en opérant comme au-dessus, sachant que l'événement $\{ L = \{ u_n \} \}$ est dans $\tilde{\mathscr{F}}_L$, puisque $\tilde{\mathscr{F}}_L$ contient les vies de tous les individus sauf les descendants des éléments de L (dont on sait bien qu'ils sont nés après les éléments de L), donc leurs instants de naissance, ce qui permet de les classer.

RÉFÉRENCES

[1] B. CHAUVIN, Arbres et processus de Bellman-Harris. *Ann. Inst. H. Poincaré*, Vol. 22, n° 2, 1986.

[2] T. E. HARRIS. *The theory of branching processes.* Berlin, Springer, 1963.

[3] P. JAGERS and O. NERMAN, The groath and composition of branching populations. *Adv. Appl. Prob.*, t. **16**, 1984.

[4] O. NERMAN, *The groath and composition of supercritical branching populations on general type spaces.* To appear.

[5] J. NEVEU, Arbres et processus de Galton-Watson. *Ann. Inst. H. Poincaré*, Vol. 22, n° 2, 1986.

(Manuscrit reçu le 10 janvier 1985)