ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

B. CHAUVIN

# Arbres et processus de Bellman-Harris

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 22, nº 2 (1986), p. 209-232
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1986__22_2_209_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*
Vol. 22, n° 2, 1986, p. 209-232.
*Probabilités et Statistiques*

# Arbres et processus de Bellman-Harris

par

**B. CHAUVIN**

Université Paris VI, Laboratoire de Probabilités,
4, Place Jussieu, Tour 56, 3e Étage, 75230 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — Ce travail concerne un processus de branchement de Bellman-Harris supercritique et sa distribution des âges, en ayant recours à une approche intuitive mettant en relief la propriété de branchement sous une forme très générale. Ceci est possible en représentant le processus par un arbre et en construisant un espace probabilisé d'arbres adéquat. Ces outils permettent à eux seuls d'obtenir les propriétés de semi-groupe et la convergence $L^2$ du processus.

ABSTRACT. — This work is about a supercritical Bellman-Harris branching process and its age distribution, using an intuitive approach, and setting off the branching property in a very general form. The way to do it is to represent the process by a tree, and to build a convenient probability space of trees. These only methods enable to get the semi-group properties and the $L^2$-convergence of the process.

## 1. INTRODUCTION

L'objet de cet article est l'étude d'un processus de branchement dans lequel chaque individu a une durée de vie de loi G (ne chargeant pas 0) et engendre à sa mort $\nu$ individus (indépendamment) les uns des autres

Classification AMS : 60J80.

et indépendamment de sa durée de vie) avec la loi $q = (p_n, n \in \mathbb{N})$ d'espérance $m$. Nous nous placerons dans le cas supercritique où $m \in ]1, +\infty[$. La description et la construction d'un tel processus se trouvent dans [*6*].

Plus précisément, comme le fait par exemple Asmussen dans [*1*], nous étudierons le processus à valeur mesure, de distribution des âges :

$$\mu_t = \sum_{u \in z_t} \varepsilon_{t - S_u}$$

où $z_t$ désigne l'ensemble des individus $u$ en vie à l'instant $t$ et où $S_u$ désignent leurs instants de naissance respectifs de sorte que $t - S_u$ représentent leurs âges à l'instant $t$. C'est l'objet introduit également par Jagers dans [*7*] pour le processus plus général de type Crump-Mode-Jagers dont la convergence p. s. a été montrée par Nerman dans [*14*] par des méthodes de « lois des grands nombres », et plus récemment étudié avec diverses applications par Jagers et Nerman dans [*8*] et [*15*]. Nous avons voulu ici éviter le plus possible des méthodes analytiques, en ayant recours à une approche intuitive des processus de branchement, basée sur les propriétés d'indépendance de ces processus : la propriété de branchement, d'indépendance des translatés en $u$, pour tout $u$ de $z_t$, sera écrite en toute généralité, et fournira directement les résultats, constituant quasiment le seul outil de démonstration, au lieu de servir à appliquer diverses lois des grands nombres.

Pour cela, au lieu de placer, comme dans les articles ci-dessus, les individus dans

$$U = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n,$$

la technique fondamentale sera ici, comme l'a suggéré Joffe dans [*9*], de représenter le processus de branchement par un *arbre*, d'utiliser un espace probabilisé d'arbres adéquat, de mettre en œuvre des techniques particulières à cet espace.

Ce sera l'objet de la section 2, dans laquelle seront définis les outils nécessaires à l'étude du processus. Nous remontrerons la finitude de la population à l'instant $t$ (sous les hypothèses $G(0^+) = 0, m < \infty$, déjà obtenue dans [*6*]), qui revêt une importance particulière dans le cadre des techniques d'arbres. Ces techniques sont appliquées dans la Section 3, où nous exhiberons le semi-groupe des intensités du processus et établirons le caractère markovien du semi-groupe renormalisé par une fonction propre, et dans la Section 5, où nous montrerons la convergence $L^2$ du processus renormalisé. Les techniques de renouvellement interviendront dans la Section 4, pour établir la convergence du semi-groupe renormalisé.

## 2. LE MODÈLE

Neveu a construit (cf. [*17*]) un espace probabilisé $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{P})$ d'arbres $\overline{\omega}$ marqués par $\mathbb{R}_+^*$ (la marque sera pour nous la durée de vie des individus). Pour tout $u$ de U, nous pouvons définir sur

$$\Omega_u = \{ \omega \in \Omega, u \in \omega \} \qquad (u \in U)$$

les variables aléatoires $\nu_u$ (nombre de fils de $u$), $\sigma_u$ (durée de vie de $u$) et $T_u$ (arbre translaté en $u$, i. e. $T_u(\overline{\omega}) = \{ (v, \sigma_{uv}) \in U \times \mathbb{R}_+^*, uv \in \overline{\omega} \}$). Ces applications sont $\overline{\mathcal{F}}$-mesurables et la probabilité $\overline{P}$ donne au couple $(\nu, \sigma)$ la loi produit $q \otimes G$.

Nous allons maintenant situer ces arbres dans le temps, afin que l'ancêtre soit d'âge $x$ à l'instant 0. Considérons pour cela le sous-ensemble $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{R}_+ \times \overline{\Omega}$ défini par

$$\tilde{\Omega} = \{ (x, \overline{\omega}) \in [0, \alpha[ \times \overline{\Omega}, \sigma_\phi(\overline{\omega}) > x \}$$

$$\text{où } \alpha = \sup \{ x \in \mathbb{R}_+, P(\sigma_\phi > x) \neq 0 \}.$$

L'espace $\tilde{\Omega}$ est muni de la tribu produit $\tilde{\mathcal{F}}$ et des probabilités $P_x$ définies par

$$P_x(A \times B) = \varepsilon_x(A)\overline{P}(B/\sigma_\phi > x) \qquad (A \times B \in \tilde{\mathcal{F}}).$$

Cet espace probabilisé $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, P_.)$ permet alors de définir *l'instant de naissance de u* ($u \in U$) par

$$S_u(x, \overline{\omega}) = S_v(x, \overline{\omega}) + \sigma_v(x, \overline{\omega}), \qquad v \text{ père de } u$$
$$S_\phi(x, \overline{\omega}) = -x$$

de telle sorte que $P_x$-p. s., l'ancêtre est d'âge $x$ à l'instant 0 et que $S_1 = S_\phi + \sigma_\phi$ a pour loi $G_x := \dfrac{G(x+.)}{\int_{]x,\infty[} G(dy)} 1_{\mathbb{R}_+^*}$ pour la probabilité $P_x$. Par suite, la *population en vie à l'instant t* sera

$$z_t(x, \overline{\omega}) = \{ u \in \overline{\omega}, S_u \leqslant t < S_u + \sigma_u \} \qquad ((x, \overline{\omega}) \in \tilde{\Omega}).$$

La variable aléatoire $S_u$ n'est bien entendu définie que sur

$$\tilde{\Omega}_u = \{ (x, \overline{\omega}) \in [0, \alpha[ \times \overline{\Omega}_u, \sigma_\phi(\overline{\omega}) > x \} \qquad (u \in U)$$

ainsi que $\tilde{v}_u$, $\tilde{\sigma}_u$ et $\tilde{T}_u$ définies par

$$\begin{aligned}\tilde{v}_u(x, \overline{\omega}) &= v_u(\overline{\omega})\\ \tilde{\sigma}_u(x, \overline{\omega}) &= \sigma_u(\overline{\omega})\\ \tilde{T}_u(x, \overline{\omega}) &= (0, T_u(\overline{\omega}))\end{aligned}$$

qui seront notées désormais $v_u$, $\sigma_u$ et $T_u$.

Par définition, une *ligne d'arrêt* est un sous-ensemble fini de U, dont aucun individu ne descend d'un autre. Nous lui associons un *opérateur de meurtre* défini d'abord sur $\overline{\Omega}$ par

$$M_L(\overline{\omega}) = \overline{\omega} \cap D_L^c$$

où $D_L = \{ u_i v, u_i \in L, i = 1 \ldots n, v \in U \}$ est l'ensemble des descendants des individus de la ligne d'arrêt L. Alors

$$\begin{aligned} M_L^{-1}(\overline{\Omega}_u) &= \{ \overline{\omega}, u \in M_L(\overline{\omega}) \}\\ &= \{ \overline{\omega}, u \in \overline{\omega}, u \neq u_i v, u_i \in L, i = 1 \ldots n, v \in U \}\\ &= \phi \text{ ou } \overline{\Omega}_u \text{ selon que } u \text{ est ou non dans } D_L, \end{aligned}$$

ce qui montre que $M_L$ est $\overline{\mathscr{F}}$-mesurable. Appelons

$$\overline{\mathscr{F}}_L := M_L^{-1}(\overline{\mathscr{F}})$$

et remarquons que pour $u$ dans L, $\overline{\Omega}_u \in \overline{\mathscr{F}}_L$ (en effet, $\overline{\mathscr{F}}_L$ contient le couple $(v_v, \sigma_v)$ pour $v$ père de $u$, et $\Omega_u = \Omega_v \cap (v_v \geqslant k)$ si $u = vk$).

Nous étendons maintenant sans difficulté cette notion à $\tilde{\Omega}$ en posant

$$\begin{aligned} \tilde{M}_L(x, \overline{\omega}) &:= (x, \overline{M}_L(\overline{\omega})) \qquad ((x, \overline{\omega}) \in \tilde{\Omega})\\ \tilde{\mathscr{F}}_L &:= \tilde{M}_L^{-1}(\tilde{\mathscr{F}}) = \mathscr{B}([0, \alpha[) \otimes \tau(v_u, \sigma_u, u \notin D_L). \end{aligned}$$

Remarquons enfin que si une ligne d'arrêt L' est formée exclusivement de descendants d'une autre ligne d'arrêt L, c'est-à-dire si $D_{L'} \subset D_L$, il est alors clair que

$$\tilde{\mathscr{F}}_L \subset \tilde{\mathscr{F}}_{L'}.$$

Nous allons maintenant énoncer la propriété de branchement de manière analogue à celle de [*10*], et en calquer la démonstration.

PROPOSITION 1. — *Si* $L = \{ u_1, \ldots, u_n \}$ *est une ligne d'arrêt, alors conditionnellement par rapport à* $\tilde{\mathscr{F}}_L$, *sur* $\tilde{\Omega}_L := \bigcap_{i=1}^{n} \tilde{\Omega}_{u_i}$, *pour toute probabilité* $P_x$, *les arbres translatés* $T_{u_i}$, $i = 1 \ldots n$, *sont indépendants et de* *même loi* $P_0$ *; ce qui signifie que quelles que soient les fonctions mesurables positives* $f_i$, $i = 1 \ldots n$ *de* $\tilde{\Omega}$ *dans* $\mathbb{R}$

$$E_x^{\tilde{\mathscr{F}}_L}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i \circ T_{u_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} E_0(f_i) \quad \textit{sur} \quad \tilde{\Omega}_L .$$

*Démonstration.* — La démonstration est analogue à celle de [*17*], et tient ici au fait que les arbres translatés soient disjoints, ce qui vient de la propriété de ligne d'arrêt.

Par définition de $\tilde{\mathscr{F}}_L$, $\overline{\mathscr{F}}_L$ et de la probabilité $P_x$, il suffit de démontrer que

$$E\left(E^{\overline{\mathscr{F}}_L}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(0, T_{u_i})\right)/\sigma_\phi > x\right) = \prod_{i=1}^{n} E_0(f_i) \quad \text{sur} \quad \overline{\Omega}_L := \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\Omega}_{u_i} .$$

Mais sur $\overline{\Omega}_L$ (en reprenant les notations de [*17*]) :

$$\psi \circ T^*_{u_i} = T_{u_i} \circ \psi \qquad (i = 1 \ldots n)$$

et comme $P^*$ est une loi produit, les $T^*_{u_i}$ sont indépendants des couples $(\sigma^*_u, v^*_u)_{u \notin D_L}$ et sont indépendants entre eux pourvu qu'ils soient disjoints. Mais sinon, c'est que $u_i$ et $u_j$ pour $i \neq j$ seraient deux ancêtres d'un même élément de U, donc l'un serait l'ancêtre de l'autre, ce qui contredit la propriété de ligne d'arrêt. De plus, pour tout $u$ de U, $T^*_u$ est de loi $P^*$, car les couples $(v^*_{uv}, \sigma^*_{uv})_{uv \in \omega^*}$ ont même loi que les couples $(v^*_v, \sigma^*_v)_{v \in \omega^*}$. Les arbres $T^*_{u_i}$ sont donc indépendants, de même loi $P^*$ et indépendants des $(v^*_u, \sigma^*_u)_{u \notin D_L}$, ce qui assure

$$E^{\overline{\mathscr{F}}_L}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(0, T_{u_i})\right) = \prod_{i=1}^{n} E(f_i(0, .)) \quad \text{sur} \quad \overline{\Omega}_L$$

et donc

$$\begin{aligned} E\left(E^{\overline{\mathscr{F}}_L}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(0, T_{u_i})\right)/\sigma_\phi > x\right) &= E\left(\prod_{i=1}^{n} E(f_i(0, .))/\sigma_\phi > x\right) && \text{sur } \overline{\Omega}_L \\ &= \prod_{i=1}^{n} E(f_i(0, .)) && \text{sur } \overline{\Omega}_L \\ &= \prod_{i=1}^{n} E_0(f_i) && \text{sur } \overline{\Omega}_L. \quad \square \end{aligned}$$

Nous allons à présent montrer que $z_t$ est fini p. s., ce qui assurera que $z_t$ est une ligne d'arrêt aléatoire ($z_t$ vérifie en effet la propriété de ligne d'arrêt, puisque deux individus en vie à l'instant $t$ ne peuvent descendre l'un de l'autre). Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant :

LEMME 1. — *Pour tout réel $\alpha > \gamma$, où $\gamma$ est le paramètre malthusien, défini comme étant l'unique réel strictement positif tel que*

$$m \int_{]0,\infty[} e^{-\gamma x} d\,\mathrm{G}(x) = 1\,,$$

*nous avons*

$$\mathrm{E}_x\Big(\sum_u e^{-\alpha \mathrm{S}_u}\Big) < \infty\,.$$

*Démonstration.* — Posons

$$a_n(x, \alpha) = \mathrm{E}_x\Big(\sum_{u \in z_n} e^{-\alpha \mathrm{S}_u}\Big) \qquad (x, \alpha \geqslant 0)$$

où $z_n(x, \overline{\omega})$ est l'ensemble des $u$ de $\overline{\omega}$ de longueur $n$. Il s'agit alors d'étudier la convergence de la série de terme général $a_n(x, \alpha)$. Or

$$\begin{aligned} a_{n+1}(x, \alpha) &= \mathrm{E}_x\Big(\sum_{u \in z_{n+1}} e^{-\alpha \mathrm{S}_u}\Big) \\ &= \mathrm{E}_x\Big(e^{-\alpha \mathrm{S}_1} \sum_{j=1}^{\nu_\phi} \sum_{v \in z_n} e^{-\alpha(\mathrm{S}_{jv} - \mathrm{S}_j)}\Big) \\ &= \mathrm{E}_x\Big(e^{-\alpha \mathrm{S}_1} \sum_{j=1}^{\nu_\phi} \Big(\sum_{v \in z_n} e^{-\alpha \mathrm{S}_v}\Big) \circ \mathrm{T}_j\Big). \end{aligned}$$

Appliquons la proposition 1 :

$$\begin{aligned} &= m\mathrm{E}_x(e^{-\alpha \mathrm{S}_1})\mathrm{E}_0\Big(\sum_{v \in z_n} e^{-\alpha \mathrm{S}_v}\Big) \\ &= m \int_{]0,\infty[} e^{-\alpha y} d\,\mathrm{G}_x(y) a_n(0, \alpha)\,. \end{aligned}$$

Nous sommes donc ramenés au cas où $x = 0$, pour lequel

$$a_n(0, \alpha) = m \int_{]0,\infty[} e^{-\alpha y} d\,\mathrm{G}(y) a_{n-1}(0, \alpha)$$

et la série de terme général $a_n(x, \alpha)$ sera donc convergente si et seulement si

$$m \int_{]0,\infty[} e^{-\alpha y} d\mathrm{G}(y) < 1$$

soit si $\alpha > \gamma$. $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 2. — *Pour tout $t \geqslant 0$, $z_t$ est fini p. s., de sorte que si $\mathscr{L}$ est l'ensemble (dénombrable) des lignes d'arrêt :*

$$\sum_{\mathrm{L} \in \mathscr{L}} 1_{\{z_t = \mathrm{L}\}} = 1 \qquad p.\ s.$$

*Démonstration.* — Fixons $\alpha > \gamma$ et utilisons le lemme 1

$$e^{-\alpha t}\mathrm{E}_x\left(\sum_u 1_{\{\mathrm{S}_u \leqslant t < \mathrm{S}_u + \sigma_u\}}\right) \leqslant \mathrm{E}_x\left(\sum_u e^{-\alpha \mathrm{S}_u}\right) < \infty . \qquad \square$$

Ceci va nous permettre en utilisant les tribus $\tilde{\mathscr{F}}_\mathrm{L}$ associées aux lignes d'arrêt, de définir une filtration $\mathscr{F}_t$ sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, \mathrm{P}.)$, $\mathscr{F}_t$ contenant toute l'information avant l'instant $t$.

PROPOSITION 3. — *Pour tout $t \geqslant 0$, posons*

$$\mathscr{F}_t = \sum_{\mathrm{L} \in \mathscr{L}} \tilde{\mathscr{F}}_\mathrm{L} \cap \{ z_t = \mathrm{L} \} + \tilde{\mathscr{F}} \cap \{ z_t \notin \mathscr{L} \} .$$

*Nous obtenons ainsi une filtration sur $\tilde{\mathscr{F}}$, pour laquelle les variables $z_t$, $\mathrm{S}_u 1_{\{u \in z_t\}}$ sont $\mathscr{F}_t$-mesurables* (on peut montrer facilement que $\mathscr{F}_t$ est en fait engendrée par les variables $z_s$ pour $0 \leqslant s \leqslant t$). *Par contre, $1_{\{z_t = \mathrm{L}\}}$ n'est pas $\tilde{\mathscr{F}}_\mathrm{L}$-mesurable.*

*Par suite, pour tout $t \geqslant 0$, toute variable aléatoire Z $\mathscr{F}_t$-mesurable s'écrira*

$$\mathrm{Z} = \sum_{\mathrm{L} \in \mathscr{L}} \mathrm{Z}_\mathrm{L} 1_{\{z_t = \mathrm{L}\}} + \mathrm{Z}_\infty 1_{\{z_t \notin \mathscr{L}\}}$$

*où $(\mathrm{Z}_\mathrm{L})_{\mathrm{L} \in \mathscr{L}}$ est une suite de variables aléatoires $\tilde{\mathscr{F}}_\mathrm{L}$-mesurables et $\mathrm{Z}_\infty$ est $\tilde{\mathscr{F}}$-mesurable.*

*Démonstration.* — Comme $z_t$ est $\tilde{\mathscr{F}}$-mesurable, $\mathscr{F}_t$ est bien une sous-tribu de $\tilde{\mathscr{F}}$. Pour $s < t$, tout individu en vie à l'instant $t$, a un ancêtre qui vivait à l'instant $s$, et les éléments de $z_t$ ont donc des descendants des éléments de $z_s$ ; appliquons donc la propriété de monotonie des tribus $\tilde{\mathscr{F}}_{\mathrm{L}}$

$$\begin{aligned}\forall \mathrm{L}, \mathrm{L}' \in \mathscr{L}, \{ z_s = \mathrm{L}' \} \cap \{ z_t = \mathrm{L} \} \cap \tilde{\mathscr{F}}_{\mathrm{L}'} &\subset \{ z_s = \mathrm{L}' \} \cap \{ z_t = \mathrm{L} \} \cap \tilde{\mathscr{F}}_{\mathrm{L}} \\ &\subset \{ z_t = \mathrm{L} \} \cap \tilde{\mathscr{F}}_{\mathrm{L}} .\end{aligned}$$

En faisant la somme sur toutes les lignes d'arrêt L de $\mathscr{L}$, et en appliquant la proposition 2, nous obtenons

$$\forall \mathrm{L}' \in \mathscr{L}, \{ z_s = \mathrm{L}' \} \cap \tilde{\mathscr{F}}_{\mathrm{L}'} \subset \sum_{\mathrm{L} \in \mathscr{L}} \{ z_t = \mathrm{L} \} \cap \tilde{\mathscr{F}}_{\mathrm{L}}$$

$$\sum_{\mathrm{L}' \in \mathscr{L}} \{ z_s = \mathrm{L}' \} \cap \tilde{\mathscr{F}}_{\mathrm{L}'} \subset \sum_{\mathrm{L} \in \mathscr{L}} \{ z_t = \mathrm{L} \} \cap \tilde{\mathscr{F}}_{\mathrm{L}} .$$

Regardons enfin l'événement $\tilde{\mathscr{F}} \cap \{ z_s \notin \mathscr{L} \}$ pour lequel $z_s$ est infini. Ou bien $z_t$ est lui aussi infini et donc $\tilde{\mathscr{F}} \cap \{ z_s \notin \mathscr{L} \} \subset \tilde{\mathscr{F}} \cap \{ z_t \notin \mathscr{L} \}$ ; ou bien $z_t$ est fini et il existe $\mathrm{L} \in \mathscr{L}$ telle que $z_t = \mathrm{L}$, mais alors par définition de $\tilde{\mathscr{F}}_{\mathrm{L}}$, $\{ z_s \notin \mathscr{L} \} \cap \tilde{\mathscr{F}} \subset \{ z_s \notin \mathscr{L} \} \subset \tilde{\mathscr{F}}_{\mathrm{L}}$. Finalement,

$$\begin{aligned}&\sum_{\mathrm{L} \in \mathscr{L}} \{ z_s = \mathrm{L} \} \cap \tilde{\mathscr{F}}_{\mathrm{L}} + \{ z_s \notin \mathscr{L} \} \cap \tilde{\mathscr{F}} \\ &\subset \sum_{\mathrm{L} \in \mathscr{L}} \{ z_t = \mathrm{L} \} \cap \tilde{\mathscr{F}}_{\mathrm{L}} + \{ z_t \notin \mathscr{L} \} \cap \tilde{\mathscr{F}} \qquad \mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t .\end{aligned}$$

La $\mathscr{F}_t$-mesurabilité de $z_t$ s'obtient en écrivant

$$1_{\{u \in z_t\}} = \sum_{\mathrm{L} \in \mathscr{L}} 1_{\{z_t = \mathrm{L}\}} 1_{\{u \in \mathrm{L}\}} + 1_{\{z_t \notin \mathscr{L}\}} 1_{\{u \in z_t\}}$$

et celle de $\mathrm{S}_u 1_{\{u \in z_t\}}$ en remarquant que $\mathrm{S}_u = \mathrm{S}_v + \sigma_v$ pour $v$ père de $u$, et $\mathrm{S}_u$ est donc $\tilde{\mathscr{F}}_{\mathrm{L}}$-mesurable sur $\{ z_t = \mathrm{L} \}$. Par contre,

$$\begin{aligned}1_{\{z_t = \mathrm{L}\}} &= 1_{\{z_t \supset \mathrm{L}\}} 1_{\{z_t \subset \mathrm{L}\}} \\ &= \prod_{u \in \mathrm{L}} 1_{\{\mathrm{S}_u \leqslant t < \mathrm{S}_u + \sigma_u\}} \prod_{u \notin \mathrm{L}} \left( 1_{\{\mathrm{S}_u > t\}} + 1_{\{\mathrm{S}_u + \sigma_u \leqslant t\}} \right) .\end{aligned}$$

Mais si $u$ est dans $D_L^*$ (descendants stricts de L) et si L est dans $z_t$, c'est que $u$ est né après $t$, et donc l'expression précédente se réduit à

$$1_{\{z_t=L\}} = \prod_{u\in L} 1_{\{S_u\leqslant t\}} \prod_{u\in L} 1_{\{t-S_u<\sigma_u\}} \prod_{u\notin D_L} (1_{\{S_u>t\}} + 1_{\{S_u+\sigma_u\leqslant t\}})$$

dans laquelle seul $1_{\{u\in L\}}\sigma_u$ n'est pas $\tilde{\mathscr{F}}_L$-mesurable. □

Afin de pouvoir considérer l'arbre translaté en $u$ (individu de $z_t$) qui commence quand $u$ est d'âge $t - S_u$, ce qui sera l'opérateur $\tau_u$ de translation le plus général, nous devons définir des *translations temporelles* $\theta_t$ de la façon suivante :

$$\theta_t : \{ (x, \overline{\omega}) \in \tilde{\Omega}, x + t \in [0, \alpha[, \sigma_\phi > x + t \} \to \tilde{\Omega}$$
$$(x, \overline{\omega}) \to (x + t, \overline{\omega}).$$

Un simple conditionnement conduit à la formule :

$$E_x(1_{\{\sigma_\phi>t+x\}} f \circ \theta_t) = E_{t+x}(f) P_x(\sigma_\phi > t + x)$$

où $f$ est une fonction mesurable positive quelconque.

L'opérateur de translation voulu est alors défini sur $\{ u \in z_t \}$ par

$$\tau_u = \theta_{t-S_u} \circ T_u$$

et nous pouvons raffiner la propriété de branchement par le lemme suivant

LEMME 2. — *Pour tout $t \geqslant 0$, pour tout $x \geqslant 0$ et pour toute fonction $f$ mesurable positive, sur l'événement $\{ u \in z_t \}$ (qui est $\mathscr{F}_t$-mesurable et sur lequel $\tau_u$ est bien définie),*

$$E_x^{\mathscr{F}_t}(f \circ \tau_u) = E_{t-S_u}(f).$$

*Démonstration.* — Comme $1_{\{u\in z_t\}}$ et $S_u 1_{\{u\in z_t\}}$ sont $\mathscr{F}_t$-mesurables, il suffit de montrer que pour toute variable aléatoire Z $\mathscr{F}_t$-mesurable

$$E_x(Z 1_{\{u\in z_t\}} f \circ \tau_u) = E_x(Z 1_{\{u\in z_t\}} E_{t-S_u}(f))$$

et comme $1_{\{z_t\notin \mathscr{L}\}} = 0$ p. s., il suffit de montrer que pour tout ligne d'arrêt L, pour toute variable aléatoire $Z_L$ $\tilde{\mathscr{F}}_L$-mesurable

$$X := E_x(Z_L 1_{\{u\in L\}} 1_{\{z_t=L\}} f \circ \tau_u) = E_x(Z_L 1_{\{z_t=L\}} 1_{\{u\in L\}} E_{t-S_u}(f))$$

faisons un conditionnement intermédiaire par rapport à $\tilde{\mathscr{F}}_L$ :

$$X = E_x(E_x^{\tilde{\mathscr{F}}_L}(Z_L 1_{\{z_t=L\}} 1_{\{u\in L\}} f \circ \tau_u))$$

séparons les termes $\tilde{\mathscr{F}}_L$-mesurables des autres, en utilisant l'expression détaillée de $1_{\{z_t=L\}}$ plus haut :

$$X = E_x\left(Z_L 1_{\{u\in L\}} \prod_{v\in L} 1_{\{S_v \leqslant t\}} \sum_{v\notin D_L} (1_{\{S_v > t\}} + 1_{\{S_v+\sigma_v \leqslant t\}}) E_x^{\tilde{\mathscr{F}}_L}\left(\prod_{v\in L} 1_{\{t<S_v+\sigma_v\}} f\circ\tau_u\right)\right)$$

explicitons le terme conditionné par rapport à $\tilde{\mathscr{F}}_L$ :

$$E_x^{\tilde{\mathscr{F}}_L}\left(\prod_{v\in L} 1_{\{t<S_v+\sigma_v\}} f\circ\tau_u\right) = E_x^{\tilde{\mathscr{F}}_L}\left(\prod_{\substack{v\in L\\ v\neq u}} 1_{\{t<S_v+\sigma_v\}} 1_{\{t-S_u<\sigma_u\}} f\circ\theta_{t-S_u}\circ T_u\right)$$

remarquons que $1_{\{v\in L\}}S_v$ est $\tilde{\mathscr{F}}_L$-mesurable et que $\sigma_u$ s'écrit encore $\sigma_\phi\circ T_u$. Il suffit d'appliquer la proposition 1 pour obtenir

$$E_x^{\tilde{\mathscr{F}}_L}\left(\prod_{v\in L} 1_{\{t<S_v+\sigma_v\}} f\circ\tau_u\right) = E_x^{\tilde{\mathscr{F}}_L}\left(\prod_{\substack{v\in L\\ v\neq u}} 1_{\{t<S_v+\sigma_v\}}\right)[E_0(1_{\{t-y<\sigma_\phi\}} f\circ\theta_{t-y})]_{y=S_u}$$

$$= E_x^{\tilde{\mathscr{F}}_L}\left(\prod_{\substack{v\in L\\ v\neq u}} 1_{\{t<S_v+\sigma_v\}}\right) E_{t-S_u}(f)\,[E\,(1_{\{t-y<\sigma_\phi\}})]_{y=S_u}$$

soit en utilisant la proposition 1 en sens inverse :

$$= E_x^{\tilde{\mathscr{F}}_L}\left(\prod_{\substack{v\in L\\ v\neq u}} 1_{\{t<S_v+\sigma_v\}} 1_{\{t-S_u<\sigma_u\}}\right) E_{t-S_u}(f)$$

$$= E_x^{\tilde{\mathscr{F}}_L}\left(\prod_{v\in L} 1_{\{t<S_v+\sigma_v\}}\right) E_{t-S_u}(f)$$

et donc

$$X = E_x(Z_L 1_{\{u\in L\}} 1_{\{z_t=L\}} E_{t-S_u}(f)) . \qquad \square$$

## 3. DISTRIBUTION DES AGES

Le processus (à valeur mesure) de distribution des âges est défini sur $\tilde{\Omega}$ par

$$\mu_t = \sum_{u\in z_t} \varepsilon_{t-S_u}$$

et son intensité est donnée par le noyau $\pi_t$ défini par

$$\int_{\mathbb{R}_+} \pi_t(x, dy)h(y) = \mathrm{E}_x(\mu_t(h)) \qquad (x \geqslant 0)$$

pour toute fonction $h$ mesurable positive définie sur $\mathbb{R}_+$.

PROPOSITION 4. — *Les intensités $\pi_t$, $t \geqslant 0$ constituent un semi-groupe sur $\mathbb{R}_+$ associé au processus $(\mu_t, t \in \mathbb{R}_+)$ par la relation*

$$\mathrm{E}_x^{\mathscr{F}_s}(\mu_t(h)) = \mu_s(\pi_{t-s}h) \qquad (0 \leqslant s \leqslant t, x \geqslant 0).$$

*Démonstration.* — Il suffit de montrer cette relation et pour cela de décomposer $\mu_t(h)$, sachant que tout individu en vie à l'instant $t$, descend d'un unique individu qui vivait à l'instant $s$.

$$\mu_t(h) = \sum_{u \in z_t} h(t - \mathrm{S}_u) = \sum_{v \in z_s} \sum_{w \in \mathrm{T}_v} h(t - \mathrm{S}_{vw}) 1_{\{\mathrm{S}_{vw} \leqslant t < \mathrm{S}_{vw} + \sigma_{vw}\}}.$$

Mais pour $v \in z_s$, $\tau_v = \theta_{s-\mathrm{S}_v} \circ \mathrm{T}_v = (s - \mathrm{S}_v, \mathrm{T}_v)$ et donc

$$\mathrm{S}_w \circ \tau_v = -(s - \mathrm{S}_v) + \mathrm{S}_w(0, \mathrm{T}_v) = -(s - \mathrm{S}_v) + \mathrm{S}_{vw} - \mathrm{S}_v = \mathrm{S}_{vw} - s$$

$$\sigma_w \circ \tau_v = \sigma_w \circ \mathrm{T}_v = \sigma_{vw}$$

$$\begin{aligned}\mu_t(h) &= \sum_{v \in z_s} \sum_{w \in \mathrm{T}_v} h(t - s - \mathrm{S}_w \circ \tau_v) 1_{\{\mathrm{S}_w \circ \tau_v \leqslant t - s < (\mathrm{S}_w + \sigma_w) \circ \tau_v\}} \\ &= \sum_{v \in z_s} \mu_{t-s}(h) \circ \tau_v.\end{aligned}$$

Appliquons le lemme 2 :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_x^{\mathscr{F}_s}(\mu_t(h)) &= \sum_{v \in z_s} \mathrm{E}_x^{\mathscr{F}_s}(\mu_{t-s}(h) \circ \tau_v) \\ &= \sum_{v \in z_s} \mathrm{E}_{s-\mathrm{S}_v}(\mu_{t-s}(h)) \\ &= \mu_s(\pi_{t-s}h). \qquad \square\end{aligned}$$

Pour obtenir un semi-groupe de noyau markovien, nous allons exhiber une fonction propre pour le semi-groupe $\pi_t$, cette manipulation étant ici basée sur le lemme suivant, qui fait apparaître clairement la façon dont sont liés paramètre malthusien et processus.

LEMME 3. — *Pour tout $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ et pour toute fonction h mesurable positive, la mesure $\nu_t$ définie à l'aide de la fonction $\phi_\gamma$,*

$$\phi_\gamma(x) = \mathrm{E}_x(e^{-\gamma \mathrm{S}_1}) = \int_{]x,+\infty[} e^{-\gamma(y-x)} d\mathrm{G}(y) \Big/ \int_{]x,\infty[} d\mathrm{G}(y)$$

*par*

$$\nu_t(h) = e^{-\gamma t}\mu_t(\phi_\gamma h)$$

*vérifie*

$$\mathrm{E}_x^{\mathscr{F}_t}\left(\sum_{u \in z_t} e^{-\gamma(\mathrm{S}_u+\sigma_u)} h(t-\mathrm{S}_u)\right) = \nu_t(h)$$

*Démonstration.*

$$\nu_t(h) = e^{-\gamma t}\mu_t(\phi_\gamma h) = e^{-\gamma t} \sum_{u \in z_t} \phi_\gamma(t-\mathrm{S}_u)h(t-\mathrm{S}_u)$$

$$= e^{-\gamma t} \sum_{u \in z_t} \mathrm{E}_{t-\mathrm{S}_u}(e^{-\gamma \mathrm{S}_1})h(t-\mathrm{S}_u)$$

soit en appliquant le lemme 2,

$$= e^{-\gamma t} \sum_{u \in z_t} \mathrm{E}_x^{\mathscr{F}_t}(e^{-\gamma \mathrm{S}_1 \circ \tau_u})h(t-\mathrm{S}_u)$$

comme $\mathrm{S}_u 1_{\{u \in z_t\}}$ est $\mathscr{F}_t$-mesurable, et $\mathrm{S}_1 \circ \tau_u = \mathrm{S}_u + \sigma_u - t$,

$$\nu_t(h) = e^{-\gamma t} \sum_{u \in z_t} \mathrm{E}_x^{\mathscr{F}_t}(e^{-\gamma(\mathrm{S}_u+\sigma_u-t)}h(t-\mathrm{S}_u))$$

$$= \mathrm{E}_x^{\mathscr{F}_t}\left(\sum_{u \in z_t} e^{-\gamma(\mathrm{S}_u+\sigma_u)}h(t-\mathrm{S}_u)\right). \quad \square$$

PROPOSITION 5. — *Le semi-groupe* $\mathrm{P}_t$ *défini par*

$$\mathrm{P}_t h(x)\phi_\gamma(x) = e^{-\gamma t}\pi_t(\phi_\gamma h)(x)$$

*associé au processus renormalisé $\nu_t$ par la relation $\mathrm{E}_x^{\mathscr{F}_s}(\nu_t(h)) = \nu_s(\mathrm{P}_{t-s}h)$ est un semi-groupe de noyau markovien, autrement dit, $\phi_\gamma$ est fonction propre du semi-groupe $\pi_t$ pour la valeur propre $e^{\gamma t}$. Par suite, $\nu_t(1)$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale positive et*

$$\nu_t(1) \xrightarrow[t \to +\infty]{\text{p.s.}} \mathrm{W},$$

Dans le cas particulier où G est la loi de densité exponentielle, $\phi_\gamma$ est alors constante et

$$e^{-\gamma t}Z_t \xrightarrow[t \to +\infty]{\text{p.s.}} mW,$$

*où* $Z_t := \mu_t(1)$ *est le nombre d'individus en vie à l'instant* $t$.

*Démonstration.* — Grâce au lemme précédent, nous sommes ramenés à montrer que

$$\phi_\gamma(x) = e^{-\gamma t}\pi_t(\phi_\gamma, x) = E_x(v_t(1))$$

i. e. $$\phi_\gamma(x) = E_x\Big(\sum_{u \in z_t} e^{-\gamma(S_u + \sigma_u)}\Big) \qquad (t \geqslant 0,\ x \geqslant 0).$$

Posons $$b_n(t, x) = E_x\Big(\sum_{\substack{u \in z_t \\ u \in z_n}} e^{-\gamma(S_u + \sigma_u)}\Big).$$

Alors

$$b_{n+1}(t, x) = E_x\Big(e^{-\gamma S_1} \sum_{j=1}^{\nu_\phi} \sum_{\substack{v \in z_n \\ jv \in z_t}} e^{-\gamma(S_{jv} - S_j + \sigma_{jv})}\Big)$$

$$= E_x\Big(e^{-\gamma S_1} \sum_{j=1}^{\nu_\phi} \Big(\sum_{\substack{v \in z_n \\ v \in z_{t-y}}} e^{-\gamma(S_v + \sigma_v)}\Big) \circ T_j\Big)_{y = S_1}.$$

Appliquons la proposition 1 :

$$= m \int_{]0,t[} e^{-\gamma y} b_n(t - y, 0)\, dG_x(y).$$

Nous sommes donc ramenés au cas où $x = 0$ pour lequel

$$b_{n+1}(t, 0) = m \int_{]0,t[} e^{-\gamma y} b_n(t - y, 0)\, dG(y).$$

Posons

$$dG_\gamma(y) = me^{-\gamma y} dG(y).$$

Alors

$$b_{n+1}(t, 0) = b_n * G_\gamma(]0, t]) = \ldots = b_0 * G_\gamma^{(n+1)*}(]0, t])$$

et comme

$$b_0(t,0) = \mathrm{E}_0(1_{\{S_\phi \leqslant t < S_\phi + \sigma_\phi\}} e^{-(S_\phi + \sigma_\phi)})$$
$$= \int_{]t,\infty[} e^{-\gamma y} d\mathrm{G}(y)$$
$$= \frac{1}{m}(1 - \mathrm{G}_\gamma(]0,t])),$$

$$b_n(t,0) = \frac{1}{m}(\mathrm{G}_\gamma^{n*}(]0,t]) - \mathrm{G}_\gamma^{(n+1)*}(]0,t]))$$

d'où finalement

$$\mathrm{E}_x\Big(\sum_{u \in z_t} e^{-\gamma(S_u + \sigma_u)}\Big) = \sum_{n \geqslant 0} b_n(t,x)$$
$$= b_0(t,x) + m \int_{]0,t]} e^{-\gamma y} \frac{1}{m} \sum_{n \geqslant 1} (\mathrm{G}^{(n-1)*}(t-y,0) - \mathrm{G}^{n*}(t-y,0)) d\mathrm{G}_x(y)$$
$$= \int_{]t,\infty]} e^{-\gamma y} d\mathrm{G}_x(y) + \int_{]0,t]} e^{-\gamma y} d\mathrm{G}_x(y)$$
$$= \phi_\gamma(x). \qquad \square$$

## 4. RENOUVELLEMENT

Comme

$$c_\gamma := \int_{]0,\infty]} y\,d\mathrm{G}_\gamma(y) < \infty$$

cela permet de définir la fonction $\xi$ sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\xi(x) := \frac{\int_{]x,\infty[} d\mathrm{G}_\gamma(y)}{\int_{]0,\infty[} y\,d\mathrm{G}_\gamma(y)} = \frac{m}{c_\gamma} \int_{]x,\infty[} e^{-\gamma y} d\mathrm{G}(y).$$

PROPOSITION 6. — *Supposons* G *non portée par une progression arithmétique. Alors, pour toute fonction h positive continue bornée, pour tout* $x \geqslant 0$,

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{P}_t h(x) = \int_0^\infty h(s)\xi(s)ds.$$

*Démonstration.* — La méthode consiste ici à décomposer $z_t$ en générations et à appliquer le théorème de renouvellement (cf. [5]).

Le lemme 4 permet d'écrire :

$$\mathrm{P}_t h(x) = \frac{\mathrm{E}_x\left(\sum_{u \in z_t} h(t - \mathrm{S}_u) e^{-\gamma(\mathrm{S}_u + \sigma_u)}\right)}{\phi_\gamma(x)}$$

$$\mathrm{A}(t, x) := \mathrm{E}_x\left(\sum_{u \in z_t} h(t - \mathrm{S}_u) e^{-\gamma(\mathrm{S}_u + \sigma_u)}\right)$$

$$= \sum_{n \geqslant 0} \mathrm{E}_x\left(\sum_{u \in z_n} 1_{\{\mathrm{S}_u \leqslant t < \mathrm{S}_u + \sigma_u\}} h(t - \mathrm{S}_u) e^{-\gamma(\mathrm{S}_u + \sigma_u)}\right).$$

Le premier terme, pour $n = 0$, vaut

$$\mathrm{E}_x(1_{\{t < \mathrm{S}_1\}} h(t - \mathrm{S}_\phi) e^{-\gamma \mathrm{S}_1}) = h(t + x) \int_{]t, \infty[} e^{-\gamma y} d\mathrm{G}_x(y)$$

et comme $h$ est bornée, ce terme a pour limite 0 quand $t$ tend vers $+\infty$. Nous nous intéresserons donc à

$$\mathrm{A}'(t, x) := \sum_{n \geqslant 1} \mathrm{E}_x\left(\sum_{u \in z_n} 1_{\{\mathrm{S}_u \leqslant t < \mathrm{S}_u + \sigma_u\}} h(t - \mathrm{S}_u) e^{-\gamma(\mathrm{S}_u + \sigma_u)}\right).$$

Mais comme $\sigma_u$ et $\mathrm{S}_u$ sont indépendants conditionnellement en $\{ u \in z_n \}$,

$$\mathrm{A}'(t, x) = \sum_{n \geqslant 1} \mathrm{E}_x\left(\sum_{u \in z_n} \int_{]t - \mathrm{S}_u, +\infty[} e^{-\gamma y} d\mathrm{G}(y) h(t - \mathrm{S}_u) e^{-\gamma \mathrm{S}_u} 1_{\{\mathrm{S}_u \leqslant t\}}\right)$$

$$= \frac{c_\gamma}{m} \sum_{n \geqslant 1} \mathrm{E}_x\left(\sum_{u \in z_n} 1_{\{\mathrm{S}_u \leqslant t\}} e^{-\gamma \mathrm{S}_u} h(t - \mathrm{S}_u) \xi(t - \mathrm{S}_u)\right).$$

Utilisons ici le lemme de calcul suivant que nous démontrerons plus bas.

LEMME 4. — *Pour toute fonction* F *mesurable positive, pour tout* $n \geqslant 1$.

$$\mathrm{E}_x\left(\sum_{u \in z_n} \mathrm{F}(\mathrm{S}_u)\right) = m^n \int_{]0, \infty[} \mathrm{F}(y) \mathrm{G}_x * \mathrm{G}^{(n-1)*}(dy).$$

Nous obtenons :

$$\mathrm{A}'(t, x) = \frac{c_\gamma}{m} \sum_{n \geqslant 1} m^n \int_{]0, t]} e^{-\gamma y} h(t - y) \xi(t - y) \mathrm{G}_x * \mathrm{G}^{(n-1)*}(dy)$$

Soit en explicitant la première convolution

$$= \sum_{n\geq 1} c_\gamma \int_{]0,t]} e^{-\gamma u} d\mathrm{G}_x(u) \int_{]0,t-u]} h(t-u-v)\xi(t-u-v)e^{-\gamma v} m^{n-1} d\mathrm{G}^{(n-1)*}(v)$$

mais puisque

$$d\mathrm{G}_\gamma(y) = me^{-\gamma y} d\mathrm{G}(y),$$
$$d\mathrm{G}_\gamma^{n*}(y) = m^n e^{-\gamma y} d\mathrm{G}^{n*}(y)$$

et donc

$$\mathrm{A}'(t,x) = \sum_{n\geq 1} c_\gamma \int_{]0,t]} e^{-\gamma u} d\mathrm{G}_x(u) \int_{]0,t-u]} h(t-u-v)\xi(t-u-v) d\mathrm{G}_\gamma^{(n-1)*}(v).$$

Si G n'est pas portée par une progression arithmétique, $\mathrm{G}_\gamma$ non plus. D'autre part, $\xi$ est décroissante, intégrable ($c_\gamma < \infty$) et $h$ est continue, bornée, donc $h\xi$ est directement Rieman intégrable. Nous pouvons donc appliquer le théorème de renouvellement :

$$\sum_{n\geq 1} \int_{]0,t-u]} h(t-u-v)\xi(t-u-v) d\mathrm{G}_\gamma^{(n-1)*}(v) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{1}{c_\gamma} \int_0^\infty h(s)\xi(s)ds$$

et donc

$$\mathrm{A}'(t,x) \xrightarrow[t\to+\infty]{} c_\gamma \int_{]0,\infty[} e^{-\gamma u} d\mathrm{G}_x(u) \frac{1}{c_\gamma} \int_0^\infty h(s)\xi(s)ds$$
$$= \phi_\gamma(x) \int_0^\infty h(s)\xi(s)ds. \qquad \square$$

*Démonstration du Lemme 4.* — La méthode utilisée est ici encore la récurrence sur la première génération, comme pour la proposition 5 ou le lemme 1.

Au rang $n = 1$ :

$$\mathrm{E}_x\Big(\sum_{u\in z_1} \mathrm{F}(\mathrm{S}_u)\Big) = \mathrm{E}_x(\nu_\phi \mathrm{F}(\mathrm{S}_1)) = m \int_{]0,\infty[} \mathrm{F}(y) d\mathrm{G}_x(y).$$

Supposons le lemme vrai au rang $n - 1$

$$\mathrm{E}_x\Big(\sum_{u\in z_n} \mathrm{F}(\mathrm{S}_u)\Big) = \mathrm{E}_x\Big(\sum_{j=1}^{\nu_\phi} \sum_{v\in z_{n-1}\circ \mathrm{T}_j} \mathrm{F}(\mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_v \circ \mathrm{T}_j)\Big)$$

comme $S_1$ est indépendant de $\nu_\phi$ et de $T_j, j = 1 \dots \nu_\phi$ :

$$= \int_{]0,\infty[} E_x\left(\sum_{j=1}^{\nu_\phi} \sum_{v \in z_{n-1} \circ T_j} F(y + S_v \circ T_j)\right) dG_x(y).$$

Appliquons la proposition 1 :

$$= m \int_{]0,\infty[} E_0\left(\sum_{v \in z_{n-1}} F(y + S_v)\right) dG_x(y).$$

Utilisons l'hypothèse de récurrence :

$$= m \int_{]0,\infty[} m^{n-1} \int_{]0,\infty[} F(y + z) G * G^{(n-2)*}(dz) dG_x(y)$$

$$= m^n \int_{]0,\infty[} F(u) G_x * G^{(n-1)*}(du). \quad \square$$

Sachant que $z_s$ ($s \geqslant 0$) est fini p. s. et que $\nu_s$ (comme $\mu_s$) est à support dans $z_s$, nous pouvons déduire de la proposition 6 le

COROLLAIRE. — *Pour toute fonction h positive continue bornée,*

$$\lim_{t \to +\infty} \nu_s(P_{t-s}h) = \nu_s(1) \int_0^\infty h(s)\xi(s) ds \qquad (s \geqslant 0).$$

## 5. CONVERGENCE $L^2$ DU PROCESSUS RENORMALISÉ $\nu_t$

Nous allons montrer dans une première étape la convergence $L^2$ de $\nu_t(1)$, grâce à la proposition suivante.

PROPOSITION 7. — *Il existe une constante* K *telle que pour tout* $x \geqslant 0$, *pour tout* $t \geqslant 0$

$$E_x(\nu_t(1))^2 \leqslant K\phi_\gamma(x).$$

*Démonstration.* — Cette démonstration est tout à fait analogue à celle de la Proposition 5, et utilise donc la méthode de récurrence sur la première génération et la propriété de branchement. Nous aurons aussi besoin de l'analogue quadratique du lemme 1.

Écrivons d'abord $v_t(1)$ en faisant apparaître la première génération :

$$
\begin{aligned}
v_t(1) &= e^{-\gamma t}\sum_{u\in z_t}\phi_\gamma(t-S_u)\\
&= 1_{\{t<S_1\}}e^{-\gamma t}\phi_\gamma(t-S_\phi)+1_{\{t\geq S_1\}}e^{-\gamma t}\sum_{j=1}^{\nu_\phi}\sum_{jv\in z_t}\phi_\gamma(t-S_1-(S_{jv}-S_j))\\
&= 1_{\{t<S_1\}}e^{-\gamma t}\phi_\gamma(t-S_\phi)+1_{\{t\geq S_1\}}e^{-\gamma S_1}\sum_{j=1}^{\nu_\phi} e^{-\gamma[t-S_1)}\\
&\qquad\qquad \left(\sum_{v\in z_{t-y}}\phi_\gamma(t-y-S_v)\right)\circ T_j\,|_{y=S_1}\\
&= 1_{\{t<S_1\}}e^{-\gamma t}\phi_\gamma(t-S_\phi)+1_{\{t\geq S_1\}}e^{-\gamma S_1}\sum_{j=1}^{\nu_\phi}(v_{t-y}(1)\circ T_j)_{y=S_1}\,.
\end{aligned}
$$

Élevons ceci au carré :

$$
\begin{aligned}
(v_t(1))^2 = 1_{\{t<S_1\}}e^{-2\gamma t}\phi_\gamma^2(t-S_\phi)+1_{\{t\geq S_1\}}e^{-2\gamma S_1}\Bigg[&\sum_{j=1}^{\nu_\phi}(v_{t-y}(1)\circ T_j)^2_{y=S_1}\\
&+\sum_{j\neq k=1}^{\nu_\phi}(v_{t-y}(1)\circ T_j)_{y=S_1}(v_{t-y}(1)\circ T_k)_{y=S_1}\Bigg].
\end{aligned}
$$

Prenons l'espérance et appliquons la Proposition 1

$$
\begin{aligned}
E_x(v_t(1))^2 = e^{-2\gamma t}\phi_\gamma^2(t+x)\int_{]t,\infty[}dG_x(y)+m\int_{]0,t]}e^{-2\gamma y}E_0(v_{t-y}(1))^2dG_x(y)\\
+\frac{E\nu^2-m}{m^2}\int_{]0,t]}e^{-2\gamma y}dG_x(y)
\end{aligned}
$$

$\left(\text{puisque } E_0 v_t(1) = \phi_\gamma(0) = \dfrac{1}{m}\right).$

Pour $x = 0$, ceci devient

$$
\begin{aligned}
E_0(v_t(1))^2 = e^{-2\gamma t}\phi_\gamma^2(t)\int_{]t,\infty[}dG(y)+\frac{E\nu^2-m}{m^2}\int_{]0,t]}e^{-2\gamma y}dG(y)\\
+m\int_{]0,t]}E_0(v_{t-y}(1))^2e^{-2\gamma y}dG(y)
\end{aligned}
$$

qui est une équation de renouvellement

$$F(t) = f(t) + \int_{]0,t]} F(t-y)dH(y)$$

où

$$dH(y) = me^{-2\gamma y}dG(y) = e^{-\gamma y}dG_\gamma(y)$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} dH^{n*}(y) = e^{-\gamma y}dU_\gamma(y) \quad \text{en posant} \quad U_\gamma = \sum_n G_\gamma^{n*}$$

et

$$f(t) = e^{-2\gamma t}\phi_\gamma^2(t)\int_{]t,\infty[} dG(y) + \frac{Ev^2 - m}{m^2}\int_{]0,t]} e^{-2\gamma y}dG(y)$$

est majoré par une constante K finie, indépendante de $t$, dès que $Ev^2$ est fini.

L'équation de renouvellement ayant une solution unique dès que F est bornée sur les intervalles bornés, montrons que $E_0(v_t(1))^2$ est fini pour tout $t$ fixé.

Or,

$$\begin{aligned} v_t(1) &= e^{-\gamma t}\sum_{u\in z_t}\phi_\gamma(t - S_u) \\ &\leqslant e^{-\gamma t}\sum_u 1_{\{S_u\leqslant t\}} \\ &\leqslant e^{-\gamma t}\sum_u 1_{\{S_u\leqslant t\}}e^{\alpha(t-S_u)} \quad \text{où} \quad \alpha > \gamma \\ &\leqslant e^{(\alpha-\gamma)t}\sum_u e^{-\alpha S_u} \\ (v_t(1))^2 &\leqslant e^{2(\alpha-\gamma)t}\Big(\sum_u e^{-\alpha S_u}\Big)^2. \end{aligned}$$

Admettons momentanément le lemme suivant

LEMME 5. — *Pour tout réel $\alpha > \gamma$ nous avons :*

$$E_0\Big(\sum_u e^{-\alpha S_u}\Big)^2 < \infty .$$

Nous pouvons alors affirmer

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_0(v_t(1))^2 &= \int_{]0,t]} f(t-y)e^{-\gamma y}d\mathrm{U}_\gamma(y) \\ &\leqslant \mathrm{K}\int_{]0,t]} e^{-\gamma y}d\mathrm{U}_\gamma(y) \leqslant \mathrm{K}. \end{aligned}$$

Reportons cette inégalité dans l'équation donnant $\mathrm{E}_x(v_t(1))^2$ pour $x$ quelconque :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_x(v_t(1))^2 &\leqslant e^{-2\gamma t}\phi_\gamma^2(t+x)\int_{]t,\infty[} d\mathrm{G}_x(y) + \frac{\mathrm{E}v^2-m}{m^2}\int_{]0,t]} e^{-2\gamma y}d\mathrm{G}_x(y) \\ &\qquad + m\mathrm{K}\int_{]0,t]} e^{-2\gamma y}d\mathrm{G}_x(y) \\ &\leqslant e^{-\gamma t}\int_{]t,\infty[} e^{-\gamma y}d\mathrm{G}_x(y) + \left(\frac{\mathrm{E}v^2-m}{m^2}+m\mathrm{K}\right)\int_{]0,t]} e^{-2\gamma y}d\mathrm{G}_x(y) \\ &\leqslant e^{-\gamma t}\phi_\gamma(x) + \left(\frac{\mathrm{E}v^2-m}{m^2}+m\mathrm{K}\right)\phi_{2\gamma}(x) \\ &\leqslant \mathrm{K}'\phi_\gamma(x) \end{aligned}$$

où $\mathrm{K}'$ est une constante finie, indépendante de $t$ (que nous noterons K dans la suite). □

*Démonstration du lemme 5.* — Posons $b_n = \left(\sum_{|u|\leqslant n} e^{-\alpha S_u}\right)^2$ et faisons apparaître dans $b_n$, la première génération (pour $n \geqslant 1$)

$$\begin{aligned} b_n &= \left(e^{-\alpha S_\phi} + e^{-\alpha S_1}\sum_{j=1}^{\nu_\phi}\left(\sum_{|v|\leqslant n-1} e^{-\alpha S_v}\right)\circ \mathrm{T}_j\right)^2 \\ &= e^{-2\alpha S_\phi} + 2e^{-\alpha S_\phi}e^{-\alpha S_1}\sum_{j=1}^{\nu_\phi}\left(\sum_{|v|\leqslant n-1} e^{-\alpha S_v}\right)\circ \mathrm{T}_j + e^{-2\alpha S_1}\sum_{j=1}^{\nu_\phi}\left(\sum_{|v|\leqslant n-1} e^{-\alpha S_v}\right)^2\circ \mathrm{T}_j \\ &\quad + e^{-2\alpha S_1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{\nu_\phi}\left(\sum_{|v|\leqslant n-1} e^{-\alpha S_v}\right)\circ \mathrm{T}_j\left(\sum_{|v|\leqslant n-1} e^{-\alpha S_v}\right)\circ \mathrm{T}_k. \end{aligned}$$

Prenons l'espérance et appliquons la Proposition 1 :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_0 b_n &= 1 + 2\phi_\alpha(0)m\mathrm{E}_0\left(\sum_{|v|\leqslant n-1} e^{-\alpha S_v}\right) + \phi_{2\alpha}(0)m\mathrm{E}_0\left(\sum_{|v|\leqslant n-1} e^{-\alpha S_v}\right)^2 \\ &\quad + \phi_{2\alpha}(0)(\mathrm{E}v^2-m)\left[\mathrm{E}_0\left(\sum_{|v|\leqslant n-1} e^{-\alpha S_v}\right)\right]^2. \end{aligned}$$

Rappelons-nous la démonstration du lemme 1, dans laquelle

$$a_p(0, \alpha) := \mathrm{E}_0\Big(\sum_{|v|=p} e^{-\alpha S_v}\Big) = (m\phi_\alpha(0))^p, \qquad \text{car} \quad \alpha > \gamma$$

$$\mathrm{E}_0\Big(\sum_{|v|\leqslant n-1} e^{-\alpha S_v}\Big) = \frac{1-(m\phi_\alpha(0))^n}{1-m\phi_\alpha(0)} \leqslant \frac{1}{1-m\phi_\alpha(0)}.$$

La suite $\mathrm{E}_0 b_n$ satisfait donc l'équation

$$\mathrm{E}_0 b_n = m\phi_{2\alpha}(0)\mathrm{E}_0 b_{n-1} + c_n$$

qui s'écrit encore :

$$\mathrm{E}_0 b_n = (m\phi_{2\alpha}(0))^n \mathrm{E}_0 b_0 + (m\phi_{2\alpha}(0))^{n-1} c_1 + \ldots + m\phi_{2\alpha}(0) c_{n-1} + c_n$$

et comme, pour tout $n \geqslant 1$,

$$c_n \leqslant 1 + \frac{2m\phi_\alpha(0)}{1 - m\phi_\alpha(0)} + \frac{\phi_{2\alpha}(0)}{1 - m\phi_\alpha(0)}(\mathrm{E}v^2 - m) = c$$

$$\mathrm{E}_0 b_n \leqslant \mathrm{E}_0 b_0 + c(1 + m\phi_{2\alpha}(0) + \ldots + (m\phi_{2\alpha}(0))^{n-1})$$

$$\leqslant \mathrm{E}_0 b_0 + \frac{c}{1 - m\phi_{2\alpha}(0)}$$

constante indépendante de $n$.

Par convergence monotone, on en déduit

$$\mathrm{E}_0\Big(\sum_v e^{-\alpha S_v}\Big)^2 < \infty. \qquad \square$$

Ce résultat permet, par convergence dominée, d'obtenir le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — *Pour tout $s \geqslant 0$ fixé et pour toute fonction $h$ positive continue bornée*

$$v_s(\mathrm{P}_{t-s}h) \xrightarrow[t\to+\infty]{\mathrm{L}^2} v_s(1)\int_0^\infty h(u)\xi(u)du.$$

Ce dernier résultat montre que la convergence de $v_t(h)$ deviendra claire dès que nous aurons évalué sa variance, ce qui fait l'objet de la proposition suivante :

PROPOSITION 8. — *Pour tous $t$, $s \geqslant 0$, $s \leqslant t$, pour tout $x \geqslant 0$ et pour toute fonction $h$ mesurable bornée :*

$$\mathrm{E}_x^{\mathcal{F}_s}[v_t(h) - v_s(\mathrm{P}_{t-s}h)]^2 \leqslant \mathrm{K}\,\|h\|^2 e^{-\gamma s} v_s(1).$$

*Démonstration.* — Faisons, comme pour la proposition 4, la décomposition de $z_t$ en descendants d'individus de $z_s$ :

$$\begin{aligned} v_t(h) &= e^{-\gamma t}\mu_t(\phi_\gamma h) \\ &= e^{-\gamma t}\sum_{u\in z_s}\mu_{t-s}(\phi_\gamma h)\circ\tau_u \\ &= e^{-\gamma s}\sum_{u\in z_s} v_{t-s}(h)\circ\tau_u . \end{aligned}$$

Mais, conditionnellement par rapport à $\mathcal{F}_s$, d'après la proposition 1, les $\tau_u$ pour $u$ dans $z_s$ sont indépendants et donc la variance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_s$ de $v_t(h)$ est la somme des variances conditionnelles des $v_{t-s}(h)\circ\tau_u$ pour $u$ dans $z_s$ :

$$E_x^{\mathcal{F}_s}(v_t(h)-v_s(P_{t-s}h))^2 = e^{-2\gamma s}\sum_{u\in z_s}\left[E_x^{\mathcal{F}_s}((v_{t-s}(h))^2\circ\tau_u) - (E_x^{\mathcal{F}_s}(v_{t-s}(h)\circ\tau_u))^2\right]$$

ce qui grâce au lemme 2 devient :

$$= e^{-2\gamma s}\sum_{u\in z_s} E_{s-S_u}(v_{t-s}(h))^2 - (E_{s-S_u}(v_{t-s}h))^2$$

$$E_x^{\mathcal{F}_s}(v_t(h) - v_s(P_{t-s}h))^2 \leqslant e^{-2\gamma s}\sum_{u\in z_s} E_{s-S_u}(v_{t-s}(h))^2$$

et $h$ étant bornée

$$\leqslant \| h \|^2 e^{-2\gamma s}\sum_{u\in z_s} E_{s-S_u}(v_{t-s}(1))^2 .$$

Mais nous venons de voir dans la démonstration précédente que pour tout $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$,

$$E_x(v_t(1))^2 \leqslant K\phi_\gamma(x)$$

donc

$$\begin{aligned} E_x^{\mathcal{F}_s}(v_t(h) - v_s(P_{t-s}h))^2 &\leqslant K \| h \|^2 e^{-2\gamma s}\sum_{u\in z_s}\phi_\gamma(s - S_u) \\ &= K \| h \|^2 e^{-\gamma s} v_s(1). \qquad \square \end{aligned}$$

Nous pouvons finalement établir le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Pour toute fonction h positive, continue, bornée,*

$$v_t(h) \xrightarrow[t\to+\infty]{L^2} W\int_0^\infty h(s)\xi(s)ds .$$

*Démonstration.* — La proposition précédente, appliquée à la fonction $h \equiv 1$ permet d'obtenir la convergence dans $L^2$ de $v_t(1)$. Sachant déjà que $v_t(1)$ converge p. s. vers W, nous obtenons la convergence $L^2$ de $v_t(1)$ vers W. Écrivons alors

$$E_x^{\mathscr{F}_s}\left(v_t(h) - v_s(1)\int_0^\infty h(u)\xi(u)du\right)^2 = E_x^{\mathscr{F}_s}(v_t(h) - v_s(P_{t-s}h))^2 + E_x^{\mathscr{F}_s}\left(v_s(P_{t-s}h) - v_s(1)\int_0^\infty h(u)\xi(u)du\right)^2$$
$$\leqslant K \| h \|^2 e^{-\gamma s} v_s(1) + E_x^{\mathscr{F}_s}\left(v_s(P_{t-s}h) - v_s(1)\int_0^\infty h(u)\xi(u)du\right)^2 .$$

Prenons les espérances :

$$E_x\left(v_t(h) - v_s(1)\int_0^\infty h(u)\xi(u)du\right)^2 \leqslant K \| h \|^2 e^{-\gamma s} EW + E_x\left(v_s(P_{t-s}h) - v_s(1)\int_0^\infty h(u)\xi(u)du\right)^2 .$$

Fixons d'abord $s$ ; lorsque $t$ tend vers $+\infty$, nous avons vu que

$$v_s(P_{t-s}h) \xrightarrow[t\to+\infty]{L^2} v_s(1)\int_0^\infty h(u)\xi(u)du .$$

Faisons alors tendre $s$ vers $+\infty$. Sachant que $v_s(1)$ converge dans $L^2$ vers W lorsque $s$ tend vers $+\infty$, nous en déduisons le résultat. □

## RÉFÉRENCES


[1] S. ASMUSSEN, Some martingale methods in the limit theory of supercritical branching processes. *Advances in Prob. and related topics*, t. **5** (branching processes). Ed. Joffe and Ney, 1978.

[2] K. B. ATHREYA and P. NEY, *Branching processes*. Berlin, Springer, 1972.

[3] J. D. BIGGINS, *Chernoff's theorem in the branching random walk. Journal of Applied Probability*, t. **14**, 1977, p. 630-636.

[4] M. D. BRAMSON, Maximal displacement of branching brownian motion. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, t. **31**, 1978.

[5] W. FELLER, *An introduction to probability theory and its applications*, t. **2**, Wiley, 1971.

[6] T. E. HARRIS, *The theory of branching processes*. Springer, 1963.

[7] P. JAGERS, *Branching processes with biological applications Wiley*, 1975.

[8] P. JAGERS and O. NERMAN, The groath and composition of branching populations. *Advances in Applied Probability*, t. **16**, 1984.

[9] A. JOFFE, Remarks on the structure of trees with applications to supercritical Galton-Watson processes. *Advances in Probability and related topics*, t. **5** (branching processes). Ed. Joffe and Ney, 1978.

[*10*] A. JOFFE, L. LE CAM and J. NEVEU, Sur la loi des grands nombres pour des variables aléatoires de Bernoulli attachées à un arbre dyadique. *C. R. Académie des Sciences de Paris*, t. **277**, 12 novembre 1973.

[*11*] H. P. MCKEAN, Application of Brownian motion to the equation of Kolmogorov-Petrovski-Piskunov. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, t. **28**, 1975.

[*12*] P. A. MEYER, *Probability and potential.* Blaisdell Publishing Company, 1966.

[*13*] P. A. MEYER, *Martingales and stochastics integrals. I. Lectures Notes in Mathematics*, t. **284**, Springer, 1972.

[*14*] O. NERMAN, On the convergence of supercritical general C. M. J. branching processes. *Z. F. W. Geb.*, t. **57**, 1981.

[*15*] O. NERMAN, *The groath and composition of supercritical branching populations on general type spaces.* A paraître.

[*16*] J. NEVEU, *Martingales à temps discret*, Masson, 1972.

[*17*] J. NEVEU, Arbres et processus de Galton-Watson. *Annales de l'Inst. H. Poincaré*, Vol. 22, n° 2, 1986.

*(Manuscrit reçu le 10 janvier 1985)*