ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. NEVEU

Arbres et processus de Galton-Watson

Annales de l'I. H. P., section B, tome 22, nº 2 (1986), p. 199-207
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1986__22_2_199_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 22, n° 2, 1986, p. 199-207. *Probabilités et Statistiques*

Arbres et processus de Galton-Watson

par

J. NEVEU
Université Pierre-et-Marie-Curie, Laboratoire de Probabilités,
4, Place Jussieu, Tour 56-66, 3e étage, 75230 Paris Cedex 05
Laboratoire Associé 224

RÉSUMÉ. — L'objet de ce travail est d'introduire la notion d'arbre dans le cas le plus simple des processus de Galton-Watson, de démontrer la propriété générale de branchement de ces processus et enfin d'illustrer l'utilité de la notion d'arbre sur un exemple.

ABSTRACT. — We introduce a formalized notion of a tree in the simple case of Galton-Watson processes proving a general branching property of these processes. The usefulness of this notion is illustrated on an example.

1. INTRODUCTION

De nombreux raisonnements de la théorie des processus de branchement s'appuient sur une notion d'arbre qui ne me paraît pas avoir été suffisamment formalisée. La propriété de branchement (selon laquelle les descendances des individus d'une génération donnée sont indépendantes entre elles et suivent la même loi) ne semble pas avoir été écrite en toute généralité et fréquemment des probabilistes ont eu alors recours à des techniques analytiques dans leurs démonstrations là où un raisonnement plus intuitif de probabilité aurait permis de conclure plus rapidement. L'école japonaise néanmoins a introduit dès les années 60 une notion d'arbre dans l'étude des processus de branchement spatiaux mais ces arbres dont chaque nœud comporte une infinité de branches restent lourds à manipuler et sont trop redondants bien qu'ils se soient avérés déjà très utiles.

Je remercie M. A. Joffe pour les conversations que j'ai eues avec lui et sans lesquelles ce travail n'aurait pu être fait ; son article [*2*] notamment contient d'ailleurs en germe l'idée du présent travail. Une application de la notion d'arbre pour les processus de branchement avec âge est contenue dans l'article suivant de B. Chauvin [*1*].

2. L'ESPACE PROBABILISABLE DES ARBRES DE GALTON-WATSON

Dans ce paragraphe, nous définissons un arbre par l'ensemble de ses nœuds en commençant par introduire l'espace de ces nœuds. Puis nous munirons l'espace de ces arbres d'une tribu et de la filtration engendrée par les générations ainsi que d'une famille d'opérateurs de translation.

Nous désignerons par U l'espace des suites finies $u = j_1 \ldots j_n$ d'entiers strictement positifs. La suite vide $\emptyset$ appartient à U. La longueur d'une suite $u \in \mathrm{U}$ est notée $|u|$; pour tout entier $n \geq 0$, le sous-ensemble $\{u : |u| = n\}$ de U coïncide donc avec N^{*n} et par conséquent $\mathrm{U} = \sum_{n \geq 0} \mathrm{N}^{*n}$. Enfin la suite obtenue en juxtaposant les suites u et v de U se note uv.

Un *arbre* est par définition un sous-ensemble de U, soit ω, assujetti aux trois conditions : *a*) $\emptyset \in \omega$, *b*) $u \in \omega$ dès que $uj \in \omega$ pour un $j \in \mathrm{N}^*$ et donc (par récurrence) dès que $uv \in \omega$ pour un $v \in \mathrm{U}$, *c*) si $u \in \omega$, alors $uj \in \omega$ si et seulement si $1 \leq j \leq \nu_u(\omega)$ pour un entier positif (éventuellement nul) $\nu_u(\omega)$. Les $u \in \mathrm{U}$ qui appartiennent à l'arbre ω sont appelés ses nœuds tandis que les couples de nœuds de ω de la forme (u, uj) où $u \in \mathrm{U}$ et $j \in \mathrm{N}^*$, sont appelés ses branches. Manifestement la donnée d'un arbre ω équivaut à la donnée des nombres $\nu_u(\omega)$ de branches issues de chacun de ses nœuds u. Dans la suite nous écrirons ν au lieu de ν_ϕ.

Notons Ω l'*espace des arbres* et pour tout $u \in \mathrm{U}$, désignons par Ω_u le sous-espace de Ω formé par les arbres ω dont u est un nœud, soit

$$\Omega_u = \{\omega : \omega \ni u\} \qquad (u \in \mathrm{U}).$$

Ces sous-espaces vont jouer un grand rôle dans la suite. En particulier $\Omega_\phi = \Omega$ d'après la première condition de définition d'un arbre. Pour tout

$u \in \mathrm{U}$, le nombre ν_u définit une application de Ω_u dans N (ν_u n'est pas défini sur tout Ω !) et les conditions (*b*), (*c*) de définition d'un arbre équivalent exactement aux égalités

$$\Omega_{uj} = \Omega_u \cap \{ \nu_u \geq j \} \qquad (u \in \mathrm{U}, j \in \mathrm{N}^*)$$

dans l'espace Ω. Munissons cnsuite l'espace Ω de la *tribu*

$$\mathscr{F} = \tau(\Omega_u \,;\, u \in \mathrm{U})$$

engendrée par la famille des Ω_u $(u \in \mathrm{U})$; les sous-espaces mesurables Ω_u de Ω étant munis des tribus traces $\Omega_u \cap \mathscr{F}$, les applications $\nu_u : \Omega_u \to \mathrm{N}$ sont alors mesurables d'après la formule ci-dessus.

Soit n un entier ≥ 0. Pour tout arbre $\omega \in \Omega$, désignons par $z_n(\omega)$ sa $n^{\text{ème}}$ *génération,* c'est-à-dire le sous-ensemble fini $\omega \cap \mathrm{N}^{*n}$ de U formé par les nœuds de ω de longueur n ; nous noterons $\mathrm{Z}_n(\omega)$ le cardinal de cette $n^{\text{ème}}$ génération. Il est facile de voir que les applications

$$z_n : \Omega \to \mathscr{P}_f(\mathrm{N}^{*n}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Z}_n : \Omega \to \mathrm{N}$$

ainsi définies sont mesurables pour la tribu $\mathscr{F}$ de Ω et les tribus discrètes des espaces dénombrables d'arrivées car pour tout $u \in \mathrm{N}^{*n}$ $\{ \omega : z_n(\omega) \ni u \} = \Omega_u \in \mathscr{F}$; cette formule entraîne d'ailleurs plus précisément que la tribu $\mathscr{F}$ est engendrée par la suite d'applications $(z_n, n \in \mathrm{N})$.

Nous utiliserons aussi la *filtration* $(\mathscr{F}_n, n \in \mathrm{N})$ formée par les sous-tribus discrètes $\mathscr{F}_n$ de $\mathscr{F}$ $(n \in \mathrm{N})$ engendrées respectivement par les z_m $(0 \leq m \leq n)$; d'après la remarque précédente $\mathscr{F}_n = \tau(\Omega_u \,;\, |u| \leq n)$ pour tout $n \in \mathrm{N}$ et les variables aléatoires $\nu_u : \Omega_u \to \mathrm{N}^*$ sont $\mathscr{F}_n$-mesurables lorsque $|u| < n$ strictement. Notons enfin que pour $n = 0$: $z_0 = \{ \varnothing \}$, $\mathrm{Z}_0 = 1$ et $\mathscr{F}_0 = \{ \varnothing, \Omega \}$ tandis que pour $n = 1$: $z_1 = [1, \nu]$ dans N^*, $\mathrm{Z}_1 = \nu$ et $\mathscr{F}_1$ est la tribu engendrée par la seule variable ν.

Nous noterons $\mathrm{T}_u(\omega)$ l'arbre $\{ v : v \in \mathrm{U}$ et $uv \in \omega \}$ obtenu *en translatant l'arbre* ω à l'un de ses nœuds u $(u \in \omega)$; nous définissons ainsi une application $\mathrm{T}_u : \Omega_u \to \Omega$ pour chaque $u \in \mathrm{U}$ (sauf si $u = \varnothing$, T_u n'est pas définie partout sur Ω). Remarquons immédiatement que $\nu_u = \nu \circ \mathrm{T}_u$ sur Ω_u $(u \in \mathrm{U})$. D'autre part, quelques soient $\omega \in \Omega$ et $u, v \in \mathrm{U}$, il est clair que $uv \in \omega$ si et seulement si $u \in \omega$ et $v \in \mathrm{T}_u(\omega)$; cela s'écrit encore

$$\Omega_{uv} = \Omega_u \cap \mathrm{T}_u^{-1}(\Omega_v) \qquad (u, v \in \mathrm{U})$$

dans Ω et entraîne que les applications T_u sont mesurables sur leurs domaines de définition respectifs Ω_u ($u \in U$). Enfin si $|u| = n$ et $|v| = k$, l'équivalence précédente s'écrit encore en termes de générations

$$uv \in z_{n+k}(\omega) \Leftrightarrow u \in z_n(\omega) \qquad \text{et} \qquad v \in z_k(T_u\omega)$$

et les égalités suivantes en découlent pour les cardinaux des générations

$$Z_{n+k} = \sum_{u \in z_n} Z_k \circ T_u \quad \text{sur} \quad \Omega \qquad (n, k \in N)$$

(noter que pour tout $\omega \in \Omega$, $T_u\omega$ a un sens lorsque $u \in z_n(\omega)$).

3. PROPRIÉTÉ DE BRANCHEMENT DES ARBRES DE GALTON-WATSON

Nous allons probabiliser l'espace Ω des arbres en rendant les variables aléatoires v_u indépendantes et équidistribuées. Néanmoins comme ces variables ne sont définies que sur des parties Ω_u de Ω, ces propriétés d'indépendance et d'équidistribution n'ont de sens qu'en passant par un conditionnement.

PROPOSITION. — *Pour toute probabilité $q = (q(j), j \in N)$ sur* N, *il existe une probabilité unique P_q sur l'espace $(\Omega, \mathscr{F})$ des arbres qui donne à la variable v la loi q et pour laquelle conditionnellement lorsque $v = j$, les variables T_i $(1 \leq i \leq j)$ à valeurs dans Ω soient indépendantes et de mêmes lois également à P_q* (Noter que les domaines de définition Ω_i des T_i contiennent l'événement conditionnant $\{ v = j \}$ lorsque $i \leq j$).

Plus généralement pour tout $n \in N^*$, conditionnellement par rapport à la tribu $\mathscr{F}_n$ sur l'espace $(\Omega, \mathscr{F}, P_q)$, les variables aléatoires T_u $(u \in z_n)$ sont indépendantes et suivent la même loi P_q ce qui signifie que quelles que soient les fonctions mesurables positives $f_u : \Omega \to R$ $(u \in U)$,

$$E_q^{\mathscr{F}_n}\left[\prod_{u \in z_n} f_u \circ T_u\right] = \prod_{u \in z_n} E_q(f_u)$$

D'autre part la suite des variables aléatoires entières Z_n $(n \in N)$ qui est définie sur $(\Omega, \mathscr{F}, P_q)$ est un processus de Galton-Watson de loi de reproduction q et d'état initial $Z_0 \equiv 1$.

Démonstration. — Considérons l'espace produit $\Omega^* = N^U$ muni de ses coordonnées $v_u^* : \Omega^* \to N$ $(u \in U)$, de la tribu $\mathscr{F}^*$ que ces coordonnées engendrent et de la probabilité produit $P_q^* = q^{U\otimes}$. Introduisons aussi l'application ψ de Ω^* dans Ω qui à tout $\omega^* \in \Omega^*$ associe l'arbre $\psi(\omega^*)$ dont les nombres de branches aux divers nœuds u valent respectivement $v_u^*(\omega^*)$, soit

$$\psi(\omega^*) = \{ u \equiv j_1 \ldots j_p : p \in \mathrm{N}, j_{k+1} \leq v^*_{j_1 \ldots j_k}(\omega^*) \quad \text{si} \quad 0 \leq k < p \}.$$

Notons que cette application est loin d'être injective puisque la connaissance de $\psi(\omega^*)$ ne donne que les $v_u^*(\omega^*)$ pour lesquels $u \in \psi(\omega^*)$. L'application ψ est mesurable car pour tout $u = j_1 \ldots j_p$ dans U,

$$\psi^{-1}(\Omega_u) = \{ \omega^* : v^*_{j_1 \ldots j_k}(\omega^*) \geq j_{k+1} \quad (0 \leq k < p) \} \in \mathscr{F}^*$$

et de plus $\psi^{-1}(\mathscr{F}_n) \subset \tau \{ v_u, |u| < n \}$ dans Ω^*.
L'image P_q de P_q^* par ψ possède alors les propriétés désirées. En effet les translations de Ω et celles de Ω^*, soient $T_u^* : \Omega^* \to \Omega^*$ $(u \in \mathrm{U})$, que définissent les formules $v_v^* \circ T_u^* = v_{uv}^*$ $(v \in \mathrm{U})$ sont liées par les relations

$$T_u \circ \psi = \psi \circ T_u^* \quad \text{sur} \quad \psi^{-1}(\Omega_u) \qquad (u \in \mathrm{U}).$$

Or sur $(\Omega^*, \mathscr{F}^*, P_q^*)$ pour tout $n \in \mathrm{N}$ fixé, les variables T_u^* à valeurs dans Ω^*, d'indices u de longueur n sont indépendantes entre elles, suivent toutes la loi P_q^* et sont aussi indépendantes de la tribu $\tau(v_v, |v| < n)$, donc de $\psi^{-1}(\mathscr{F}_n)$. Cela permet d'écrire que pour toute partie finie B de N^{*n}

$$E_q^{*\psi^{-1}(\mathscr{F}_n)}\left[\prod_{\mathrm{B}} f_u \circ \psi \circ T_u^*\right] = \prod_{\mathrm{B}} E_q^*(f_u \circ \psi).$$

N'écrivons l'égalité précédente que sur l'événement

$$\{ \mathrm{B} \subset z_n \circ \psi \} = \bigcap_{u \in \mathrm{B}} \psi^{-1}(\Omega_u);$$

comme cet événement appartient à la tribu $\psi^{-1}(\mathscr{F}_n)$ et que sur lui

$$\left(\prod_{\mathrm{B}} f_u \circ T_u\right) \circ \psi = \prod_{\mathrm{B}} f_u \circ \psi \circ T_u^*,$$

l'égalité ci-dessus entraîne que pour toute partie finie B de N^{*n}

$$E_q^{\mathscr{F}_n}\left[\prod_{\mathrm{B}} f_u \circ T_u\right] = \prod_{\mathrm{B}} E_q(f_u) \qquad \text{sur} \qquad \{ \mathrm{B} \subset z_n \}.$$

La formule de la proposition en découle immédiatement puisque z_n est $\mathscr{F}_n$-mesurable.

Enfin le processus $(Z_n, \mathscr{F}_n\,;\, n \in \mathrm{N})$ est un processus de Galton-Watson de fonction génératrice

$$\tilde{q}(s) = \mathrm{E}_q[s^{Z_1}] = \sum_{\mathrm{N}} q_n s^n \qquad (0 \leq s \leq 1)$$

puisqu'il résulte de l'égalité $Z_{n+1} = \sum_{z_n} Z_1 \circ T_u$ et de la formule qui vient d'être démontrée que

$$\mathrm{E}_q^{\mathscr{F}_n}(s^{Z_{n+1}}) = \mathrm{E}_q^{\mathscr{F}_n}\left[\prod_{n} s^{Z_1} \circ T_u\right] = \tilde{q}(s)^{Z_n}$$

pour tout $n \in \mathrm{N}$. □

4. UNE APPLICATION

Pour illustrer la puissance de la proposition 1 et du formalisme adéquat qui a permis de l'énoncer, nous montrerons dans ce paragraphe que les résultats de Joffe et Waugh [*3*] peuvent s'obtenir sans calculs grâce à la proposition plus générale ci-dessous.

Le début de longueur n d'une suite $u \in \mathrm{U}$ de longueur supérieure étant noté $D_n u$, choisissons dans le modèle $(\Omega, \mathscr{F}, P_q)$ un individu au hasard dans la $(n + k)^{\text{ème}}$ génération si celle-ci n'est par vide. Si X désigne cet individu tiré de z_{n+k}, considérons l'arbre $T_{D_n X}$ issu de son $k^{\text{ème}}$ ancêtre $D_n X$. L'intérêt d'un tel arbre est de permettre de formuler les problèmes de parenté de cet individu X que l'on a obtenu par un sondage statistique de la $(n + k)^{\text{ème}}$ génération ; par exemple $Z_k(T_{D_n X})$ est le nombre de cousins d'ordre $\leq k$ de X (X y compris !).

PROPOSITION. — *Supposons que* $m = \sum_j jq(j) \in]1, \infty[$ *(cas super-critique). Alors pour tout* $k > 0$ *fixé, les lois de probabilités* $P_q^{n,k}$ *de* $T_{D_n X}$ *conditionnelles en* $\{ Z_{n+k} \neq 0 \}$ *convergent en norme sur* Ω *lorsque* $n \to \infty$ *vers la probabilité* $m^{-k} Z_k \cdot P_q$.

Démonstration. — Par définition, la probabilité $P_q^{n,k}$ sur Ω vérifie la formule

$$P_q(Z_{n+k} \neq 0) \int f \, dP_q^{n,k} = \int_{[Z_{n+k} \neq 0)} \left[\frac{1}{Z_{n+k}} \sum_{u \in z_{n+k}} f \circ T_{D_n u}\right] dP_q$$

pour toute fonction mesurable bornée $f : \Omega \to \mathrm{R}$. La moyenne sur z_{n+k}

qui figure au second membre exprime le choix au hasard de l'individu X dans la $(n+k)^{\text{ème}}$ génération ; comme pour tout $v \in z_n(\omega)$, l'ensemble des $u \in z_{n+k}(\omega)$ de début $D_n u = v$ comprend $Z_k(T_v\omega)$ éléments, cette moyenne est encore égale à

$$\sum_{v \in z_n} (Z_k f) \circ T_v \Big/ \sum_{v \in z_n} Z_k \circ T_v$$

sur $\{ Z_{n+k} \neq 0 \} \equiv \left\{ \sum_{z_n} Z_k \circ T_v \neq 0 \right\}$. La proposition 1 montre alors que

$$P_q(Z_{n+k} \neq 0) \int f \, dP_q^{n,k} = \int F(Z_n) dP_q$$

à condition de poser

$$F(p) = \int_{\{\sum_1^p Z_k[\omega_i) \neq 0\}} \frac{\sum_1^p Z_k f(\omega_i)}{\sum_1^p Z_k(\omega_i)} dP_q(\omega_1) \ldots dP_q(\omega_p)$$

pour tout $p \geq 1$ et $F(0) = 0$.

La loi des grands nombres appliquée aux variables aléatoires intégrables $Z_k f$ et $Z_k \left(\int Z_k dP_q = m^k \right)$ entraîne que

$$\lim_{p \to \infty} F(p) = \int Z_k f \, dP_q \Big/ \int Z_k dP_q$$

et comme $Z_n \to \infty$ p. s. sur $\left[\bigcup_N \{ Z_m = 0 \} \right]^c$ lorsque $n \to \infty$, il est clair que

$$\lim_{n \to \infty} \int f \, dP_q^{n,k} = m^{-k} \int Z_k f \, dP_q.$$

Cela établit la proposition mais seulement avec une convergence des probabilités moins forte que celle annoncée.

Pour obtenir la convergence en norme, écrivons que par symétrie la fonction F vaut encore

$$F(p) = \int_{\{Z_k[\omega_1) \neq 0\}} \frac{p Z_k f(\omega_1)}{\Sigma_1^p Z_k(\omega_i)} dP_q(\omega_1) \ldots dP_q(\omega_p)$$

$$= \int_\Omega G_k^p [Z_k(\omega_1)] f(\omega_1) dP_q(\omega_1)$$

à condition de poser

$$G_k^p(z) = \int_{\Omega^{p-1}} \frac{pz}{z + \Sigma_2^p Z_k(\omega_i)} \, dP_q(\omega_2) \ldots dP_q(\omega_p)$$

si $p \geq 2$, $G_k^1(z) = z$ et $G_k^0(z) = 0$ $(G_k^p(0) = 0)$. [Ce calcul montre que

$$P(Z_{n+k} \neq 0) . P_q^{n,k}(d\omega) = \sum_{p \in N} P_q(Z_n = p) G_k^p [Z_k(\omega)] P_q(d\omega)$$

et donne donc la densité de Radon-Nikodym de $P_q^{n,k}$ par rapport à P_q].
La loi des grands nombres implique ici que pour tout $z \in N$

$$\lim_{p \to \infty} G_k^p(z) = m^{-k} z$$

et il s'ensuit par convergence dominée que

$$\lim_{p \to \infty} G_k^p(Z_k) = m^{-k} Z_k \quad \text{dans} \quad L^1(P_q)$$

car $G_k^p(z) \leq z / P(Z_k \neq 0)$ uniformément en p ; cette majoration s'obtient par un calcul de loi binomiale sur la première majoration

$$G_k^p(z) \leq zpE([1 + \Sigma_2^p 1_{\{Z_k(\omega_i) \neq 0\}}]^{-1}) .$$

Il est alors clair que la densité de $P_q^{n,k}$ par rapport à P_q converge dans $L^1(P_q)$ vers $m^{-k} Z_k$. □

5. EXTENSION AUX ARBRES MARQUÉS

En dehors des processus simples de Galton-Watson, les processus de branchement que l'on étudie affectent des marques aux divers individus (types, âges, positions spatiales ou trajectoires, etc.). Le formalisme des arbres s'étend sans difficulté à ce cas comme nous allons le montrer brièvement.

Donnons-nous un espace mesurable, soit E, dont les points seront appelés des marques. Un *arbre marqué* sera alors défini par la donnée d'un arbre $\omega \in \Omega$ et d'une marque $\eta_u \in E$ pour chacun des nœuds $u \in \Omega$, soit

$$\omega = (\omega ; (\eta_u, u \in \omega)) .$$

Si Ω_E désigne l'espace des arbres marqués (par E) et si $p : \Omega^E \to \Omega$ désigne la projection canonique qui associe l'arbre $\omega \in \Omega$ à l'arbre marqué $\overline{\omega} \in \Omega^{\mathrm{E}}$, les η_u définissent alors des applications de

$$\Omega_u^{\mathrm{E}} = p^{-1}(\Omega_u) = \{ \overline{\omega} : u \in \omega \}$$

dans E ($u \in \mathrm{U}$).

La tribu $p^{-1}(\mathscr{F})$ de parties de Ω^{E} est engendrée par les Ω_u^{E} ($u \in \mathrm{U}$) par définition de la tribu $\mathscr{F}$ sur Ω. Nous munirons l'espace Ω^{E} de la tribu $\mathscr{F}^{\mathrm{E}}$ engendrée par cette tribu $p^{-1}(\mathscr{F})$ et les applications $\eta_u : \Omega_u^{\mathrm{E}} \to \mathrm{E}$ ($u \in \mathrm{U}$). L'espace Ω^{E} est muni aussi d'une filtration $(\mathscr{F}_n^{\mathrm{E}}, n \in \mathrm{N})$ importante, celle dont chaque tribu $\mathscr{F}_n^{\mathrm{E}}$ est engendrée par la tribu $p^{-1}(\mathscr{F}_n) = \tau(\Omega_u^{\mathrm{E}}, |u| \leq n)$ et les variables $\eta_u : \Omega_u^{\mathrm{E}} \to \mathrm{E}$ d'indices u tels que $|u| < n$.

L'espace Ω^{E} est muni également de *translations* qui sont les applications $\mathrm{T}_u^{\mathrm{E}} : \Omega_u^{\mathrm{E}} \to \Omega^{\mathrm{E}}$ définies explicitement par

$$\mathrm{T}_u^{\mathrm{E}}(\overline{\omega}) = [\mathrm{T}_u(\omega), (\eta_{uv}, v \in \mathrm{T}_u(\omega))] \quad \text{si} \quad \overline{\omega} = (\omega, (\eta_u, u \in \omega)).$$

Ces translations de Ω^{E} sont des extensions des translations T_u ($u \in \mathrm{U}$) de Ω puisque

$$p \circ \mathrm{T}_u^{\mathrm{E}} = \mathrm{T}_u \circ p \quad \text{sur} \quad \Omega_u^{\mathrm{E}} = p^{-1}(\Omega_u) \qquad (u \in \mathrm{U}).$$

Les variables aléatoires entières définies par

$$\nu_u^{\mathrm{E}} = \nu_u \circ p \quad \text{sur} \quad \Omega_u^{\mathrm{E}} \qquad (u \in \mathrm{U})$$

qui donnent sur Ω^{E} les nombres de descendants de chaque nœud se déduisent évidemment par translation de la variable $\nu^{\mathrm{E}} = \nu_\phi^{\mathrm{E}}$, soit

$$\nu_u^{\mathrm{E}} = \nu^{\mathrm{E}} \circ \mathrm{T}_u^{\mathrm{E}} \quad \text{sur} \quad \Omega_u^{\mathrm{E}}$$

puisque $\nu_u = \nu \circ \mathrm{T}_u$ sur Ω_u. D'autre part en notant encore η la v. a. η_ϕ définie sur Ω^{E}, nous voyons aussi que

$$\eta_u = \eta \circ \mathrm{T}_u^{\mathrm{E}} \quad \text{sur} \quad \Omega_u^{\mathrm{E}} \qquad (u \in \mathrm{U}).$$

Une extension facile de la proposition 1 établit que pour toute probabilité Q sur N × E, il existe une probabilité unique P sur l'espace $(\Omega^{\mathrm{E}}, \mathscr{F}^{\mathrm{E}})$ qui donne la loi Q à la variable aléatoire (ν, η) à valeurs dans N × E et qui rende les variables $\mathrm{T}_u^{\mathrm{E}}$ $(u \in z_n^{\mathrm{E}} \equiv z_n \circ p)$ indépendantes et équidistribuées suivant P, conditionnellement par rapport à $\mathscr{F}_n^{\mathrm{E}}$ ($n \in \mathrm{N}$ fixé).

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] B. CHAUVIN, Arbres et processus de Bellman-Harris. *Ann. Inst. H. Poincaré.*

[*2*] A. JOFFE, Remarks on the structure of trees with applications to super-critical Galton-Watson processes. *Adv. Proba.*, t. **5**, Éd. Joffe et Ney, 1978.

[*3*] A. JOFFE et W. A. O'N. WAUGH, Exact distributions of kin numbers in a Galton-Watson process. *J. Appl. Probab.*, t. **19**, n° 4, p. 767-775.