ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

M. ROUSSIGNOL

Processus de saut avec interaction selon les plus proches particules

Annales de l'I. H. P., section B, tome 22, nº 2 (1986), p. 175-198

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1986__22_2_175_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 22, n° 2, 1986, p. 175-198. *Probabilités et Statistiques*

Processus de saut avec interaction selon les plus proches particules

par

M. ROUSSIGNOL

Laboratoire de Probabilités, Université Pierre-et-Marie-Curie,
4, place Jussieu, tour 56, 75230 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — Nous étudions un processus de saut à une infinité de particules sur Z. La loi de saut d'une particule ne dépend que des distances de cette particule à ses plus proches voisines et de la longueur du saut. Nous donnons une condition sur les coefficients de saut pour que le processus admette des mesures réversibles qui sont alors des mesures de renouvellement connues explicitement. Lorsque cette condition est vérifiée, nous montrons que les seules mesures invariantes et invariantes par translation sont les mélanges de ces mesures de renouvellement.

ABSTRACT. — We study a jump process with an infinite number of particles on Z. The law of a jump for a particle only depends on the distance of this particle to its nearest neighbours and on the size of the jump. We give a condition on jump coefficients so that the process admits reversible measures which are explicitly computable renewal measures. When this condition is verified, we prove that translation invariant and invariant measures are only mixture of these renewal measures.

Mots-clés : Interacting particle system, Markov process; Jump process.

Classif. AMS : 60K35.

I. INTRODUCTION

Nous allons étudier un processus de Markov à temps continu qui représente un processus de saut à une infinité de particules sur Z. Ce processus prend ses valeurs dans la partie E de $\{0, 1\}^{Z}$ telle qu'il y ait une infinité de particules (représentées par des 1 dans $\{0, 1\}^{Z}$) sur Z^{+} et sur Z^{-}. Le mécanisme de l'évolution est le suivant. Si η est une configuration de E, nous notons $d_x(\eta)$ (respectivement $g_x(\eta)$) la distance entre le point x de Z et la plus proche particule de η située à sa droite (respectivement à sa gauche). Si à l'instant t le processus est dans la configuration η, pendant l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ une particule située au point x de Z ne peut sauter qu'en un point de l'intervalle $]x - g_x(\eta), x + d_x(\eta)[$ et elle saute au point $x + y$ de cet intervalle avec la probabilité $b(y, d_x(\eta), g_x(\eta))\, \Delta t + o(\Delta t)$. La probabilité pour que tout autre type de saut se produise pendant l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ vaut $o(\Delta t)^2$.

De manière plus précise, si $\mathcal{D}$ est l'ensemble des fonctions de E dans R qui ne dépendent que d'un nombre fini de coordonnées, si f appartient à $\mathcal{D}$, on définit l'opérateur L par :

$$\mathrm{L}f(\eta) = \sum_{\{x,y\} \in Z^2} c(\{x, y\}, \eta)[f(\eta^{x,y}) - f(\eta)]$$

où

$$\eta^{x,y}(z) = \eta(z) \quad \text{si} \quad z \neq x \quad \text{et} \quad z \neq y$$
$$\eta^{x,y}(x) = \eta(y)$$
$$\eta^{x,y}(y) = \eta(x)$$

et

$$c(\{x, y\}, \eta) = b(y - x, d_x(\eta), g_x(\eta)) \quad \text{si} \quad \eta(x) = 1, \qquad \eta(y) = 0,$$
$$0 < y - x < d_x(\eta) \quad \text{ou} \quad 0 > y - x > -g_x(\eta)$$
$$c(\{x, y\}, \eta) = b(x - y, d_y(\eta), g_y(\eta)) \quad \text{si} \quad \eta(y) = 1, \qquad \eta(x) = 0,$$
$$0 < x - y < d_y(\eta) \quad \text{ou} \quad 0 > x - y > -g_y(\eta)$$
$$c(\{x, y\}, \eta) = 0 \quad \text{dans les autres cas}.$$

On fait les hypothèses suivantes :

1) pour tous y, m, n entiers strictement positifs

$$b(y, m, n) = b(-y, n, m)$$

2) il existe $p(y)$ et $q(y)$ tels que pour tous y, m, n strictement positifs, y strictement supérieur à m, on ait

. $0 \leqslant q(y) \leqslant b(y, m, n) \leqslant p(y)$

. $0 < q(1)$

. si $q(y) = 0$ alors $p(y) = 0$

. $\sum_{y>0} p(y) < +\infty$.

Sous ces hypothèses il existe un unique processus de Markov sur E admettant L comme prégénérateur (cf. [*8*] et [*9*]).

Dans le deuxième paragraphe, nous étudions les mesures réversibles de ce processus. Nous montrons qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il admette des mesures réversibles, invariantes par translation, non triviales est qu'il existe une densité de probabilité f sur N*, de moment d'ordre 1 fini, telle que pour tous y, i, j strictement positifs, i strictement supérieur à j, on ait :

$$\text{(R)} \quad b(y, i, j) f(i) f(j) = b(y, j + y, i - y) f(j + y) f(i - y) .$$

Nous notons $\mathcal{G}$ la famille de mesures de renouvellement sur E dont les lois d'intervalle sont de la forme :

$$f_\lambda(i) = \frac{\lambda^i f(i)}{\sum_{i \geqslant 1} \lambda^i f(i)} .$$

C'est une famille à un paramètre dont les moyennes décrivent l'intervalle $]0, 1[$. Dans le cas ci-dessus toutes les mesures de $\mathcal{G}$ sont des mesures réversibles. Réciproquement, nous montrons qu'alors toute mesure réversible invariante par translation est un mélange de mesures de $\mathcal{G}$. Ces résultats sont similaires à ceux obtenus dans [*11*] dans le cadre des processus de naissance et mort sur Z et dans [*5*] dans le cadre d'évolutions de processus ponctuels sur la droite réelle.

Dans le troisième paragraphe nous montrons que les seules mesures invariantes et invariantes par translation sont les mesures réversibles, sous les hypothèses supplémentaires suivantes :

. $\sum_{y>0} |y| p(y) < +\infty$

. il existe une constante C strictement positive telle que $p(y) \leqslant C^y q(y)$ pour tout y positif.

Une étude semblable a été faite par Georgii dans [*4*]. Georgii montre que des processus d'exclusion avec changement de vitesse admettent comme seules mesures invariantes et invariantes par translation, des mesures de Gibbs canoniques qui sont réversibles pour l'évolution qu'il considère. On peut, ici aussi, exprimer les vitesses de saut du processus à l'aide d'un potentiel mais celui-ci est de norme infinie et les techniques de Georgii ne fonctionnent plus. Nous avons utilisé des techniques proches de celles utilisées par Holley [*6*], Holley et Stroock [*7*] et par Liggett [*10*] pour des processus de naissance et mort. Nous identifions seulement les mesures invariantes et invariantes par translation de l'évolution. Le résultat obtenu est sans doute vrai pour les mesures invariantes en général mais nous n'avons pas pu nous affranchir de l'hypothèse d'invariance par translation contrairement à ce qui a été fait dans [*7*]. Il aurait également été intéressant de montrer directement la décroissance dans le temps de l'énergie libre comme dans [*4*] et [*6*], mais cela semble plus difficile dans notre cas. Si nous supposons que les sauts se font uniquement sur les plus proches voisins ($q(y) = 0$ si $|y| > 1$) et que le processus est attractif ($b(1, m, n)$ est une fonction croissante en m et décroissante en n), nos résultats sont faciles à déduire de l'étude du processus des misanthropes faite par C. Cocozza dans [*3*]. Mais si les sauts ne sont plus uniquement de longueur 1 ou s'il n'y a plus attractivité, les techniques de couplage utilisées dans [*3*] ne semblent plus fonctionner. Réciproquement nos résultats transportés sur le processus des intervalles montrent que, pour le processus des misanthropes à plus proches voisins symétrique sur Z (et donc pour le processus de zéro-range symétrique sur Z) dont les coefficients de saut sont majorés et minorés par des constantes strictement positives, toutes les mesures invariantes et invariantes par translation sont des mélanges de mesures produits connues explicitement, et ceci sans hypothèse de croissance sur les coefficients.

II. MESURES RÉVERSIBLES

Nous savons qu'une condition nécessaire et suffisante pour que μ soit une mesure réversible est :
pour toute fonction f de $\mathscr{D}$ bornée on a

$$(1) \qquad \int \mu(d\eta) c(\{x, y\}, \eta) f(\eta) = \int \mu(d\eta) c(\{x, y\}, \eta) f(\eta^{x,y})$$

De cette condition nous allons déduire des relations sur les coefficients $c(\{x, y\}, \eta)$.

Si ξ est une configuration n'ayant qu'un nombre fini de points (c'est-à-dire un nombre fini de 1), nous notons $B_d(\xi)$ le point le plus à droite de ξ, $B_g(\xi)$ le point le plus à gauche de ξ, $B(\xi)$ le bord de ξ c'est-à-dire $B_d(\xi) \cup B_g(\xi)$ et $A(\xi)$ l'intervalle $[B_g(\xi), B_d(\xi)]$. Nous notons :

$$M(\xi) = \int \mu(d\eta) 1_{\{\eta; \eta = \xi \text{ sur } A(\xi)\}}$$

$$a(x, y, \xi) = 1_{\{\xi(x)=1\}} \int b(y, d_x(\eta), g_x(\eta)) \,|_{\{\eta = \xi \text{ sur } A(\xi)\}} \mu(d\eta).$$

Nous notons également ξ_k la configuration obtenue à partir de ξ en ajoutant un point à droite de $B_d(\xi)$ à la distance k et $M_y(\xi) = \sum_{k>y} M(\xi_k)$.

LEMME 2.1. — *a)* Si x appartient à $\xi \backslash B(\xi)$ et si $-g_x(\xi) < y < d_x(\xi)$ ou si $x = B_d(\xi)$ et $-g_x(\xi) < y < 0$ on a :

$$q(|y|)M(\xi) \leqslant a(x, y, \xi) \leqslant p(|y|)M(\xi)$$

b) Si $x = B_d(\xi)$ *et* $y > 0$ on a :

$$q(|y|)M_y(\xi) \leqslant a(x, y, \xi) \leqslant p(|y|)M_y(\xi) \leqslant p(|y|)M(\xi).$$

Démonstration. — C'est immédiat à partir de la définition de $a(x, y, \xi)$ et du fait que $q(|y|) \leqslant b(y, m, n) \leqslant p(|y|)$ si $y > 0$ et si $y < m$ ou si $y < 0$ et $-y < n$. ■

LEMME 2.2. — Si μ est une mesure sur E invariante par translation réversible pour l'évolution, différente de la mesure de Dirac δ_1 chargeant la configuration 1 sur tout Z, alors pour toute configuration ξ nous avons $M(\xi) > 0$.

Démonstration. — Nous utilisons la relation (1) avec la fonction $f(\eta) = 1_{\{\eta = \xi \text{ sur } A(\xi)\}}$. Cela donne $a(x, y, \xi) = a(x + y, -y, \xi^{x,x+y})$. D'où si x est dans $\xi \backslash B(\xi)$ et $-g_x(\xi) < y < d_x(\xi)$, d'après le lemme précédent, nous avons

$$a) \qquad p(|y|)M(\xi^{x,x+y}) \geqslant q(|y|)M(\xi)$$

et donc si $M(\xi)$ est strictement positif $M(\xi^{x,x+y})$ l'est aussi lorsque $q(|y|)$ n'est pas nul.

Si x est le bord droit de ξ et si $-g_x(\xi) < y < 0$, toujours d'après le lemme 2.1 nous avons

$$b) \qquad q(|y|)\mathrm{M}(\xi) \leqslant p(|y|)\mathrm{M}_{-y}(\xi^{x,x+y}) \leqslant p(|y|)\mathrm{M}(\xi^{x,x+y})\,;$$

par conséquent si $\mathrm{M}(\xi)$ est strictement positif alors $\mathrm{M}(\xi^{x,x+y})$ est également strictement positif dès que $q(|y|)$ n'est pas nul.

Si x est le bord droit de ξ et si y est strictement positif nous avons

$$c) \qquad q(|y|)\mathrm{M}_y(\xi) \leqslant p(|y|)\mathrm{M}(\xi^{x,x+y})$$

et donc si $\mathrm{M}_y(\xi)$ est strictement positif, $\mathrm{M}(\xi^{x,x+y})$ l'est aussi lorsque $q(|y|)$ est non nul.

Considérons maintenant l'ensemble C_n des configurations ξ de n points telles que $\mathrm{B}_g(\xi) = 0$. Nous avons :

$$\mu(\eta(0) = 1) = \sum_{\xi\in\mathrm{C}_n} \mathrm{M}(\xi)\,.$$

Comme $\mu(\eta(0) = 1)$ est strictement positif, il existe au moins un ξ dans C_n tel que $\mathrm{M}(\xi)$ soit strictement positif. Donc d'après les inégalités a) et b), puisque $q(1)$ est non nul, pour toute configuration η de C_n obtenue à partir de ξ en faisant bouger les points intérieurs ou en déplaçant vers la gauche le bord droit, la quantité $\mathrm{M}(\xi)$ est strictement positive. Il reste à montrer que l'on peut « déplacer » le bord droit de ξ vers la droite. D'après l'inégalité c) si $\mathrm{M}_1(\xi)$ est strictement positif alors $\mathrm{M}(\xi^{\mathrm{B}_d(\xi),\mathrm{B}_d(\xi)+1})$ est également strictement positif. Sinon on aurait $\mathrm{M}(\xi_1) = \mathrm{M}(\xi)$. Si $\mathrm{M}_1(\xi_1)$ est strictement positif alors $\mathrm{M}(\xi^{\mathrm{B}_d(\xi_1),\mathrm{B}_d(\xi_1)+1})$ est strictement positif et on en déduit facilement que $\mathrm{M}(\xi^{\mathrm{B}_d(\xi),\mathrm{B}_d(\xi)+1})$ est strictement positif. Sinon on recommence. Le procédé s'arrêtera un jour car μ étant invariante par translation et différente de δ_1 on ne peut pas avoir une demi-droite de 1μ p. s. On en déduit que $\mathrm{M}(\xi)$ est strictement positif pour tout ξ dans C_n et pour tout n supérieur ou égal à 2. ∎

LEMME 2.3. — Si μ est une probabilité sur E, invariante par translation, différente de δ_1, réversible pour le processus, pour tous points x, y, z, t de Z tels que $x < y < z < t$, nous avons :

$$\begin{aligned}\mu \text{ p. s.}\quad & c(\{z, t\}, \eta)c(\{x, y\}, \eta^{zt})c(\{z, t\}, (\eta^{zt})^{xy})c(\{x, y\}, \eta^{xy}) \\ &= c(\{x, y\}, \eta)c(\{z, t\}, \eta^{xy})c(\{x, y\}, (\eta^{xy})^{zt})c(\{z, t\}, \eta^{zt})\end{aligned}$$

Démonstration. — Nous appliquons deux fois la relation (1), une fois au couple $\{ x, y \}$, une autre fois au couple $\{ z, t \}$; nous trouvons pour toute fonction g de $\mathscr{D}$:

$$A = \int \mu(d\eta)c(\{ x, y \}, \eta)c(\{ z, t \}, \eta)c(\{ x, y \}, \eta^{zt})c(\{ z, t \}, \eta^{xy})g(\eta)$$

$$= \int \mu(d\eta)c(\{ z, t \}, \eta)c(\{ x, y \}, \eta^{zt})c(\{ z, t \}, (\eta^{zt})^{xy})c(\{ x, y \}, \eta^{xy}), c((\eta^{xy})^{zt}).$$

En refaisant la même opération d'abord avec $\{ z, t \}$ puis $\{ x, y \}$ nous trouvons :

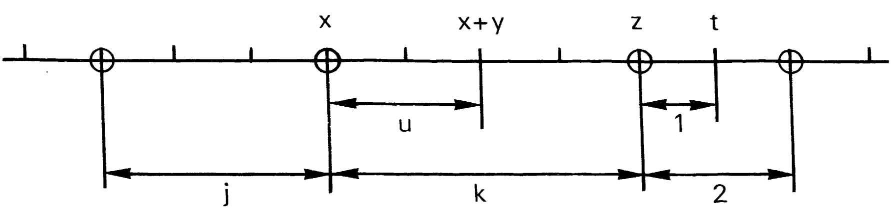
$$A = \int \mu(d\eta)c(\{ x, y \}, \eta)c(\{ z, t \}, \eta^{xy})c(\{ x, y \}, (\eta^{xy})^{zt})c(\{ z, t \}, \eta^{zt})g(\eta^{zt})^{xy}.$$

Ces égalités sont vraies pour toute fonction g de $\mathscr{D}$, on en déduit donc le lemme. ■

LEMME 2.4. — Si le processus admet une mesure réversible invariante par translation, différente de δ_1, pour tous entiers u, k, j strictement positifs tels que k soit strictement supérieur à u on a :

$$(2) \quad b(1, 2, k)b(u, k+1, j)b(1, k-u+1, 1)b(u, j+u, k-u)$$
$$= b(u, k, j)b(1, 2, k-u)b(u, j+u, k+1-u)b(1, k+1, 1).$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le lemme précédent à la configuration suivante :



LEMME 2.5. — Si le processus admet une mesure réversible, invariante par translation, différente de δ_1, il existe une densité de probabilité f sur $\mathbb{N}^*$ admettant un moment d'ordre 1 fini telle que pour tous entiers u, i, j strictement positifs, i strictement supérieur à u, on ait :

$$(R) \qquad b(u, i, j)f(i)f(j) = b(u, j + u, i - u)f(j + u)f(i - u).$$

Démonstration. — Posons $f(i) = \prod_{k=1}^{i-1} \frac{b(1, 2, k)}{b(1, k + 1, 1)}$ pour $i \geqslant 2$ et $f(1) = 1$.

En multipliant terme à terme l'égalité (2) avec les valeurs de k égales à $i-1$, $i-2, \ldots, u+1$ on trouve pour i strictement plus grand que $u+1$ et si $q(1)$ n'est pas nul :

$$a) \qquad \frac{b(u,i,j)b(u,u+j,1)}{b(y,j+u,i-u)b(u,u+1,j)} = \prod_{k=u+1}^{i-1} \frac{b(1,2,k-u)b(1,k+1,1)}{b(1,k-u+1,1)b(1,2,k)}.$$

Cette relation s'écrit avec $j = 1$, $i = u + c$, $c > 1$:

$$b) \qquad \frac{b(u,u+c,1)}{b(u,u+1,c)} = \prod_{k=1}^{c-1} \frac{b(1,2,k)b(1,u+k+1,1)}{b(1,k+1,1)b(1,2,u+k)}$$

$$= \prod_{k=1}^{u} \frac{b(1,2,k)}{b(1,k+1,1)} \prod_{k=c}^{u+c-1} \frac{b(1,k+1,1)}{b(1,2,k)}.$$

On peut également écrire :

$$c) \qquad \prod_{a=u+1}^{i-1} \frac{b(1,2,a-u)b(1,a+1,1)}{b(1,a-u+1,1)b(1,2,a)} = \prod_{k=1}^{u} \frac{b(1,2,k)}{b(1,k+1,1)} \prod_{k=i-1-u}^{i-1} \frac{b(1,k+1,1)}{b(1,2,k)}$$

d'où en reportant $b)$ (avec $c = j$) et $c)$ dans $a)$:

$$\frac{b(u,i,j)}{b(u,j+u,i-u)} = \prod_{k=i-1-u}^{i-1} \frac{b(1,k+1,1)}{b(1,2,k)} \prod_{k=j}^{u+j-1} \frac{b(1,2,k)}{b(1,k+1,1)}$$

$$= \frac{f(i-u)}{f(i)} \frac{f(u+j)}{f(j)}.$$

Si $i = u + 1$ et si $j > 1$:

$$\frac{b(u,u+j,1)}{b(u,u+1,j)} = \prod_{k=1}^{u} \frac{b(1,2,k)}{b(1,k+1,1)} \prod_{k=j}^{u+j-1} \frac{b(1,k+1,1)}{b(1,2,k)}$$

$$= \frac{f(u+1)}{f(1)} \frac{f(j)}{f(u+j)}.$$

Enfin si $i = u + 1$ et si $j = 1$ l'égalité ci-dessus est évidente.

Reste à vérifier que f est une densité de probabilité et qu'elle admet un moment d'ordre un fini. On a

$$f(i) \leqslant \left(\frac{p(1)}{q(1)}\right)^{i-1}.$$

Si on pose $\tilde{f}(i) = \mathrm{K}\tilde{\mathrm{K}}^i f(i)$, $\tilde{f}$ vérifie encore la relation (R) et on peut choisir K et $\tilde{\mathrm{K}}$ pour que $\tilde{f}$ satisfasse l'hypothèse voulue. ■

LEMME 2.6. — S'il existe une densité de probabilité f sur N*, de premier moment fini, telle que pour $y > 0$, $i > y$, $j > 0$, on ait :

$$\text{(R)} \quad f(i)f(j)b(y, i, j) = f(j + y)f(i - y)b(y, j + y, i - y)$$

alors la mesure de renouvellement dont la loi d'espacement est f est une mesure réversible pour l'évolution.

Démonstration. — Soit ξ une configuration finie formée des points 0, v_1, $v_2, \ldots, v_n$, et posons $u_i = v_i - v_{i-1}$ $(u_1 = v_1)$. Nous allons vérifier la relation (1) pour la fonction :

$$f(\eta) = 1_{\{\eta;\, n = \xi \,\text{sur}\, \mathrm{A}(\xi)\}}\,.$$

Il sera alors clair que la relation (1) sera vraie pour toute fonction de $\mathscr{D}$. Prenons d'abord $x = v_i$, $v_i < y < v_{i+1}$, $1 < i < n - 1$

$$\int \mu(d\eta)c(\{x, y\}, \eta)f(\eta) = \mathrm{K}b(y - x, u_{i+1}, u_i)\prod_{j=1}^{n} f(u_j)$$

$$\int \mu(d\eta)c(\{x, y\}, \eta)f(\eta^{xy})$$

$$= \mathrm{K}b(y - x, u_i + y - x, u_{i+1} - y + x)\prod_{j=1}^{n} f(u_j)\,\frac{f(u_i + y - x)f(u_{i+1} - y + x)}{f(u_i)f(u_{i+1})}.$$

Du fait de la relation (R), les deux termes ci-dessus sont égaux.

On vérifie de la même manière la relation (1) lorsque $x = v_i$, $v_{i-1} < y < v_i$, $1 < i < n - 1$. Si $x = 0$ et $0 < y < v_1$ on a :

$$\int \mu(d\eta)c(\{x, y\}, \eta)f(\eta) = \mathrm{K}\sum_{k>0} b(y, u_1, k)f(k)\prod_{j=1}^{n} f(u_j)$$

$$\int \mu(d\eta)c(\{x, y\}, \eta)f(\eta^{xy}) = \mathrm{K}\sum_{k>0} b(y, k+y, u_1 - y)f(k+y)f(u_1 - y)\prod_{j=2}^{n} f(u_j)$$

et là aussi la relation (1) est vérifiée.

Les autres cas sont semblables. ■

Nous avons démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 2.7. — Pour que l'évolution admette une mesure réversible invariante par translation, différente de δ_1, il faut et il suffit qu'il existe une densité de probabilité f sur N* de premier moment fini satisfaisant la relation :

$$(\mathrm{R}) \quad f(i)f(j)b(y, i, j) = f(i-y)f(j+y)b(y, j+y, i-y)$$

pour tous entiers y, i, j strictement positifs, i strictement supérieur à y.

Nous notons $\mathcal{G}$ la famille de mesures de renouvellement sur E dont les lois d'intervalles sont de la forme :

$$f_\lambda(i) = \frac{\lambda^i f(i)}{\sum_{i>1} \lambda^i f(i)}$$

où λ est tel que $\sum_{i>1} \lambda^i f(i) < +\infty$. C'est une famille à un paramètre de mesures sur E.

Si f satisfait la relation (R), toute densité de probabilité f_λ satisfait également la relation (R). Il existe donc une famille à un paramètre de mesures de renouvellement qui sont réversibles pour l'évolution. Dans le théorème suivant on va identifier toutes les mesures réversibles invariantes par translation.

THÉORÈME 2.8. — Si la relation (R) est vérifiée, toute mesure réversible invariante par translation, différente de δ_1 est un mélange des mesures de renouvellement de la famille $\mathcal{G}$.

Démonstration. — Soit μ une mesure réversible invariante par translation différente de δ_1. Soit $\xi_{l,r}$ la configuration formée de trois points 0, l, $l+r$ où l et r sont deux entiers strictement positifs. Soit enfin ζ une configuration finie extérieure à $[0, l+r]$.

Appliquons la relation (1) à la fonction $f(\eta) = 1_{\{\eta = \xi_{l,r} \cup \zeta \text{ sur } A(\xi_{l,r} \cup \zeta)\}}$ et au couple $\{l, l+y\}$ avec $0 < y < r$. D'après le lemme 2.1 $M(\xi_{l,r} \cup \zeta)$ et $M(\xi_{l,r}^{l,l+y} \cup \zeta)$ sont strictement positifs. On obtient si $q(y)$ est non nul :

$$\frac{b(y, l+y, r-y)}{b(y, r, l)} = \frac{M(\xi_{l,r} \cup \zeta)}{M(\xi_{l,r}^{l,l+y} \cup \zeta)}.$$

Du fait de la relation (R) μ satisfait l'égalité :

$$(3) \qquad \frac{M(\xi_{l,r} \cup \zeta)}{M(\xi_{l,r}^{l,l+y} \cup \zeta)} = \frac{f(l)f(r)}{f(l+y)f(r-y)}.$$

Soit $\xi_{k_1,\ldots,k_p}$ la configuration des $p+1$ points $0, k_1, k_1+k_2, \ldots, k_1+k_2+\ldots+k_p$. Nous allons identifier μ à l'aide des $M(\xi_{k_1,\ldots,k_p})$.

D'abord si $k_1 = k_2 \ldots = k_{p-1} = 1$ et $k_p = n$, posons

$$M(\xi_{k_1,k_2,\ldots,k_p}) = (f(1))^{p-1} f(n)\alpha_{p,n} \qquad \text{et} \qquad M(\xi_n) = \alpha_{1,n} f(n)\,.$$

A l'aide de la relation (3) il est facile de voir qu'alors pour tous $k_1, \ldots, k_p$ on a $M(\xi_{k_1,\ldots,k_p}) = f(k_1)f(k_2)\ldots f(k_p)\alpha_{p,k_1+k_2+\ldots+k_p-p+1}$ ceci en passant de la configuration $\xi_{1,1,\ldots,1,k_1+\ldots+k_p-p+1}$ à la configuration $\xi_{k_1,\ldots,k_p}$ par des sauts successifs de coefficients non nuls (au pire par des sauts de 1 puisque $q(1)$ est strictement positif).

Il reste à identifier les coefficients $\alpha_{p,n}$. Considérons $\xi_{k_1,\ldots,k_p}$ où $k_1 = \ldots = k_{p-1} = 1$, $k_p < n$. Nous avons $M(\xi_{k_1,\ldots,k_p}) = \sum_{k\geq 1} M(\xi_{k_1,\ldots,k_p,k})$ d'où $f(1)^{p-1}f(n)\alpha_{p,n} = \sum_{m\geq 1} f(1)^{p-1}f(n)f(m)\alpha_{p+1,n+m-1}$ d'où

$$\alpha_{pn} = \sum_{m\geq 1} f(m)\alpha_{p+1,n+m-1}.$$

Les $\alpha_{p,n}$ sont les fonctions harmoniques associées à une marche aléatoire sur Z^2 de probabilité de transition $P((p, n), (p+1, n+k)) = f(k+1)$ si $k \geq 0$, $P((p, n), (q, m)) = 0$ dans les autres cas.

Les fonctions harmoniques extrémales sont de la forme $\alpha_{p,n} = \alpha_{1,1}K^{p-1}J^{n-1}$ (cf. [2]) avec $K \sum_{m\geq 1} f(m)J^{m-1} = 1$ et donc il existe une probabilité $\lambda(ds)$ sur $[0, 1]$ telle que : $\alpha_{p,n} = \int_0^1 \lambda(ds)\alpha_{1,1}K_s^{p-1}J_s^{n-1}$ où $K_s \sum_{m\geq 1} f(m)J_s^{m-1} = 1$ et $\alpha_{1,1} = \dfrac{M(\xi_1)}{f(1)}$. On a alors

$$\begin{aligned} M(\xi_{k_1,\ldots,k_p}) &= \prod_{i=1}^{p} f(k_i) \int_0^1 \lambda(ds)\alpha_{1,1}K_s^{p-1}J_s^{k_1+\ldots+k_p-p} \\ &= \int_0^1 \lambda(ds)\frac{\alpha_{1,1}}{K_s}\prod_{i=1}^{p} \tilde{f}_s(k_i) \end{aligned}$$

où $\tilde{f}_s(k_i) = K_sJ_s^{k_i-1}f(k_i)$ est une densité de probabilité sur N^*.

D'autre part

$$\mu(\eta(0) = 1) = \sum_{n \geq 1} M(\xi_n)$$

$$= \sum_{n \geq 1} f(n) \int_0^1 \lambda(ds) \frac{\alpha_{1,1}}{K_s} K_s J_s^{n-1}$$

$$= \int_0^1 \lambda(ds) \frac{\alpha_{1,1}}{K_s}$$

μ étant invariante par translation nous avons également :

$$\mu(\eta(0) = 0) = \sum_{1,r \geq 1} \int_0^1 \lambda(ds) \frac{\alpha_{1,1}}{K_s} \tilde{f}_s(1 + r)$$

$$= \int_0^1 \lambda(ds) \frac{\alpha_{1,1}}{K_s} \left(\sum_{j \geq 1} j\tilde{f}_s(j) - 1 \right)$$

$$= \int_0^1 \lambda(ds) \frac{\alpha_{1,1}}{K_s} \sum_{j \geq 1} j\tilde{f}(j) - \mu(\eta(0) = 1)$$

d'où
$$\int_0^1 \lambda(ds) \frac{\alpha_{1,1}}{K_s} \sum_{j \geq 1} j\tilde{f}_s(j) = 1 .$$

On peut donc écrire $M(\xi_{k_1,\ldots,k_p}) = \int_0^1 \lambda'(ds) \frac{1}{\sum_{j \geq 1} j\tilde{f}_s(j)} \prod_{i=1}^{p} \tilde{f}_s(k_i)$ où

$\lambda'(ds) = \lambda(ds) \frac{\alpha_{1,1}}{K_s} \sum_{j \geq 1} j\tilde{f}_s(j)$ est une loi de probabilité sur $[0, 1]$.

Ceci démontre bien que μ est un mélange de mesures de renouvellement associées aux fonctions $\tilde{f}$. ■

Exemples. — 1) Pour y, i, j entiers strictement positifs, i strictement supérieur à y, prenons

$$b(y, i, j) = p(y) \sqrt{\frac{f(i - y) f(j + y)}{f(i) f(j)}}$$

avec : – f densité de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ de premier moment fini et telle qu'il existe des constantes γ_1 et γ_2 vérifiant pour tout i :

$$0 < \gamma_1 \leqslant \frac{f(i+1)}{f(i)} \leqslant \gamma_2$$

– $p(1)$ est strictement positif et $(\gamma_2/\gamma_1)^{y/2}p(y)$ est sommable.

Alors les conditions des théorèmes du paragraphe sont vérifiées.

2) Pour y, i, j entiers strictement positifs, i strictement supérieur à y, prenons

$$b(y, i, j) = p(y)\frac{g(i+j)}{f(i)f(j)}$$

où f est une densité de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ de premier moment fini et g une fonction positive quelconque. La relation (R) est vérifiée. Cette forme est nécessaire dès que $b(y, i, j)$ s'écrit $p(y)b(i, j)$. C'est le modèle étudié par Spitzer dans [7]. Les hypothèses du paragraphe sont vérifiées dès que :

$$0 < C_1 \leqslant \frac{g(i+j)}{f(i)f(j)} \leqslant C_2$$

$$\sum_{y>0} p(y) < \infty$$

$$p(1) > 0 .$$

3) Si $b(y, i, j)$ est nul dès que y est supérieur ou égal à 2 et si :

$$- \; 0 < b \leqslant b(1, i, j) \leqslant B$$

$$- \; \frac{b(1, j+1, i-1)}{b(1, i, j)} = \frac{b(1, j+1, 1)b(1, 2, i-1)}{b(1, 2, j)b(1, i, 1)}$$

la relation (R) est alors vérifiée avec $f(i) = \displaystyle\prod_{k=1}^{i-1} \frac{b(1, 2, k)}{b(1, k+1, 1)}$ et les hypothèses du paragraphe sont vraies. On retrouve là l'analogue du modèle étudié par C. Cocozza dans [3].

III. MESURES INVARIANTES

Dans ce chapitre, nous supposerons que la relation (R) est vérifiée. Nous ferons en outre les hypothèses supplémentaires suivantes :

. $\sum_y p(|y|)|y| < +\infty$

. il existe $C > 0$ tel que $\frac{p(y)}{q(y)} < C^y$ pour tout $y > 0$.

Nous allons montrer que sous ces conditions, les mesures invariantes, invariantes par translation, sont réversibles et donc sont les mélanges de mesures de renouvellement.

Soit donc μ une mesure invariante, invariante par translation et différente de δ_1.

Si ξ est une configuration finie, nous définissons $M(\xi)$ et $a(x, y, \xi)$ comme au début du paragraphe précédent.

Soit ν la mesure de renouvellement associée à la fonction f intervenant dans la relation (R). Nous posons :

$$N(\xi) = \int \nu(d\eta) 1_{\{\eta;\, \eta = \xi \text{ sur } A(\xi)\}}.$$

LEMME 3.1. — 1) Pour tout ξ, $M(\xi)$ est strictement positif.

2) $a(x, y, \xi)$ est nul si et seulement si $a(x + y, -y, \xi^{x,x+y})$ est nul.

Démonstration. — 1) Appliquons l'égalité $\mu L f = 0$ à la fonction

$$f(\eta) = 1_{\{\eta;\, \eta = \xi \text{ sur } A(\xi)\}}.$$

Nous trouvons :

$$\sum_{x \in \xi} \sum_{y \neq 0} (a(x + y, -y, \xi^{x,x+y}) - a(x, y, \xi)) = 0$$

et la série ci-dessus est absolument convergente. En utilisant le lemme 2.1 on en déduit :

$$\sum_{x \in \xi \setminus B(\xi)} \sum_{-g_x(\xi) < y < d_x(\xi)} q(|y|) M(\xi^{x,x+y}) + \sum_{-g_x(\xi) < y < 0} q(|y|) M_{-y}(\xi^{B_d(\xi), B_d(\xi)+y})$$
$$+ \sum_{y > 0} q(|y|) M(\xi^{B_d(\xi), B_d(\xi)+y}) \leqslant \sum_{x \in \xi} \sum_{y \neq 0} p(|y|) M(\xi).$$

De cette inégalité on déduit les mêmes implications que dans le lemme 2.2 et on termine la démonstration de la même manière.

2) Si x appartient à $\xi \backslash B(\xi)$ et si $-g_x(\xi) < y < d_x(\xi)$ on a :

$$a(x, y, \xi) = b(y, d_x(\xi), g_x(\xi))M(\xi)$$
$$a(x+y, -y, \xi^{x,x+y}) = b(y, g_x(\xi)+y, d_x(\xi)-y)M(\xi^{x,x+y})$$

et les deux termes sont non nuls si $q(|y|)$ est non nul.

Si x appartient à $\xi \backslash B(\xi)$ et si y est ou bien strictement supérieur à $d_x(\xi)$ ou bien strictement inférieur à $-g_x(\xi)$, les deux termes sont nuls.

Si x est un bord de ξ, par exemple le bord droit, et si y est strictement positif on peut écrire :

$$a(x, y, \xi) = \sum_{k>y} b(y, k, g_x(\xi))M(\xi_k)$$
$$a(x+y, -y, \xi^{x,x+y}) = \sum_{k>y} b(y, g_x(\xi)+y, k-y)M(\xi_{k-y}^{x,x+y})$$

et ces deux termes sont non nuls si $q(|y|)$ est non nul.

Si x est le bord droit de ξ et si $-g_x(\xi) < y < 0$ les quantités sont non nulles, par contre si y est strictement inférieur à $-g_x(\xi)$ elles sont nulles.

■

La technique que nous allons utiliser est basée sur l'étude de l'énergie libre :

$$H_n(\mu) = -\sum_{\xi \in C_n} M(\xi) \operatorname{Log} \frac{M(\xi)}{N(\xi)}$$

où C_n est l'ensemble des configurations finies de n points dont le point le plus à gauche est 0.

LEMME 3.2. — Si μ est une mesure invariante par translation, non nulle alors :

$$\sum_{\xi \in C_n} M(\xi) \left| \operatorname{Log} \frac{M(\xi)}{N(\xi)} \right| \leqslant Kn.$$

Démonstration. — On a clairement :

$$\sum_{\xi \in C_n} M(\xi) \left| \operatorname{Log} \frac{M(\xi)}{N(\xi)} \right| \leqslant \sum_{\xi \in C_n} M(\xi) \operatorname{Log} \frac{1}{M(\xi)} + \sum_{\xi \in C_n} M(\xi) \operatorname{Log} \frac{1}{N(\xi)} .$$

Pour une configuration η chargeant 0, on note $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ses points à droite de 0 et $l_i(\eta) = x_i - x_{i-1}$ les intervalles successifs. On peut écrire :

$$\sum_{\xi \in C_n} M(\xi) \operatorname{Log} \frac{1}{N(\xi)} = K_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \int \mu(d\eta) 1_{\{\eta(0)=1\}} \operatorname{Log} \frac{1}{f(l_i(\eta))}.$$

Or $K_2^k \leqslant f(k) \leqslant K_3^k$ puisque $f(k) = \prod_{j=1}^{k-1} \frac{b(1,2,j)}{b(1,j+1,1)} C\tilde{C}^k$ donc

$$\begin{aligned} \int \mu(d\eta) 1_{\{\eta(0)=1\}} \operatorname{Log} \frac{1}{f(l_i(\eta))} &\leqslant K_4 \int \mu(d\eta) 1_{\{\eta(0)=1\}} l_i(\eta) \\ &\leqslant K_4 \mu(\eta(0) = 1) \int \hat{\mu}(d\eta) l_i(\eta) \end{aligned}$$

où $\hat{\mu}(d\eta)$ est la mesure de Palm associée à μ.

Or $\int \hat{\mu}(d\eta) l_i(\eta) = \frac{1}{\mu(\eta(0) = 1}$ donc $\sum_{\xi \in C_n} M(\xi) \operatorname{Log} \frac{1}{N(\xi)} \leqslant K_1 + (n-1) K_4.$

D'autre part $\sum_{\xi \in C_n} M(\xi) \log \frac{1}{M(\xi)}$ est à une constante près l'entropie associée à la mesure de Palm $\hat{\mu}$, donc $\sum_{\xi \in C_n} M(\xi) \operatorname{Log} \frac{1}{M(\xi)} \leqslant (n-1) \sum_{\xi \in C_2} M(\xi) \operatorname{Log} \frac{1}{M(\xi)}$

$$\leqslant (n-1) \sum_{k \geqslant 1} \mu(\{\eta(0)=1\} \cap \{l_1(\eta)=k\}) \operatorname{Log} \frac{1}{\mu(\{\eta(0) = 1\} \cap \{l_1(\eta) = k\})}.$$

Or $\sum_{k \geqslant 1} k\mu(\{\eta(0) = 1\} \cap \{l_1(\eta) = k\})$ est fini donc l'entropie

$$\sum_{k \geqslant 1} \mu(\{\eta(0)=1\} \cap \{l_1(\eta) = k\}) \operatorname{Log} \frac{1}{\mu(\{\eta(0) = 1\} \cap \{l_1(\eta) = k\})}$$

est également finie.

En effet, si $p_k \geqslant 0$, $q_k \geqslant 0$, $\sum_{k \geqslant 1} p_k = \sum_{k \geqslant 1} q_k < \infty$, on sait que :

$$\sum_{k \geqslant 1} p_k \operatorname{Log} \frac{q_k}{p_k} \leqslant 0.$$

On applique alors cette inégalité à $p_k = \mu(\{\eta(0) = 1\} \cap \{l_1(\eta) = k\})$ et à $q_k = Ce^{-k}$ pour trouver le résultat. ■

Pour démontrer que μ est en fait une mesure réversible, on va montrer que $a(x+y, -y, \xi^{x,x+y}) = a(x, y, \xi)$. Pour ceci on va s'intéresser à la quantité :

$$D_n = \sum_{\xi\in C_n} \sum_{x\in\xi} \sum_{y\neq 0} h(a(x+y, -y, \xi^{x,x+y}), a(x, y, \xi))$$

où $h(s, t) = (s-t) \operatorname{Log} \frac{s}{t}$ $(h(0, 0) = 0)$: $h(s, t)$ est une fonction positive, homogène, convexe, tendant vers zéro si (s, t) tend vers zéro.

LEMME 3.3.

$$D_n = \sum_{\xi\in C_n} \sum_{x\in B(\xi)} \sum_{y\neq 0} (a(x+y, -y, \xi^{x,x+y}) - a(x, y, \xi)) \operatorname{Log} \frac{a(x+y, -y, \xi^{x,x+y}) M(\xi) N(\xi^{x,x+y})}{a(x, y, \xi) M(\xi^{x,x+y}) N(\xi)} .$$

Démonstration. — La relation $\mu L f = 0$ appliquée à $f(\eta) = 1_{\{\eta = \xi \text{ sur } A(\xi)\}}$ donne :

$$\sum_{x\in\xi} \sum_{y\neq 0} (a(x+y, -y, \xi^{x,x+y}) - a(x, y, \xi)) = 0$$

d'où

$$E = \sum_{\xi\in C_n} \sum_{x\in\xi} \sum_{y\neq 0} (a(x+y, -y, \xi^{x,x+y}) - a(x, y, \xi)) \operatorname{Log} \frac{M(\xi)}{N(\xi)} = 0 .$$

Cette série est absolument convergente car :

$$\sum_{\xi\in C_n} \sum_{x\in\xi} \sum_{y\neq 0} a(x, y, \xi) \left| \operatorname{Log} \frac{M(\xi)}{N(\xi)} \right| \leqslant n \sum_{y\neq 0} p(|y|) \sum_{\xi\in C_n} M(\xi) \left| \operatorname{Log} \frac{M(\xi)}{N(\xi)} \right|$$
$$\leqslant K n^2 \sum_{y\neq 0} p(|y|)$$

et

$$\sum_{\xi\in C_n} \sum_{x\in\xi} \sum_{y\neq 0} a(x+y, -y, \xi^{x,x+y}) \left| \operatorname{Log} \frac{M(\xi)}{N(\xi)} \right|$$
$$= \sum_{\xi\in C_n} \sum_{x\in\xi} \sum_{y\neq 0} a(x, y, \xi) \left| \operatorname{Log} \frac{M(\xi)}{N(\xi)} \right| .$$

On va maintenant transformer l'expression E.

$$\mathrm{E} = \sum_{\eta\in \mathrm{C}_n}\sum_{\substack{z\in\eta\\ z\neq 0}}\sum_{y\neq 0}(a(z, -y, \eta) - a(z-y, y, \eta^{z,z-y}))\,\mathrm{Log}\,\frac{\mathrm{M}(\eta^{z,z-y})}{\mathrm{N}(\eta^{z,z-y})}$$

$$+\sum_{\xi\in \mathrm{C}_n}\sum_{y\neq 0}(a(y, -y, \xi^{0,y}) - a(0, y, \xi))\,\mathrm{Log}\,\frac{\mathrm{M}(\xi)}{\mathrm{N}(\xi)}.$$

Le premier terme s'obtient en posant $\xi^{x,x+y} = \eta$; le deuxième terme est celui pour lequel $x = 0$. Pour étudier ce deuxième terme on va utiliser l'invariance par translation. Si on désigne par τ_y l'opérateur de translation de longueur y on a : $a(y, -y, \xi^{0,y}) = a(0, -y, \tau_{-y}\xi^{0,y})$. Posons $\eta = \tau_{-y}\xi^{0,y}$ d'où $\xi = \tau_y\eta^{0,-y}$. Si y est fixé et négatif et si ξ parcourt toutes les configurations de C_n, alors η parcourt toutes les configurations de C_n telles que $d_0(\eta) > |\,y\,|$, d'où :

$$\sum_{y<0}\sum_{\xi\in \mathrm{C}_n}(a(y, -y, \xi^{0,y}) - a(0, y, \xi))\,\mathrm{Log}\,\frac{\mathrm{M}(\xi)}{\mathrm{N}(\xi)}$$

$$= \sum_{y<0}\sum_{\substack{n\in \mathrm{C}_n\\ d_0(\eta)>|y|}}(a(0, -y, \eta) - (a(0, y, \tau_y\eta^{0,-y}))\,\mathrm{Log}\,\frac{\mathrm{M}(\eta^{0,-y})}{\mathrm{N}(\eta^{0,-y})}$$

$$= \sum_{y<0}\sum_{\substack{n\in \mathrm{C}_n\\ d_0(\eta)>|y|}}(a(0, -y, \eta) - a(-y, y, \eta^{0,-y}))\,\mathrm{Log}\,\frac{\mathrm{M}(\eta^{0,-y})}{\mathrm{N}(\eta^{0,-y})}$$

$$= \sum_{y>0}\sum_{\eta\in \mathrm{C}_n}(a(y, -y, \eta^{0,y}) - a(0, y, \eta))\,\mathrm{Log}\,\frac{\mathrm{N}(\eta^{0,y})}{\mathrm{M}(\eta^{0,y})}.$$

Si y est positif on refait la même chose et on trouve en définitive :

$$0 = \mathrm{E} = \sum_{\xi\in \mathrm{C}_n}\sum_{x\in\xi}\sum_{y\neq 0}(a(x+y, -y, \xi^{x,x+y}) - a(x, y, \xi))\,\mathrm{Log}\,\frac{\mathrm{N}(\xi^{x,x+y})}{\mathrm{M}(\xi^{x,x+y})}.$$

En additionnant les deux expressions de E à D_n on obtient :

$$\mathrm{D}_n = \sum_{\xi\in \mathrm{C}_n}\sum_{x\in\xi}\sum_{y\neq 0}(a(x+y, -y, \xi^{x,x+y}) - a(x, y, \xi))$$

$$\mathrm{Log}\,\frac{a(x+y, -y, \xi^{x,x+y})\mathrm{M}(\xi)\mathrm{N}(\xi^{x,x+y})}{a(x, y, \xi)\mathrm{N}(\xi)\mathrm{M}(\xi^{x,x+y})}.$$

Or si x n'appartient pas au bord de ξ et si y appartient à $]-g_x(\xi), d_x(\xi)[$ on a :

$$a(x+y, -y, \xi^{x,x+y}) = b(y, g_x(\xi)+y, d_x(\xi)-y)\mathrm{M}(\xi^{x,x+y})$$

et

$$a(x, y, \xi) = b(y, d_x(\xi), g_x(\xi))\mathrm{M}(\xi)$$

donc

$$\frac{a(x+y, -y, \xi^{x,x+y})\mathrm{M}(\xi)\mathrm{N}(\xi^{x,x+y})}{a(x, y, \xi)\mathrm{N}(\xi)\mathrm{M}(\xi^{x,x+y})} = \frac{b(y, g_x(\xi)+y, d_x(\xi)-y)\mathrm{N}(\xi^{x,x+y})}{b(y, d_x(\xi), g_x(\xi))\mathrm{N}(\xi)}$$
$$= 1 \quad \text{grâce à la relation (R)}.$$

On a bien l'égalité du lemme. ■

LEMME 3.4. — $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{D}_n}{n} = 0.$

Démonstration. — En faisant les mêmes transformations que dans le lemme précédent on trouve :

$$\sum_{\xi\in \mathrm{C}_n}\sum_{x\in \mathrm{B}(\xi)}\sum_{y\neq 0}(a(x+y, -y, \xi^{x,x+y}) \operatorname{Log} \frac{a(x+y, -y, \xi^{x,x+y})\mathrm{M}(\xi)\mathrm{N}(\xi^{x,x+y})}{a(x, y, \xi)\mathrm{M}(\xi^{x,x+y})\mathrm{N}(\xi)}$$
$$= \sum_{\xi\in \mathrm{C}_n}\sum_{x\in \mathrm{B}(\xi)}\sum_{y\neq 0} a(x, y, \xi) \operatorname{Log} \frac{a(x, y, \xi)\mathrm{M}(\xi^{x,x+y})\mathrm{N}(\xi)}{a(x+y, -y, \xi^{x,x+y})\mathrm{M}(\xi)\mathrm{N}(\xi^{x,x+y})}$$

donc

$$\mathrm{D}_n = 2\sum_{\xi\in \mathrm{C}_n}\sum_{x\in \mathrm{B}(\xi)}\sum_{y\neq 0} a(x, y, \xi)$$
$$\left[\operatorname{Log}\frac{\mathrm{N}(\xi)}{\mathrm{N}(\xi^{x,x+y})} + \operatorname{Log}\frac{a(x, y, \xi)}{\mathrm{M}(\xi)} + \operatorname{Log}\frac{\mathrm{M}(\xi^{x,x+y})}{a(x+y, -y, \xi^{x,x+y})}\right]$$

D_n s'écrit donc comme la somme de trois termes.

Pour étudier le premier terme on remarque que $\dfrac{\mathrm{N}(\xi)}{\mathrm{N}(\xi^{x,x+y})} = \dfrac{f(l \pm |y|)}{f(l)}$ si x est un bord de ξ et l la distance entre le point x et son voisin.

Comme $f(i) = f(1)\lambda^{i-1}\displaystyle\prod_{k=1}^{i-1}\frac{b(1, 2, k)}{b(1, k+l, 1)}$ on a $\left|\operatorname{Log}\dfrac{\mathrm{N}(\xi)}{\mathrm{N}(\xi^{x,x+y})}\right| \leqslant \mathrm{C}_1 |y|$ et

$$2\sum_{\xi\in \mathrm{C}_n}\sum_{x\in \mathrm{B}(\xi)}\sum_{y\neq 0} a(x, y, \xi) \operatorname{Log}\frac{\mathrm{N}(\xi)}{\mathrm{N}(\xi^{x,x+y})} \leqslant 4\mathrm{C}_1 \sum_{y\neq 0} |y|\, p(|y|) \sum_{\xi\in \mathrm{C}_n} \mathrm{M}(\xi)$$
$$\leqslant 4\mathrm{C}_1 \sum_{y\neq 0} |y|\, p(|y|).$$

Pour le deuxième terme on trouve :

$$2\sum_{\xi\in C_n}\sum_{x\in B(\xi)}\sum_{y\neq 0} a(x, y, \xi)\,\mathrm{Log}\,\frac{a(x, y, \xi)}{M(\xi)} \leqslant 2\sum_{\xi\in C_n}\sum_{x\in B(\xi)}\sum_{y\neq 0} p(|y|)M(\xi)\,\mathrm{Log}^+ p(|y|)$$

$$\leqslant 4\sum_{y\neq 0} p(|y|)\,\mathrm{Log}^+ p(|y|).$$

Pour le troisième terme, on va d'abord travailler avec x bord droit de ξ et y strictement positif :

$$2\sum_{\xi\in C_n}\sum_{y>0} a(B_d(\xi), y, \xi)\,\mathrm{Log}\,\frac{M(\xi^{B_d(\xi),B_d(\xi)+y})}{a(B_d(\xi)+y, -y, \xi^{B_d(\xi),B_d(\xi)+y})}$$

$$\leqslant 2\sum_{\xi\in C_n}\sum_{y>0} p(|y|)M(\xi)\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{q(|y|)}$$

$$\leqslant 2\sum_{y>0} Cyp(y) + \sum_{y>0} p(y)\,\mathrm{Log}^+\frac{1}{p(y)},$$

puisque $q(y)M(\xi^{B_d(\xi),B_d(\xi)+y}) \leqslant a(B_d(\xi)+y, -y, \xi^{B_d(\xi),B_d(\xi)+y})$.

Regardons maintenant le cas où x est le bord droit de ξ et $-g_x(\xi) < y < 0$:

$$2\sum_{\xi\in C_n}\sum_{-g_x(\xi)<y<0} a(B_d(\xi), y, \xi)\,\mathrm{Log}\,\frac{M(\xi^{B_d(\xi),B_d(\xi)+y})}{a(B_d(\xi)+y, -y, \xi^{B_d(\xi),B_d(\xi)+y})}$$

$$= 2\sum_{\xi\in C_n}\sum_{-g_x(\xi)<y<0} a(B_d(\xi), y, \xi)$$

$$\left[\mathrm{Log}\,\frac{M(\xi^{B_d(\xi),B_d(\xi)+y})}{M(\xi)} + \mathrm{Log}\,\frac{M_{-y}(\xi^{B_d(\xi),B_d(\xi)+y})}{a(B_d(\xi)+y, -y, \xi^{B_d(\xi),B_d(\xi)+y})} + \mathrm{Log}\,\frac{M(\xi)}{M_{-y}(\xi^{B_d(\xi),B_d(\xi)+y})}\right]$$

$$= A_1 + A_2 + A_3.$$

$$A_1 = 2\sum_{\xi\in C_n}\sum_{-g_x(\xi)<y<0} a(B_d(\xi), y, \xi)\,\mathrm{Log}\,\frac{M(\xi^{B_d(\xi),B_d(\xi)+y})}{M(\xi)}$$

$$= 2\sum_{\xi\in C_n}\sum_{-g_x(\xi)<y<0} p(|y|)M(\xi^{B_d(\xi),B_d(\xi)+y})$$

$$\leqslant 2\sum_{y<0} p(|y|)$$

$$\mathrm{A}_2 = 2 \sum_{\xi \in \mathrm{C}_n} \sum_{-g_x(\xi) < y < 0} a(\mathrm{B}_d(\xi), y, \xi) \operatorname{Log} \frac{\mathrm{M}_{-y}(\xi^{\mathrm{B}_d(\xi), \mathrm{B}_d(\xi)+y})}{a(\mathrm{B}_d(\xi) + y, -y, \xi^{\mathrm{B}_d(\xi), \mathrm{B}_d(\xi)+y})}$$

$$\leqslant 2 \sum_{\xi \in \mathrm{C}_n} \sum_{-g_x(\xi) < y < 0} p(|y|)\mathrm{M}(\xi) \operatorname{Log} \frac{1}{q(|y|)}$$

$$\leqslant 2 \sum_{y<0} p(|y|)\mathrm{C}|y| + \sum_{y<0} p(|y|) \operatorname{Log}^+ \frac{1}{p(|y|)}$$

$$\mathrm{A}_3 = 2 \sum_{\xi \in \mathrm{C}_n} \sum_{-g_x(\xi) < y < 0} a(\mathrm{B}_d(\xi) y, \xi) \operatorname{Log} \frac{\mathrm{M}(\xi)}{\mathrm{M}_{-y}(\xi^{\mathrm{B}_d(\xi), \mathrm{B}_d(\xi)+y})}$$

$$\leqslant 2 \sum_{\xi \in \mathrm{C}_n} \sum_{-g_x(\xi) < y < 0} p(|y|)\mathrm{M}(\xi) \operatorname{Log} \frac{\mathrm{M}(\xi)}{\mathrm{M}_{-y}(\xi^{\mathrm{B}_d(\xi), \mathrm{B}_d(\xi)+y})}.$$

Il faut majorer $\dfrac{\mathrm{M}(\xi)}{\mathrm{M}_{-y}(\xi^{\mathrm{B}_d(\xi), \mathrm{B}_d(\xi)+y})}$. Pour cela nous allons écrire l'équation d'invariance avec la fonction indicatrice $f(.)$ de la configuration définie sur $[0, \mathrm{B}_d(\xi)]$ par :

$$\zeta(x) = \xi^{\mathrm{B}_d(\xi), \mathrm{B}_d(\xi)+y}(x) \quad \text{sur} \quad [0, \mathrm{B}_d(\xi) + y]$$
$$\zeta(x) = 0 \quad \text{sur} \quad]\mathrm{B}_d(\xi) + y, \mathrm{B}_d(\xi)].$$

La fonction f est donc égale à $f(\eta) = 1_{\{\eta = \xi \,\mathrm{sur}\, [0, \mathrm{B}_d(\xi)]\}}$
L'équation $\mu \mathrm{L} f = 0$ donne :

$$\int \mu(d\eta) f(\eta) \sum_{(x,z) \in \Lambda} b(z, d_x(\eta), g_x(\eta)) = \int \mu(d\eta) \sum_{(x,z) \in \Lambda'} b(z, d_x(\eta), g_x(\eta)) f(\eta^{x,x+z})$$

où $\quad \Lambda = \{ (x, z) ; \quad x \in \zeta \;\text{ ou }\; \mathrm{B}_d(\xi) < x < \mathrm{B}_d(\xi) + z \}$.

$\Lambda' = \{ (x, z) ; x + z$ est un point de ζ, x n'est pas un point de ζ et il n'y a aucun point de ζ entre x et $x + z \}$.

Alors Λ' contient $x = \mathrm{B}_d(\xi)$ et $z = y$ d'où en majorant le premier terme de l'égalité et en minorant le deuxième terme on trouve :

$$\sum_{z \neq 0} (n + |z|) p(|z|) \mathrm{M}_{-y}(\xi^{\mathrm{B}_d(\xi), \mathrm{B}_d(\xi)+y}) \geqslant q(|y|)\mathrm{M}(\xi)$$

et par conséquent :

$$A_3 \leqslant 2 \sum_{\xi \in C_n} \sum_{y<0} p(|y|)M(\xi) \left\{ \operatorname{Log}\left(\sum_{z \neq 0} (n+|z|)p(|z|) \right) + \operatorname{Log}\left(\frac{1}{q(|y|)} \right) \right\}$$

$$\leqslant 2 \left(\sum_{y<0} C|y|p(|y|) + \sum_{y<0} p(|y|) \operatorname{Log}^+ \frac{1}{p(|y|)} \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{y<0} p(|y|) \right) \operatorname{Log}\left(n \sum_{z \neq 0} p(|z|) + \sum_{z \neq 0} |z| p(|z|) \right) \right).$$

Or, d'après nos hypothèses $\sum_{y \neq 0} |y| p(|y|) < +\infty$, donc

$$\sum_{y<0} p(|y|) \operatorname{Log}^+ \frac{1}{p(|y|)} < +\infty$$

d'où : $$A_1 + A_2 + A_3 < K_1 \operatorname{Log} n + K_2 .$$

On refait les mêmes majorations si x est le bord gauche de ξ. Finalement on obtient :

$$0 \leqslant D_n \leqslant K_3 \operatorname{Log} n + K_4 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{D_n}{n} = 0 . \qquad \blacksquare$$

Notonsn $D_n^k(x, y) = \sum_{\substack{y \in C_n \\ x k^{\text{ième}} \text{ point de } \xi}} h(a(x+y, -y, \xi^{x,x+y}), a(x, y, \xi))$ pour $k \leqslant n$

et $D_n^k = \sum_{x} \sum_{y \neq 0} D_n^k(x, y)$.

LEMME 3.5. — Si $k \leqslant m \leqslant n$ alors on a $D_m^k(x, y) \leqslant D_n^k(x, y)$ et $D_m^k \leqslant D_n^R$.

Démonstration. — Soit ξ dans C_m et x dans ξ. On a

$$a(x, y, \xi) = \sum_{\eta \in \Gamma} a(x, y, \eta)$$

$\Gamma = \{ \eta \in C_n ;$ les m premiers points de η sont égaux à $\xi \}$.

Or la fonction h satisfait $h\left(\sum_i x_i \sum_i y_i \right) \leqslant \sum_i h(x_i, y_i)$ et donc $D_m^k(x, y) \leqslant D_n^k(x, y)$. $\blacksquare$

Du fait de l'invariance par translation on peut écrire :

$$\mathrm{D}_n^k = \sum_x \sum_{y \neq 0} \sum_{\Xi} h(a(y, -y, \xi^{0,y}), a(0, y, \xi))$$

où $\Xi = \{ \xi/|\xi| = n, -x = \mathrm{B}_g(\xi), 0 k^{\text{ième}} \text{ point de } \xi \}$

$$\mathrm{D}_n^k = \sum_{y \neq 0} \sum_{\Omega} h(a(y, -y, \xi^{0,y}), a(0, y, \xi))$$

où $\Omega = \{ \xi/|\xi| = \eta, 0k^{\text{ième}} \text{ point de } \xi \}$.

LEMME 3.6. — Si $k \leqslant n$ alors on a $\mathrm{D}_n^k \leqslant \mathrm{D}_{n+1}^{k+1}$.

Démonstration. — $\mathrm{D}_n^k = \sum_{y \neq 0} \sum_{\Omega} h(a(y, -y, \xi^{0,y}), a(0, y, \xi))$.

Or comme précédemment si $|\xi| = n$ on a $a(0, y, \xi) = \sum_{\Pi} a(0, y, \eta)$ où $\Pi = \{ \eta/|\eta| = n + 1$, les n derniers points de η sont ceux de $\xi \}$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_n^k &\leqslant \sum_{\{\xi/|\xi|=n\}} \sum_{\Pi} \sum_{y \neq 0} h(a(y, -y, \eta^{0,y}), a(0, y, \eta)) \\ &\leqslant \mathrm{D}_{n+1}^{k+1}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

LEMME 3.7. — Pour tout n on a $\mathrm{D}_n = 0$.

Démonstration. — Soient $p \geqslant 1$ et $m \geqslant k \geqslant 1$. D'après les lemmes précédents $\mathrm{D}_m^k \leqslant \mathrm{D}_{m+p}^j$ pour $k \leqslant j \leqslant k + p$ donc :

$$\mathrm{D}_m^k \leqslant \frac{1}{p+1} \sum_{j+k}^{k+p} \mathrm{D}_{m+p}^j \leqslant \frac{1}{p+1} \sum_{j=1}^{m+p} \mathrm{D}_{m+p}^j \leqslant \frac{1}{p+1} \mathrm{D}_{m+p}.$$

Si p tend vers l'infini, d'après le lemme 3.4 on trouve $\mathrm{D}_m^k = 0$ si $1 \leqslant k \leqslant m$, donc $\mathrm{D}_m = 0$. $\blacksquare$

THÉORÈME 3.8. — Si μ est une mesure invariante pour le processus et invariante par translation alors μ est une mesure réversible.

Démonstration. — Si $\mathrm{D}_n = 0$ pour tout n, on a pour toute configuration ξ

finie $a(x+y, -y, \xi^{x'x+y})=a(x, y, \xi)$. Or c'est la relation (1) du début pour les fonctions $f(\eta) = 1_{\{\eta=\xi \text{aur } A(\xi)\}}$. Ces fonctions engendrent bien l'espace. ■

Ce théorème s'applique dans les exemples 1) et 2) du paragraphe précédent si $p(.)$ à un premier moment fini et dans l'exemple 3).

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier C. Cocozza-Thivent pour l'aide qu'elle m'a apportée durant la préparation de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Andjel, C. Cocozza-Thivent, M. Roussignol, Quelques compléments sur le processus des misanthropes et le processus « zero range ». *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **21**, n° 4, 1985, p. 363-382.

[2] G. Choquet, J. Deny, Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$. *C. R. A. S.*, t. **250**, 1960, p. 799-801.

[3] C. Cocozza-Thivent, Processus des misanthropes. *Z. f. W.*, t. **70**, 1985, p. 509-523.

[4] H. O. Georgii, Canonical Gibbs measures. *Lecture Notes in Mathematics*, n° 760.

[5] H. O. Georgii, *Equilibria for particle motions; conditionnally balanced point random fields*. G. Koch, F. Spizzichino (eds.). *Exchangeability in probability and statistics*. North Holland, Amsterdam, 1982.

[6] R. A. Holley, Free energy in a Markovian model of a lattice spin system. *Comm. Math. Phys.*, t. **23**, 1971, p. 87-99.

[7] R. A. Holley et D. W. Stroock, In one and two dimensions every stationary-measure for a stochastic Ising model is a Gibbs state. *Comm. Math. Phys.*, t. **55**, 1977, p. 37-45.

[8] T. M. Liggett, The stochastic evolution of infinite systems for interacting particles. *Lecture Notes in Mathematics*, n° 598.

[9] T. M. Liggett, *Interacting particle systems*. Springer.

[10] T. M. Liggett, Attractive nearest particle systems. *Annals of probability*, t. **11**, 1983, n° 1, p. 16-33.

[11] F. Spitzer, Stochastic time evolution of one dimensional infinite particle system. *B. A. M. S.*, t. **83**, n° 5, 1977, p. 880-890.

(Manuscrit reçu le 13 juillet 1984)

(Révisé le 18 novembre 1985)