ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ANTOINE EHRHARD

Éléments extrémaux pour les inégalités de Brunn-Minkowski gaussiennes

Annales de l'I. H. P., section B, tome 22, nº 2 (1986), p. 149-168
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1986__22_2_149_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 22, n° 2, 1986, p. 149-168. *Probabilités et Statistiques*

Éléments extrémaux pour les inégalités de Brunn-Minkowski gaussiennes

par

Antoine EHRHARD †

SOMMAIRE. — Dans ce travail, on étudie les ensembles pour lesquels l'égalité est atteinte dans les inégalités de C. Borell [*1*] et de Brunn-Minkowski gaussienne [*3*] en dimension finie. On caractérise aussi les fonctions telles que l'inégalité isopérimétrique de [*4*] se réduit à une égalité. Les résultats soulignent le caractère extrémal des demi-espaces pour la mesure de Gauss.

ABSTRACT. — The purpose of this work is to study the extremal sets of finite dimension for the inequality of C. Borell [*1*] and the gaussian Brunn-Minkowski inequality [*3*]. We also characterize the functions such that the inequality is attained in the isoperimetric inequality of [*4*]. These results emphasize the extremal properties of half-spaces for gaussian measures.

On désigne par Φ la fonction de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $[0, 1]$ qui est donnée par

$$\Phi(.) = \int_{-\infty}^{.} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\frac{dt}{\sqrt{2\pi}}.$$

La mesure de Gauss normalisée dans $\mathbb{R}^n$ est notée γ_n, elie a pour densité

$$\gamma_n(dx) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|^2\right)dx.$$

Tout sous-espace affine L de $\mathbb{R}^n$, de dimension k, porte une mesure de Gauss canonique, notée γ_k, dont la moyenne est la projection orthogonale de l'origine sur L. Pour tout $r \geq 0$ nous notons $B_n(0, r)$ la boule euclidienne fermée de centre 0 et de rayon r dans $\mathbb{R}^n$ et $S_{n-1}(0, r)$ sa frontière.

Si A et B sont des ensembles convexes fermés, de mesure non nulle, strictement inclus dans $\mathbb{R}^n$, alors l'inégalité suivante a lieu pour tout $\lambda \in [0, 1]$ (cf. [*3*]):

0.0.1 $$\Phi^{-1} \circ \gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq \lambda \Phi^{-1} \circ \gamma_n(A) + (1-\lambda)\Phi^{-1} \circ \gamma_n(B).$$

On montre dans le premier paragraphe que 0.0.1 ne se réduit à une égalité que lorsque A et B sont ou bien des demi-espaces emboîtés de $\mathbb{R}^n$, ou bien confondus. La démonstration utilise une construction analogue à celle de W. Blaschke dans « Kreis und Kugel » (Leipzig, (1916), § 22). Les résultats concernant les ensembles convexes que nécessite cette construction sont regroupés dans le paragraphe 0.

Soient A une partie borélienne de $\mathbb{R}^n$ et r un nombre réel ≥ 0; $A_r = A + B_n(0, r)$ est le voisinage euclidien d'ordre r de A. Dans ces conditions, l'inégalité de C. Borell affirme que pour tout $r \geq 0$ on a

0.0.2 $$\Phi^{-1} \circ \gamma_n(A_r) \geq \Phi^{-1} \circ \gamma_n(A) + r.$$

Dans le deuxième paragraphe, on montre que les seuls ensembles suffisamment réguliers (cf. § II, Infra) pour lesquels l'inégalité de C. Borell est une égalité sont les demi-espaces. On utilise un argument semblable à celui de A. Dinghas dans « Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel in Riemannschen Räumen Konstanter Krümmung » (*Math. Nach.* (1949), Bd. 2, 148-162). On applique ensuite ce résultat à l'étude des fonctions extrémales pour l'inégalité isopérimétrique gaussienne. En particulier, on calcule de manière explicite les fonctions lipschitziennes f de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ telle que : $\gamma_n(\{f = 0\}) \geq \frac{1}{2}$ et $\|f\|_{L^2(\gamma_n)} = \|\nabla f\|_{L^2(\gamma_n)}$.

0. RAPPELS SUR LA GÉOMÉTRIE DES ENSEMBLES CONVEXES DE R^n

On rappelle dans ce paragraphe les définitions et les résultats concernant les ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$ que l'on va utiliser. Le langage employé est celui de N. Bourbaki [*2*]. Étant donnés deux ensembles convexes A_0 et A_1 dans $\mathbb{R}^n$ et θ un nombre réel de $[0 ; 1]$, il s'agit ici, essentiellement, de préciser la construction de la combinaison linéaire convexe de Minkowski $(1-\theta)A_0 + \theta A_1 = \{ (1-\theta)a_0 + \theta a_1 \,;\, a_0 \in A_0,\, a_1 \in A_1 \}$.

Une partie C de $\mathbb{R}^n$ est un cône de sommet x_0 si C est stable pour toutes les homothéties de centre x_0 et de rapport > 0. Pour simplifier, on appelle cône les seuls cônes de sommet 0.

Si C est un cône convexe fermé, nous disons que C est saillant si l'ensemble $C \backslash \{ 0 \}$ est convexe. Un cône C est saillant si et seulement si il ne contient pas de droite.

On appelle semelle d'un cône C dans $\mathbb{R}^n$ l'intersection de C et d'un hyperplan H tel que C soit le plus petit cône contenant l'ensemble $H \cap C$ et le sommet de C. Nous admettons le résultat suivant :

0.1. PROPOSITION ([*2*], Ch. II, § 7). — Dans $\mathbb{R}^n$, tout cône convexe fermé saillant a une semelle compacte.

Soit A un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$; un point x de la frontière de A est dit de stricte convexité s'il existe un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ tel que $H \cap A = \{ x \}$:

0.2. PROPOSITION ([*2*]). — Si A est un ensemble convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ qui ne contient pas de droite, alors A possède un point de stricte convexité.

Si C est un cône convexe fermé saillant alors 0 est un point de stricte convexité de C et il ne peut y en avoir d'autre. L'énoncé suivant remplace la proposition 0.2 dans ce cas.

0.3. PROPOSITION ([*2*]). — Soit C un cône convexe fermé saillant dans $\mathbb{R}^n$; si C n'est pas réduit à $\{ 0 \}$ alors il existe un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ et une demi-droite d dans C tels que $H \cap C = d$.

Si A est un ensemble convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, alors pour tout $a \in A$, l'ensemble $\bigcap_{\lambda > 0} \lambda(A - a)$ est un cône convexe fermé C_A dans $\mathbb{R}^n$, de sommet 0, indépendant de a, dit cône asymptote de A. La proposition suivante permet de distinguer les cônes parmi les ensembles convexes de dimension n qui possèdent un point de stricte convexité (Prop. 0.2).

0.4. PROPOSITION. — Soit A un ensemble convexe fermé d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^n$, qui ne contienne pas de droite, et soit a un point de stricte convexité de A ; l'alternative suivante a lieu : ou bien il existe un ensemble ouvert U de $\mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $u \in U$, le segment $(a + \mathbb{R}u) \cap A$ est compact de longueur non nulle, ou bien A est un cône de sommet a.

Démonstration de la proposition 0.4. — Si A est compact, il n'y a rien à démontrer. Si A n'est pas compact, et puisque A ne contient pas de droite, alors, par la proposition 0.1, C_A est un cône convexe à semelle compacte non réduit à $\{0\}$. Il existe donc un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$, ne passant pas par 0, tel que l'ensemble $H \cap C_A$ soit une semelle compacte du cône C_A. Il en résulte que les ensembles $K_1 = (a+H) \cap A$ et $K_2 = (a+H) \cap (a+C_A)$ sont convexes compacts, inclus dans $a+H$, et vérifient $K_1 \supset K_2$. Si $K_1 = K_2$ alors $A = a + C_A$ et A est un cône de sommet a. Sinon, puisque A est d'intérieur non vide, il existe dans l'hyperplan $a + H$ une boule euclidienne B, de dimension $n - 1$, ouverte dans $a + H$, telle que $B \cap K_2 = \phi$ et $B \subset K_1$. On pose $U = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda(B - a)$: U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $U \cap C_A = \phi$. Pour tout $u \in U$, $(a + Ru) \cap A$ est un ensemble borné car $u \notin C_A$; de plus la droite $(a + \mathbb{R}u)$ rencontre un point de B situé à l'intérieur de A : $(a + \mathbb{R}u) \cap A$ est donc un segment compact de longueur non nulle. La proposition 0.4 est démontrée.

La proposition qui suit énonce une condition suffisante pour qu'une combinaison linéaire convexe de Minkowski soit fermée.

0.5. Proposition. — Soient A_0 et A_1 deux ensembles convexes fermés de $\mathbb{R}^n$ qui ne contiennent pas de droite ; si A_0 et A_1 ont même cône asymptote, alors l'ensemble convexe A de $\mathbb{R}^n \times [0;1]$, défini par

$$A = \{((1-\theta)a_0 + \theta a_1 ; \theta) ; a_0 \in A_0, a_1 \in A_1, \theta \in [0, 1]\},$$

est fermé dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Démonstration de la proposition 0.5. — Soit z un point de l'adhérence $\overline{A}$ de A dans $\mathbb{R}^{n+1}$: il existe une suite $\{z_n ; n \in \mathbb{N}\}$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$z_n = (y_n ; \theta_n) = ((1-\theta_n)x_0^n + \theta_n x_1^n ; \theta_n), \quad \theta_n \in [0;1], \quad x_0^n \in A_0 \quad \text{et} \quad x_1^n \in A_1),$$

qui converge vers z dans $\mathbb{R}^{n+1}$; on va extraire une sous-suite qui converge vers un point de A. Cela montrera $\overline{A} = A$. Par symétrie, il suffit de considérer le cas où la suite $\{\theta_n ; n \in \mathbb{N}\}$ tend vers θ avec $\theta \neq 1$; si en outre, la suite $\{x_1^n ; n \in \mathbb{N}\}$ était bornée, alors il en serait de même de la suite $\{x_0^n ; n \in \mathbb{N}\}$ et on aurait bien $z \in A$. Nous supposons à partir d'ici que la suite $\{x_1^n ; n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas bornée. Alors, de la suite $\{x_1^n / \|x_1^n\| \, n \in \mathbb{N}\}$, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un point c_1 de C_{A_1} tel que $\|c_1\| = 1$, et puisque l'on a

0.5.1. $$\frac{x_0^n}{\|x_1^n\|} = \frac{1}{(1-\theta_n)}\left(\frac{y_n}{\|x_1^n\|} - \theta_n \frac{x_1^n}{\|x_1^n\|}\right) \qquad \text{et} \qquad \theta = \lim_{n\to\infty} \theta_n \neq 1$$

on peut également extraire de la suite $\{ x_0^n / \| x_1^n \| ; n \in \mathbb{N} \}$ une sous-suite qui converge vers un point c_0 de C_{A_0} qui est situé sur la demi-droite $(\mathbb{R}_-)c_1$; cela implique $c_0 = 0$ car le cône $C_{A_0} = C_{A_1}$ ne contient pas de droite et il s'ensuit $\theta = 0$. Montrons par l'absurde que la suite $\{ \theta_n x_1^n ; n \in \mathbb{N} \}$ est bornée : sinon, on pourrait extraire de la suite $\{ x_0^n/(\theta_n \| x_1^n \|) ; n \in \mathbb{N} \}$ une sous-suite convergeant vers un point $\bar{c}_0$ de C_{A_0} tel que $\bar{c}_0 = - c_1$; cela implique $\bar{c}_0 = c_1 = 0$, or on a $\| c_1 \| = 1$; d'où découle l'absurdité de cette hypothèse. La suite $\{ \theta_n x_1^n ; n \in \mathbb{N} \}$ est nécessairement bornée : on peut en extraire une sous-suite qui converge vers un point $\bar{c}_1$ qui est dans C_{A_1} car $\{ \theta_n ; n \in \mathbb{N} \}$ tend vers 0.

Puisque $C_{A_1} = C_{A_0}$, il s'ensuit que la suite $\{ y_n ; n \in \mathbb{N} \}$ converge vers un point y de $A_0 + C_{A_0} = A_0$; c'est-à-dire que $z = (y ; 0)$ est dans A. La proposition 0.5 est démontrée.

L'énoncé suivant paraphrase le précédent en termes d'ensembles :

0.6. Proposition. — Soient A et B deux ensembles convexes fermés non vides de $\mathbb{R}^n$; on note $\mathring{A}$ l'intérieur de A. On a

$$\bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcap_{0 < \theta < \varepsilon} (1 - \theta)A + \theta B \supseteq \mathring{A} + C_B .$$

Démonstration de la proposition 0.6. — Fixons un point b_0 de B, de sorte que C_B s'écrive $C_B = \bigcap_{\lambda > 0} \lambda(B - b_0)$: si b est un point de C_B, alors, pour tout $\lambda > 0$, il existe un point b_λ de B tel que $b = \lambda(b_\lambda - b_0)$. D'autre part, si a est un point de $\mathring{A}$, alors il existe un nombre réel $r > 0$ tel que la boule euclidienne fermée $B_n(a ; r)$ soit incluse dans A ; pour tout $\lambda > 0$, désignons par a_λ le point $a_\lambda = (a - \lambda b_0)/(1 - \lambda)$: si λ est assez petit, a_λ est dans $B_n(a ; r)$. Le point $a + b$ s'écrit donc $a + b = (1 - \lambda)a_\lambda + \lambda b_\lambda$, avec (a_λ, b_λ) dans $A \times B$.

Cela montre la proposition 0.6.

0.7. Proposition. — Soient A_0 et A_1 deux ensembles convexes non vides de $\mathbb{R}^n$ et θ un nombre réel de $]0 ; 1[$; on pose $A_\theta = (1 - \theta)A_0 + \theta A_1$ et on considère un point a_θ de A_θ qui s'écrit $a_\theta = (1 - \theta)a_0 + \theta a_1$, avec $(a_0 ; a_1) \in A_0 \times A_1$. Pour $i = 0$ (respectivement $i = 1$), les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

0.7.1. Si a_θ est sur la frontière de A_θ, a_i est sur la frontière de A_i.

0.7.2. Si D est un demi-espace de $\mathbb{R}^n$ tel que l'ensemble $a_\theta + D$ soit un demi-espace d'appui de A_θ en a_θ, alors l'ensemble $a_i + D$ est un demi-espace d'appui de A_i en a_i.

0.7.3. Si a_θ est un point de stricte convexité de A_θ alors a_i est un point de stricte convexité de A_i et le couple (a_0, a_1) est déterminé de manière unique par a_θ.

Démonstration de la proposition 0.7. — On va montrer 0.7.1 par l'absurde. Si a_0 n'est pas situé sur la frontière de A_0, alors il existe un nombre réel $r > 0$ telle que la boule euclidienne $B = B_n(a_0\,; r)$ soit incluse dans A_0 ; la boule $B_n(a_\theta\,;(1-\theta)r)=(1-\theta)B_n(a_0\,;r)+\theta a_1$ est donc incluse dans A_θ : le point a_θ est situé à l'intérieur de A_θ. Cela amène la contradiction et prouve 0.7.1.

Pour montrer 0.7.2, il suffit de montrer que si $a_\theta + D$ est un demi-espace d'appui de A_θ en a_θ, alors l'ensemble $a_0 + D$ contient l'ensemble A_0. Nous supposons le contraire : il existe un point a de A_0 qui n'est pas dans $a_0 + D$; il s'ensuit que le point $(1-\theta)a+\theta a_1$ de A_θ n'est pas dans l'ensemble $(1-\theta)(a_0+D)+\theta a_1=a_\theta+D$. Cela contredit le fait que $a_\theta+D$ soit un demi-espace d'appui de A_θ et montre 0.7.2.

Montrons 0.7.3 : si a_θ est un point de stricte convexité de A_θ, alors il existe un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ tel que $(a_\theta+H)\cap A_\theta=\{a_\theta\}$; par 0.7.2, l'ensemble $a_0 + H$ est un hyperplan d'appui de A_0 en a_0, il suffit maintenant de montrer que l'on a $(a_0 + H) \cap A_0 = \{a_0\}$. Supposons que cela soit faux : il existe alors un point a'_0, distinct de a_0, dans l'ensemble $(a_0 + H) \cap A_0$. Cela implique que le point $a'_\theta = (1 - \theta)a'_0 + \theta a_1$ de A_θ est dans l'hyperplan $a_\theta + H$. Puisque a'_θ est différent de a_θ, il en résulte que l'intersection de $(a_\theta + H)$ et de A_θ n'est pas réduite à un point, d'où l'absurdité de l'hypothèse. La démonstration de la proposition 0.7 est achevée.

I. CONVEXES EXTRÉMAUX

L'objet de ce paragraphe est le théorème suivant :

1.1. THÉORÈME. — Soient A_0 et A_1 deux ensembles convexes fermés d'intérieur non vide, strictement inclus dans $\mathbb{R}^n$; on suppose qu'il existe un nombre λ dans $]0,1[$ tel que

1.1.0. $$\Phi^{-1}\circ\gamma_n((1-\lambda)A_0+\lambda A_1)=(1-\lambda)\Phi^{-1}\circ\gamma_n(A_0)+\lambda\Phi^{-1}\circ\gamma_n(A_1).$$

Dans ces conditions, ou bien A_0 et A_1 sont confondus, ou bien A_0 et A_1 sont des demi-espaces emboîtés.

La démonstration de ce théorème s'appuie sur le lemme

1.2. LEMME. — Soient A_0, A_1 et λ comme dans le théorème 1.1.; si l'égalité 1.1.0 a lieu, alors les propriétés suivantes sont vérifiées :

1.2.1. L'égalité 1.1.0 a lieu pour tout λ dans $[0, 1]$.

1.2.2. Les ensembles convexes A_0 et A_1 ont même cône asymptote.

Nous commençons par démontrer ce lemme. Montrons le point 1.2.1 :

Le théorème [2] 3.2 affirme que la fonction qui à $\theta \in [0, 1]$ associe le nombre $\Phi^{-1} \circ \gamma_n((1-\theta)A_0 + \theta A_1)$ est concave ; si, en outre, elle coïncide en trois points distincts de l'intervalle $[0, 1]$, à savoir 0, λ et 1, avec la fonction affine

$$\theta \mapsto (1-\theta)\Phi^{-1} \circ \gamma_n(A_0) + \theta\Phi^{-1} \circ \gamma_n(A_1),$$

alors ces deux fonctions sont égales sur $[0, 1]$. Cela prouve 1.2.1.

Nous montrons maintenant le point 1.2.2. Nous calculons la limite, lorsque θ tend vers 0, de l'expression $\gamma_n((1-\theta)A_0 + \theta A_1)$:

En utilisant 1.2.1, on obtient d'une part

$$\lim_{\theta \to 0} \gamma_n((1-\theta)A_0 + \theta A_1) = \gamma_n(A_0) ;$$

par la proposition 0.6, on a d'autre part

$$\varliminf_{\theta \to 0} \gamma_n((1-\theta)A_0 + \theta A_1) \geq \gamma_n(A_0 + C_{A_1}).$$

Il en découle l'inégalité

$$\gamma_n(A_0) \geq \gamma_n(A_0 + C_{A_1}).$$

Les ensembles qui interviennent dans cette inégalité sont convexes d'intérieur non vide, on a donc la même inégalité pour leurs adhérences ; puisqu'en outre on a l'inclusion

$$A_0 \subseteq A_0 + C_{A_1} \subseteq \overline{\mathring{A}_0 + C_{A_1}},$$

cela implique l'égalité $A_0 = A_0 + C_{A_1}$, de laquelle découle l'inclusion $C_{A_0} \supseteq C_{A_1}$. En faisant tendre θ vers 1, on obtient de la même façon l'inclusion inverse $C_{A_1} \supseteq C_{A_0}$. A_0 et A_1 ont donc même cône asymptote. Cela prouve 1.2.2 et achève la démonstration du lemme 1.2.

Voici le schéma de la démonstration du théorème 1.1 qui va suivre. Par le lemme 1.2 (1.2.2) les ensembles convexes A_0 et A_1 ont même cône asymptote C. Soit $V = C \cap (-C)$ le plus grand sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ qui est inclus dans C ; notons k la dimension de $V^\perp$; on a $1 \leq k \leq n$. Pour $i = 0$ (respectivement $i = 1$) l'ensemble A_i s'écrit $A_i = \mathscr{A}_i + V$ où $\mathscr{A}_i = A_i \cap V^\perp$ est un ensemble convexe de dimension k, fermé, d'intérieur non vide dans $V^{\perp}$, et $\mathscr{A}_i$ ne contient pas de droite. De plus l'égalité 1.1.0 s'écrit

1.2.3 $\Phi^{-1} \circ \gamma_k((1 - \lambda)\mathscr{A}_0 + \lambda\mathscr{A}_1) = (1 - \lambda)\Phi^{-1} \circ \gamma_k(\mathscr{A}_0) + \lambda\Phi^{-1} \circ \gamma_k(\mathscr{A}_1)$.

Si $k = 1$, alors les ensembles $\mathscr{A}_0$ et $\mathscr{A}_1$ sont des segments situés sur une droite qui s'identifie à $(\mathbb{R}, \gamma_1)$ et le théorème 1.1 se déduit du lemme 1.3 (*infra*). Dans ce lemme on montre que l'égalité 1.2.3 implique que, ou bien $\mathscr{A}_0$ et $\mathscr{A}_1$ sont confondus, ou bien $\mathscr{A}_0$ et $\mathscr{A}_1$ sont des demi-droites emboîtées. Cette seconde possibilité correspond au cas où A_0 et A_1 sont des demi-espaces emboîtés. Si $k \geq 2$, nous montrons que l'égalité 1.2.3 implique l'égalité entre les ensembles $\mathscr{A}_0$ et $\mathscr{A}_1$. Il en découlera que A_0 et A_1 sont identiques et le théorème 1.1 sera démontré.

1.3. LEMME. — La fonction $g(a, b) = \Phi^{-1}(\Phi(b) - \Phi(a))$ est strictement concave sur l'ensemble ouvert $\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 ; a < b \}$ et vérifie en tout point de cet ouvert :

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial a \partial b}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial a^2}\right)\left(\frac{\partial^2 g}{\partial b^2}\right) < 0.$$

En particulier, les seuls cas dans lesquels on a cinq nombres a_0, b_0, a_1 et b_1 vérifiant $-\infty \leq a_0, a_1 < b_0, b_1 \leq +\infty$, et $\theta \in]0, 1[$ tels que

$$g((1-\theta)(a_0, b_0) + \theta(a_1, b_1)) = (1-\theta)g(a_0, b_0) + \theta g(a_1, b_1)$$

sont : $(a_0, b_0) = (a_1, b_1)$, $a_0 = a_1 = -\infty$ et $b_0 = b_1 = +\infty$.

En effet, nous avons montré (cf. [*3*], 3.3) que g est concave ; en remplaçant les inégalités larges de [*3*], 3.3 par des inégalités strictes on obtient les conclusions du lemme 1.3.

Nous allons démontrer le théorème 1.1 dans le cas où $k \geq 2$. Afin de ne pas alourdir les notations, nous supposerons à partir d'ici que ce sont les ensembles A_0 et A_1 de $\mathbb{R}^n$ eux-mêmes qui ne contiennent pas de droite et que l'on a bien $n = k \geq 2$.

La démonstration utilise les symétrisations gaussiennes de [*3*], elle est fondée sur le résultat suivant :

1.4. LEMME. — Soient A_0 et A_1 deux ensembles convexes fermés, d'intérieur non vide, strictement inclus dans $\mathbb{R}^n$ et soit S une symétrisation gaussienne ; si les ensembles A_0 et A_1 vérifient les hypothèses du théorème 1.1, alors les ensembles $S(A_0)$ et $S(A_1)$ vérifient ces mêmes hypothèses et en outre, pour tout $\theta \in [0, 1]$, on a :

$$S((1 - \theta)A_0 + \theta A_1) = (1 - \theta)S(A_0) + \theta S(A_1).$$

Démonstration du lemme 1.4. — Si A_0 et A_1 sont des ensembles convexes fermés d'intérieur non vide, distinct de $\mathbb{R}^n$, alors il résulte de ([*3*], 1.2 et 3.1) que les ensembles $S(A_0)$ et $S(A_1)$ le sont aussi. Soit $\lambda \in]0, 1[$, du théorème ([*2*], 3.1) découle aussi l'inclusion

1.4.1 $$S((1-\lambda)A_0 + \lambda A_1) \supseteq (1-\lambda)S(A_0) + \lambda S(A_1).$$

Intégrons la mesure de Gauss sur ces ensembles en utilisant l'inégalité 0.0.1 ; on en déduit

$$\begin{aligned}\Phi^{-1} \circ \gamma_n((1-\theta)A_0 + \theta A_1) &= \Phi^{-1} \circ \gamma_n(S((1-\theta)A_0 + \theta A_1))\\ &\geq \Phi^{-1} \circ \gamma_n((1-\theta)S(A_0) + \theta S(A_1))\\ &\geq (1-\theta)\Phi^{-1} \circ \gamma_n(S(A_0)) + \theta\Phi^{-1} \circ \gamma_n(S(A_1))\\ &= (1-\theta)\Phi^{-1} \circ \gamma_n(A_0) + \theta\Phi^{-1} \circ \gamma_n(A_1).\end{aligned}$$

Sous les hypothèses du théorème 1.1, les membres extrêmes de cette relation sont égaux ; il en découle l'égalité

1.4.2 $$\Phi^{-1} \circ \gamma_n((1-\theta)S(A_0) + \theta S(A_1)) = (1-\theta)\Phi^{-1} \circ \gamma_n(S(A_0)) + \theta\Phi^{-1} \circ \gamma_n(S(A_1)).$$

On peut donc utiliser le lemme 1.2 pour les ensembles $S(A_0)$ et $S(A_1)$; c'est-à-dire que l'égalité 1.4.2 a lieu pour tout λ dans $[0, 1]$ et les ensembles convexes $S(A_0)$ et $S(A_1)$ ont même cône asymptote. De l'inclusion 1.4.1 on déduit alors l'égalité du lemme.

La proposition 0.5 et le lemme 1.4 montrent que l'ensemble

$$A = \{ ((1-\theta)a_0 + \theta a_1 ; \theta),\ a_0 \in A_0,\ a_1 \in A_1,\ \theta \in [0, 1] \}$$

est convexe et fermé dans $\mathbb{R}^{n+1}$. A la symétrisation $S = S(T, u)$ dans $\mathbb{R}^n$, on fait correspondre la symétrisation $\Sigma = \Sigma(T \times R, (u, 0))$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$; l'égalité du lemme 1.4 s'écrit $\Sigma(A) = A'$ avec

$$A' = \{ ((1-\theta)a_0 + \theta a_1 ; \theta),\ a_0 \in S(A_0),\ a_1 \in S(A_1),\ \theta \in [0, 1] \}.$$

Notons p la projection canonique de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^n$ et désignons par A_θ (respectivement A'_θ) l'image par p de l'intersection de A (respectivement de A') avec l'espace affine $\mathbb{R}^n \times \{ \theta \}$ de sorte que l'on ait

$$S(A_\theta) = A'_\theta,\ A_\theta = (1-\theta)A_0 + \theta A_1 \qquad \text{et} \qquad A'_0 = (1-\theta)A'_0 + \theta A'_1.$$

Dans la suite de la démonstration la lettre S désignera une 1-symétrisation variable dans $\mathbb{R}^n$. Nous allons utiliser le lemme précédent pour construire et analyser l'ensemble A'_θ, image de A_θ par S.

1.5. CONSTRUCTION. — On suppose donnés un point R_θ de la frontière de A_θ et un vecteur unitaire v de $\mathbb{R}^n$ tels qu'il existe un point Q_θ de la frontière de A_θ, distinct de R_θ, vérifiant $A_\theta \cap (R_\theta + \mathbb{R}v) = [R_\theta, Q_\theta]$.

Introduisons les éléments suivants : $S = S((\mathbb{R}v)^\perp, v)$ est la 1-symétrisation de direction v, le point x_θ est l'image par la projection orthogonale sur $(\mathbb{R}v)^\perp$ des points R_θ et Q_θ, les nombres réels a_θ et b_θ sont déterminés par : $R_\theta = x_\theta + a_\theta v$, $Q_\theta = x_\theta + b_\theta v$; on a : $-\infty < a_\theta < b_\theta < +\infty$.

Puisque S est une 1-symétrisation, l'ensemble

$$S(A_\theta) \cap (x_\theta + \mathbb{R}v) = S(A_\theta \cap (x_\theta + \mathbb{R}v))$$

est une demi-droite qui s'écrit

$$S(A_\theta) \cap (x_\theta + \mathbb{R}v) = x_\theta + [c_\theta, +\infty[v$$

avec $$c_\theta = -\Phi^{-1}(\Phi(b_\theta) - \Phi(a_\theta)) = -g(a_\theta, b_\theta) \in \mathbb{R}.$$

Le point $P_\theta = x_\theta + c_\theta v$ est situé sur la frontière de A'_θ ; par la proposition 0.7 (0.7.1), il existe des points P_0 et P_1, situés respectivement sur les frontières de A'_0 et de A'_1, qui vérifient $P_\theta = (1-\theta)P_0 + \theta P_1$. Ces points s'écrivent, pour $i = 0$ (respectivement $i = 1$) : $P_i = x_i + c_i v$, avec $x_i \in (\mathbb{R}v)^\perp$ et $c_i \in \mathbb{R}$; on a donc : $x_\theta = (1-\theta)x_0 + \theta x_1$ et $c_\theta = (1-\theta)c_0 + \theta c_1$. En outre, la droite $x_i + \mathbb{R}v$ coupe l'ensemble convexe A_i suivant un segment nécessairement compact et de longueur non nulle, du type

$$A_i \cap (x_i + \mathbb{R}v) = x_i + [a_i, b_i]v$$

et on a $c_i = -g(a_i, b_i)$. Puisque de plus on a $c_\theta = (1-\theta)c_0 + \theta c_1$, cela implique

1.5.1 $$g(a_\theta, b_\theta) = (1-\theta)g(a_0, b_0) + \theta g(a_1, b_1).$$

Or l'inégalité 0.0.1 ([3], 3.1) a pour conséquence l'inclusion

1.5.2 $$[a_\theta, b_\theta] \supseteq (1-\theta)[a_0, b_0] + \theta[a_1, b_1].$$

Les relations 1.5.1, 1.5.2 et le lemme 1.3 impliquent que (a_0, b_0) et (a_1, b_1) sont égaux. Cela montre en particulier que les points R_i et Q_i, donnés par $[R_i, Q_i] = A_i \cap (x_i + \mathbb{R}v)$ ou encore $R_i = x_i + a_i v$ et $Q_i = x_i + b_i v$, forment un rectangle $[R_0, Q_0, Q_1, R_1]$ et vérifient les relations

1.5.3 $$R_\theta = (1-\theta)R_0 + \theta R_1 \quad \text{et} \quad Q_\theta = (1-\theta)Q_0 + \theta Q_1.$$

En outre, puisque R_θ et Q_θ sont sur la frontière de A_θ, la proposition 0.7 montre que R_i et Q_i sont sur la frontière de A_i. Cela achève la construction 1.5.

Nous allons maintenant utiliser la construction 1.5 en choisissant le point R_θ et en faisant varier la direction v. Nous distinguerons deux cas, suivant que A_θ est un cône (de sommet noté M_θ) pour tout $\theta \in]0, 1[$, ou non.

Dans le cas où A_θ n'est pas un cône, on peut, par la proposition 0.4, prendre le point R_θ parmi les points de stricte convexité de A_θ et lui associer un ensemble ouvert non vide U de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $u \in U$, l'ensemble $A_\theta \cap (R_\theta + \mathbb{R}u)$ soit un segment compact de longueur non nulle. Le point R_θ étant fixé de la sorte, on se donne un vecteur $u \neq 0$ dans U, on pose $v = u/\|u\|$, et on construit le rectangle $\{R_0, Q_0, Q_1, R_1\}$ de 1.5. Du fait que R_θ est un point de stricte convexité, il découle par la proposition 0.7 que les points R_0 et R_1 sont déterminés par la donnée de R_θ, indépendamment de v. Puisqu'en outre le vecteur $R_1 - R_0$ est orthogonal au vecteur u que l'on fait varier dans l'ouvert non vide U, cela implique que R_0 et R_1 sont confondus : on a $R_0 = R_1 = R_\theta$. Il s'ensuit que pour tout vecteur $v \neq 0$ tel que l'ensemble $A_0 \cap (R_\theta + \mathbb{R}v)$ soit compact, on a

1.5.4 $$A_0 \cap (R_\theta + \mathbb{R}v) = A_1 \cap (R_\theta + \mathbb{R}v).$$

De plus on a $C_{A_0} = C_{A_1}$; l'égalité 1.5.4 a lieu pour tous les vecteurs v de $\mathbb{R}^n$. Cela montre $A_0 = A_1$ dans le cas où A_θ n'est pas un cône.

Si pour tout $\theta \in]0, 1[$, A_θ est un cône, alors il découle du lemme 1.2 que les ensembles A_0, A_1 et A_θ ont même cône asymptote que l'on note C. On en déduit que pour tout $\theta \in [0, 1]$, il existe un point M_θ de $\mathbb{R}^n$ tel que : $C_{A_\theta} = M_\theta + C$. Puisque M_θ est l'unique point de stricte convexité de A_θ, la proposition 0.7 (0.7.2) montre que l'on a la relation $M_\theta = (1-\theta)M_0 + \theta M_1$. D'autre part, on sait par la proposition 0.3 qu'il existe une demi-droite d incluse dans C et un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ tels que $H \cap C = d$. On choisit un point $R \neq 0$ sur d, il existe alors un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $u \neq 0$ dans U on ait $C \cap (R + \mathbb{R}u) = [R, Q]$ où Q est un point distinct de R qui est situé sur la frontière de C. On pose : $R_\theta = M_\theta + R$, $Q_\theta = M_\theta + Q$ et $v = u/\|u\|$, et on fait la construction 1.5. Pour $i = 0$ (respectivement $i = 1$), on obtient les points R_i et Q_i ; par la proposition 0.7 (0.7.2), le point R_i est situé sur la droite $M_i + d$, il s'écrit donc $R_i = M_i + t_i R$ avec $t_i > 0$. On a $(1-\theta)t_0 + \theta t_1 = 1$. Il s'ensuit que l'on a

$$\begin{aligned}[R_i, Q_i] = (R_i + \mathbb{R}v) \cap (M_i + C) &= t_i((R + \mathbb{R}v) \cap C) + M_i \\ &= t_i[R, Q] + M_i.\end{aligned}$$

Puisque $\{R_0, Q_0, Q_1, R_1\}$ est un rectangle, on a $t_0 = t_1 = 1$ et donc $R_i = M_i + R$. En faisant varier u dans U on montre que $R_0 = R_1$ et cela implique que A_0 et A_1 sont confondus. Le théorème 1.1 est démontré.

L'énoncé suivant découle directement de la démonstration du théorème 1.1 et de [3] [4] :

1.6. COROLLAIRE. — Soit f une fonction convexe continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$; notons f^* la réarrangée équimesurable croissante de f sur $(\mathbb{R}, \gamma_1)$ par rapport à γ_n (cf. [4], 4.1.2). Si f^* est linéaire par morceaux, alors il existe un vecteur unitaire u de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad f(x) = f^*(\langle x, u \rangle).$$

II. FONCTIONS ET ENSEMBLES EXTRÉMAUX POUR L'INÉGALITÉ DE BORELL

Soit F un ensemble fermé de $\mathbb{R}^m$; nous définissons le contenu de Minkowski gaussien $(m-1)$-dimensionel $0_m(\mathrm{F})$ par la formule

2.0.0 $$0_m(\mathrm{F}) = \liminf_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h} (\gamma_m(\mathrm{F}_h) - \gamma_m(\mathrm{F})),$$

où $\mathrm{F}_h = \mathrm{F} + \mathrm{B}_m(0, h)$ est le voisinage euclidien d'ordre h de F dans $\mathbb{R}^m$. L'inégalité de C. Borell [1] (0.0.2) a pour conséquence l'inégalité isopérimétrique qui suit (voir [4]) :

Si F' est un demi-espace de même mesure gaussienne que F alors on a

2.0.1 $$0(\mathrm{F}) \geq 0(\mathrm{F}').$$

Le calcul de 0(F') permet d'écrire 2.0.1 sous la forme

2.0.1' $$0(\mathrm{F}) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\Phi^{-1} \circ \gamma_m(\mathrm{F}))^2}.$$

Nous allons caractériser les ensembles extrémaux pour l'inégalité isopérimétrique de C. Borell, c'est-à-dire les ensembles pour lesquels l'égalité est atteinte dans 2.0.1 et 2.0.1'. Cette caractérisation n'est possible que si l'on considère des ensembles fermés qui possèdent certaines propriétés de régularité. En effet dans $\mathbb{R}^2$, on peut avoir $\mathrm{F} \neq \mathrm{F}'$ (par exemple $\mathrm{F} = \mathrm{F}' \cup \{x\}$, avec $x \notin \mathrm{F}'$) et $0_m(\mathrm{F}) = 0_m(\mathrm{F}')$.

Le résultat principal de ce paragraphe est le théorème suivant :

2.1. THÉORÈME. — Soit F un ensemble fermé non vide, strictement inclus dans $\mathbb{R}^m$, qui est l'adhérence de son intérieur ; si $0(\mathrm{F}) = 0(\mathrm{F}')$, alors F est un demi-espace de $\mathbb{R}^m$.

Démonstration du théorème 2.1. — Désignons par F un ensemble fermé de $\mathbb{R}^m$ qui vérifie les hypothèses du théorème 2.1 et par F′ un demi-espace de $\mathbb{R}^m$ de même mesure gaussienne que F. Soit S une symétrisation gaussienne dans $\mathbb{R}^m$; d'après [*3*], l'ensemble S(F) est aussi fermé, non vide, distinct de $\mathbb{R}^m$, et S(F) est l'adhérence de son intérieur ; en outre, pour tout nombre réel $h \geq 0$, on a $S(F_h) \supseteq S(F)_h$ et $\gamma_m(S(F_h)) = \gamma_m(F_h)$. Dans ces conditions, l'égalité $0_m(F) = 0_m(F')$ du théorème 2.1 implique que pour toute symétrisation gaussienne S on a $0_m(F) = 0_m(S(F))$. Pour prouver le théorème 2.1, nous montrons que si F est tel que l'on ait $0_m(F) = 0_m(S(F))$ pour toutes les 1-symétrisations $S = S((\mathbb{R}u)^\perp, u)$ avec $u \in S_{m-1}(0, 1)$, alors F est un demi-espace.

Lorsque $m = 1$, le théorème 2.1 résulte du lemme suivant qui précise l'inégalité de Borell dans $\mathbb{R}$.

Soient I_1, I_2, J trois intervalles disjoints de $\mathbb{R}$, compacts, de longueur non nulle, tels que

$$I_1 \subset J + \mathbb{R}_- \qquad \text{et} \qquad I_2 \subset J + R_+ ;$$

désignons par $C = C(I_1, I_2, J)$ la classe des fermés B de $\mathbb{R}$ tels que B contienne l'ensemble $I_1 \cup I_2$ et B ne rencontre pas J.

2.2. Lemme. — Il existe un nombre réel $k > 0$, qui ne dépend que de (I_1, I_2, J), tel que pour tout nombre réel $h \geq 0$ et pour tout ensemble B de C, on a

$$\Phi^{-1} \circ \gamma_1(B_h) \geq \Phi^{-1} \circ \gamma_1(B) + (1 + k)h .$$

Démonstration du lemme 2.2. — Soient B un élément de $C(I_1, I_2, J)$ et x_0 un point situé à l'intérieur de J ; on va appliquer à la partie de B qui est située à gauche (respectivement à droite) de x_0 la symétrisation $S_- = S(\{0\}, -1)$ (respectivement $S_+ = S(\{0\}, 1)$). On pose $B_1 = B \cap]-\infty, x_0]$ et $B_2 = B \cap [x_0, +\infty]$; on a $S_-(B_1) =]-\infty, x_1]$ et $S_+(B_2) = [x_2, +\infty[$ où (x_1, x_2) appartient à la partie compacte K de l'ensemble $\{ x_1 < x_2 \}$ qui est définie par

$$K = \{ \Phi^{-1} \circ \gamma_1(I_1) \leq x_1 \leq \operatorname{Inf}(J) < \operatorname{Sup}(J) \leq x_2 \leq - \Phi^{-1} \circ \gamma_1(I_2) \} .$$

Pour tout nombre réel $h \geq 0$, on a les inclusions

$$S_-((B_1)_h) \supseteq S_-(B_1)_h \qquad \text{et} \qquad S_+((B_2)_h) \supseteq S_+(B_2)_h ,$$

desquelles on déduit l'inégalité (pour h assez petit) :

$$\Phi^{-1} \circ \gamma_1(B_h) \geq - \Phi^{-1} \circ \gamma_1([x_1 + h, x_2 - h]) .$$

Par le lemme § I.1.2, le membre de droite de cette inégalité est une fonction convexe croissante de h, qui vaut $\Phi^{-1} \circ \gamma_1(B)$ en $h = 0$; on a donc, pour tout nombre réel $h \geq 0$, l'inégalité

$$\frac{1}{h}(\Phi^{-1} \circ \gamma_1(B_h) - \Phi^{-1} \circ \gamma_1(B)) \geq \frac{d}{dt}(-\Phi^{-1} \circ \gamma_1([x_1 + t, x_2 - t]))_{t=0}.$$

Notons $1 + k$ le minimum sur K du membre de droite de l'inégalité précédente ; par l'inégalité de Borell on a : $k \geq 0$. Si k était nul, on pourrait trouver dans K un couple (x'_1, x'_2) tel que

$$\frac{d^2}{dt^2}(-\Phi^{-1} \circ \gamma_1([x'_1 + t, x'_2 - t]))_{t=0} = 0$$

et cela contredirait le lemme § I.1.2. On a donc $k > 0$ et le lemme 2.2 est démontré.

Pour démontrer le théorème 2.1 dans le cas $m \geq 2$ on n'utilise que des 1-symétrisations du type $S = S((\mathbb{R}v)^\perp, u)$ avec $u \in S_{m-1}(0, 1)$, on les désignera simplement par S_u. Le lemme suivant généralise le lemme 2.2.

2.3. Lemme. — Soient F un ensemble fermé de $\mathbb{R}^m$ et u un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^m$; notons T l'espace orthogonal à u dans $\mathbb{R}^m$. S'il existe trois points x_0, x_1, x_2 situés sur une droite affine de direction u dans $\mathbb{R}^m$, un intervalle I de $\mathbb{R}$, centré autour de l'origine et de longueur non nulle, et s'il existe un ensemble non vide V, ouvert dans T, tels que :

$$x_0 \in]x_1, x_2[, \quad (V + Iu + x_1) \cup (V + Iu + x_2) \subset F \quad \text{et} \quad (V + Iu + x_0) \cap F = \phi,$$

alors on a : $0_m(F) > 0_m(S_u(F))$.

Démonstration du lemme 2.3. — Puisque V est non vide, il existe une boule euclidienne de dimension $m-1$ et de rayon $r > 0$, $B_T(r)$, qui est incluse dans V. Soit $S = S_u$; pour tout $x \in B_T(r)$, on a par le lemme 2.2 :

$$S([F \cap (x + \mathbb{R}u)]_h) \supseteq S(F \cap (x + \mathbb{R}u))_h + h[-k, 0]u$$

où k est un nombre réel > 0. Il en découle que pour tout nombre positif h assez petit et pour tout point x de $B_T(r - h)$, on a

2.3.1 $$S(F_h) \cap (x + \mathbb{R}u) \supseteq (S(F)_h \cap (x + \mathbb{R}u)) + h[-k, 0]u.$$

En général, pour tout point x de T, on a

2.3.2 $$S(F_h) \cap (x + \mathbb{R}u) \supseteq S(F)_h \cap (x + \mathbb{R}u).$$

Cela va permettre d'évaluer l'intégrale

$$\gamma_m(F_h) = \int_T \gamma_{m-1}(dx)\gamma_1(S(F_h) \cap (x + \mathbb{R}u)).$$

En utilisant 2.3.1 et 2.3.2, on obtient

$$2.3.3 \quad \gamma_m(F_h) \geq \int_{B_T(r-h)} \gamma_{m-1}(dx)\gamma_1((S(F)_h \cap (x + \mathbb{R}u)) + h[-k, 0]u) + \int_{T \setminus B_T(r-h)} \gamma_{m-1}(dx)\gamma_1(S(F)_h \cap (x + \mathbb{R}u)).$$

Remarquons ici que l'ensemble $S(F)_h \cap (x + \mathbb{R}u)$ est une demi-droite du type $x + [c, +\infty[u$ où c est un nombre réel donné par

$$c = -\Phi^{-1} \circ \gamma_1(S(F)_h \cap (x + \mathbb{R}u)).$$

Si x est un point de $B_T(r-h)$, le nombre c varie dans un ensemble compact J de $\mathbb{R}$ qui est déterminé par l'intervalle I et les points x_0, x_1, x_2 ; il existe donc un nombre réel $k' > 0$, tel que

$$\gamma_1(x + [c - kh, +\infty[) \geq \gamma_1(x + [c, +\infty[) + k'h.$$

Cela montre que 2.3.3 implique l'inégalité

$$\gamma_m(F_h) \geq \gamma_m(S(F)_h) + k'\gamma_{m-1}(B_T(r-h))h.$$

Il existe donc un nombre réel $k'' > 0$, tel que pour tout nombre positif h assez petit, on a $\gamma_m(F_h) \geq \gamma_m(S(F)_h) + k''h$. Cette dernière inégalité a pour conséquence : $0_m(F) \geq 0_m(S(F)) + k''$; ce qui montre bien $0_m(F) > 0_m(S(F))$. Le lemme 2.3 est démontré.

Nous achevons maintenant la démonstration du théorème 2.1. Remarquons d'abord qu'il suffit de prouver que les hypothèses du théorème impliquent que l'ensemble F est convexe. En effet, si F est convexe et vérifie les hypothèses du théorème 2.1, alors il en va de même de l'adhérence du complémentaire de F. L'ensemble complémentaire de F serait donc aussi convexe. Cela montrerait que F est un demi-espace de $\mathbb{R}^m$.

Supposons que l'ensemble F ne soit pas convexe. Il existe alors deux points distincts z_1 et z_2 de F et un point z_0 du segment ouvert $]z_1, z_2[$ qui n'est pas dans F. On peut donc trouver un nombre réel $\rho > 0$ tel que la boule euclidienne fermée $B_m(z_0, \rho)$ soit dans le complémentaire de F, puis deux points y_1 et y_2 de l'intérieur de F tels que le segment $[y_1, y_2]$ rencontre l'intérieur de la boule $B_m(z_0, \rho)$ en un point y_0 au moins. Il suffit pour cela de prendre les points y_1 et y_2 suffisamment proches de z_1 et z_2 respectivement. Posons $u = (y_1 - y_2)/\| y_1 - y_2 \|$, $T = (\mathbb{R}u)^{\perp}$; notons y le point image des points y_0, y_1 et y_2 par la projection orthogonale de $\mathbb{R}^m$ sur T ; désignons enfin par $B_T(y, r)$ la boule euclidienne de dimension $m - 1$, de centre y et de rayon $r > 0$, qui est incluse dans T.

Puisque le point y_0 n'est pas dans l'ensemble fermé F, on peut trouver un nombre réel $r_0 > 0$ et un intervalle compact $J \subset \mathbb{R}$, de longueur $a_0 > 0$, tels que l'on ait

2.3.4 $$y_0 \in B_T(y, r_0) + Ju \subset \mathbb{R}^m \backslash F .$$

De même, pour $i = 1$ (respectivement $i = 2$), on peut trouver un intervalle compact $I_i \subset \mathbb{R}$, de longueur $a_i > 0$, et un nombre réel $r_i > 0$ tels que

2.3.5 $$y_i \in B_T(y, r_i) + I_i u \subset \mathring{F} .$$

On pose alors $r = \inf(r_0, r_1, r_2)$, $a = \inf(a_0, a_1, a_2)$, $V = B_T(y, r)$, $I = \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right]$; par 2.3.4-5, il existe trois points x_0, x_1, x_2 tels que les éléments u, x_0, x_1, x_2, I et V vérifient les hypothèses du lemme 2.3. Il s'ensuit que l'on a $0_m(F) > 0_m(S_u(F))$, ce qui contredit l'égalité du théorème 2.1 et rend absurde notre hypothèse. L'ensemble F est donc convexe ; son complémentaire l'est aussi ; le théorème 2.1 est démontré.

Nous étudions maintenant les fonctions extrémales pour les inégalités isopérimétriques gaussiennes. Étant donnée une fonction continue f de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$, on note f^* la réarrangée équimesurable croissante de f sur $\mathbb{R}$ par rapport aux mesures γ_n et γ_1 respectivement. Par le théorème [*4*], 2.1, si f est lipschtzienne, alors f^* l'est aussi et on a l'inégalité

2.4.0 $$\int \| \nabla f \|^2 \gamma_n \geq \int | (f^*)' |^2 \gamma_1 .$$

Le théorème suivant montre que les seules fonctions f pour lesquelles on a l'égalité dans 2.4.0 sont celles qui sont constantes sur chacun des hyperplans orthogonaux à une direction fixe dans $\mathbb{R}^n$, direction suivant laquelle f est en outre monotone.

2.4. THÉORÈME. — Soit f une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$; si on a

2.4.1 $$\int \| \nabla f \|^2 \gamma_n = \int (f^*)'^2 \gamma_1 ,$$

alors il existe un vecteur unitaire u de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on ait

$$f(x) = f(\langle x.u \rangle u) = f^*(\langle x, u \rangle).$$

Avant d'entamer la démonstration de ce théorème, on rappelle les notations et les résultats de [4] qui seront utilisés. Soit $S = S(T, u)$ une k-symétrisation gaussienne dans $\mathbb{R}^n$, $1 \leq k \leq n$, on note $S(f)$ la symétrisée gaussienne de f par S, c'est la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad S(f)(x) = \inf \{ a \in \mathbb{R} ; \Phi(\langle x, u \rangle) \leq \gamma_k(\{ f \leq a \} \cap (x + T^{\perp})) \}.$$

Si S est la n-symétrisation gaussienne de direction $u \in S_{n-1}(0, 1)$ $S = S(\{ 0 \}, u)$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$: $S(f)(x) = f^*(\langle x, u \rangle)$. Il résulte donc de [4] (th. 3.1, cor. 3.3), que si l'égalité 2.4.1 est vérifiée, alors, pour toutes les symétrisations gaussiennes S dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\int \| \nabla f \|^2 \gamma_n = \int \| \nabla S(f) \|^2 \gamma_n.$$

Dans toute la suite S désignera la n-symétrisation de direction u dans $\mathbb{R}^n$; par abus d'écriture, on identifie f^* à $S(f)$. Les fonctions f et f^* étant équimesurables, on définit une mesure μ en posant pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, $\mu(B) = \gamma_n(\{ f \in B \}) = \gamma_n(\{ f^* \in B \})$. Dans ces conditions, la proposition suivante a été établie dans [4] (démonstration du théorème 3.1).

2.5. Proposition. — Pour toute fonction convexe croissante F de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et tout ensemble borélien B de $\mathbb{R}$, on a

2.5.1 $$\int_{\{f^* \in B\}} F(\| \nabla(f^*) \|) \gamma_n \leq \int_{\{f \in B\}} F(\| \nabla f \|) \gamma_n.$$

En outre la fonction borélienne ∇f^* est f^*-mesurable : en particulier, pour toute fonction G continue, on a

2.5.2 $$\frac{d}{d\mu(t)} \int_{\{f^* \leq t\}} G(\| \nabla f^* \|^2) \gamma_n = G\left(\frac{d}{d\mu(t)} \int_{\{f^* \leq t\}} \| \nabla f^* \|^2 \gamma_n \right).$$

Nous démontrons maintenant le théorème 2.4. Si l'égalité 2.4.1 est vérifiée, alors, grâce à 2.5.1, on a

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_{\{f \in B\}} \| \nabla f \|^2 \gamma_n = \frac{1}{\mu(B)} \int_{\{f^* \in B\}} \| \nabla f^* \|^2 \gamma_n.$$

De la concavité de la fonction $G(t) = \sqrt{1+t}$ découle l'inégalité

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_{\{f\in B\}} G(\|\nabla f\|^2)\gamma_n \leq G\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_{\{f^*\in B\}} \|\nabla f^*\|^2\gamma_n\right),$$

à partir de laquelle, grâce à 2.5.2, on obtient

$$\frac{d}{d\mu(t)}\int_{\{f\leq t\}} G(\|\nabla f\|^2)\gamma_n \leq \frac{d}{d\mu(t)}\int_{\{f^*\leq t\}} G(\|\nabla f^*\|^2)\gamma_n .$$

Puisque la fonction $G(t^2)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$, on a aussi l'inégalité inverse de la précédente ; on a donc, pour tout borélien B de $\mathbb{R}$:

$$\int_{\{f\in B\}} \sqrt{1+\|\nabla f\|^2}\gamma_n = \int_{\{f^*\in B\}} \sqrt{1+\|\nabla f^*\|^2}\gamma_n .$$

Les fonctions f et f^* étant équimesurables, l'inégalité précédente a pour conséquence

$$2.4.2 \qquad \int\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}\,\frac{e^{-\frac{1}{2}f^2}}{\sqrt{2\pi}}\,\gamma_n = \int\sqrt{1+\|\nabla f^*\|^2}\,\frac{e^{-\frac{1}{2}(f^*)^2}}{\sqrt{2\pi}}\,\gamma_n .$$

Soient $A(f)$ l'ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par $A(f)=\{(x, t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}, t\leq f(x)\}$ et Σ la n-symétrisation $\Sigma=S(\{0\}\times\mathbb{R},(u,0))$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$; on a $A(f^*)=\Sigma(A(f))$ et l'égalité 2.4.2 s'écrit $0_{n+1}(A(f))=0_{n+1}(\Sigma(A(f)))$ (il s'agit ici des contenus de Minkowski gaussiens n-dimensionnels dans $\mathbb{R}^{n+1}$). Soit Σ_u la 1-symétrisation gaussienne de direction $(u, 0)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$; puisque les symétrisations diminuent le contenu de Minkowski des ensembles, on a les inégalités

$$0_{n+1}(A(f)) \geq 0_{n+1}(\Sigma_u(A(f))) \geq 0_{n+1}(\Sigma_0\Sigma_u(A(f))) = 0_{n+1}(\Sigma(A(f))) .$$

L'égalité entre les membres extrêmes de cette relation implique

$$0_{n+1}(A(f)) = 0_{n+1}(\Sigma_u(A(f))) ,$$

et ce pour tout vecteur unitaire u.

On va montrer à partir de cela que pour tout nombre réel t de $f(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble $A_t(f)=\{x\in\mathbb{R}^n ; t\leq f(x)\}$ est convexe, c'est-à-dire que f est quasi-concave. Le même résultat s'appliquant à la fonction $-f$, il en résultera la conclusion du théorème 2.4.

Supposons qu'il existe un élément t de $f(\mathbb{R}^n)$ tel que l'ensemble $A_t(f)$ ne soit pas convexe. Il existe alors trois points z_0, z_1, z_2 de $\mathbb{R}^n$ tels que : $f(z_1)\geq t$, $f(z_2)\geq t$, $f(z_0)<t$ et $z_0\in\,]z_1, z_2[$. Puisque f est continue, il

existe un nombre réel $t_1 < t$ et un voisinage V_0 de z_0 dans $\mathbb{R}^n$, tel que : $\forall z \in V_0, f(z) < t_1$; soit alors t_2 un élément de $]t_1, t[$; pour $i = 1$ (resp. $i=2$), il existe un voisinage V_i de z_i dans $\mathbb{R}^n$ tel que : $\forall z \in V_i$, $f(z) > t_2$. Posons $v = (z_2 - z_1)/\| z_2 - z_1 \|$, $T = (\mathbb{R}u)^{\perp}_{\mathbb{R}^n}$ et désignons par y le point image de z_0 par la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur T. Il existe un intervalle I de $\mathbb{R}$, centré autour de 0, de longueur non nulle, ainsi qu'une boule euclidienne de dimension $n-1$ et de rayon > 0, B_T, incluse dans T, tels que, pour $i=0$ (resp. $i=1$, $i=2$), on ait : $B_T + Iu + z_i \subset V_i$. Il s'ensuit que l'ensemble $(B_T + Iu + z_0) \times]t_1, t_2[$ ne rencontre pas $A(f)$ et que, pour $i = 1$ (resp. $i = 2$) l'ensemble $(B_T + Iu + z_i) \times]t_1, t_2[$ est inclus dans $A(f)$. On pose alors $m = n+1$, $F = A(f)$, $V = B_T \times]t_1, t_2[$, et pour tout $i \in \{ 0, 1, 2 \}$, $x_i = (z_i, 0)$; les éléments F, x_0, x_1, x_2, I et V vérifient les hypothèses du lemme 2.3, il en résulte que : $0_m(F) > 0_m(\Sigma_u(F))$. Cela montre que $0_m(A(f)) > 0_m(A(f^*))$ et contredit donc notre hypothèse. Le théorème 2.4 est démontré.

Le résultat suivant découle immédiatement du théorème 2.4 et de [*4*], cor. 4.11 :

2.5. Corollaire. — Soit f une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ telle que $\gamma_n(\{ f = 0 \}) \geq 1/2$; on a

2.5.0 $$\int f^2 \gamma_n \leq \int \| \nabla f \|^2 \gamma_n .$$

En outre, si l'égalité a lieu dans 2.5.0, alors f garde un signe constant sur $\mathbb{R}^n$ et il existe un vecteur unitaire w de $\mathbb{R}^n$ tel que,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad | f(x) | = \operatorname{Max} (\langle w, x \rangle, 0) .$$

Démonstration du corollaire 2.5. — L'inégalité 2.5.0 est celle de [*4*], cor. 4.11 : en général, on a

$$\frac{\int \| \nabla f \|^2 \gamma_n}{\int f^2 \gamma_n} \geq \frac{\int \| \nabla f^* \|^2 \gamma_n}{\int (f^*)^2 \gamma_n} \geq 1 .$$

Si l'égalité est atteinte dans 2.5.0, alors on a

$$\int \| \nabla f^* \|^2 \gamma_n = \int (f^*)^2 \gamma_n \qquad \text{et} \qquad \int \| \nabla f \|^2 \gamma_n = \int \| \nabla f^* \|^2 \gamma_n .$$

Grâce au théorème 2.4, cela montre que f s'identifie à la fonction f^*, réarrangée équimesurable croissante de f sur $(\mathbb{R}, \gamma_1)$.

Les méthodes variationnelles montrent ensuite que f^* vérifie l'équation : $-(f^*)'' + x(f^*)' = f^*$ avec $f^* \in L^2(\gamma_1)$ et $\gamma_1(\{ f^* = 0 \}) = \frac{1}{2}$. Les solutions croissantes de ce problème sont les fonctions $(x \mapsto \operatorname{Max}(x, 0))$ et $(x \mapsto \operatorname{Min}(x, 0))$. Le corollaire 2.5 est démontré.

REFERENCES

[*1*] C. Borell, The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space, *Inv. Math.*, t. **30**, 1975, p. 207-216.

[*2*] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, Ch. 1 et 2, Hermann, Paris, 1966.

[*3*] A. Ehrhard, Symétrisation dans l'espace de Gauss, *Math. Scand.*, t. **53**, 1983, p. 281-301.

[*4*] A. Ehrhard, Inégalités isopérimétriques et intégrales de Dirichlet gaussiennes, *Ann. Sci. E. N. S.*, *4ᵉ Série*, t. **17**, 1984, p. 317-332.

(Manuscrit reçu le 10 mai 1985)