ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

H. LAPEYRE

Estimations de grandes déviations pour des systèmes où apparaissent un bruit Gaussien et un bruit non Gaussien

Annales de l'I. H. P., section B, tome 22, n° 1 (1986), p. 9-17
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1986__22_1_9_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 22, n° 1, 1986, p. 9-17. *Probabilités et Statistiques*

Estimations de grandes déviations pour des systèmes où apparaissent un bruit Gaussien et un bruit non Gaussien

par

H. LAPEYRE (*) (**)
Laboratoire de Probabilités,
4, Place Jussieu, Paris

RÉSUMÉ. — On étudie les grandes déviations de systèmes différentiels aléatoires soumis à une perturbation mixte, par un processus rapide, satisfaisant certain résultat de grandes déviations, et un bruit blanc indépendants.

ABSTRACT. — We obtain large deviations estimates for stochastic differential systems pertubated by both a rapid process, satisfying some result of large deviations, and a white noise, independants.

0. INTRODUCTION

On considère sur $[0, T]$ le système :

$$(S_{\xi,\sigma}) dX_t^\varepsilon = b(X_t^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon}) + \sqrt{\varepsilon}\sigma(X_t^\varepsilon) dW_t, \qquad X_0^\varepsilon = x \in \mathbb{R}^d$$

(*) Laboratoire de Probabilités, Université Paris VI, Tour 56, 4, Place Jussieu, 75006 Paris.
(**) 48, Rue de Metz, 94700 Maisons Alfort.

où b et σ sont lipschitziennes bornées, W un brownien d-dimensionnel et ξ un processus indépendant de W.

Sous des hypothèses de moyenne sur $b(x, \xi)$:
$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathbb{E}\left(\int_0^T b(x, \xi_s)ds\right) = B(x)$, X^ε converge en probabilité vers le système déterministe $X(x)$ solution de :

$$(S_d) dX_t = B(X_t)dt, \; X_0 = x .$$

On s'intéresse à la fiabilité du système X^ε, perturbation du système moyenné X.

On montre ici que si on connaît un résultat de grandes déviations sur ξ (précisément on suppose que ξ vérifie l'hypothèse (F) de Freidlin pour l'étude de $(S_{\xi,0})$, cf. [3]), on peut construire sur $C([0, T], \mathbb{R}^d)$ une fonctionnelle contrôlant les grandes déviations de X^ε.

Précisément, on construit pour tout $T > 0$ une fonctionnelle S_T vérifiant :

(0.1) Pour tout $\alpha > 0$ $K_\alpha = \{ \varphi \in C_x([0, T], \mathbb{R}^d)' \, S_T(\varphi) \leq \alpha \}$ est compact.
et

(0.2) Pour tout ouvert O de $C_x([0, T], \mathbb{R}^d)$,

$$\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \operatorname{Log} \mathbb{P}(X^\varepsilon(x) \in O) \geq - \operatorname*{Inf}_{\varphi\in O} S_T(\varphi) .$$

(0.3) Pour tout fermé F de $C_x([0, T], \mathbb{R}^d)$,

$$\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \operatorname{Log} \mathbb{P}(X^\varepsilon(x) \in F) \leq - \operatorname*{Inf}_{\varphi\in F} S_T(\varphi) .$$

Une fonctionnelle vérifiant (0.1, 2, 3) pour une famille $\{ X(\varepsilon) \}$ de processus indexés par ε sera dite fonctionnelle d'action pour $\{ X(\varepsilon) \}$ (avec le paramètre ε).

Ce problème posé par Kushner dans [5] n'est résolu que dans le cas σ constant. La difficulté essentielle posée par le cas σ quelconque est la minoration. On l'obtient en mélangeant les méthodes d'Azencott [1] (pour $S_{0,\sigma}$) et Freidlin [3] (pour $S_{\xi,0}$) (voir paragraphes I et IV).

I. ESTIMATION PRÉLIMINAIRE

NOTATIONS. — $B([0, T], \mathbb{R}^d)$(resp $C_x([0, T], \mathbb{R}^d)$) désigne l'ensemble des fonctions de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^d$ boréliennes bornées (resp continues valant x en 0). On les munit de la topologie uniforme.

K désigne une constante de Lipschitz et de bornitude pour b et σ.

Remarque préliminaire (I.1). — Pour obtenir les estimations (0.2, 3), on s'intéressera au comportement de X^ε dans un tube autour d'une fonction φ de $C([0, T], \mathbb{R}^d)$. Dans un tel tube on compare X^ε à $X^{\varepsilon,\varphi}$, solution de $dX_t^{\varepsilon,\varphi} = b(X_t^{\varepsilon,\varphi}, \xi_{t/\varepsilon})dt + \sqrt{\varepsilon}\sigma(X_t^{\varepsilon,\varphi})dW_t$.

Si φ est absolument continue, l'application F^φ définie sur $(C([0, T], \mathbb{R}^d))^2$ par $F^\varphi(g, f) = h$ si $h_t = x + g_t + \sigma(\varphi_t)f_t + \int_0^t f_s d\sigma(\varphi)_s$, est continue et $X^{\varepsilon,\varphi}$ est l'image de $(y^{\varepsilon,\varphi}, \sqrt{\varepsilon}W)$, (où $dy_t^{\varepsilon,\varphi} = b(y_t^{\varepsilon,\varphi}, \xi_{t/\varepsilon})dt$, $y_0^{\varepsilon,\varphi} = 0$).

Ceci conduit à formuler l'estimation suivante, essentielle à la minoration.

Si g, f sont des fonctions de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^d$ absolument continues nulles en 0, on note $B_x(g, f)$ la solution de $\dot{\varphi}_t = \dot{g}_t + \sigma(\varphi_t)\dot{f}_t$, $\varphi_0 = x$.

PROPOSITION (I.2). — Pour tous R, δ, $a > 0$, tout x de $\mathbb{R}^d$, il existe ρ, r, ε_0 ne dépendant que de R, δ, a, x tels que si g, f sont des fonctions abs. continues telles que $\| \dot{f} \|_2 \leq a$, si $\varphi = B_y(g, f)$ où $|x - y| \leq r$, si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$,

$$\mathbb{P}(\| X^\varepsilon(x) - \varphi \| > \delta, \| y^{\varepsilon,\varphi}(0) - g \| < \rho, \| \sqrt{\varepsilon}W - f \| < \rho) \leq \exp(-R/\varepsilon).$$

Démonstration. — *i*) On se ramène à l'étude du cas $f = 0$ par changement de probabilité. Posons $dP^f = \exp\left(1/\sqrt{\varepsilon}\int_0^T \langle \dot{f}_s, dW_s \rangle - \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T |\dot{f}_s|^2 ds\right).dP$.

Sous P^f, $W^f = W - (1/\sqrt{\varepsilon})f$ est un mouvement brownien et $X^\varepsilon(x)$ solution de $dX_t^\varepsilon = b(X_t^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon}) + \sigma(X_t^\varepsilon)\dot{f}_t]dt + \sqrt{\varepsilon}\sigma(X_t^\varepsilon)dW_t^f$, $X_0^\varepsilon = 0$.

Notons

$$A(\rho) = \{ \| X^\varepsilon(x) - \varphi \| > \delta, \| y^{\varepsilon,\varphi}(0) - g \| < \rho, \| \sqrt{\varepsilon}W - f \| < \rho \}.$$

$$B(c) = \left\{ \left| (1/\sqrt{\varepsilon}) \int_0^T \langle \dot{f}_s, dW_s \rangle \right| \leq c \right\}.$$

D'après l'inégalité exponentielle [*8*], $\mathbb{P}(B(c)^c) \leq 2d \exp(-c^2/2da\varepsilon)$. On fixe c pour que $\mathbb{P}(B(c)^c) \leq \exp(-R/\varepsilon)$ dès que $\varepsilon < 1$. c ne dépend que de R, a. $\mathbb{P}(A(\rho)) \leq \mathbb{P}(A(\rho) \cap B(c)) + \mathbb{P}(B(c)^c) \leq \exp[(a + c)/\varepsilon]\mathbb{P}^f(A(\rho)) + \exp(-R/\varepsilon)$. Il suffit donc de trouver ρ, ε_0, r ne dépendant que de R, a, x, tels que $\mathbb{P}^f(A(\rho)) \leq \exp(-(R + a + c)/\varepsilon)$ si $\varepsilon < \varepsilon_0$.

ii) Comportement local des trajectoires.

Pour tous M, m, a, il existe p_0 et ε_0 ne dépendant que de M, m, a tels que si $p < p_0$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\| \dot{f} \|_2 \leq a$,

$$\mathbb{P}^f(\sup_{|t-s|<p} |X_t^\varepsilon - X_s^\varepsilon| > m) \leq \exp(-M/\varepsilon).$$

En effet,

$$X_t^\varepsilon - X_s^\varepsilon = \int_s^t b(X_u^\varepsilon, \xi_{u/\varepsilon}) + \sigma(X_u^\varepsilon)\dot{f}_u]du + \sqrt{\varepsilon}\int_s^t \sigma(X_u^\varepsilon)dW_u^f .$$

$$|X_t^\varepsilon - X_s^\varepsilon| \leq K(\sqrt{T} + \sqrt{a})\sqrt{|t-s|} + \left|\sqrt{\varepsilon}\int_s^t \sigma(X_u^\varepsilon)dW_u^f\right| .$$

Grâce à l'inégalité exponentielle, p_0 et ε_0 tels que $K(\sqrt{T} + \sqrt{a})\sqrt{p_0} < m/2$ et $2d \exp[-m^2/(8dK^2p_0\varepsilon)] < \exp(-R/\varepsilon)$ conviennent.

$$\begin{aligned} iii)\quad X_t^\varepsilon - \varphi_t = x - y + \int_0^t [b(X_u^\varepsilon, \xi_{u/\varepsilon}) + \sigma(X_u^\varepsilon)\dot{f}_u]du + \sqrt{\varepsilon}\int_0^t \sigma(X_u^\varepsilon)dW_u^f . \\ - \int_0^t [b(\varphi_u, \xi_{u/\varepsilon}) + \sigma(\varphi_u)\dot{f}_u]du + y^{\varepsilon,\varphi}(t) - g_t \quad . \end{aligned}$$

$$|X_t^\varepsilon - \varphi_t| \leq r + K\int_0^t |X_s^\varepsilon - \varphi_s|\,[1 + |\dot{f}_s|\,]ds + \|y^{\varepsilon,\varphi} - g\| + \left\|\int_0 \sqrt{\varepsilon}\sigma(X_s^\varepsilon)dW_s^f\right\| .$$

Par une forme de l'inégalité de Gromwall,

$$\|X^\varepsilon - \varphi\| \leq \exp K(T + \sqrt{2Ta})\left(r + \|y^{\varepsilon,\varphi} - g\| + \left\|\int_0 \sqrt{\varepsilon}\sigma(X_s^\varepsilon)dW_s^f\right\|\right).$$

Posons $\delta_1 = \delta/3 \exp(-K(T + \sqrt{2Ta}))$, supposons que $\rho < \delta_1$ et $r < \delta_1$.

Alors :

$$\mathbb{P}^f(A(\rho)) \leq \mathbb{P}^f\left(\left\|\int_0 \sqrt{\varepsilon}\sigma(X_t^\varepsilon)dW_t^f\right\| > \delta_1, \|\sqrt{\varepsilon}W^f\| < \rho\right).$$

Cherchons ρ pour que cette quantité soit majorée par $\exp - R/\varepsilon$.

iv) si $X^{\varepsilon,n}$ désigne la discrétisée de X^ε suivant une subdivision de pas T/n il existe d'après *ii)* ε_0 et n_0 ne dépendant que de R, α, a tels que si $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $n < n_0$,

$$\mathbb{P}^f(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^\varepsilon - X_t^{\varepsilon,n}| > \alpha) \leq \exp(-(a + c + R)/\varepsilon).$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^f\left(\left\|\int_0 \sqrt{\varepsilon}(\sigma(X_t^\varepsilon) - \sigma(X_t^{\varepsilon,n}))dW_t^f\right\| > \delta_1\right) &\leq \exp[-\delta_1/(2d\varepsilon K^2T\alpha)] \\ + \mathbb{P}^f(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^\varepsilon - X_t^{\varepsilon,n}| > \alpha) &\leq \exp(-(a+c+R)/\varepsilon) + \exp[-\delta_1/(2d\varepsilon\alpha TK^2)]. \end{aligned}$$

On choisit alors α pour $\exp[-\delta_1/(2dTK^2\varepsilon\alpha)] < \exp[-(a + R + c)/\varepsilon]$ et n correspondant. ρ est choisi tel que $4nK\rho < \delta_1$. Alors,

$$\mathbb{P}^f\left(\left\|\int_0 \sqrt{\varepsilon}\sigma(X_t^{\varepsilon,n})dW_t^f\right\| > \delta_1, \|\sqrt{\varepsilon}W^f\| < \rho\right) = 0,$$

et

$$\mathbb{P}^f\left(\left\| \int_0 \sqrt{\varepsilon}\sigma(X_t^\varepsilon)dW_t^f \right\| > \delta_1, \| \sqrt{\varepsilon}W^f \| < \rho \right)$$

est majorée par

$$\mathbb{P}^f\left(\left\| \int_0 \sqrt{\varepsilon}(\sigma(X_t^\varepsilon) - \sigma(X_t^{\varepsilon,n}))dW_t^f \right\| > \delta_1, \| \sqrt{\varepsilon}W^f \| < \rho \right)$$
$$+ \mathbb{P}^f\left(\left\| \int_0 \sqrt{\varepsilon}\sigma(X_t^{\varepsilon,n})dW_t^f \right\| > \delta_1, \| \sqrt{\varepsilon}W^f \| < \rho \right)$$

et donc par $k \exp[-(a + R + c)/\varepsilon]$. D'où le résultat.

LEMME (I.3) (pour la majoration). — Pour tout $\delta > 0$, pour toute φ continue, il existe δ' tel que :

$$\mathbb{P}(\| X^\varepsilon - \varphi \| \leq \delta) \leq \mathbb{P}(\| X^{\varepsilon,\varphi} - \varphi \| \leq \delta').$$

Démonstration. — C'est une application de l'inégalité exponentielle

II. HYPOTHÈSES ET NOTATIONS

HYPOTHÈSES (cf. Freidlin [*3*] [*4*]).

(II.1) Il existe une fonction H^0 de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, différentiable en la deuxième variable, telle que pour tout couple de fonctions en escalier de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^d$, (α, φ), la limite suivante existe,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \operatorname{Log} \mathbb{E}\left(\exp \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \langle \alpha_s, b(\varphi_s, \xi_{t/\varepsilon} \rangle ds \right) \quad \text{et vaut} \quad \int_0^T H^0(\varphi_s, \alpha_s)ds.$$

Supposons α, φ constantes, l'hypothèse devient :

(II.2) Il existe une fonction H^0 de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, différentiable en la deuxième variable, telle que pour tout couple de $\mathbb{R}^d$ (α, φ), la limite suivante existe,

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \operatorname{Log} \mathbb{E}\left(\exp \int_0^T \langle \alpha, b(\varphi, \xi_s \rangle ds) \right) \quad \text{et vaut} \quad H^0(\varphi, \alpha).$$

Remarques.

(II.3) H^0 est continue, convexe en la deuxième variable.

(II.4) Pour la validité des hypothèses et des exemples d'applications on pourra consulter [*2*] [*3*] [*5*].

NOTATIONS.

(II.5) L^0 désigne la fonction conjuguée de H^0 en la deuxième variable

$$L^0(x, \beta) = \operatorname*{Sup}_{\alpha\in\mathbb{R}^d} \{ \langle \alpha, \beta \rangle - H^0(x. \alpha) \}.$$

L^0 est s. c. i., à valeurs $\mathbb{R}_+ \cup \{ \infty \}$, convexe en le second argument, et $L^0(x, \beta) = +\infty$, dès que $|\beta| \geq K$.

(II.6) Pour tout couple de $B([0, T], \mathbb{R}^d)$, (φ, ψ), on pose :

$$\begin{aligned} S^0(\varphi, \psi) &= \int_0^T L^0(\varphi_s, \dot{\psi}_s)ds \quad \text{si } \psi \text{ est absolument continue} \\ &= +\infty \text{ sinon}. \\ S^W(\psi) &= \int_0^T \frac{1}{2} |\dot{\psi}_s|^2 ds \quad \text{si } \psi \text{ est absolument continue} \\ &= +\infty \text{ sinon}. \end{aligned}$$

CONSÉQUENCES. — Soit φ de $C([0, T]), \mathbb{R}^d)$.

(II.7) Si $y^{\varepsilon,\varphi}(0)$ désigne la solution de $dy^{\varepsilon,\varphi}_t = b(y^{\varepsilon,\varphi}_t, \xi_{t/\varepsilon})dt$ issue de 0, $S^0(\varphi, .)$ est fonctionnelle d'action pour $y^{\varepsilon,\varphi}(0)$ sur $C_0([0, T], \mathbb{R}^d)$. (C'est l'hypothèse (II.1), voir [*3*] ou [*6*].)

(II.8) S^W est fonctionnelle d'action pour $\sqrt{\varepsilon}W$.

(II.9) Par indépendance de ξ et W, le couple $(y^{\varepsilon,\varphi}(0), \sqrt{\varepsilon}W)$ admet pour fonctionnelle d'action sur $(C_0([0, T]; \mathbb{R}^d))^2$, $s^\varphi(g, f) = S^0(\varphi, g) + S^W(f)$.

(II.10) Si φ est absolument continue, d'après la remarque préliminaire, I.1 on sait que $X^{\varepsilon,\varphi}$ admet pour fonctionnelle d'action :

$$S^\varphi(\psi) = \operatorname{Inf} \{ s^\varphi(g, f), \psi = F^\varphi(g, f) \}.$$

III. CONSTRUCTION DE LA FONCTIONNELLE D'ACTION

(III.1) On pose pour (x, α) de $(\mathbb{R}^d)^2$, $H(x, \alpha) = H^0(x, \alpha) + 1/2 \langle \alpha, \Sigma_x \alpha \rangle$ où Σ_x désigne $\sigma(x)^t\sigma(x)$.

(III.2) $L(x, \beta)$ désigne la fonction conjuguée de $H(x, \alpha)$ en α. L est s. c. i., à valeurs $\mathbb{R}_+ \cup \{ +\infty \}$, convexe en β, et vérifie :

(III.2.1) $L(x, \beta) \geq -A + B|\beta|^2$. (A, B constantes > 0).

(III.3) On pose pour φ, ψ de $B([0,T],\mathbb{R}^d)$:

$$S(\varphi,\psi)=\int_0^T L(\varphi_s,\dot\psi_s),\ \text{si } \psi \text{ est absolument continue,}$$
$$= +\infty \text{ sinon}.$$

On note $S(\varphi)=S(\varphi,\varphi)$.

(III.4) PROPRIÉTÉS. — S va être la fonctionnelle cherchée. Elle est régulière :

i) Si $S(\varphi,\psi)\le\alpha$, $\dot\psi\in L^2([0,T])$, et $\|\dot\psi\|_2\le K_\alpha$.
ii) S vérifie (0.1)

(On pourra consulter [*2*] et [*6*].)

(III.5) *Comparaison de* $S(\varphi,.)$ *et* S^φ (définie en (II.10)).

Soit φ continue telle que $S(\varphi)<+\infty$. φ est alors absolument continue et (II.10) est vérifié.

i) $S(\varphi,.)$ et S^φ coïncident et si $S(\varphi,\psi)<+\infty$, il existe un couple de fonctions abs. continues (g,f) tel que $\psi=F^\varphi(g,f)$ et $S(\varphi,\psi)=S^0(\varphi,g)+S^W(f)$.
ii) $S(\varphi,.)$ est fonctionnelle d'action pour $X^{\varepsilon,\varphi}$.
iii) Dès que φ vérifie $S(\varphi)<+\infty$, il existe un couple de fonctions abs. continues (g,f) tel que $S(\varphi)=S^0(\varphi,g)+S^W(f)$ et $\varphi=B_x(g,f)$ (cf. I.1).

Démonstration. — *ii*) et *iii*) sont des conséquences immédiates de *i*) et (II.10). Montrons *i*) :

$H(x,\alpha)=H_0(x,\alpha)+Q_x(\alpha)$ où Q_x est la forme quadratique associée à Σ_x. On note q_x sa conjuguée.

$$L(x,\beta)=\inf\{L^0(x,\gamma)+q_x(\delta),\gamma+\delta=\beta\}.$$

Si $\psi=F^\varphi(g,f)$ où g, f abs. continue,

$$S^0(\varphi,g)+S^W(f)=\int_0^T L_0(\varphi_t;\dot g_t)+\frac{1}{2}|\dot f_t|^2]dt\ge\int^T L(\varphi_t;\dot\psi_t)dt=S(\varphi,\psi).$$

Par définition de S^φ, $S^\varphi\ge S(\varphi,.)$.

Pour démontrer l'inégalité inverse, considérons ψ telle que $S(\varphi,\psi)<+\infty$ ψ est abs. continue et N l'ensemble des t tels que $L(\varphi_t,\dot\psi_t)=+\infty$ est négligeable.

On note T l'ensemble des (x,β) tels que $L(x,\beta)<+\infty$, et $f(x,\beta,\alpha)=L^0(x,\alpha)+q_x(\beta-\alpha)$. f est un intégrand convexe normal au sens de Rockafellar [9]. Il existe alors une application mesurable G de T dans $\mathbb{R}^d$ telle que pour (x, β) de T

$$f(x, \beta, \mathrm{G}(x, \beta)) = \inf \{ f(x, \beta, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}^d \} = \mathrm{L}(x, \beta).$$

Notant $g_t = \mathrm{G}(\varphi_t, \dot{\psi}_t)$, si $t \in [0, \mathrm{T}] - \mathrm{N}$, 0 sinon, g est mesurable et *ppt* $\mathrm{L}(\varphi_t, \dot{\psi}_t) = \mathrm{L}^0(\varphi_t, \dot{\psi}_t)$. Par [9], on construit f mesurable telle que *ppt* $\dot{\psi}_t = g_t + \sigma(\varphi_t) f_t$ et $\mathrm{L}(\varphi_t, \dot{\psi}_t) = \mathrm{L}^0(\varphi_t, g_t) + \frac{1}{2} | f_t |^2$.

Si G, F sont les primitives de g, f nulles en 0, $\psi = \mathrm{F}^\varphi(\mathrm{G}, \mathrm{F})$ et

$$\mathrm{S}(\varphi, \psi) = \mathrm{S}^0(\varphi, \mathrm{G}) + \mathrm{S}^{\mathrm{W}}(\mathrm{F}) \geq \mathrm{S}^\varphi(\psi).$$

IV. ESTIMATIONS POUR X^ε

THÉORÈME (IV.1). — Pour A borélien de $\mathrm{C}_x([0, \mathrm{T}], \mathbb{R}^d)$, $\mathrm{I}(\mathrm{A}) = \inf_{\varphi \in \mathrm{A}} \mathrm{S}(\varphi)$. Alors,

$$- \mathrm{I}(\mathring{\mathrm{A}}) \leq \varliminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \operatorname{Log} \mathbb{E}(\mathrm{X}^\varepsilon(x) \in \mathrm{A}) \leq \varlimsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \operatorname{Log} \mathbb{E}(\mathrm{X}^\varepsilon(x) \in \mathrm{A}) \leq - \mathrm{I}(\overline{\mathrm{A}}). \quad \square$$

Démonstration.

i) *Minoration.*

Il suffit de montrer que pour tout φ tel que $\mathrm{S}(\varphi) < +\infty$, et pour tout $\delta > 0$ $\varliminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \operatorname{Log} \mathbb{E}(\| \mathrm{X}^\varepsilon - \varphi \| < \delta) \geq - \mathrm{S}(\varphi)$.

On associe à φ (g, f) par (III.5), on applique l'estimation (I.2) et (II.9) en remarquant :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\| \mathrm{X}^\varepsilon - \varphi \| < \delta) \leq \mathbb{P}(\| \mathrm{X}^\varepsilon(x) - \varphi \| > \delta, \| y^{\varepsilon,\varphi}(0) - g \| < \rho, \| \sqrt{\varepsilon}\mathrm{W} - f \| < \rho) \\ + \mathbb{P}(\| y^{\varepsilon,\varphi}(0) - g \| < \rho, \| \sqrt{\varepsilon}\mathrm{W} - f \| < \rho).\end{aligned}$$

ii) *Majoration.*

On peut se ramener à A compact grâce à la bornitude des coefficients, par application de l'inégalité exponentielle (cf. [6]).

Il suffit alors de montrer que pour tout φ tel que $\mathrm{S}(\varphi) > 0$, et pour tout $a < \mathrm{S}(\varphi)$, il existe δ tel que :

$$\varlimsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \operatorname{Log} \mathbb{E}(\| \mathrm{X}^\varepsilon - \varphi \| < \delta) \leq - a.$$

S(., .) étant s. c. i., on utilise (I.3) et (III.10) pour conclure.

Remarque. — La bornitude des coefficients, du fait du caractère local des estimations, sert seulement à passer de la majoration pour A compact à A fermé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. AZENCOTT, *Grandes déviations et applications. Lectures Notes*, t. **774**, 1980, Springer-Verlag.

[2] M. BRANCOVAN, F. BRONNER, P. PRIOURET, *Grandes déviations pour certains systèmes différentiels aléatoires. Lecture Notes*, t. **920**, 1982, Springer-Verlag.

[3] M. I. FREIDLIN, The averaging principle and theorems on large déviations. *Soviet Math. Dokl.*, t. **17**, 1976.

[4] M. I. FREIDLIN, A. D. WENTZELL, *Random perturbations of dynamical systems.* Springer-Verlag, 1984.

[5] H. J. KUSHNER, *Robutness and approximation of espace times and large deviations for systems with small noise effect.* L. C. D. S. Report # 82-5.

[6] H. LAPEYRE, *Thèse de troisième cycle.*

[7] P. PRIOURET, *Remarques sur les petites perturbations de systèmes dynamiques. Lecture Notes in Mathematics*, t. **920**, 1982.

[8] P. PRIOURET, *Processus de diffusions et équations différentielles stochastiques. Lecture Note in Mathematics*, t. **390**.

[9] R. ROCKAFELLAR, Mesurable Dependance of Convex Sets and Function on Parameters. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, t. **28**, 1969.

(Manuscrit reçu le 4 décembre 1984)
(révisé le 24 juin 1985)