ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

PATRICK CATTIAUX

Hypoellipticité et hypoellipticité partielle pour les diffusions avec une condition frontière

Annales de l'I. H. P., section B, tome 22, nº 1 (1986), p. 67-112
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1986__22_1_67_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 22, n° 1, 1986, p. 67-112. *Probabilités et Statistiques*

Hypoellipticité et hypoellipticité partielle pour les diffusions avec une condition frontière

par

Patrick CATTIAUX
Instituto de Matematica Pura e Aplicada, Estrada Dona Castorina 110,
22460 Rio de Janeiro, R. J. Brasil

RÉSUMÉ. — Cet article a pour objet l'étude de l'hypoellipticité pour les diffusions avec une condition frontière. En utilisant le calcul des variations stochastique de Malliavin sous diverses formes, nous y montrons que sous des conditions de type Hörmander, les lois et les lois conditionnelles de telles diffusions admettent une densité C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue.

ABSTRACT. — This paper is devoted to the proof of hypoellipticity for diffusions with boundary condition. By using the stochastic calculus of variations of Malliavin in different forms, it is shown that under Hömander's type conditions, some laws and conditional laws of such diffusions have a C^∞ density with respect to the Lebesgue measure.

Key-words: Diffusions with boundary condition, stochastic differential equations, Filtering theory, Malliavin's calculus, stochastic flows of diffeomorphisms Hypoellipticity.
A. M. S. classification : 60 G 44, 60 H 10, 60 J 60, 93 E 11.

Adresse courante : 13, rue de la Tannerie, 91150 Étampes, France.

§ 0. INTRODUCTION

Dans ce travail nous étudions le problème de l'existence d'une densité C^∞ pour les lois et les lois conditionnelles des diffusions avec une condition frontière du type Wentzell, c'est-à-dire les solutions du système d'équations différentielles stochastiques suivant *[15]* *[18]*

$$(0.1)\quad \begin{cases} dy_t = Y_0(y_t)1_D(y_t)dt + Y_i(y_t)1_D(y_t)dw_t^i \\ \qquad\qquad + V_0(y_t)1_{\partial D}(y_t)dL_t + V_l(y_t)1_{\partial D}(y_t)dM_t^l \\ y_0 = y \in \overline{D} = R_+^d \\ \rho(y_t)dL_t = 1_{\partial D}(y_t)dt \end{cases}$$

les champs Y_i, V_l $0 \leqslant i \leqslant m$, $0 \leqslant l \leqslant r$ étant supposés C_b^∞, de même que ρ.

Pour étudier les lois d'une diffusion standard (sans condition frontière) on dispose de deux méthodes :

a) L'étude de l'équation de Fokker-Planck associée à l'aide de résultats classiques sur les équations aux dérivées partielles du second ordre, elliptiques *[39]*, ou du théorème de Hörmander *[16]* *[10]* *[17]*.

b) Le calcul des variations stochastique de Malliavin *[25]* développé par plusieurs auteurs *[5]* *[18]* *[35]* *[37]* *[38]* qui permet une approche probabiliste directe sous les conditions de Hörmander.

En ce qui concerne les lois conditionnelles des diffusions standard, dans le cadre de la théorie du filtrage, nous retrouvons les mêmes approches :

a) L'étude de l'équation de Zakaï ; dans le cas partiellement uniformément elliptique *[32]* *[34]* à l'aide de méthodes analytiques classiques ; et récemment sous des conditions de Hörmander partielles, à l'aide de la théorie des flots *[22]* *[23]* ou en adaptant la démonstration due à Kohn du théorème de Hörmander *[13]*.

b) Le calcul des variations stochastique partiel développé dans *[28]* *[8]* *[24]* qui sous des conditions de Hörmander partielles, permet d'obtenir des résultats à la fois pour le filtrage, la prédiction, et le lissage pour des systèmes plus généraux qu'en *a*).

Pour les diffusions avec une condition frontière les seuls résultats obtenus jusqu'ici, à notre connaissance, l'ont été sous des hypothèses d'uniforme ellipticité.

a) dans le cas non conditionné dans *[11]* *[40]*,

b) dans le cas du filtrage d'une diffusion avec condition de Neumann par une diffusion standard dans *[33]*.

Nous nous proposons d'appliquer les techniques du calcul des variations stochastique exposées dans [*5*] [*6*] [*8*] pour étendre ces résultats. Les difficultés sont de deux ordres :

a) Il n'existe pas en général de solution forte de (0.1), on ne peut donc pas perturber convenablement y_t à l'aide de l'addition d'un terme de dérive comme dans [*5*];

b) Même lorsqu'il existe une solution forte, celle-ci est constituée par le couple $(y., L.)$ et l'addition d'un terme de dérive modifie dans la plupart des cas L. de façon non différentiable.

Nous montrons dans ce travail que nous pouvons contourner ces difficultés :

(0.2) *a*) à l'intérieur du domaine, dans le cas non conditionné ou bien le cas conditionné lorsque la coordonnée réfléchie est dans le signal, en localisant le calcul des variations suivant une idée de Stroock [*37*]. Nos méthodes s'appliquent également à la localisation des résultats de [*6*] sur les diffusions conditionnelles ; résultats également obtenus dans [*24*].

b) dans le cas conditionné lorsque la coordonnée réfléchie est dans l'observation à l'aide d'un théorème de flot généralisant un résultat de [*6*] et du calcul des variations sur un bon changé de temps de ce flot ;

c) sur le bord du domaine dans les cas étudiés au (0.2) *a*) ; à l'aide du calcul des variations sur le flot du (0.2) *b*), et un mauvais changement de temps ; puis d'une approximation de ce changement de temps.

Nos résultats généralisent [*33*] par les faits suivants :

a) nous autorisons la dégénérescence du générateur infinitésimal de y,

b) nous obtenons des résultats C^∞,

c) nous n'imposons pas à la loi d'entrée du processus observé d'avoir une densité,

d) nous travaillons sur des équations plus générales,

e) nous regardons les cas du filtrage, de la prédiction et du lissage.

Il faut noter cependant que nos résultats ne recouvrent pas tous les résultats obtenus analytiquement, même dans le cas uniformément elliptique, en ce qui concerne le comportement de la densité près du bord. Dans le cas $\rho = 0$ (cas élastique) Bismut montre dans [*7*] que la densité se prolonge C^∞ jusqu'au bord, dans le cas non conditionné, à l'aide du calcul des variations sur le processus des excursions de y (cf. également [*42*]).

(0.3) *Organisation de ce travail.*

§ 1. Nous établissons une formule d'intégration par parties après un temps d'arrêt (1.9) que nous utilisons pour localiser le calcul des variations, et obtenir des résultats d'hypoellipticité pour le système (0.1) (Théorème (1.15)).

§ 2. Nous regardons le cas conditionné dans D lorsque la réflexion est dans le signal. La difficulté consiste à désintégrer localement la formule d'intégration par parties partielle, tout en contrôlant la partie observée. Ceci nous conduit à ne considérer que le cas du filtrage et de la prédiction ((2.15) et (2.16)).

§ 3. Nous étudions le problème du lissage dans D sur des cas particuliers. A l'aide de plusieurs résultats de [*8*], nous montrons qu'il existe une densité, qui se décompose en le produit d'une fonction C^∞ et d'une fonction L^∞ parfaitement connue, qui est l'intégrale par rapport à la désintégration de la loi de l'observation d'une certaine densité de Girsanov ((3.9)).

§ 4. Nous donnons un théorème de flot partiel pour une classe de diffusions réfléchies ((4.4)) dont la démonstration complète se trouve dans [*12*] puis quelques rappels sur la construction de la solution de (0.1).

§ 5. Nous montrons l'existence de densités conditionnelles C^∞ lorsque la partie réfléchie est dans l'observation (et non plus dans le signal comme au § 2). La difficulté essentielle réside dans l'inversibilité d'un changé de temps de la matrice de covariance de Malliavin, lorsque le changement de temps ne contient pas les directions dans lesquelles nous voulons dériver.

§ 6. Nous revenons ici aux systèmes étudiés aux § 1, 2, 3, mais cette fois sur le bord du domaine. La difficulté ici, si l'on veut agir comme au § 5, est que le changement de temps contient les directions de dérivation, ce qui nous oblige à formellement dériver le flot $\varphi_t(\omega, x)$ construit au § 4 en t, et donc à faire apparaître le générateur de (0.1). Ce problème est particulièrement bien rendu par la formule (6.27). A l'aide de changements de coordonnées localement au voisinage du bord, on peut cependant si $\rho(x)$ est constant, ou si $\rho(x)$ est minoré et la condition au bord de type Neumann, montrer l'existence d'une densité $C^\infty(\partial D)$. Au § 6C le problème conditionnel est également résolu.

Les § 1 à 5 présentent l'essentiel des résultats d'une thèse de 3[e] cycle [*12*] où le lecteur trouvera outre les démonstrations complètes de certains résultats une application des techniques de Malliavin à l'étude d'une certaine classe de diffusions dégénérées mais non réfléchies introduites par Oshima [*31*].

Je tiens à remercier M. Bismut pour les conseils qu'il m'a prodigués durant ce travail, et Mme El Karoui pour ses encouragements et l'intérêt chaleureux qu'elle a manifesté pour mon travail.

Ce travail a été mené en grande partie à l'I. M. P. A. de Rio de Janeiro. Que l'institut et ses membres soient ici remerciés de leur accueil à travers leur directeur M. Lindolpho de Carvalho Dias, tout particulièrement M. E. Varès pour les discussions que nous avons eues et le soutien qu'elle m'a apporté.

(0.4) *Notations*

Si $U \subset R^n$, 1_U désigne l'indicatrice de U.

$C^k(R^n, R^p)$ pour $0 \leqslant k \leqslant +\infty$ est l'ensemble des fonctions k fois dérivables de R^n dans R^p.

$C^k_b(R^n, R^p)$ est l'ensemble des fonctions de $C^k(R^n, R^p)$ qui sont bornées ainsi que toutes leurs dérivées.

$C^k_0(R^n, R^p)$ est l'ensemble des fonctions de $C^k(R^n, R^p)$ à support compact.

Si A et B sont deux champs de vecteurs C^∞_b $[A, B]$ désigne leur crochet de Lie.

Si φ est un difféomorphisme de R^d, on note $\varphi^{*-1}A(y)$ le pull-back de A par φ i. e. $\varphi^{*-1}A(y) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y)\right)^{-1} A(\varphi(y))$.

Si M_t est une martingale continue L^2, δM_t (resp. dM_t) désigne sa différentielle au sens de Ito (resp. de Stratonovitch); $\langle M \rangle_t$ son processus croissant.

Si P est une probabilité sur Ω, E^P désigne l'espérance par rapport à P.

Si M est une matrice (n, p), ${}^tM$ désigne sa transposée.

Dans ce travail nous faisons, lorsque cela ne prête pas à confusion les deux conventions suivantes :

i) Si $y \in R^d$, y^i désigne sa $i^{\text{ème}}$ coordonnée.

ii) Convention de sommation : $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_i b^i = a^i b_i$.

§ 1. HYPOELLIPTICITÉ DANS D

§ 1A. Calcul des variations stochastique après un temps de sortie.

On note Ω_0 l'espace $C^0(R^+, R^m)$; tout point ω_0 de Ω_0 a une trajectoire notée $w_t = (w_t^1, \ldots, w_t^m)$; P_0 désigne la mesure brownienne sur Ω_0 avec

$P_0(w_0 = 0) = 1$; $(F_t^0)_{t \geq 0}$ la filtration engendrée par $w.$, régularisée à droite et complétée par les P_0 négligeables de F_∞^0.

Pour $s \geq 0$, θ_s désigne l'opérateur sur Ω_0 défini par :

$$\theta_s(w.) = w_{.+s} - w_s$$

Soient $Y_0, Y_1, \ldots, Y_m m + 1$ champs de vecteurs C_b^∞ de R^d dans R^d ; on considère le système d'équations différentielles stochastiques de Stratonovitch

$$(1.1) \qquad \begin{cases} dy_t = Y_0(y_t)dt + Y_i(y_t)dw_t^i \\ y_0 = y \in R^d \end{cases}$$

auquel on associe le flot $\varphi.(\omega_0, .)$ de C^∞ difféomorphismes de R^d [*3*] [*21*] [*26*] de sorte que P_0 p. s. $y_t = \varphi_t(\omega_0, y)$.

La matrice de covariance de Malliavin est définie par ([*25*] [*5*] [*35*])

$$(1.2) \qquad C_t(\omega_0 y) = \int_0^t \varphi_s^{*-1} Y_i(y) > < \varphi_s^{*-1} Y_i(y) ds$$
$$= \sum_{i=1}^m \int_0^t (\varphi_s^{*-1} Y_i(y))^t (\varphi_s^{*-1} Y_i(y)) x ds$$

Soit U un ouvert de R^d, $\bar{U}$ son adhérence, ∂U sa frontière et pour $\varepsilon > 0$ soit $U_\varepsilon = \{ y \in R^d ; \text{dist}(y, U) < \varepsilon \}$. On supposera toujours $U \neq \phi$ et $U \neq R^d$. On note

$$\tau = \inf \{ t \geq 0, \varphi_t(\omega_0, y) \notin U_\varepsilon \}$$
$$\eta = \inf \{ t \geq \tau, \varphi_t(\omega_0, y) \in U \}$$
$$C_t^\tau(\omega_0, y) = 1_{t > \tau} \int_\tau^t \varphi_s^{*-1} Y_i(y) > < \varphi_s^{*-1} Y_i(y) ds$$

DÉFINITION (1.3). — Pour $y \in R^d$ on note $E_0(y) = \{ Y_1(y), \ldots, Y_m(y) \}$ et pour $k \geq 0$ $E_{k+1}(y) = \{ [Y_i(y), V(y)] 0 \leq i \leq m, V(y) \in E_k(y) \}$.

DÉFINITION (1.4). — *i*) On dit que l'hypothèse H est vérifiée en $y \in R^d$, si il existe $l_y \in \mathbb{N}, \varepsilon_y > 0, R_y > 0$ tels que pour tout $h \in S^{d-1}$ et tout $y' \in B(y, R_y)$ on ait

$$\sum_{0 \leq k \leq l_y} \sum_{V \in E_k(y')} \langle V(y'), h \rangle^2 \geq \varepsilon_y$$

ii) H est dite uniformément vérifiée sur U si il existe l_U, R_U, ε_U tels que H soit vérifiée en tout $y \in U$ avec $l_y \leq l_U$, $R_y \geq R_U$, $\varepsilon_y \geq \varepsilon_U$.

Remarque. — H en y est équivalente à Lie $\{(\mathrm{ad}\, Y_0(y))^k, (Y_i(y)) ; 1 \leqslant i \leqslant m, k \geqslant 0\}$ engendre R^d.

On a alors la

PROPOSITION (1.5). — Soit $y \in \overline{U}_\varepsilon$, alors :

i) Si H est vérifiée en tout point de ∂U_ε, pour tout $t > 0$, C_t^τ est P_0 p. s. inversible sur $\{t > \tau\}$.

ii) Si H est uniformément vérifiée sur ∂U_ε, pour tout $t > 0$,

$$1_{t>\eta}(C_t^\tau)^{-1} \in \bigcap_{1 \leqslant q < \infty} L^q(P_0)$$

et pour tout $t \in]0, T_0]$,

$$E^{P_0}[1_{t>\eta} \,|\, (C_t^\tau)^{-1} \,|^q] \leqslant C(q, T_0) .$$

Preuve. — *i*) Rappelons que si H est vérifiée en $y' \in R^d$, pour tout $s > 0$, $C_s(\omega_0, y')$ est P_0 p. s. inversible [*25*] [*5*]. Si $y \in \partial U_\varepsilon$, $\tau = 0$, $C_t^\tau = C_t$, H est vérifiée en y ; le résultat en découle. Supposons donc que $y \in U_\varepsilon$. Il est facile à l'aide de la propriété de Markov du flot φ. de montrer que pour presque tout $\omega_0 \in \{t > \tau\}$

$$(1.6) \quad C_t^\tau(\omega_0, y) = \varphi_\tau^{*-1}(\omega_0, y) C_{t-\tau}(\theta_\tau \omega_0, \varphi_\tau(\omega_0, y))^t \varphi_\tau^{*-1}(\omega_0, y)$$

On conclut à l'aide du théorème de Fubini, et de l'inversibilité des matrices de covariance de Malliavin en $\varphi_\tau(\omega_0, y) \in \partial U_\varepsilon$. □

ii) En vertu de (1.6) et des propriétés d'intégrabilité du flot φ. ([*3*] [*21*] [*26*]) on est ramené à montrer que

$$(1.7) \quad \iint 1_{t>\eta}(\omega_0) \,|\, C_{t-\tau}^{-1}(\omega'_0, \varphi_\tau(\omega_0, y)) \,|^q dP_0(\omega'_0) dP_0(\omega_0) \leqslant C(T_0, q)$$

Puisque $t \to |\, C_t^{-1} \,|$ est décroissante, il suffit de montrer (1.7) en remplaçant $t - \tau$ par $\eta - \tau$. On applique alors les résultats de Kusuoka-Stroock ([*38*] (8.43)) sur la norme L^q de l'inverse de la matrice de covariance de Malliavin, et le fait classique ([*18*], p. 342) que $1/\eta - \tau \in \bigcap_{1 \leqslant q < +\infty} L^q(P_0)$. □

On peut alors établir une formule d'intégration par parties après le temps τ.

THÉORÈME (1.8). — *On suppose que* $y \in \overline{U}_\varepsilon$ *et que* H *est vérifiée uniformément sur* ∂U_ε. *Alors pour tout* $t > 0$, *tout multiindice* α, *il existe une variable aléatoire* $B_{t,\tau}^\alpha(\omega_0, y)$ *telle que* :

$$i) \quad 1_{t>\eta} B_{t,\tau}^\alpha(\omega_0, y) \in \bigcap_{1 \leqslant q < +\infty} L^q(P_0)$$

ii) pour toute $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ *avec support* $f \subset U$, *on a*

$$(1.9) \quad E^{P_0}\left[\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} f(\varphi_t(\omega_0, y)) 1_{t>\tau}\right] = E^{P_0}[f(\varphi_t(\omega_0, y)) 1_{t>\tau} B^\alpha_{t,\tau}(\omega_0, y)]$$

Preuve. — Pour $|\alpha| = 1$, on applique la propriété de Markov du flot φ. dans la formule (4.14) de [5]. On obtient ainsi une formule analogue en remplaçant l'intervalle d'intégration $[0, t]$ par $[\tau, t]$, et C_t^{-1} par $(C_t^\tau)^{-1}$. L'hypothèse sur support de f permet de remplacer $1_{t>\tau}$ par $1_{t>\eta}$, ce qui permet de donner un sens à (1.9), puis d'itérer le calcul des variations grâce à (1.5). □

On définit alors sur U les mesures suivantes, si Γ est un borélien de U

$$P(t, y, \Gamma) = P_0(\varphi_t(\omega_0, y) \in \Gamma)$$
$$\overline{P}(t, y, \Gamma) = P_0(\varphi_t(\omega_0, y) \in \Gamma, \tau < t)$$
$$\hat{P}(t, y, \Gamma) = P_0(\varphi_t(\omega_0, y) \in \Gamma, \tau > t)$$

liées par la relation $\hat{P} = P - \overline{P}$.

On sait que si H est vérifiée en $y \in \mathbb{R}^d$, pour tout $t \in]0, T_0]$, la mesure $P(t, y, dy')$ admet une densité $p(t, y, .) \in C_b^\infty(U)$ qui vérifie :

$$(1.10) \quad \| p(t, y, .) \|_{C_b^k(U)} \leqslant c t^{-\beta(k+1)} \qquad \text{où } c \text{ et } \beta \text{ sont des constantes.}$$

De manière similaire à ce qui est fait dans Malliavin [25] [38], on déduit du théorème (1.8) que si H est vérifiée en y et uniformément sur ∂U_ε, pour tout $t \in]0, T_0]$ la mesure $\overline{P}(t, y, dy')$ admet une densité $\overline{p}(t, y, .) \in C_b^\infty(U)$ qui vérifie :

$$(1.11) \quad \| \overline{p}(t, y, .) \|_{C_b^k(U)} \leqslant c \varepsilon^{-\beta(k+1)} \qquad \text{où } c \text{ et } \beta \text{ sont des constantes.}$$

On en déduit donc que si H est vérifiée en y et uniformément sur ∂U_ε, $\hat{P}$ admet une densité $\hat{p}(t, y, .) \in C_b^\infty(U)$ vérifiant :

$$(1.12) \qquad \| \hat{p}(t, y, .) \|_{C_b^k(U)} \leqslant c(t \wedge \varepsilon)^{-\beta(k+1)}$$

§ 1B. Diffusions avec une condition frontière : hypoellipticité dans D.

Soit $D = \{ y \in \mathbb{R}^d, y^1 > 0 \}$ qu'on notera parfois $\mathbb{R}^d_+$.

$Y_0, Y_1, \ldots, Y_m$ sont $m+1$ champs de vecteurs C_b^∞ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$; $V_0, V_1, \ldots, V_r$ $r+1$ champs de vecteurs de ∂D dans $\mathbb{R}^d$, enfin $\rho \in C_b^\infty(\partial D, \mathbb{R}_+)$.

On considère le système d'équations différentielles stochastiques de réflexion de Stratonovitch [*15*] [*18*]

$$(1.13)\quad \begin{cases} dy_t = Y_0(y_t)1_D(y_t)dt + Y_i(y_t)1_D(y_t)dw_t^i \\ \qquad\qquad + V_0(y_t)1_{\partial D}(y_t)dL_t + V_l(y_t)1_{\partial D}(y_t)dM_t^l \\ y_0 = y \in \overline{D} \\ 1_{\partial D}(y_t)dt = \rho(y_t)dL_t \end{cases}$$

Il est bien connu que sous les hypothèses suivantes

(1.14) *i*) $V_l^1 = 0$ pour $1 \leqslant l \leqslant r$, et $V_0^1 \geqslant v > 0$

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} (Y_i^1(y))^2 \geqslant c > 0$ pour tout $y \in \partial D$

le système (1.13) admet pour tout $y \in \overline{D}$ une solution unique en loi.

Remarque. — Les hypothèses (1.14) peuvent être affaiblies [*18*] [*30*] [*41*]; de même que le caractère C^∞ des champs V_l $0 \leqslant l \leqslant r$ et de ρ. Les résultats de ce paragraphe et du suivant peuvent s'étendre à ces différents cas sans difficulté.

Ω désigne ici l'espace $C^0(R_+, R^d)$, de point générique ω, de trajectoire $y.$; Ω est muni de la filtration canonique $(F_t)_{t\geqslant 0}$. $\overline{\Omega}$ désigne l'espace $C^0(R_+, \overline{D})$, $(\overline{P}_y)_{y\in\overline{D}}$ désigne la famille markovienne des lois définies sur $\overline{\Omega}$ comme solutions de (1.13); $(P_y)_{y\in R^d}$ la famille markovienne des lois solutions de (1.1).

THÉORÈME (1.15). — *Soient* $\varepsilon > 0$, U *ouvert de* D *de sorte que* $\overline{U}_{2\varepsilon} \subset D$; *et* $y \in \overline{D}$. *On suppose* H *uniformément vérifiée sur* ∂U_ε et $\partial U_{2\varepsilon}$, *ainsi qu'en* y *si* $y \in \overline{U}_\varepsilon$. *Alors la restriction à* U *du semi-groupe* $\overline{P}(t, y, dy')$ *associé à* $\overline{P}_y$ *admet une densité* $\overline{p}(t, y, .) \in C_b^\infty(U)$ *pour tout* $t > 0$.

COROLLAIRE (1.16). — *Sous l'une des hypothèses suivantes :*

i) H *est vérifiée en tout point de* D.

ii) H *est vérifiée en* y *et uniformément dans une bande* $G_\beta = \{ 0 \leqslant y^1 \leqslant \beta \}$ *pour un* $\beta > 0$.

Alors pour tout $t > 0$, $\overline{P}(t, y, dy')$ *admet une densité* $\overline{p}(t, y, .) \in C^\infty(D)$.

Preuve. — On définit par récurrence la suite de temps d'arrêt

$$\begin{aligned} E_0 &= \inf\{ s \geqslant 0 ; y_s \in \overline{U}_\varepsilon \} \\ S_k &= \inf\{ s \geqslant E_k ; y_s \notin U_{2\varepsilon} \} \\ E_{k+1} &= \inf\{ s \geqslant S_k ; y_s \in \overline{U}_\varepsilon \} \end{aligned}$$

Soit Γ un borélien de U, alors

$$(1.17)\quad \overline{P}(t, y, \Gamma) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \overline{P}_y(y_t \in \Gamma, E_k < t < S_k)$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \iint 1_{E_k < t}(\omega) 1_{t - E_k(\omega) < S_0}(\omega') 1_\Gamma(y'_{t-E_k}(\omega')) d\overline{P}_{y_{E_k}}(\omega') d\overline{P}_y(\omega)$$

en utilisant la propriété de Markov des lois $\overline{P}_{\dot{y}}$.

Mais à ω fixé, $y_{E_k} \in \overline{U}_\varepsilon$; donc les lois images de $\overline{P}_{y_{E_k}}$ et $P_{y_{E_k}}$ par $y'_s 1_{s<S_0}$ coïncident, on peut donc dans (1.17) remplacer $\overline{P}_{y_{E_k}}$ par $P_{y_{E_k}}$.

On reconnaît alors dans l'intégrale en ω' le $\hat{P}(t - E_k, y_{E_k}, \Gamma)$ que nous avons défini au § 1 A, à condition de remplacer U par U_ε et U_ε par $U_{2\varepsilon}$; dont nous savons qu'il admet une densité sur U. De façon analogue à ce qui a été fait pour obtenir (1.11) on montre que à ω fixé

$$(1.18)\quad \| \hat{p}(t - E_k, y_{E_k}, .) \|_{C_b^n(U)} \leqslant c(t \wedge \varepsilon)^{-\beta(n+1)} \quad \text{pour c et } \beta \text{ convenables.}$$

On en déduit

$$(1.19)\qquad \overline{P}(t, y, \Gamma) = \int_\Gamma dy' \, E^{\overline{P}_y}\left[\sum_{k=0}^{N(t)} \hat{p}(t - E_k, y_{E_k}, y') \right]$$

où $N(t) = \max\{ k \in \mathbb{N}, E_k < t \}$.

On montre que l'on peut dériver sous l'espérance en utilisant (1.18) et le fait que $N(t) \in \bigcap_{1 \leqslant q < +\infty} L^q(P_0)$. $\square$

Remarques. — *i*) Dans le cas $\rho = 0$ (élastique), on montre que pour tout $t > 0$, $\overline{P}(t, y, \partial D)$ est identiquement nul ; le théorème (1.15) décrit donc convenablement $\overline{P}$. Il faut cependant remarquer que le comportement divergent de nos estimations lorsque ε tend vers 0 nous empêche de contrôler convenablement la densité $\overline{p}$ près du bord ∂D. Dans [*7*], Bismut montre que $\overline{p}(t, y, .) \in C^\infty(\overline{D})$ (cf. également [*42*]).

ii) On peut, après avoir remarqué que la norme L^1 de $N(t)$ est uniformément bornée sur $]0, T]$ montrer exactement comme dans [*8*] (1.24), que pour tout multi-indice α, $(t, z) \to \dfrac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} \overline{p}(t, y, z)$ est continue sur $R_+^* \times U$.

§ 2. HYPOELLIPTICITÉ PARTIELLE DANS D : PRÉDICTION ET FILTRAGE LORSQUE LA RÉFLEXION EST DANS LE SIGNAL

Nous allons maintenant étudier le problème de l'existence de densités conditionnelles C^∞, dans le cadre de la théorie du filtrage, lorsque la coordonnée réfléchie est dans le signal (le cas où la coordonnée réfléchie est dans l'observation est traité au § 5).

Nous nous intéressons à deux types de problèmes, représentés par les deux systèmes d'équations différentielles stochastiques de réflexion de Stratonovitch suivants

$$(2.3)\quad \begin{cases} dx_t = (X_0 + g_j\tilde{X}^j)(y_t)1_D(y_t)dt + X_i(y_t)1_D(y_t)dw_t^i \\ \qquad\qquad + \tilde{X}_j(y_t)1_D(y_t)d\tilde{w}_t^j + S_0(y_t)1_{\partial D}(y_t)dL_t + S_l(y_t)1_{\partial D}(y_t)dM_t^l \\ dz_t = (Z_0(z_t) + g_j(y_t)Z^j(z_t))1_D(y_t)dt + Z_j(z_t)1_D(y_t)d\tilde{w}_t^j \\ \qquad\qquad + R_0(z_t)1_{\partial D}(y_t)dL_t + R_l(z_t)1_{\partial D}(y_t)dM_t^l \\ y_t = (x_t, z_t)\ ;\ y_0 = (x, z) = y \in \overline{D}\ ;\ 1_{\partial D}(y_t)dt = \rho(y_t)dL_t \end{cases}$$

et

$$(3.13)\quad \begin{cases} dx_t = X_0(x_t)1_D(x_t)dt + X_i(x_t)1_D(x_t)1_D(x_t)dw_t^i + S_0(x_t)1_{\partial D}(x_t)dL_t \\ \qquad\qquad + S_l(x_t)1_{\partial D}(x_t)dM_t^l \\ x_0 = x\ ;\ \rho(x_t)dL_t = 1_{\partial D}(x_t)dt \\ dz_t = (Z_0(z_t) + g_j(x_t, z_t)Z^j(z_t))dt + Z_j(z_t)d\tilde{w}_t^j \\ z_0 = z \end{cases}$$

On s'intéresse alors à l'existence de densités conditionnelles pour les lois conditionnelles de x_t sachant F_T^z (tribu engendrée par z_s, $0 \leqslant s \leqslant T$), pour $t > T$ (prédiction), $t = T$ (filtrage) ou $t < T$ (lissage).

On remarquera que si le système (3.13) est relativement classique dans la littérature du filtrage ; le système (2.3) l'est beaucoup moins. En effet le signal $x.$ contient l'observation $z.$, et l'observation elle-même dépend du signal non seulement à travers le terme de dérive mais également à travers le temps local L ; de $x_\cdot^1$.

Nous traitons dans ce paragraphe et le suivant le système (2.3) indiquant rapidement au § 3.B comment les méthodes développées s'appliquent à (3.13).

§ 2A. Définition et notations.

$D = \overset{\circ}{R}{}^d_+ = \overset{\circ}{R}{}^n_+ \times R^{n'} = \{ y = (x, z) \in R^n \times R^{n'}, x^1 > 0 \}$.

$X_0, X_1, \ldots, X_p ; \tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{p'}$ sont $p+p'+1 = m+1$ champs de vecteurs C_b^∞ de R^d dans R^n.

$Z_0, Z_1, \ldots, Z_{p'} ; R_0, R_1, \ldots, R_r$ sont $p' + r + 2$ champs de vecteurs C_b^∞ de $R^{n'}$ dans $R^{n'}$.

$S_0, S_1, \ldots, S_r$ sont $r + 1$ champs de vecteurs de ∂D dans R^n.

On note

$$Y_0 = \begin{pmatrix} X_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} ; \quad Y_i = \begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix} 1 \leqslant i \leqslant p ; \quad \tilde{Y}_j = \begin{pmatrix} \tilde{X}_j \\ Z_j \end{pmatrix} 1 \leqslant j \leqslant p' ; \quad V_l = \begin{pmatrix} S_l \\ R_l \end{pmatrix} 0 \leqslant l \leqslant r$$

$\rho \in C_b^\infty(\partial D, R_+)$.

On s'intéresse maintenant au système d'équations différentielles stochastiques de réflexion de Stratonovitch

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{aligned} dx_t &= X_0(y_t) 1_D(y_t) dt + X_i(y_t) 1_D(y_t) dw_t^i \\ &\quad + \tilde{X}_j(y_t) 1_D(y_t) d\tilde{w}_t^j + S_0(y_t) 1_{\partial D}(y_t) dL_t + S_l(y_t) 1_{\partial D}(y_t) dM_t^l \\ dz_t &= Z_0(z_t) 1_D(y_t) dt + Z_j(z_t) 1_D(y_t) d\tilde{w}_t^j \\ &\quad + R_0(z_t) 1_{\partial D}(y_t) dL_t + R_l(z_t) 1_{\partial D}(y_t) dM_t^l \\ y_t &= (x_t, z_t) ; \ y_0 = (x, z) = y \in \overline{D} \\ 1_{\partial D}(y_t) dt &= \rho(y_t) dL_t. \end{aligned} \right.$$

On fait sur les champs $Y_i\, 0 \leqslant i \leqslant p$; $\tilde{Y}_j\, 1 \leqslant j \leqslant p'$; $V_l\ 0 \leqslant l \leqslant r$, les hypothèses (1.14) qui assurent donc l'existence d'une unique loi solution $\overline{P}_y$ pour tout $y \in \overline{D}$. Comme au § 1 on associe à (2.1) le système standard :

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{aligned} dy_t &= Y_0(y_t) dt + Y_i(y_t) dw_t^i + \tilde{Y}_j(y_t) d\tilde{w}_t^j \\ y_0 &= y \end{aligned} \right.$$

et son flot solution $\varphi_t(\omega_0, y)$ sur Ω_0 (ici la trajectoire de ω_0 est $(w., \tilde{w}.)$).

Soient $g_1, g_2, \ldots, g_{p'}$ p' champs de vecteurs C_b^∞ de R^d dans R. $\overline{P}_y^g$ désigne la loi solution du système :

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{aligned} dy_t &= (Y_0 + g_j \tilde{Y}^j)(y_t) 1_D(y_t) dt + Y_i(y_t) 1_D(y_t) dw_t^i \\ &\quad + \tilde{Y}_j(y_t) 1_D(y_t) d\tilde{w}_t^j + V_0(y_t) 1_{\partial D}(y_t) dL_t + V_l(y_t) 1_{\partial D}(y_t) dM_t^l \\ y_0 &= y \\ 1_{\partial D}(y_t) dt &= \rho(y_t) dL_t. \end{aligned} \right.$$

On sait que $\overline{P}_y^g$ et $\overline{P}_y$ sont équivalentes sur (F_t) pour $t < +\infty$. On note

$\overline{G}_t(\omega, y)$ la dérivée de Radon-Nikodym de $\overline{P}^g_y$ par rapport à $\overline{P}_y$ sur F_t :

Sur Ω_0 on définit :

$$\begin{cases} G_t(\omega, y) = \exp\left\{ \sum_{j=1}^{p'} \int_0^t g_j(\varphi_s(\omega_0, y))\delta\tilde{w}^j_s - 1/2 \int_0^t g_j^2(\varphi_s(\omega_0, y))ds \right\} \\ P^g_0 = G_t P_0 \quad \text{sur} \quad F^0_t \end{cases}$$

On note P^g_y la loi image de P^g_0 par $\varphi.(\omega_0, y)$ (P^g_y est donc une probabilité sur Ω).

On adopte les notations suivantes :

π_x, π_z désignent les projections de R^d sur R^n et $R^{n'}$.

Q_y, $\overline{Q}_y$, Q^g_y, $\overline{Q}^g_y$ désignent les lois images de P_y, $\overline{P}_y$, P^g_y, $\overline{P}^g_y$ par le processus $\pi_z y.$ (rappelons que $y.$ est le processus canonique sur $\Omega = C^0(R_+, R^d)$).

On se fixe $T_0 > 0$, $(F_t)_{0 \leqslant t \leqslant T_0}$ est la filtration canonique continue à droite et complétée par les $\overline{P}_y$ négligeables de F_{T_0}, qui sont aussi $\overline{P}^g_y$ négligeables ; on recollera ensuite les résultats en faisant tendre T_0 vers l'infini.

$(F^z_t)_{0<t<T_0}$ la filtration engendrée par $z. = \pi_z y.$ régularisée et complétée comme précédemment.

$\overline{S}^z_{T,y}$ désigne alors le processus $\overline{Q}^g_y$ p. s. unique défini de $C^0(R_+, R^d)$ dans l'espace des probabilités sur Ω, optionnel relativement à $(F^z_T)_{0 \leqslant T \leqslant T_0}$ et tel que pour tout U_T mesurable borné, $\int U_T(\omega)\, d\overline{S}^z_{T,y}(\omega)$ soit la projection optionnelle de U_T sur $(\Omega, \overline{P}^g_y)$ relativement à $(F^z_T)_{0 \leqslant T \leqslant T_0}$.

$\overline{\tau}^z_{T,y}$ désigne la mesure image sur $C^0(R_+, R^n)$ de la mesure $\overline{S}^z_{T,y}$ par le processus $x. = \pi_x y.$; c'est-à-dire le processus des $\overline{P}^g_y$ lois conditionnelles de $x.$ sachant F^z_T. Pour ces deux derniers points on consultera [*14*] [*27*].

Dans ce qui suit nous nous intéressons à la régularité de la mesure image sur $\mathring{R}^n_+$ de $\overline{\tau}^z_{T,y}$ par l'application x_t, c'est-à-dire la $\overline{P}^g_y$ loi conditionnelle de x_t sachant F^z_T.

§ 2B. **Intégration par parties partielle après un temps de sortie.**

De façon analogue au § 1 A on pose les définitions suivantes

DÉFINITION (2.4). — Pour $y \in R^d$, $F_0(y) = \{ Y_1(y), \ldots, Y_p(y) \}$ et pour $k \geqslant 1$ $F_k(y) = \{ [Y_i(y), V(y)]\ 0 \leqslant i \leqslant p,\ [\tilde{Y}_j(y), V(y)]\ 1 \leqslant j \leqslant p' ;\ V(y) \in F_k(y) \}$.

Notons que les n' dernières coordonnées des champs de F_k $k \geqslant 0$ sont nulles i. e. ces champs définissent des champs de R^n.

DÉFINITION (2.5). — L'hypothèse H' est définie de façon analogue à H (déf. (1.4)) en remplaçant E_k par F_k et S^{d-1} par S^{n-1}.

En particulier H' est vérifiée en y si et seulement si $Y_1(y), \ldots, Y_p(y)$ et les crochets de Lie de longueur $\geqslant 2$ des $Y_i(y)$ $0 \leqslant i \leqslant p$, $\tilde{Y}_j(y)$ $1 \leqslant j \leqslant p'$ où apparaît au moins un $Y_i(y)$ $1 \leqslant i \leqslant p$, engendrent R^n.

La matrice de covariance partielle de Malliavin est définie par

$$(2.6) \qquad C_t(\omega_0, y) = \sum_{i=1}^{p} \int_0^t (\pi_x \varphi_s^{*-1} Y_i(y))^t (\pi_x \varphi_s^{*-1} Y_i(y)) ds$$

Pour V ouvert de R^n, distinct de R^n et du vide on pose $U = V \times \{ |z| < h \}$ où $0 < h \leqslant +\infty$ et pour $\varepsilon > 0$ on définit τ, η, C_t^τ de façon analogue au § 1.

On a alors l'analogue du théorème (1.8).

THÉORÈME (2.7). — *On suppose que* $y \in \overline{U}_\varepsilon$ *et que* H' *est vérifiée uniformément sur* ∂U_ε. *Soient* t *et* $T \in]0, T_0]$. *On suppose de plus que l'une des deux hypothèses suivantes est en vigueur :*

i) $$h = +\infty$$

ii) $$h < +\infty, \qquad T_0 \geqslant T \geqslant t > 0$$

Alors pour tout multiindice α *il existe une variable aléatoire* $D^\alpha_{t,T,\tau}(y)$ telle *que*

iii) $$D^\alpha_{t,T,\tau}(y) 1_{t>\eta} \in \bigcap_{1 \leqslant q < +\infty} L^q(P_0)$$

iv) Pour toute $f \in C_b^\infty(R^n, R)$ *avec support* $f \subset \pi_x U$; *toute fonction* F *mesurable bornée de* $C^0([0, T], R^{n'})$ *dans* R *telle que* $F(z.) = 0$ *si* $\sup_{0 \leqslant s \leqslant T} |z_s| > h$, *on a*

$$(2.8) \quad E^{P_0^g}\left[\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(\pi_x \varphi_t(\omega_0, y)) 1_{t>\tau} F(\pi_z \varphi^T_.(\omega_0, y))\right] = E^{P_0^g}[f(\pi_x \varphi_t(\omega_0, y)) 1_{t>\tau} F(\pi_z \varphi^T_.(\omega_0, y)) D^\alpha_{t,T,\tau}]$$

où
$$\varphi^T_.(\omega_0, y) : \Omega_0 \to C^0([0, T], R^d)$$
$$\omega_0 \to (s \to \varphi_s(\omega_0, y)).$$

Preuve. — Elle est identique à celle de (1.8) à partir de [*8*] (2.11). On remarquera tout de même que l'hypothèse sur support de f assure que $\pi_x \varphi_t \in \pi_x U$; l'hypothèse sur F ainsi que *ii)* assurent que $\pi_z \varphi_s \in \pi_z U$ pour tout $s \leqslant T$ en particulier pour t, ceci étant bien sûr toujours réalisé si $h = +\infty$; ce qui nous permet de remplacer $1_{t>\tau}$ par $1_{t>\eta}$ dans les deux membres, point clé pour la validité de (2.8). □

§ 2C. Quasi-intégration par parties partielle pour une diffusion réfléchie.

On suppose maintenant que $\overline{U}_{2\varepsilon} \subset D$, F et f sont comme en (2.8) *iv*) excepté que support $f \subset \pi_x U_{\varepsilon/2}$. On définit la suite de temps d'arrêt (E_k, S_k) comme dans la preuve de (1.15) ; enfin si τ est un temps d'arrêt on décompose la trajectoire $y_\cdot^T$ avant et après τ ce qu'on écrit $(y_\cdot/T \wedge \tau/y'_\cdot/(T - \tau) \vee 0)$, enfin nous supposons que (2.7) *i*) ou *ii*) est en vigueur.

De façon analogue à ce que nous avons fait en (1.15) nous appliquons la propriété de Markov des lois $\overline{P}_y^g$ i. e.

$$(2.9) \quad E^{\overline{P}_y^g}\left[F(z_\cdot^T)\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}f(x_t)\right] = \sum_{k\in\mathbb{N}} E^{\overline{P}_y^g}\left[F(z_\cdot^T)\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}f(x_t)1_{E_k<t<S_k}\right]$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \iiint 1_{t>E_k}(\omega)1_{t-E_k<S_0}(\omega')\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}f(x_{t-E_k}(\omega'))F$$

$$(z_\cdot/T \wedge E_k/z'_\cdot/(T-E_k \wedge S_0) \vee 0/z''_\cdot/(T-E_k-S_0) \vee 0)\, d\overline{P}^g_{y'_{S_0}}(\omega'')d\overline{P}^g_{y_{E_k}}(\omega')d\overline{P}^g_y(\omega)$$

A ω fixé les lois images de $\overline{P}^g_{y_{E_k}}$ et $P^g_{y_{E_k}}$ par $y'_\cdot 1_{\cdot<S_0}$ sont identiques ; mais dans (2.9) F est fonction de $z''_\cdot$ éventuellement après S_0 (si $S_0 < T - E_k$). Pour remplacer $\overline{P}^g_{y_{E_k}}$ par $P^g_{y_{E_k}}$ nous sommes donc amenés à supposer que :

$$(2.10) \qquad t \geqslant T$$

ce qui assure que $T - E_k < S_0$ dans (2.9) et fait disparaître le terme en ω''.

On suppose désormais que H' est vérifiée uniformément sur ∂U_ε, $\partial U_{2\varepsilon}$ et éventuellement en y si $y \in \overline{U}_\varepsilon$. On peut alors utiliser (2.8) et la formule d'intégration par parties partielle de Bismut-Michel [*8*] qui nous donnent

$$(2.11) \quad E^{\overline{P}_y^g}\left[F(z_\cdot^T)\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}f(x_t)\right] = \sum_{k\in\mathbb{N}} \iint 1_{t>E_k}(\omega)f(\pi_x\varphi_{t-E_k}(\omega_0, y_{E_k}))$$

$$F(z_\cdot/T \wedge E_k/\pi_z\varphi_\cdot(\omega_0, y_{E_k})/(T - E_k) \wedge 0)$$

$$\{ D^\alpha_{t-F_k,(T-E_k)\vee 0} - 1_{t-E_k>S_{E_k}}D^\alpha_{t-E_k,(T-E_k)\vee 0,S_{E_k}} \}\, dP^g_0(\omega_0)d\overline{P}^g_y(\omega)$$

où $S_{E_k} = \inf\{ s > 0, \varphi_s(\omega_0, y_{E_k}) \notin U_{2\varepsilon} \}$; $D^\alpha_{t,T} = D^\alpha_{t,T,0}$; $D^\alpha_{t,0,\tau} = B^\alpha_{t,\tau}$.

Cette fois c'est f et non $\dfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}f$ qui apparaît dans le membre de droite. Remarquons cependant que nous ne pouvons pas réutiliser directement la propriété de Markov pour sommer en k à cause de la structure du terme entre accolades. On procède donc différemment. Sur $\Omega \times \Omega_0 \times \Omega$ on définit le processus $z_{\cdot,k}$ par

$$(2.12)\quad z_{\cdot,k}(\omega, \omega_0, \omega') = 1_{s<\mathrm{E}_k}(\omega) z_s(\omega) + 1_{s\geq \mathrm{E}_k}(\omega) 1_{s-\mathrm{E}_k < \mathrm{S}_{\mathrm{E}_k}}(\omega_0) \pi_z \varphi_{s-\mathrm{E}_k}(\omega_0, y_{\mathrm{E}_k}) + 1_{s-\mathrm{E}_k-\mathrm{S}_{\mathrm{E}_k}\geq 0}\ z'_{s-\mathrm{E}_k-\mathrm{S}_{\mathrm{E}_k}}(\omega')$$

$\mathrm{P}(z, k)$ désigne la probabilité définie sur $\Omega \times \Omega_0 \times \Omega$, par : pour g mesurable bornée

$$\int g(\omega, \omega_0, \omega') d\mathrm{P}(z, k) = \int_\Omega d\overline{\mathrm{P}}_y^g(\omega) \int_{\Omega_0} d\mathrm{P}_0^g(\omega_0) \int_\Omega g(\omega, \omega_0, \omega') d\overline{\mathrm{P}}^g_{\varphi_{\mathrm{S}_{\mathrm{E}_k}(\omega_0, y_{\mathrm{E}_k})}}(\omega')$$

$(\mathrm{F}^z_{s,k})$ la filtration engendrée par le processus $z_{\cdot,k}$ convenablement complétée et régularisée. Les lois sur $\mathrm{C}^0([0, \mathrm{T}], \mathrm{R}^{n'})$ images de $\overline{\mathrm{P}}_y^g$ par $z_\cdot^\mathrm{T}$ et de $\mathrm{P}(z, k)$ par $z^\mathrm{T}_{\cdot,k}$ coïncident. On conditionne alors par $\mathrm{F}^z_{\mathrm{T},k}$ dans le membre de droite de (2.11) ; si $f^\alpha_{k,t,\mathrm{T}}(z^\mathrm{T}_{\cdot,k})$ désigne l'espérance conditionnelle de tout ce qui n'est pas F on obtient

$$(2.13)\qquad \mathrm{E}^{\overline{\mathrm{P}}_y^g}\left[\mathrm{F}(z_\cdot^\mathrm{T}) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x_t)\right] = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{E}^{\mathrm{P}(z,k)}\left[\mathrm{F}(z^\mathrm{T}_{\cdot,k}) f^\alpha_{k,t,\mathrm{T}}(z^\mathrm{T}_{\cdot,k})\right]$$

$$= \mathrm{E}^{\overline{\mathrm{P}}_y^g}\left[\mathrm{F}(z_\cdot^\mathrm{T}) \sum_{k\in\mathbb{N}} f^\alpha_{k,t,\mathrm{T}}(z_\cdot^\mathrm{T})\right]$$

C'est la formule (2.13) qu'on peut appeler formule de quasi-intégration par partie partielle.

Nous donnons maintenant les éléments permettant de vérifier la validité de ce qui précède. Tout d'abord puisque support $f \subset \pi_x \mathrm{U}_{\varepsilon/2}$ et $\sup_{0\leq s\leq \mathrm{T}} |z_s| < h$ on peut rentrer $1_{t-\mathrm{E}_k > \zeta_k}$ dans $\mathrm{D}^\alpha_{t-\mathrm{E}_k, (\mathrm{T}-\mathrm{E}_k)\vee 0}$; et $1_{t-\mathrm{E}_k > \eta_k}$ dans $\mathrm{D}^\alpha_{t-\mathrm{E}_k, \mathrm{T}-\mathrm{E}_k, \mathrm{S}_{\mathrm{E}_k}}$ où

$$\zeta_k = \inf\{ s \geq 0,\ \varphi_s(\omega_0, y_{\mathrm{E}_k}) \in \overline{\mathrm{U}}_{\varepsilon/2} \}$$
$$\eta_k = \inf\{ s \geq \mathrm{S}_{\mathrm{E}_k},\ \varphi_s(\omega_0, y_{\mathrm{E}_k}) \in \overline{\mathrm{U}}_{\varepsilon/2} \}$$

Le lecteur vérifiera sans peine les faits suivants :

i) $\sup_{y\in\overline{\mathrm{D}}} \mathrm{E}^{\mathrm{P}_0}\left[\sup_{0\leq s\leq t} |\mathrm{G}_s(\omega_0, y)|^q\right] \leq \mathrm{C}_q$

donc $\mathrm{G}_{t-\mathrm{E}_k}(\omega_0, y_{\mathrm{E}_k}) \in \bigcap_{1\leq q<+\infty} \mathrm{L}^q(\overline{\mathrm{P}}_y^g \times \mathrm{P}_0)$

ii) $\sup_{0\leq s\leq t} \left| (\varphi_s^{*-1}(\omega_0, y_{\mathrm{E}_k}) \right| \vee \left| \varphi_s^*(\omega_0, y_{\mathrm{E}_k})) \right| \in \bigcap_{1\leq q<+\infty} \mathrm{L}^q(\overline{\mathrm{P}}_y^g \times \mathrm{P}_0)$

iii) $C^{-1}_{t-E_k}(\omega_0, y_{E_k})1_{t-E_k>\zeta_k} \in \bigcap_{1 \leqslant q < +\infty} L^q(\overline{P}^g_y \times P_0)$

iv) $C^{S_{E_k}}_{t-E_k}(\omega_0, y_{E_k})1_{t-E_k>\eta_k}$ est p. s. inversible et son inverse appartient à tous les $L^q(\overline{P}^g_y \times P_0)$ pour $1 \leqslant q < +\infty$.

v) Les normes L^q considérées dans *i)-iv)* sont majorées indépendamment de k.

Des estimations précédentes on tire que $f^{\alpha}_{k,t,T}(z^T_\cdot)$ existe et est dans tous les $L^q(\overline{P}^g_y)$, de plus sa norme L^q est majorée indépendamment de k. Il ne reste plus qu'à remarquer comme au § 1 que la somme est à prendre entre 0 et $N(t)$ lui-même dans tous les L^q, on a ainsi établi

$$(2.14)\quad \overline{P}^g_y \text{ p. s. } 1_{\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|z_s|<h}\left|E^{\overline{P}^g_y}\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x_t)/F^z_T\right)\right| \leqslant 1_{\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|z_s|<h}\,\|f\|_\infty\, H^z_{t,T,h,\alpha}(\omega)$$

où $$H^z_{t,T,h,\alpha}(\omega) = \sum_{k=0}^{N(t)} h^{\alpha}_{k,t,T}(z^T_{\cdot,k}) \qquad \text{avec} \qquad h(x) = 1_{\pi_x U_{\varepsilon/2}}(x)$$

On peut prendre ensuite h *entier* suffisamment grand pour faire disparaître l'indicatrice hors d'un *négligeable fixe*. On raisonne ensuite comme dans [*8*] (2.13), pour obtenir

THÉORÈME (2.15). — *Soient* V *un ouvert de* R^n, $\varepsilon > 0$ *tels que* $\overline{V}_{2\varepsilon} \subset \mathring{R}^n_+$; *et* $T > 0$. *On suppose que si* $\pi_x y \in \overline{V}_\varepsilon$, H′ *est vérifiée en* y ; *et que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée* :

i) $T = t$ *et pour tout* $h \in R_+$, H′ *est vérifiée uniformément sur* ∂U^h_ε *et* $\partial U^h_{2\varepsilon}$ *où* $U^h = V \times \{\,|z| < h\,\}$

ii) $t \geqslant T$ *et* H′ *est vérifiée uniformément sur* $\partial U^\infty_\varepsilon$ *et* $\partial U^\infty_{2\varepsilon}$.

Alors il existe un $\overline{Q}^g_y$ *négligeable* N *tel que si* $\pi_z y_\cdot \notin N$ *la loi de* $\pi_x y_t$ *pour la mesure* $\overline{\tau}^z_{T,y}$ *restreinte à* V *admet une densité* $\overline{q}^z_{t,T}(x) \in C^\infty_b(V)$.

COROLLAIRE (2.16). — *Sous l'une des hypothèses suivantes* :

i) $t = T$ *et* H′ *est vérifiée en tout point de* D.

ii) $t \geqslant T$ *et* H′ *est vérifiée uniformément sur* $G_\beta = \{\,0 \leqslant y^1 \leqslant \beta\,\}\ \beta > 0$; *et est vérifiée en* y.

iii) $t \geqslant T$, *les champs* X_i *et* $\tilde{X}_j$ *ne dépendent pas de* z, *et* H′ *est vérifiée en tout point de* D.

iv) $t \geqslant T$ *les champs* X_i *ne dépendent pas de* z *et Lie* $\{\,(\mathrm{ad}\,X_0)^k, (X_i)\,;\ 1 \leqslant i \leqslant p,\ k \geqslant 0\,\}$ *engendre* R^n *en tout point* $x \in \mathring{R}^n_+$.

La loi de $\pi_x y_t$ pour $\overline{\tau}^z_{T,y}$ admet une densité $\overline{q}^z_{t,T} \in C^\infty(\overset{\circ}{R}{}^n_+)\ \overline{Q}^g_y$ p. s.

Remarques. — *i*) De même que pour (1.15) on montre la continuité en (t, T) de $\overline{q}^z_{t,T}$ et de ses dérivées (cf. [*12*]).

ii) Les résultats de ce paragraphe s'appliquent sans difficulté au cas où l'observation est standard, cas sur lequel nous revenons au § 3.

§ 3. LE PROBLÈME DU LISSAGE ET LE CAS OÙ L'OBSERVATION EST STANDARD

Nous reprenons les notations du paragraphe précédent sauf mention explicite du contraire

§ 3A. Lissage : un cas particulier.

Nous supposons dans cette section que le système (2.1) s'écrit

$$(3.1)\quad \begin{cases} x^1_t = w^1_t + L_t + x^1_0 \\ dx^u_t = X^u_0(y_t)dt + X^u_i(y_t)dw^i_t + \tilde{X}^u_j(y_t)d\tilde{w}^j_t + S^u_0(y_t)dL_t + S^u_l(y_t)dM^l_t\ ; \\ \hfill 2 \leqslant u \leqslant n \\ dz_t = Z_0(z_t)dt + Z_j(z_t)d\tilde{w}^j_t \\ y_t = (x_t, z_t)\ ;\ y_0 \in \overline{D}\ ;\quad \text{et} \quad 1_{\partial D}(y_t)dt = 0. \end{cases}$$

Soit $\overline{\Omega} = \Omega \times \tilde{\Omega} \times \Omega^*, \Omega = C^0(R_+, R^p), \tilde{\Omega} = C^0(R_+, R^{p'}), \Omega^* = C^0(R_+, R^r)$ l'élément générique de $\overline{\Omega}$ est noté $\overline{\omega} = (\omega, \tilde{\omega}, \omega^*)$ de trajectoire $(w., \tilde{w}., w.^*)$; L_t le temps local de x^1 en 0, $M_t = w^*_{L_t}$, $\overline{P}$ la mesure brownienne canonique sur $\overline{\Omega}$ $(\overline{P} = P \times \tilde{P} \times P^*)$.

On construit alors sur cet espace la solution $\overline{P}$ essentiellement unique de (3.1) qu'on note $\overline{\varphi}.(\overline{\omega}, y)$ par rapport à la filtration engendrée par $(w., \tilde{w}., M.)$. On notera que cette filtration dépend de x^1_0. On peut définir

$$\overline{G}_t(\omega, y) = \exp\left\{ \sum_{j=1}^{p'} \int_0^t g_j(\overline{\varphi}_s)\delta\tilde{w}^j_s - 1/2 \int_0^t g^2_j(\overline{\varphi}_s)ds \right\}$$

On peut également construire φ_t et G_t pour le système standard (2.2) associé sur $\Omega \times \tilde{\Omega}$ et la filtration canonique.

On note $R^{z\cdot}$ une désintégration régulière de $\overline{P}$ par rapport à $\overline{Q}_y$ (ou Q_y puisqu'elles coïncident). On remarquera que $\overline{Q}_y$ ne dépend que de $z. = \pi_z\varphi.$ de sorte qu'on la note $\overline{Q}_z$ dans la suite, $R^{z\cdot}$ ne dépend également que de z.

On a le résultat suivant similaire à [8] (2.6) et (2.7).

PROPOSITION (3.2). — *i*) Il existe un $\overline{Q}_z$ négligeable Λ de $C^0(R_+, R^{n'})$ tel que si $z. = \pi_z\overline{\varphi}. \notin \Lambda$, pour tout $T \geqslant 0$, $\sup_{0 \leqslant s \leqslant T} \overline{G}_s(\overline{\omega}, y) \in \bigcap_{1 \leqslant q < +\infty} L^q(R^{z\cdot})$.

i) Pour toute f mesurable et bornée de R^n dans R, si $z. \notin \Lambda$ on a pour tout $T \geqslant t > 0$

$$(3.3) \quad \int_{C^0(R_+, R^n_+)} f(x_t) d\bar{\tau}^z_{T,y}(x.) = 1/\overline{K}_T \int_{\overline{\Omega}} f(\pi_x\overline{\varphi}_t(\overline{\omega}, y))\overline{G}_T(\overline{\omega}, y) dR^z(\overline{\omega})$$

où

$$\overline{K}_T = \int_{\overline{\Omega}} \overline{G}_T(\overline{\omega}, y) dR^{z\cdot}(\overline{\omega})$$

On va localiser directement dans (3.3) pour cela on montre

PROPOSITION (3.4). — *On suppose que $n' = p'$ et que $Z_1, \ldots, Z_{p'}$ engendrent $R^{n'}$ en tout point $z \in R^{n'}$. Alors il existe un $\overline{Q}_z$ négligeable Λ de $C^0([0, T_0], R^{n'})$ tel que si $z. \notin \Lambda$ les lois de $(\pi_x\overline{\varphi}, \overline{G}.)$ et de $(\pi_x\varphi., G.)$ pour la mesure $R^{z\cdot}$ sont fortement markoviennes.*

Preuve. — On suit la démarche de [8] (1.6) et (3.1). Soit $\psi.(\tilde{\omega}, y, G)$ le flot solution sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{P})$ (muni de la filtration canonique) de

$$(3.5) \quad \begin{cases} dy_t = Y_0(y_t)dt + \tilde{Y}_j(y_t)d\tilde{w}^j_t, & y_0 = y \\ \delta G_t = G_t g_j(y_t)\delta\tilde{w}^j_t, & G_0 = G \end{cases}$$

on note $\pi_{x,g}$ la projection de $R^n \times R^{n'} \times R$ sur $R^n \times R$. Par la formule de Ito-Stratonovitch généralisée de ([4] [20] [21]) on a

si $H_t = \psi_t^{-1}(\tilde{\omega}, \varphi_t(\overline{\omega}, y), G_t(\overline{\omega}, y))$ alors H_t est la solution $\tilde{P} \times P$ essentiellement unique de

$$(3.6) \quad dH_t = (\psi_t^{*-1}Y^g_i)(H_t)dw^i_t, \qquad H_0 = (y, G)$$

où $Y^g_i = \begin{pmatrix} Y_i \\ 0 \end{pmatrix}$ est un champ de R^d dans R^{d+1}.

En raisonnant comme dans [8] (1.6) on montre qu'en fait

(3.7) $\quad \tilde{P}$ p. s. à $\tilde{\omega}$ fixé, H_t est la solution de (3.6) sur (Ω, P)

A $\tilde{\omega}$ fixé, H. est donc une diffusion ; donc $\pi_{x,g}\psi_t(\tilde{\omega}, \pi_{x,g}H_t, z)$ qui n'est autre que $(\pi_x\varphi_t, G_t)$ est markovien. Le résultat provient alors de l'identité de la filtration canonique sur $\tilde{\Omega}$, et de la filtration engendrée par $z.$, garantie par l'hypothèse d'ellipticité sur les champs Z_j.

Le cas de $(\pi_x\overline{\varphi}., \overline{G}.)$ est plus délicat. De même qu'en (3.7) si $\overline{H}_t = \psi_t^{-1}(\tilde{\omega}, \overline{\varphi}_t, \overline{G}_t)$ alors à $\tilde{\omega}$ fixé, $\overline{H}_t$ est la solution $P \times \tilde{P}$ essentiellement unique du système de Stratonovitch *ordinaire* (à y fixé, L_t est fixé et ne dépend pas de $\tilde{\omega}$)

$$(3.8)\quad d\overline{H}_t = (\psi_t^{*-1}Y_i^g)(\overline{H}_t)dw_t^i + (\psi_t^{*-1}V_0^g)(\overline{H}_t)dL_t + (\psi_t^{*-1}V_l^g)(\overline{H}_t)dM_t^l,\quad \overline{H}_0 = (y, \overline{G}).$$

Il est cependant immédiat que $\overline{H}_t^1 = x_t^1$; donc L_t reste le temps local en 0 de $\overline{H}_t^1$, ce qui nous autorise à regarder (3.8) comme une équation de réflexion dont on a construit pour chaque y un représentant de la solution ; la famille des lois de $\overline{H}_t$ est donc celle de la diffusion réfléchie associée à (3.8), on conclut comme pour $(\varphi., G.)$. $\square$

On déduit de (3.3) et (3.4)

THÉORÈME (3.9). — *Sous les hypothèses de* (3.4) *et* (2.15) *i*) *hormis le fait que maintenant* $T_0 \geqslant T \geqslant t > 0$; *il existe un* $\overline{Q}_z$ *négligeable* $\overline{\Lambda}$ *tel que si* $z. \notin \overline{\Lambda}$, *la loi de* $\pi_x y_t$ *pour la mesure* $\overline{\tau}_{T,y}^z$ *restreinte à* V *admet une densité* $\overline{q}_{t,T}^z$ *qui s'écrit*

$$(3.10)\quad \overline{q}_{t,T}^z(x) = \overline{p}_t^z(x)\overline{h}_{t,T}^z(x) \quad \text{où} \quad \overline{p}_t^z \in C_b^\infty(V)$$
$$\text{et} \quad \overline{h}_{t,T}^z(x) = E^{R^{z.}}[\overline{G}_{T-t}(\overline{\omega}, y)] \in L^\infty(R_+^n).$$

Donc sous les hypothèses de (3.4) *et* (2.16) (*sauf* $T \geqslant t > 0$) *cette loi admet une densité sur* $\overset{\circ}{R}{}_+^n$.

Preuve. — Le résultat sur $\overline{h}_{t,T}^z$ provient d'un résultat de N. El Karoui [*15*] et est laissé au lecteur (cf. [*12*]).

Pour montrer (3.10) on applique la propriété de Markov (3.4) dans la formule (3.3) pour une fonction f avec support $f \subset V_{\varepsilon/2}$; une première fois au temps t, ce qui fait apparaître $\overline{h}_{t,T}^z$; une seconde fois au temps E_k d'où

$$(3.11)\quad \int_{C^0(R_+, R_+^n)} f(x_t)d\overline{\tau}_{T,y}^z(x.) = 1/\overline{K}_T \sum_{k=0}^{\infty} \iint (f \times \overline{h}_{t,T}^z)(\pi_x\overline{\varphi}_{t-E_k}(\overline{\varphi}_{E_k}))1_{t>E_k}$$
$$1_{t-E_k<S_k'}\overline{G}_{E_k}\overline{G}_{t-E_k}(\overline{\varphi}_{E_k})dR^{z.}(\overline{\omega}')dR^{z.}(\overline{\omega})$$

où
$$S_k' = \inf\{\, t \geqslant 0, \pi_x\overline{\varphi}_t(\overline{\omega}, \overline{\varphi}_{E_k}) \notin V_{2\varepsilon}\,\}.$$

Soit μ une variable aléatoire répartie sur $\overline{V}_\varepsilon \times R^{n'}$, les processus $(\overline{\varphi}_{s\wedge S_0}(\overline{\omega}, \mu),$ $\overline{G}_{s\wedge S_0}(\overline{\omega}, \mu))$ et $(\varphi_{s\wedge S_0}(\overline{\omega}, \mu), G_{s\wedge S_0}(\overline{\omega}, \mu))$ sont $\overline{P}$ essentiellement égaux, donc $\overline{Q}_z$ p. s. (le négligeable en question dépend de μ) ils sont $R^{z.}$ essentiellement égaux. Ainsi quitte à ôter un nombre dénombrable de $\overline{Q}_z$ négligeables correspondant à $\overline{\varphi}_{E_k}$, on peut dans l'intégrale en $\overline{\omega}'$ de (3.11) remplacer $(\overline{\varphi}, \overline{G})$ par (φ, G). Ce point est essentiel, on ne doit pas raisonner à ω fixé sous peine d'ôter des négligeables pour $\overline{Q}_z$ dépendant de $\overline{\omega}$.

On écrit ensuite $1_{t-E_k<S'_k} = 1 - 1_{t-E_k \geq S'_k}$ et on applique à nouveau (3.4) cette fois pour $(\varphi., G.)$ au temps S'_k.

Le lecteur vérifiera qu'on reconnaît dans les expressions qui apparaissent l'égalité (2.9) de [*8*]. On utilise alors le fait que les lois conditionnelles des diffusions standard étudiées dans [*8*] ont des densités $C_b^\infty(R^n)$. Les densités qui apparaissent sont

i) $q^z_{t-E_k,t-E_k}$ partant de $\overline{\varphi}_{E_k} \in \partial V_\varepsilon \times R^{n'}$ (ou éventuellement de y pour $k=0$)

ii) $q^z_{t-E_k-S'_k,t-E_k-S'_k}$ partant de $\varphi_{S'_k}(\varphi_{E_k}) \in V_{2\varepsilon} \times R^{n'}$.

On obtient sur ces densités des estimations analogues à celles du § 1 uniformément en k. Pour cela il faut remarquer d'une part que les temps sont identiques $(q^z_{s,s})$, d'autre part que le fait d'intégrer par rapport à $R^{z.}$ fixe toute la trajectoire de $\pi_z\overline{\varphi}.$. Nous renvoyons à [*12*] pour les détails et les extensions de (3.9). □

§ 3B. Le cas où l'observation est standard.

On s'intéresse au système

$$
(3.12) \quad \begin{cases} dx_t = X_0(x_t)1_D(x_t)dt + X_i(x_t)1_D(x_t)dw_t^i + S_0(x_t)1_{\partial D}(x_t)dL_t \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + S_l(x_t)1_{\partial D}(x_t)dM_t^l \\ x_0 = x, \; \rho(x_t)dL_t = 1_{\partial D}(x_t)dt \\ dz_t = Z_0(z_t)dt + Z_j(z_t)d\tilde{w}_t^j \\ z_0 = z \end{cases}
$$

La construction de la solution de (3.12) ne pose pas de problème, on introduit une dépendance en x dans $z.$ à l'aide d'une transformation de Girsanov standard. Les méthodes et résultats du § 2 s'appliquent sans modification à (3.12). En ce qui concerne le cas du lissage il est facile de voir que (3.4) reste vrai, car x_t est clairement invariant par ψ_t ; on peut alors adapter la démonstration de (3.9) en utilisant l'indépendance de $x.$ et $z.$ pour la probabilité de base (i. e. avant Girsanov). Les détails sont laissés au lecteur.

Remarque. — De même que précédemment on peut montrer la continuité en temps des densités qui apparaissent (cf. [*12*], § 10).

§ 4. FLOT STOCHASTIQUE ASSOCIÉ A UNE CLASSE DE DIFFUSIONS RÉFLÉCHIES

§ 4A. Un théorème de flot.

On note Ω l'espace $\Omega' \times \overline{\Omega} \times \Omega^*$ où $\Omega' = C^0(R_+, R)$, $\overline{\Omega} = C^0(R_+, R^{n-1})$, $\Omega^* = C^0(R_+, R^r)$. Tout point ω de Ω a une trajectoire notée $(B_., w^2_., \ldots, w^m_., w_.^{*1}, \ldots, w_.^{*r})$.

Pour $u \in R_+$, P'_u, $\overline{P}$, P^* désignent les mesures browniennes sur Ω', $\overline{\Omega}$, Ω^* telles que $P'_u(B_0 = u) = \overline{P}(w_0^2 = \ldots = w_0^m = 0) = P^*(w_0^{*1} = \ldots = w_0^{*r} = 0) = 1$ et $P_u = P'_u \times \overline{P} \times P^*$.

On définit alors

(4.1) $w_t^1 = B_t - B_0$; $L_t = -\min\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} (B_s \wedge 0)$; $u_t = B_t + L_t$ et $M_t^1 = w_{L_t}^{*1}$ pour $1 \leqslant 1 \leqslant r$

(4.2) $(F_t)_{t \geqslant 0}$ désigne la filtration continue à droite engendrée par $(B_., w_., M_.)$; $(F_t(u))_{t \geqslant 0}$ désigne la P_u complétion de F_t, et $F_t^c = \bigcap\limits_{u \in R_+} F_t(u)$.

Le point générique de $R^d = R \times R^{d-1}$ est noté $y = (u, x)$

$X_0, X_1, \ldots, X_m$ sont $m + 1$ champs de vecteurs C_b^∞ de R^d dans R^{d-1}

$S_0, S_1, \ldots, S_r$ sont $r + 1$ champs de vecteurs C_b^∞ de R^{d-1} dans R^{d-1}

On considère le système d'équations différentielles stochastiques de Stratonovitch

$$(4.3) \quad \begin{cases} dx_t = X_0(u_t, x_t)dt + X_i(u_t, x_t)dw_t^i + S_0(x_t)dL_t + S_l(x_t)dM_t^l \\ x_0 = x \end{cases}$$

D'après [*21*] il existe un flot $\varphi_.^u(\omega, x)$ de C^∞ difféomorphismes de R^{d-1}, tel que $\varphi_.^u(\omega, x)$ est une version de la solution P_u essentiellement unique de (4.3) sur $(\Omega, (F_t(u))_{t \geqslant 0}, P_u)$. Il est clair d'autre part que $(u_., \varphi_.^u(\omega, x))$ est solution d'une équation de réflexion partant de (u, x).

Si nous tentons d'adopter la démarche du calcul des variations de [*5*], nous voyons que le fait que $\varphi_.^u$ dépende de u est extrêmement gênant. Ce fait provient bien sûr de $(F_t(u))_{t > 0} \neq (F_t(u'))_{t > 0}$ pour $u \neq u'$.

En fait on a le

THÉORÈME (4.4). — *Il existe une application de* $\Omega \times R_+^d$ *dans* R^{d-1} *notée* $(\omega, t, x) \to \varphi_t(\omega, x)$ *telle que*

(4.5) *Pour tout* $\omega \in \Omega$, $\varphi_0(\omega, .)$ *est l'identité de* R^{d-1}.

(4.6) *Pour tout* $(t, x) \in \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}^{d-1}$, $\varphi_t(.,x)$ *est* F_t^c *mesurable.*

(4.7) *Pour tout* $\omega \in \Omega$, $(\varphi_t(\omega, .))_{t \geqslant 0}$ *est une famille de* C^∞ *difféomorphismes de* R^{d-1} *dont les dérivées de tous ordres sont continues en* (t, x).

(4.8) *Pour tout* $u \in \mathrm{R}_+$, *tout* $x \in \mathrm{R}^{d-1}$, $\varphi_.(\omega, x)$ *est une version de la solution* P_u *essentiellement unique de* (4.3).

(4.9) *La famille* $\{ (\mathrm{P}_{u,x}), (u, x) \in \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}^{d-1} \}$ *des lois images de* P_u *par* $(u_., \varphi_.(\omega, x))$ *est fortement Markovienne.*

(4.10) *Pour tout* $u \in \mathrm{R}_+, t \in \mathrm{R}_+$, K *compact de* R^{d-1}, α *multiindice de longueur* $|\alpha| \geqslant 1$, $q \in [1, +\infty[$ *on a*

i) $\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \sup_{x \in \mathrm{K}} \left(|\varphi_s(\omega, x)| \vee |\varphi_s^{-1}(\omega, x)| \right) \in \mathrm{L}^q(\mathrm{P}_u)$

ii) $\sup_{x \in \mathrm{R}^{d-1}} \mathrm{E}^{\mathrm{P}_u}\left[\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \left[\left| \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}{}_s(\omega, x) \right|^q \vee \left| \frac{\partial^\alpha \varphi^{-1}}{\partial x^\alpha}{}_s(\omega, x) \right|^q \right] \right] < +\infty$

iii) $\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \sup_{x \in \mathrm{K}} \left[\left| \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}{}_s(\omega, x) \right| \vee \left| \frac{\partial^\alpha \varphi^{-1}}{\partial x^\alpha}{}_s(\omega, x) \right| \right] \in \mathrm{L}^q(\mathrm{P}_u)$

iv) Les normes L^q *considérées dans i) ii) iii) sont bornées uniformément en u.*

Ce théorème généralise le théorème 1.1 de [*6*] (cf. [*12*], § 5 B pour une discussion approfondie) tout en proposant une démonstration totalement différente.

Preuve. — Nous ne donnons que les grandes lignes, renvoyant le lecteur à [*12*], § 5 pour une démonstration complète.

Soit $\theta_t = \inf \{ s \geqslant 0, s + \mathrm{L}_s > t \}$, nous notons $\tilde{w}_.$ (resp. $\tilde{u}_.$, $\tilde{\mathrm{M}}_.$) le processus $w_{\theta_.}$ (resp. $u_{\theta_.}$, $\mathrm{M}_{\theta_.}$), de sorte que les crochets $\langle \tilde{w} \rangle_.$, $\langle \tilde{\mathrm{M}} \rangle_.$ sont 1-Lipschitziens. Soit $(\tilde{\mathrm{F}}_{s,t})_{t>s}$ la filtration continue à droite engendrée par $\tilde{\mathrm{B}}_v$, $\tilde{w}_v - \tilde{w}_s$, $\tilde{\mathrm{M}}_v - \tilde{\mathrm{M}}_s$ pour $0 < s \leqslant v \leqslant t$, sa P_u complétion est notée $(\mathrm{F}_{s,t}(u))_{t>s}$. On a bien sûr que pour $u \neq u'$ $\mathrm{F}_{s,t}(u) = \mathrm{F}_{s,t}(u')$. Soit $\eta_{s,t} = \tilde{\mathrm{B}}_t + \langle \tilde{\mathrm{M}} \rangle_t - \langle \tilde{\mathrm{M}} \rangle_s$, et $\zeta_{s,t}$ la solution de

$$\zeta_{s,t} = x + \int_s^t \mathrm{X}_0(\eta_{s,v}, \zeta_{s,v}) d\theta_v + \int_s^t \mathrm{X}_i(\eta_{s,v}, \zeta_{s,v}) d(\tilde{w}_v^i - \tilde{w}_s^i)$$
$$+ \int_s^t \mathrm{S}_0(\zeta_{s,v}) d \langle \tilde{\mathrm{M}} \rangle_v + \int_v^t \mathrm{S}_l(\zeta_{s,v}) d(\tilde{\mathrm{M}}_v^l - \tilde{\mathrm{M}}_s^l)$$

On sait qu'il existe une version $\mathrm{F}_{s,t}(u)$ mesurable de la solution pour tout u, qu'on peut choisir indépendamment de u puisque $\mathrm{F}_{s,t}(u) = \mathrm{F}_{s,t}(u')$.

Il est facile de constater que la *limite médiale* [*29*] des $\zeta_{1/n,t}$ existe. Soit ζ_t

cette limite, alors ζ_t est universellement mesurable et on a pour tout (t, x, u) P_u p. s. $\zeta_t(\omega, x) = \tilde{\varphi}_t^u(\omega, x)$.

Suivant les idées de [36], en considérant $\zeta_t(\omega, x)$ comme un processus indexé par (t, x) on modifie $\zeta_t(\omega, x)$ de façon à le rendre continu à droite en (t, x) pour l'ordre partiel usuel sur R^d, P_u indistinguable de $\tilde{\varphi}_t^u(\omega, x)$, et F_t^c mesurable. Soit $\gamma_t(\omega, x) = \zeta_{t+L_t}(\omega, x)$.

On note $A = \{ \omega/\gamma_t(\omega, x)$ ne vérifie pas (4.7) $\}$. Alors $A \subset \{ \omega/\exists(t, x)$ avec $\gamma_t(\omega, x) \neq \varphi_t^u(\omega, x)\}$ et donc est P_u négligeable pour tout $u \in R_+$.

$\varphi_t(\omega, x)$ est alors défini par

$$\begin{cases} \varphi_t(\omega, x) = x & \text{si} \quad \omega \in A \\ \varphi_t(\omega, x) = \gamma_t(\omega, x) & \text{sinon} \end{cases}$$

(4.5) à (4.9) sont démontrés.

Pour démontrer (4.10) on utilise les inégalités classiques de la théorie des processus, l'expression explicite de la P_u loi de L_t, ainsi que la propriété de Markov (4.9) des lois de $(u., \varphi.)$ (cf. [12], p. 60-67). □

§ 4B. Passage de (4.3) à (1.13).

Nous rappelons ici la construction de la solution de (1.13) à partir de $(u., \varphi.)$; ce qui nous permet de fixer quelques notations que nous conserverons par la suite. Soit b un champ de vecteurs C_b^∞ de R^d dans R. On définit

$$(4.11) \quad \begin{cases} N_t(\omega, x) = \exp\left\{ \int_0^t b(u_s, \varphi_s)\delta w_s^1 - 1/2 \int_0^t b^2(u_s, \varphi_s) ds \right\} \\ P_u^b = N_t P_u \quad \text{sur} \quad F_t(u) \end{cases}$$

$$(4.12) \quad A^2(y) = \sum_{i=1}^m (Y_i^1(y))^2 \qquad \text{où les } Y_i \text{ sont définis en (1.13),}$$

et on suppose que $A^2(y) \geqslant c > 0$ *pour tout* $y \in \bar{D}$.

Soit $\rho \in C_b^\infty(\partial D, R_+^*)$.

On définit

$$(4.13) \quad \gamma_t(\omega, x) = \int_0^t ds/A^2(u_s, \varphi_s(\omega, x)) + \int_0^t \rho(\varphi_s(\omega, x)) dL_s$$

$$\gamma_t^{-1}(\omega, x) = \inf\{ s \geqslant 0, \gamma_s(\omega, x) > t \}.$$

On vérifie alors ([18], p. 210-213) que la P_u^b loi de $(u_{\gamma_\cdot^{-1}}, \varphi_{\gamma_\cdot^{-1}}(\omega, x))$ est la loi $\overline{P}_y$ solution de (1.13) avec les champs

$$(4.14)\quad Y_0=\begin{pmatrix} bA^2 \\ (X_0+bX_1)A^2\end{pmatrix} \qquad Y_1=\begin{pmatrix} A \\ AX_1\end{pmatrix} \qquad Y_i=\begin{pmatrix} 0 \\ AX_i\end{pmatrix}$$

pour $2 \leqslant i \leqslant m$ où $A = (A^2)^{1/2}$

et $$V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ S_0\end{pmatrix} \qquad V_l = \begin{pmatrix} 0 \\ S_l\end{pmatrix} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant l \leqslant r$$

et pour $y = (u, x)$.

On choisit alors convenablement X_i $1 \leqslant i \leqslant m$, b, puis X_0 ; on effectue une rotation sur le brownien $w.$ et une modification de $L.$ ([18], p. 204) pour constater que cette loi coïncide avec $\overline{P}_y$ solution de l'équation (1.13) générale.

Dans les paragraphes suivants c'est donc le processus $(u_{\gamma_\cdot^{-1}}, \varphi_{\gamma_\cdot^{-1}}(\omega, x))$ que nous étudions sous P_u^b.

Remarquons immédiatement que puisque

$0 < a_1 \leqslant A^2(y) \leqslant a_2$ *et* $0 \leqslant \rho_1 \leqslant \rho(x) \leqslant \rho_2$

$$(4.15)(*)\quad [K(t + L_t)]^{-1} \leqslant \gamma_t^{-1} \leqslant a_2 t \qquad \text{où} \qquad K = \max(\rho_2, 1/a_1)$$

Rappelons enfin les estimations suivantes essentielles au § 6.

PROPOSITION. — Pour tout $q \in [1, +\infty[$ il existe des constantes que nous notons toutes C ne dépendant que de q, d, des champs Y_i, V_1 et de leurs dérivées telles que

$$(4.16)\qquad \sup_{u\in\mathbb{R}_+} E^{P_u}[\,|u_t - u_s|^q] \leqslant C\,|t - s|^{q/2}$$

$$(4.17)\qquad \sup_{(u,x)\in\overline{D}} E^{P_u}\left[\left|\frac{\partial^\alpha\varphi}{\partial x^\alpha}{}_t(\omega, x) - \frac{\partial^\alpha\varphi}{\partial x^\alpha}{}_s(\omega, x)\right|^q\right] \leqslant C\,|t - s|^{q/4}$$

$$(4.18)\qquad \inf_{0\leqslant u\leqslant (t)^{1/2}} E^{P_u}(L_t^q) \geqslant Ct^{q/2}$$

(4.19) Si $\rho(x) \geqslant \rho_1 > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^{d-1}$

$$i)\quad \sup_{(u,x)\in\overline{D}} E^{P_u}\left[\left|\frac{\partial^\alpha\varphi}{\partial x^\alpha}{}_{\gamma_t^{-1}}(\omega, x) - \frac{\partial^\alpha\varphi}{\partial x^\alpha}{}_{\gamma_t^{-1}}(\omega, x)\right|^q\right] \leqslant C\,|t - s|^{q/2}$$

$$ii)\quad \sup_{(u,x)\in\overline{D}} E^{P_u}[1_{0\leqslant u_{\gamma_s^{-1}}\leqslant t-s}\,|\gamma_t^{-1}(\omega, x)-\gamma_s^{-1}(\omega, x)\,|^q] \leqslant (C/\rho_1)^q(t-s)^{2q}$$

si $t \geqslant s$.

(*) Les inégalités (6.8) de [12] doivent être remplacées par (4.15).

Preuve de (4.19). — Si $\rho_1 > 0$

$$|L_{\gamma_t^{-1}} - L_{\gamma_s^{-1}}| \leqslant 1/\rho_1 |t - s| \tag{4.20}$$

d'où on tire (4.19) *i*). D'autre part si $\Gamma = \{ \omega \in \Omega / |\gamma_t^{-1} - \gamma_s^{-1}| \leqslant |t-s|^2 \}$ on a

$$\begin{aligned} E^{P_u}[1_{0 \leqslant u_{\gamma_s^{-1}} \leqslant t-s} |\gamma_t^{-1} - \gamma_s^{-1}|^q] &\leqslant (t-s)^{2q} P_u(\Gamma) \\ &\quad + E^{P_u}[|\gamma_t^{-1} - \gamma_s^{-1}|^q 1_{0 \leqslant u_{\gamma_s^{-1}} \leqslant (\gamma_t^{-1} - \gamma_s^{-1})^{1/2}}]. \end{aligned}$$

On applique l'additivité du temps local, (4.18), et (4.20) pour conclure. □

§ 5. DIFFUSIONS RÉFLÉCHIES CONDITIONNELLES : HYPOELLIPTICITÉ PARTIELLE LORSQUE LA RÉFLEXION EST OBSERVÉE

§ 5A. Position du problème.

$D = \overset{\circ}{R}{}^d_+ = \overset{\circ}{R}{}^n_+ \times R^{n'} = \{ (x, z) \in R^n \times R^{n'}, x^1 > 0 \}$;

$X_0, X_1, \ldots, X_p$ sont $p+1$ champs de vecteurs C_b^∞ de R^n dans R^n ;

$Z_0, Z_1, \ldots, Z_p, \tilde{Z}_1, \ldots, \tilde{Z}_{p'}$ sont $m+1$ champs de vecteurs C_b^∞ de R^d dans $R^{n'}$;

$S_0, S_1, \ldots, S_r$ sont $r+1$ champs de vecteurs C_b^∞ de R^{n-1} dans R^n

$R_0, R_1, \ldots, R_r$ sont $r+1$ champs de vecteurs C_b^∞ de R^{d-1} dans $R^{n'}$.

Soit

$$Y_0 = \begin{pmatrix} X_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}, \quad Y_i = \begin{pmatrix} X_i \\ Z_i \end{pmatrix} 1 \leqslant i \leqslant p, \quad \tilde{Y}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{Z}_j \end{pmatrix} 1 \leqslant j \leqslant p', \quad V_l = \begin{pmatrix} S_l \\ R_l \end{pmatrix} 0 \leqslant l \leqslant r$$

$\rho \in C_b^\infty(R^{n-1}, R_+)$.

On s'intéresse au système d'équations différentielles stochastiques de réflexion de Stratonovitch

$$\left\{ \begin{aligned} dx_t &= X_0(x_t) 1_D(y_t) dt + X_i(x_t) 1_D(y_{t'}) dw_t^i + S_0(\bar{x}_t) 1_{\partial D}(y_t) dL_t \\ &\qquad + S_l(\bar{x}_t) 1_{\partial D}(y_t) dM_t^l \\ dz_t &= Z_0(y_t) 1_D(y_t) dt + Z_i(y_t) 1_D(y_t) dw_t^i + \tilde{Z}_j(y_t) 1_D(y_t) d\tilde{w}_t^j \\ &\qquad + R_0(y_t) 1_{\partial D}(y_t) dL_t + R_l(y_t) 1_{\partial D}(y_t) dM_t^l \\ y_t &= (x_t, z_t),\ y_0 = (x, z) = y \in \bar{D},\ \rho(x_t) dL_t = 1_{\partial D}(y_t) dt = 1_{\{x_t^1 = 0\}} dt, \\ &\qquad \bar{x}_t = (x_t^2, \ldots, x_t^n) \end{aligned} \right. \tag{5.1}$$

où on suppose

(5.2) *i)* $S_l^1 = 0$ pour $1 \leqslant l \leqslant r$, et $S_0^1 \geqslant c > 0$

ii) $$\sum_{i=1}^{p} (X_i^1(x))^2 \geqslant c > 0 \quad \text{pour tout } x \in R_+^n$$

de sorte que (5.1) admet une unique solution notée $\overline{P}_y$.

Soient $g_1, \ldots, g_p$ p champs de vecteurs C_b^∞ de R^d dans R, on considère le système

$$(5.3)\quad \begin{cases} dy_t = (Y_0 + g_i Y^i)(y_t) 1_D(y_t) dt + Y_i(y_t) 1_D(y_t) dw_t^i + \tilde{Y}_j(y_t) 1_D(y_t) d\tilde{w}_t^j \\ \qquad\qquad + V_0(y_t) 1_{\partial D}(y_t) d L_t + V_l(y_t) 1_{\partial D}(y_t) d M_t^l \\ y_0 = y,\ y_t = (x_t, z_t),\ \rho(x_t) d L_t = 1_{\partial D}(y_t) dt. \end{cases}$$

Comme au § 2, $\overline{P}_y^g$ désigne la loi solution de (5.3); π_x et π_z sont définies au § 2 ; $\overline{Q}_y$, $\overline{Q}_y^g$, $\overline{S}_{T,y}^x$, $\overline{\tau}_{T,y}^x$ sont définis de façon analogue au § 2 A *en inversant les rôles joués par x et z* ; par exemple $\overline{Q}_y$ est la $\overline{P}_y$ loi de $x. = \pi_x y$.

Dans ce paragraphe on étudie les mesures images de $\overline{\tau}_{T,y}^x$ par $z_t = \pi_z y_t$; c'est-à-dire le processus des $\overline{P}_y^g$ lois conditionnelles de $z.$ sachant F_T^x ; il s'agit donc, nous *insistons sur ce point, de la situation inverse du* § 2.

Considérons le système suivant

$$(5.4)\quad \begin{cases} u_t = w_t^1 + L_t + u \\ dx'_t = X'_0(u_t x'_t) dt + X'_i(u_t, x'_t) dw_t^i + S_0(x'_t) d L_t + S_l(x'_t) d M_t^l \\ dz_t = Z'_0(y_t) dt + Z'_i(y_t) dw_t^i + \tilde{Z}'_j(y_t) d\tilde{w}_t^j + R_0(y_t) d L_t + R_l(y_t) d M_t^l \\ y_t = (u_t, x'_t, z_t), \quad y_0 = y = (u, x', z) \in R_+ \times R^{n-1} \times R^{n'} \\ 1_{\partial D}(y_t) dt = 0. \end{cases}$$

Nous avons vu au § 4 A qu'on peut construire sur Ω un flot $\varphi_t(\omega, x', z)$ tel que (u_t, φ_t) soit solution de (5.4) sur $(\Omega, (F_t(u))_{t \geqslant 0}, P_u)$. On note

(5.5) *i)* $$A^2(u, x') = A^2(x) = \sum_{i=1}^{p} (X_i^1(x))^2$$

ii) $$\gamma_t(\omega, x) = \int_0^t ds / A^2(u_s, \pi_{x'} \varphi_s) + \int_0^t \rho(\pi_{x'} \varphi_s) d L_s$$

iii) $$N_t(\omega, x') = \exp\left\{ \int_0^t b(u_s, \pi_{x'} \varphi_s) \delta w_s^1 - 1/2 \int_0^t b^2(u_s, \pi_{x'} \varphi_s) ds \right\}$$

iv) $$P_u^b = N_t P_u \quad \text{sur} \quad F_t(u).$$

De même qu'au § 4 B la P_u^b loi de $(u_{\gamma^{-1}}, \varphi_{\gamma^{-1}})$ est $\overline{P}_y$ pour un choix convenable de b, X'_i, Z'_i, $\tilde{Z}'_j$. On remarquera en effet qu'on peut effectuer la rotation sur le seul brownien w.
Soit

$$(5.6)\quad \begin{cases} G_t = \exp\left\{ \sum_{i=1}^{p} \int_0^t g_i(u_s, \varphi_s)\delta w_s^i - 1/2 \int_0^t g_i^2(u_s, \varphi_s)ds \right\} \\ P_u^g = G_t P_u^b \quad \text{sur} \quad F_t(u) \end{cases}$$

On sait alors que la P_u^g *loi de* $(u_{\gamma_\cdot^{-1}}, \varphi_{\gamma_\cdot^{-1}})$ *est* $\overline{P}_y^g$.

§ 5B. Intégration par parties sur le brownien $\tilde{w}$.

DÉFINITION (5.7). — *i*) Soit σ, C^∞ de $R^{n'} \times R^{n'}$ dans $[0, 1]$ telle que $\sigma(M) = 1$ si $|M| < 1$ $\sigma(M) = 0$ si $|M| > 2$. Pour $N \geqslant 1$ on définit σ_N par

$$\begin{cases} \sigma_N(M) = 0 & \text{si M est non inversible} \\ \sigma_N(M) = \sigma(M^{-1}/N) & \text{sinon} \end{cases}$$

ii) On note $C_t(\omega)$ la matrice de covariance partielle de Malliavin

$$C_t(\omega) = \sum_{j=1}^{p'} \int_0^t (\pi_z \varphi_s^{*-1} \tilde{Y}'_j(y))^t (\pi_z \varphi_s^{*-1} \tilde{Y}'_j(y))ds \quad \text{où} \quad \tilde{Y}'_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{Z}'_j \end{pmatrix}.$$

THÉORÈME (5.8). — *Soient* T *et* $t > 0$, $T_0 \geqslant a_2^2(T \vee t) \geqslant \gamma_{T\vee t}^{-1}$.

i) *Soit* A *un champ de vecteurs* C_b^∞ *de* $R^{n'}$ *dans* $R^{n'}$, *il existe une variable aléatoire* $D_{t,T,N}^A \in \bigcap_{1 \leqslant q < +\infty} L^q(P_u^g)$, *telle que pour toute fonction* $f \in C_b^\infty(R^{n'}, R)$ *et toute h mesurable bornée de* $C^0([0, T_0], R^n)$ *dans* R *on a*

$$\begin{aligned} &E^{P_u^g}[\sigma_N(C_{\gamma_t^{-1}}) A f(\pi_z \varphi_{\gamma_t^{-1}}(\omega, y) h(u_{\cdot \wedge \gamma_T^{-1}}, x'_{\cdot \wedge \gamma_T^{-1}})] \\ &= E^{P_u^g}[f(\pi_z \varphi_{\gamma_t^{-1}}(\omega, y) h(u_{\cdot \wedge \gamma_T^{-1}}, x'_{\cdot \wedge \gamma_T^{-1}}) D_{t,T,N}^A] \end{aligned}$$

ii) Si $C_{\gamma_t^{-1}}$ *est* P_u *p. s. inversible, et si son inverse est dans tous les* $L^q(P_u)$ *pour* $q \in [1, +\infty[$, *alors pour tout multiindice* α, *il existe une variable aléatoire* $D_{t,T}^\alpha \in \bigcap_{1 \leqslant q < +\infty} L^q(P_u)$, *telle que pour* f *et* h *comme en* i) *on a*

$$\begin{aligned} &E^{P_u^g}\left[\frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} f(\pi_z \varphi_{\gamma_t^{-1}}(\omega, y)) h(u_{\cdot \wedge \gamma_T^{-1}}, x'_{\cdot \wedge \gamma_T^{-1}})\right] \\ &= E^{P_u^g}[f(\pi_z \varphi_{\gamma_t^{-1}}(\omega, y)) h(u_{\cdot \wedge \gamma_T^{-1}}, x'_{\cdot \wedge \gamma_T^{-1}}) D_{t,T}^\alpha] \end{aligned}$$

Preuve. — On applique le calcul des variations partiel comme au théorème 2.3 de [6]. Pour $l_1, \ldots, l_{p'}\ p'_{n'}$ processus prévisibles bornés, nuls pour $t \geqslant T_0$ on définit

$$\begin{cases} H^{\lambda}_{T_0} = \exp\left\{ -\sum_{j=1}^{n'} \int_0^{T_0} \lambda l_j \delta w^j_s - 1/2 \int_0^{T_0} \lambda^2 l_j^2 ds \right\} & \lambda \geqslant 0 \\ R^{\lambda}_u = H^{\lambda}_{T_0} P_u . \end{cases}$$

Si $\tilde{w}^{\lambda,j}_t = w^j_t + \int_0^t \lambda l_j ds$, on sait que $(w_t, \tilde{w}^{\lambda}_t, w^*_t)$ est un R^{λ}_u mouvement brownien, en particulier u_t est un R^{λ}_u brownien réfléchi en 0, de temps local L_t. On construit la solution de (5.4) associée au brownien perturbé $(w_t, \tilde{w}^{\lambda}_t, w^*_t)$, solution notée $(u_t, \varphi^{\lambda}_t)$ par les mêmes arguments qu'au § 4. On remarque que $\pi_{x'}\varphi^{\lambda}_t = \pi_{x'}\varphi_t / P_u$ et R^{λ}_u p. s. ; et que la P_u loi de $(u_., \varphi_.)$ coïncide avec la R^{λ}_u loi de $(u_., \varphi^{\lambda}_.)$.

Mais comme $\gamma^{-1}_.$ ne dépend que de $(u_., \pi_{x'}\varphi_.)$, on a de plus que la P_u loi de $(u_{\gamma^{-1}}, \varphi_{\gamma^{-1}})$ coincide avec la R^{λ}_u loi de $(u_{\gamma^{-1}}, \varphi^{\lambda}_{\gamma^{-1}})$. On raisonne ensuite comme dans [6]. Le fait que $\gamma^{-1}_t \leqslant a_2^2 t$ permet de vérifier que $D^{A}_{t,T,N}$ et $D^{\alpha}_{t,T}$ sont dans tous les L^q. L'inversibilité de la matrice de covariance partielle de Malliavin permet de dériver dans toutes les directions de $R^{n'}$. □

§ 5C. **Hypoellipticité partielle lorsque la réflexion est observée.**

Nous étudions tout d'abord l'inversibilité de $C_{\gamma^{-1}_t}$. On note $Y'_i = \begin{pmatrix} X'_i \\ Z'_i \end{pmatrix}$, $\tilde{Y}'_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{Z}'_j \end{pmatrix}$.

Le cas $u > 0$

DÉFINITION (5.9). — *i*) Soit $(u, x', z) \in \overline{D}$, on note

$$F_0(y) = F_0(u, x', z) = \{ \tilde{Y}'_1(y), \ldots, \tilde{Y}'_{p'}(y) \}$$

et pour $k \geqslant 1$,

$$F_k(y) = \{ [Y'_i(y), V(y)], [\tilde{Y}'_j(y), V(y)], 0 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant p', V \in F_{k-1}(y) \}.$$

Notons que les champs de F_k ont leur n premières coordonnées nulles i. e. définissent des champs de $R^{n'}$.

ii) L'hypothèse H″ est définie de façon analogue à H (déf. (1.4)) en remplaçant E_k par F_k et S^{d-1} par $S^{n'-1}$.

PROPOSITION (5.10). — Si H″ est vérifiée en $y \in D\,(y=(u, x', z))$ alors pour tout $t > 0$ $C_{\gamma_t^{-1}}$ est P_u p. s. inversible et $C_{\gamma_t^{-1}}^{-1} \in \bigcap_{1 \leqslant q < +\infty} L^q(P_u)$.

Preuve. — Soit $\eta = \inf \{ s \geqslant 0, \mid y_s - y \mid > u/2 \}$. Avant le temps η, $y.$ se comporte comme une diffusion standard. On sait que sous l'hypothèse H″ la matrice de covariance de Malliavin est inversible pour tout $t > 0$ P_u p. s. Comme η est P_u p. s. > 0, on en déduit que les $C_{1/n \wedge \eta}$ sont P_u p. s. inversibles : comme $t \to C_t$ est croissante on en déduit que P_u p. s. pour tout $t > 0$ C_t est inversible donc $C_{\gamma_t^{-1}}$ est P_u p. s. inversible puisque γ_t^{-1} est p. s. > 0. D'autre part il est facile de voir comme au § 1 (1.5) *ii*) que

$$(5.11) \qquad E^{P_u}[\mid C_t^{-1}|^q] \leqslant K(q)t^{-q\beta} \quad \text{où } \beta \text{ est une constante.}$$

Mais de (4.15) on tire pour $t > K\lambda$

$$(5.12) \quad P_u(\gamma_t^{-1} \leqslant \lambda) \leqslant P_u(\lambda + L_\lambda \geqslant t/K) \leqslant (2\lambda/\pi)^{1/2}(K/t - K) \exp \{ -(t - K\lambda)^2/2K^2\lambda \}.$$

On déduit aisément de (5.11) et (5.12) la fin de la proposition. □

Le cas $u = 0$

On donne ici, comme dans [*6*] des conditions qui montrent la possible interaction entre les générateurs dans D et sur ∂D.

DÉFINITION (5.13). — *i*) On note $F(y) = \bigcup_{k=0}^{\infty} F_k(y)$.

ii) Soit $y \in \partial D$. On dit que HF est vérifiée en y si $F(y) \bigcup_{l=0}^{r} \{ [V_l(x', z), V], V \in F(y) \}$ engendre $\mathbf{R}^{n'}$.

PROPOSITION (5.14). — Si HF est vérifiée en $y \in \partial D$ alors P_0 p. s. pour tout $t > 0$, $C_{\gamma_t^{-1}}$ est inversible.

Preuve. — L'inversibilité de C_t se montre comme au théorème 5.2 de [*6*], celle de $C_{\gamma_t^{-1}}$ en découle. □

DÉFINITION (5.15). — *i*) Pour $k \geqslant 0$ on note $F^k(y) = \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant k} F_i(y)$.

ii) Pour $k \geqslant 0$, $y \in \overline{D}$ on note

$$K^k(y) = \inf_{h \in S^{n'-1}} \sum_{V \in F^k(y)} \langle V(y), h \rangle^2$$

iii) On dit que l'hypothèse HA est vérifiée en $y \in \partial D$ si il existe $k \in N$, $\theta > 0$ tels que

$$(5.16) \qquad \lim_{u \to 0^+} u \log^4 \left[\inf_{|(x'_1, z_1) - (x', z)| \leqslant \theta} K^k(u, x'_1, z_1) \right] = 0$$

PROPOSITION (5.17). — Si HA est vérifiée en $y \in \partial D$ alors pour tout $t > 0$, $C_{\gamma_t^{-1}}^{-1}$ existe P_0 p. s. et est dans tous les $L^q(P_0)$ pour $q \in [1, +\infty[$.

Preuve. — Elle suit pas à pas celle du théorème 5.11 de [*6*] à deux différences près :

i) l'estimation sur γ_t^{-1} est différente de celle sur le A_t de [*6*], et en outre on a ici

$$P_0[T_0 \leqslant 2t\gamma\sqrt{2}] \leqslant C \exp - \{ C'/(t\gamma)^{1/4} \}$$

d'où l'apparition du $\log^4$ dans (5.16).

ii) On ne peut pas utiliser la propriété de Markov trajectorielle de [*6*], de ce fait pour obtenir une estimation sur T_3^* similaire à 5.62 de [*6*] on doit utiliser un flot auxiliaire faisant intervenir $\varphi_.^{-1}$. Il n'y a aucune différence conceptuelle avec ce qui est fait dans [*6*] auquel nous renvoyons donc. La preuve détaillée se trouve dans [*12*]. □

Nous transformons maintenant les hypothèses H″ et HB qui portent sur les champs Y'_i, $\tilde{Y}'_j$ en des hypothèses portant sur les champs Y_i, $\tilde{Y}_j$. On a le

THÉORÈME (5.18). — *i*) *Soit* $y \in \bar{D}$. *Si les champs* $\tilde{Y}_j(y)$ $1 \leqslant j \leqslant p'$ *et tous les crochets de Lie de longueur* $\geqslant 2$ *des* $\tilde{Y}_j(y)$ $1 \leqslant j \leqslant p'$, $Y_i(y)$ $0 \leqslant i \leqslant p$, *où apparait au moins un des* $\tilde{Y}_j(y)$ $1 \leqslant j \leqslant p'$ *engendrent* $R^{n'}$, *alors pour tout* t *et* $T > 0$ *la mesure image de* $\bar{\tau}^x_{T,y}$ *par* z_t *admet une densité* $\bar{q}^x_{t,T}(z) \in C_b^\infty(R^{n'})$ $\bar{Q}^g_y$ *p. s.*

ii) *Soit* $y \in \partial D$. *Si aux champs décrits en i) on ajoute les crochets de Lie de longueur* $\geqslant 2$ *des* $\tilde{Y}_j(y)$, $Y_i(y)$, $V_l(y)$, $0 \leqslant l \leqslant r$ *où apparait au moins un des* $\tilde{Y}_j(y)$ *et au plus un des* $V_l(y)$; *alors cette même mesure image admet une densité* Q^g_y p. s.

Preuve. — Remarquons que les hypothèses (5.18) *i*) (resp. (5.18) *ii*) et H″ (resp. HB) sont les mêmes pour les champs $\tilde{Y}'_j$ et Y'_i. Il nous faut donc regarder l'influence des transformations décrites au § 4 B sur la géométrie des champs. On est donc ramené à regarder la forme des crochets décrits en (4.14), où b et A ne dépendent ici que des n premières coordonnées.

Regardons par exemple le crochet $[Y_i, \tilde{Y}_j]$, il s'écrit

$$[Y_i, \tilde{Y}_j] = A^2[Y_i', \tilde{Y}_j'] + A\Big(\sum_{k=1}^{d} Y_i'^k \frac{\partial A}{\partial y_k}\Big)\tilde{Y}_j' - A\Big(\sum_{k=1}^{d} \tilde{Y}_j'^k \frac{\partial A}{\partial y_k}\Big)Y_i'.$$

Or $\tilde{Y}_j'^k=0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et $\dfrac{\partial A}{\partial y_k} = 0$ pour $n+1 \leqslant k \leqslant d$, le terme en Y_i' disparaît donc. Il est facile de constater de la même manière que l'espace vectoriel engendré par les champs décrits en (5.18) coïncide avec celui engendré par les $\tilde{Y}_j'(y)$ et les crochets similaires. Enfin remarquons que H″ est plus forte que HA. □

Remarques. — *i*) On peut ici encore montrer la continuité en (t, T) des densités et de leurs dérivées.

ii) Les résultats et les méthodes de ce paragraphe s'appliquent mot pour mot au système

$$\begin{cases} dx_t = X_0(x_t)1_D(x_t)dt + X_i(x_t)1_D(x_t)dw_t^i + S_0(x_t)1_{\partial D}(x_t)dL_t \\ \qquad\qquad + S_l(x_t)1_{\partial D}(x_t)dM_t^l] \\ x_0 = x\,;\ \rho(x_t)dL_t = 1_{\partial D}(x_t)dt \\ dz_t = Z_0(z_t)dt + Z_j(z_t)d\tilde{w}_t^j \\ z_0 = z \end{cases}$$

§ 6. HYPOELLIPTICITÉ SUR LA FRONTIÈRE

Nous revenons au système (1.1) qui s'écrit rappelons le

$$(6.1)\quad \begin{cases} dy_t = Y_0(y_t)1_D(y_t)dt + Y_i(y_t)1_D(y_t)dw_t^i + V_0(y_t)1_{\partial D}(y_t)dL_t \\ \qquad\qquad + V_l(y_t)1_{\partial D}(y_t)dM_t^l \\ y_0 = y \in \overline{D}\,;\ \rho(y_t)dL_t = 1_{\partial D}(y_t)dt \end{cases}$$

auquel nous associons (4.3) et la construction rappelée au § 4 B. Les notations sont celles du § 4.

§ 6A. Le cas ρ = constante.

Nous supposons dans toute cette section que ρ est constant.

Supposons pour l'instant que $A(y)$ (cf. (4.12)) est identiquement égal à 1. Dans ces conditions $\gamma_.^{-1}$ est un processus autonome ; $u_{\gamma_.^{-1}}$ l'est par conséquent aussi et $\varphi_{\gamma_.^{-1}}$ conserve toutes les propriétés de $\varphi_.$.

On peut alors de façon analogue au § 5 B effectuer le calcul des variations partiel sur $w_.^2, \dots, w_.^m$ (qui joue le rôle de $\tilde{w}.$ du § 5 B), $w_.^1$ (qui joue le rôle du $w.$ du § 5 B) et par conséquent $u_{\gamma_.^{-1}}$ restant invariant. De façon analogue au § 5 on pose la

DÉFINITION (6.2). — *i*) Pour $y \in \overline{D}$, on note $F_0(y) = \{ X_2(y), \dots, X_m(y) \}$ et pour $k \geqslant 1$ $F_k(y) = \left\{ [X_i(y), V(y)] \; 0 \leqslant i \leqslant m, \left[\frac{\partial}{\partial u}, V(y)\right]; V(y) \in F_{k-1}(y) \right\}$;

$$F(y) = \bigcup_{0 \leqslant k \leqslant \infty} F_k(y).$$

ii) L'hypothèse $H\partial$ est définie de façon analogue à H (déf. (1.1)) en remplaçant E_k par F_k et S^{d-1} par S^{d-2} ; en particulier $H\partial$ est vérifiée en y si l'ensemble des crochets de Lie des champs $\left\{ X_0(y), \dots, X_m(y), \frac{\partial}{\partial u} \right\}$ où apparaît au moins un des $X_i(y)$ $2 \leqslant i \leqslant m$ engendre R^{d-1}.

iii) $H'\partial$ est vérifiée en $y \in \partial D$ si $F(y) \bigcup_{l=0}^{r} \{ [S_l(y), V(y)] ; V \in F(y) \}$ engendre R^{d-1}.

iv) On note $C_t = \displaystyle\sum_{i=2}^{m} \int_0^t (\varphi_s^{*-1} X_i(y))^t (\varphi_s^{*-1} X_i(y)) ds.$

On a le résultat suivant analogue à ceux du § 5 C.

PROPOSITION (6.3). — *i*) Si $H\partial$ est vérifiée en $y = (u, x) \in \overline{D}$, alors P_u p. s. pour tout $t > 0$, C_t est inversible pour tout $t > 0$ $C_{\gamma_t^{-1}}$ est P_u p. s. inversible et de plus leurs inverses sont dans tous les $L^q(P_u)$ pour $q \in [1, +\infty[$.

ii) Si $H'\partial$ est vérifiée en $y = (0, x) \in \partial D$, alors pour tout $t > 0$ C_t et $C_{\gamma_t^{-1}}$ sont P_0 p. s. inversibles.

THÉORÈME (6.4). — *On suppose* ρ = constante, *et* $A(y) = 1$.

i) *Si* $H\partial$ *est vérifiée en* $y = (ux) \in \overline{D}$, *pour tout* $t > 0$ *et tout multiindice* α, *il existe une variable aléatoire* $D_t^\alpha \in \bigcap_{1 \leqslant q < +\infty} L^q(P_u)$ *telle que pour tout* $f \in C_b^\infty(R^{d-1}, R)$ *on a*

$$E^{P_u^b}\left[\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(\varphi_{\gamma_t^{-1}}(\omega, x)) 1_{u_{\gamma_t^{-1}} = 0}\right] = E^{P_u^b}[f(\varphi_{\gamma_t^{-1}}(\omega, x)) 1_{u_{\gamma_t^{-1}} = 0} D_t^\alpha]$$

En conséquence le semi-groupe $\overline{P}(t, y, .)$ *admet une densité* $q_t(y, .) \in C_b^\infty(\partial D)$.

ii) *Si* $H'\partial$ *est vérifiée en* $y = (0, x) \in \partial D$, *pour tout* $t > 0$ *ce semi-groupe admet une densité sur* ∂D.

Ce résultat peut se localiser de la façon suivante

THÉORÈME (6.5). — *i) Si il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $H\partial$ *soit vérifiée uniformément sur* $\{ 0 \leqslant y^1 \leqslant \varepsilon \}$ *alors pour tout* $t > 0$ *et tout* $y \in \overline{D}$, *le semi-groupe admet une densité* $q_t(y,.)$ *appartenant à* $C_b^\infty(\partial D)$.

ii) Soit U *un ouvert non vide relativement compact de* ∂D *et* $\varepsilon_U > 0$. *On suppose que pour tout* $y' \in \{0 \leqslant u \leqslant \varepsilon_U\} \times U$, $H\partial$ *est vérifiée en* y'. *Alors pour tout* $t > 0$ *et tout* $y \in \overline{D}$, *le semi-groupe admet une densité* $q_t(y,.) \in C_b^\infty(U)$.

Preuve. — *i)* On applique la propriété de Markov au premier temps d'entrée dans $\{ 0 \leqslant u \leqslant \varepsilon/2 \}$.

ii) La démonstration est analogue à ce que nous avons fait au § 1. Le point clé est le lemme 8.5 de [*18*], p. 342, qui vaut encore pour $(u., \varphi)$ et le fait que $\gamma_t^{-1} \leqslant a_2^2 t$. On peut également agir comme au 5.12 de [*6*]. □

Le théorème (6.5) va nous permettre de passer au cas général avec $\rho =$ constante.

Considérons en effet l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$(6.6) \qquad \sum_{i=1}^{m} (Y_i f)^2 = 1 ; \qquad f = 0 \quad \text{sur} \quad \partial D .$$

Puisque $A^2(y) = \sum_{i=1}^{m} (Y_i^1(y))^2 \geqslant c > 0$ pour tout $y \in \partial D$ (i. e. la frontière est non caractéristique) on sait ([*1*]) que (6.6) admet une solution unique au voisinage de tout point $y \in \partial D$. On peut donc trouver au voisinage de y un *changement de coordonnées qui nous ramène à* $A(y) = 1$ (appliquer la formule de Ito, cf. (6.31) pour un argument identique). On applique alors (6.5) *ii)* pour obtenir le résultat principal de cette section

THÉORÈME (6.7). — *On suppose* $\rho =$ *constante. Si Lie* $\{ Y_1(y), \ldots, Y_m(y) \}$ *engendre* R^d *en tout point* $y \in \partial D$ *alors pour tout* $t > 0$ *et tout* $y' \in \overline{D}$, $\overline{P}(t, y',.)$ *admet une densité* $q_t(y',.) \in C^\infty(\partial D)$.

Remarquons en effet que si Lie $\{ Y_1(y), \ldots, Y_m(y) \}$ engendre R^d alors $H\partial$ est vérifiée en y.

Remarques. — *i)* Si $\rho = 0$ nous savons que $q_t(y',.) = 0$.

ii) Dans [*2*], les auteurs utilisent une démarche similaire pour étudier une diffusion stoppée au premier temps d'entrée dans $\{ y^1 = 0 \}$.

§ 6B. Le cas général.

Nous donnons tout d'abord la formule d'intégration par parties sur le processus $(\varphi_., \gamma_.)$ que nous « ramenons » ensuite au temps γ_t^{-1}. Cette partie est assez technique et repose sur des estimations précises sur le comportement en temps des processus considérés.

THÉORÈME (6.8). — *Soit* $f \in C_b^\infty(R^{d-1}, R)$, $g \in C_b^\infty(R)$, *h mesurable borné de* R *dans* R, B *un champ de vecteurs* C_b^∞ *de* R^{d-1} *dans* R^{d-1}. *On suppose* $H\partial$ *vérifiée en* $y = (u, x) \in \overline{D}$. *Alors pour tout* T, t, $t' > 0$ *on a*

$$E^{P_u^b}[Bf(\varphi_T(\omega, x))g(\gamma_t)h(u_{t'})] = E^{P_u^b}[f(\varphi_T(\omega, x))h(u_{t'})D^g_{t,T,t',B}]$$

où

$$\begin{aligned}D^g_{t,T,t',B} = g(\gamma_t)\Bigg\{ & \left\langle \varphi_T^{*-1}B, C_T^{-1}\int_0^T \varphi_s^{*-1}X_i\delta w_s^i \right\rangle \\ & - \int_0^T \langle C_T^{-1}[\varphi_s^{*-1}X_i, \varphi_T^{*-1}B], \varphi_s^{*-1}X_i \rangle\, ds \\ & + \int_0^T ds \langle C_T^{-1}\varphi_s^{*-1}X_i, \varphi_T^{*-1}B \rangle \int_0^s \langle C_T^{-1}[\varphi_v^{*-1}X_j, \varphi_s^{*-1}X_i], \varphi_s^{*-1}X_j \rangle\, dv \\ & + \int_0^T ds \left\langle C_T^{-1}\varphi_s^{*-1}X_i, \int_0^s \langle [\varphi_v^{-1}X_j, \varphi_s^{*-1}X_i], C_T^{-1}\varphi_T^{*-1}B \rangle\, \varphi_v^{*-1}X_j \right\rangle dv \\ & - \left\langle C_T^{-1}\varphi_T^{*-1}B, \int_0^{T \vee t \vee t'} C_{s\wedge T}(\varphi_s^{*-1}d_xb)(\delta w_s^1 - b(u_s, \varphi_s)ds) \right\rangle \Bigg\} \\ & - g'(\gamma_t)\left\{ \left\langle C_T^{-1}\varphi_T^{*-1}B, \int_0^t C_{s\wedge T}[(\varphi_s^{-1}d_xA^{-2})ds + (\varphi_s^{*-1}d\rho)dL_s] \right\rangle \right\}\end{aligned}$$

où on somme sur les indices i et j entre 2 et m.

La démonstration est similaire à celle de (6.4). On peut également itérer le calcul des variations partiel sur $w_.^2, \ldots, w_.^m$ comme dans [*25*] [*38*].

Dans la suite de ce paragraphe on se fixe $t > 0$ et $T_0 > a_2 t \geqslant \gamma_t^{-1}$.

Première étape.

On va dans un premier temps remplacer $h(u_{t'})$ *par* $h(u_{\gamma_t^{-1}})$.

Soient α, $\varepsilon > 0$; $\delta = \varepsilon^k$ $k > 0$ sera déterminé au cours de la preuve, pour $j \in \mathbb{N}$ on note $t_j = j\delta$. On définit les fonctions h_α et g_ε de R dans R par

(6.9) $\quad h_\alpha(u) = 1_{[0,\alpha]}(u)$; $\quad g_\varepsilon(\gamma) = 1_{[0,t]}(\gamma) + t + \varepsilon - \gamma/\varepsilon 1_{[t,t+\varepsilon]}(\gamma)$

DÉFINITION (6.10). — L'hypothèse $H(\alpha)$ est vérifiée en $y = (u, x) \in \bar{D}$ si il existe $0 < t < t'$ et C tels que pour tout $\alpha > 2\eta > 0$

$$\sup_{t-t' \leqslant s \leqslant t+t'} P_u(u_{\gamma_s^{-1}} \in [\alpha, \alpha + \eta]) \leqslant C\eta$$

LEMME (6.6). — On suppose $H(\alpha)$ vérifiée en y alors pour tout $q \in [1, +\infty[$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E^{P_u}\left[\left|\left(\sum_{j \in N} \{ g_\varepsilon(\gamma_{t_j}) - g_\varepsilon(\gamma_{t_{j+1}}) \} h_\alpha(u_{t_{j+1}})\right) - h_\alpha(u_{\gamma_t^{-1}})\right|^q\right] = 0$$

Preuve.

$$\left(\sum_{j \in \mathbb{N}} \{ g_\varepsilon(\gamma_{t_j}) - g_\varepsilon(\gamma_{t_{j+1}}) \} h_\alpha(u_{t_{j+1}})\right) - h_\alpha(u_{\gamma_t^{-1}}) = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \sum_{j \in \mathbb{N}} 1_{t_j \leqslant \gamma_t^{-1} < t_{j+1}} \{ h_\alpha(u_{t_{j+1}}) - h_\alpha(u_{\gamma_t^{-1}}) \}$$

$$A_2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} 1_{t \leqslant \gamma_{t_j} < t+\varepsilon} (t + \varepsilon - \gamma_{t_j}/\varepsilon) \{ h_\alpha(u_{t_{j+1}}) - h_\alpha(u_{t_j}) \}$$

Notons que ces sommes sont finies puisque $\gamma_s^{-1} \leqslant a_2^2 s$

$$E^{P_u}[| A_1 |^q] \leqslant 2^q \sum_{j \in \mathbb{N}} P_u(t_j \leqslant \gamma_t^{-1} < t_{j+1} ; u_{\gamma_t^{-1}} \in [\alpha - \delta^\theta, \alpha + \delta^\theta])$$
$$+ 2^q \sum_{j \in \mathbb{N}} P_u(t_j \leqslant \gamma_t^{-1} < t_{j+1} ; \sup_{\gamma_t^{-1} \leqslant s < t_{j+1}} | u_s - u_{\gamma_t^{-1}} | > \delta^\theta)$$

Pour ε assez petit, ceci est majoré par $2^{q+1}C\delta^\theta + 2^q C' \exp(-1/2\delta^{(1-2\theta)})$ pour $\theta < 1/2$

$$| A_2 | \leqslant \left| \sum_{j \in \mathbb{N}} 1_{t \leqslant \gamma_{t_j} < t+\varepsilon} \{ h_\alpha(u_{t_{j+1}}) - h_\alpha(u_{t_j}) \} (t+\varepsilon-\gamma_{t_j}/\varepsilon) 1_{|u_{t_{j+1}} - u_{t_j}| \leqslant \delta^\theta} \right|$$
$$+ 2 \sum_{j \in \mathbb{N}} 1_{t \leqslant \gamma_{t_j} < t+\varepsilon} 1_{|u_{t_{j+1}} - u_{t_j}| > \delta^\theta}$$

De même que pour A_1, le second terme est majoré pour $\theta < 1/2$ par

$C\delta^{-1}\exp(-1/2q\delta^{(1-2\theta)})$ en norme L^q. Le premier terme se décompose en $B_1 + B_2 + B_3$ avec

$$B_1 = \sum_{j\in\mathbb{N}} 1_{t\leqslant \gamma_{t_j}<\gamma_{t_{j+1}}<t+\varepsilon} 1_{[\alpha-\delta^\theta,\alpha]}(u_{t_{j+1}})(\gamma_{t_{j+1}} - \gamma_{t_j}/\varepsilon)$$

$$B_2 = -\sum_{j\in\mathbb{N}} 1_{\gamma_{t_j}<t\leqslant\gamma_{t_{j+1}}<t+\varepsilon} 1_{[\alpha-\delta^\theta,\alpha]}(u_{t_{j+1}})(t+\varepsilon-\gamma_{t_{j+1}}/\varepsilon)$$

$$B_3 = \sum_{j\in\mathbb{N}} 1_{t\leqslant\gamma_{t_j}<t+\varepsilon\leqslant\gamma_{t_{j+1}}} 1_{[\alpha-\delta^\theta,\alpha]}(u_{t_{j+1}})(t+\varepsilon-\gamma_{t_j}/\varepsilon)$$

On voit que dans B_1 : $t_{j+1}-\gamma_t^{-1}\leqslant\gamma_{t+\varepsilon}^{-1}-\gamma_t^{-1}\leqslant a_2^2\varepsilon$; dans B_2 $t_{j+1}-\gamma_t^{-1}\leqslant\delta$; dans B_3 $t_{j+1} - \gamma_{t+\varepsilon}^{-1}\leqslant\delta$ d'où en remarquant que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} 1_{t\leqslant\gamma_{t_j}<\gamma_{t_{j+1}}<t+\varepsilon}(\gamma_{t_{j+1}} - \gamma_{t_j}/\varepsilon) \leqslant 1$$

$$E^{P_u}[\,|B_1|^q] \leqslant C[P_u(u_{\gamma_t^{-1}}\in[\alpha-\delta^\theta-\varepsilon^\theta_,\alpha+\varepsilon^\theta]) + \delta^{-q}\exp(-1/2\varepsilon^{(1-2\theta)})]$$

$$E^{P_u}[\,|B_2|^q] \leqslant C[P_u(u_{\gamma_t^{-1}}\in[\alpha-2\delta^\theta,\alpha+\delta^\theta]) + \exp(-1/2\delta^{(1-2\theta)})]$$

$$E^{P_u}[\,|B_3|^q] \leqslant C[P_u(u_{\gamma_{t+\varepsilon}^{-1}}\in[\alpha-2\delta^\theta,\alpha+\delta^\theta]) + \exp(-1/2\delta^{(1-2\theta)})]$$

D'où le résultat sous $H(\alpha)$. □

On déduit en particulier de (6.11) que

$$(6.12)\quad E^{P_u^b}[Bf(\varphi_S(\omega,x))g(\gamma_s)h_\alpha(u_{\gamma_t^{-1}})]$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} E^{P_u^b}[Bf(\varphi_S(\omega,x))g(\gamma_s)\sum_{j\in\mathbb{N}} h_\alpha(u_{t_{j+1}})\{\,g_\varepsilon(\gamma_{t_j}) - g_\varepsilon(\gamma_{t_{j+1}})\}\,]$$

A ε fixé on applique (6.8) au second membre de cette égalité (g_ε n'est pas C_b^∞ mais (6.8) s'étend immédiatement à de telles fonctions). Donc si $H\partial$ est satisfait en y

$$(6.13)\qquad E^{P_u^b}[Bf(\varphi_S(\omega,x))g(\gamma_s)h_\alpha(u_{\gamma_t^{-1}})] = \lim_{\varepsilon\to 0}(C_1(\varepsilon) + C_2(\varepsilon))$$

où

$$C_1(\varepsilon) = E^{P_u^b}[f(\varphi_S(\omega,x))D^g_{S,S,T_0,B}\Big(\sum_{j\in\mathbb{N}}\{\,g_\varepsilon(\gamma_{t_j}) - g_\varepsilon(\gamma_{t_{j+1}})\}\,h_\alpha(u_{t_{j+1}})\Big)]$$

$$C_2(\varepsilon) = E^{P_u^b}[f(\varphi_S(\omega,x))g(\gamma_s)(D_1 + D_2 + D_3 + D_4)]$$

où

$$D_1 = -\sum_{j\in\mathbb{N}} (1/\varepsilon)1_{t\leqslant\gamma_{t_j}<\gamma_{t_{j+1}}<t+\varepsilon}\left\langle C_S^{-1}\varphi_S^{*-1}B, \int_{t_j}^{t_{j+1}} C_{v\wedge S}((\varphi_v^{*-1}d_xA^{-2})dv + (\varphi_v^{*-1}d\rho)dL_v)\right\rangle 1_{[\alpha-\delta^\theta,\alpha]}(u_{t_{j+1}})1_{|u_{t_{j+1}}-u_{t_j}|<\delta^\theta}$$

D_2 et D_3 sont obtenus à partir de D_1 en remplaçant respectivement $1_{t\leqslant\gamma_{t_j}<\gamma_{t_{j+1}}<t+\varepsilon}$ et l'intervalle d'intégration par

$$1_{t\leqslant\gamma_{t_j}<t+\varepsilon\leqslant\gamma_{t_{j+1}}} \quad \text{et} \quad [0,t_j] \quad \text{pour} \quad D_2$$

$$1_{\gamma_{t_j}<t\leqslant\gamma_{t_{j+1}}<t+\varepsilon} \quad \text{et} \quad [0,t_{j+1}] \quad \text{pour} \quad D_3$$

et où D_4 est supporté par $1_{|u_{t_{j+1}}-\gamma_{t_j}|>\delta^\theta}$ (la forme explicite est laissée au lecteur).

On peut ici aussi par (6.11) passer à la limite pour $C_1(\varepsilon)$ en remplaçant $\sum_{j\in\mathbb{N}}$ par $h_\alpha(u_{\gamma_t^{-1}})$; on a également facilement $\lim_{\varepsilon\to 0} E^{P_u}[|D_4|^q] = 0$.

En ce qui concerne D_2 et D_3 on remarque que d'une part la somme est réduite à un seul élément, d'autre part $t_{j+1}-\gamma_{t+\varepsilon}^{-1} \leqslant \delta$ dans D_2 ; $t_{j+1}-\gamma_t^{-1}\leqslant\delta$ dans D_3. Il est facile d'obtenir une majoration dans tous les L^q uniforme en j des $\left\langle C_S^{-1}\varphi_S^{*-1}B, \int\dots\right\rangle$.

On en déduit à l'aide de l'inégalité de Hölder que pour tout q et $q'>1$ $E^{P_u}[|D_3|^q] < C(q,q')\varepsilon^{-q}P_u(u_{\gamma_t^{-1}}\in[\alpha-2\delta^\theta,\alpha+\delta^\theta])^{1/q'}+\theta(\varepsilon)$ où $\theta(\varepsilon)$ est exponentiellement petit en ε.

On choisit alors $k>2$, i. e. $\delta=\varepsilon^{2+\mu}$ avec $\mu>0$, il est facile de voir alors qu'il existe $q_\mu>1$ tel que pour tout $1\leqslant q<q_\mu \lim_{\varepsilon\to 0} E^{P_u}[|D_3|^q]=0$; de même pour D_2.

Quant à D_1, puisque $u_{t_j}\in[\alpha-2\delta^\theta,\alpha+\delta^\theta]$, en dehors d'un ensemble de mesure exponentiellement petite le temps local L_v est constant entre t_j et t_{j+1} et donc $\int_{t_j}^{t_{j+1}} C_{S\wedge v}(\varphi_v^{*-1}d\rho)dL_v = 0$. On obtient alors comme pour B_1

$$|D_1| < \psi\delta/\varepsilon\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} 1_{t\leqslant\gamma_{t_j}<\gamma_{t_{j+1}}<t+\varepsilon}\right)1_{[\alpha-2\varepsilon^\theta,\alpha+\varepsilon^\theta]}(u_{\gamma_t^{-1}}) + \psi'$$

où ψ' est exponentiellement petit en norme L^q ; donc D_1 tend vers 0 dans L^q. Nous avons montré

$$\boxed{(6.14)\quad E^{P_u^b}[Bf(\varphi_S(\omega,x))g(\gamma_s)h_\alpha(u_{\gamma_t^{-1}})] = E^{P_u^b}[f(\varphi_S(\omega,x))\, h_\alpha(u_{\gamma_t^{-1}})D^g_{s,S,T_0,B}]}$$

On passe à $h \in C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par un argument de densité, et à $h(u) = 1_{u=0}$ en passant à la limite en $\alpha = 0$.

Deuxième étape.

On va maintenant « ramener » S au temps γ_t^{-1}.

Soient $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon^{2+\mu}$ $\mu > 0$, $t_j = j\delta$, g_ε est définie comme précédemment.

On suppose que $H(\alpha)$ est vérifiée en y pour tout $\alpha > 0$, et que $H\partial$ est vérifiée en y.

Nous supposons de plus maintenant que $\rho(x) \geqslant \rho_1 > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^{d-1}$.

LEMME (6.15). — $E^{P_u^b}[h(u_{\gamma_t^{-1}})Bf(\varphi_{\gamma_t^{-1}}(\omega, x))]$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} E^{P_u^b}\left[\sum_{j \in \mathbb{N}} (g_\varepsilon(\gamma_{t_j}) - g_\varepsilon(\gamma_{t_{j+1}}))Bf(\varphi_{t_{j+1}}(\omega, x))h(u_{\gamma_t^{-1}})\right].$$

Preuve. — Puisque $s \to \gamma_s$ est croissante et $\gamma \to g_\varepsilon(\gamma)$ est décroissante, la différence entre les deux membres est majorée par

$$(6.16) \qquad |h| \sum_{j \in \mathbb{N}} (g_\varepsilon(\gamma_{t_j}) - g_\varepsilon(\gamma_{t_{j+1}})) |B| \left|\frac{d^2 f}{dx^2}\right| |\varphi_{t_{j+1}} - \varphi_{t_j}|$$

or $\gamma_{t+\varepsilon}^{-1} - \gamma_t^{-1} \leqslant a_2^2\varepsilon$, on vérifie que $1_{0 \leqslant t_{j+1} - \gamma_t^{-1} \leqslant K\varepsilon} \geqslant g_\varepsilon(\gamma_{t_j}) - g_\varepsilon(\gamma_{t_{j+1}})$ pour un K convenable.

D'après un résultat de [9] et (4.17) on sait que la variable aléatoire $\Pi(\theta)(T_0) = \sup_{0 \leqslant a < b < T_0} \dfrac{|\varphi_a - \varphi_b|}{|a - b|^{1/4-\theta}}$ appartient à tous les L^q pour $\theta > 0$.

On peut donc majorer (6.16) par cte $|B| \left|\dfrac{d^2 f}{dx^2}\right| (K\varepsilon)^{1/4-\theta}\Pi(\theta)(T_0)$; d'où le résultat en prenant $\theta < 1/4$. □

On déduit de (6.14) et (6.15)

$$(6.17) \qquad E^{P_u^b}[h(u_{\gamma_t^{-1}})Bf(\varphi_{\gamma_t^{-1}}(\omega, x))] = \lim_{\varepsilon \to 0} E^{P_u^b}[h(u_{\gamma_t^{-1}})\Sigma_\varepsilon]$$

$$\text{où} \qquad \Sigma_\varepsilon = \sum_{j \in \mathbb{N}} f(\varphi_{t_{j+1}})\left(D^{g_\varepsilon}_{t_j, t_{j+1}, T_0, B} - D^{g_\varepsilon}_{t_{j+1}, t_{j+1}, T_0, B}\right).$$

La partie des $D^{g_\varepsilon}_{\cdot,\cdot,T_0,B}$ où apparaît g_ε se traite comme en (6.15); il nous reste à étudier la partie où apparaît dg_ε, qui comme pour $C_2(\varepsilon)$ dans (6.13) se décompose en $(E_1 + E_2 + E_3)h(u_{\gamma_t^{-1}})$ avec

$$E_1 = -(1/\varepsilon)\sum_{j\in\mathbb{N}} f(\varphi_{t_{j+1}})1_{t\leqslant\gamma_{t_j}<\gamma_{t_{j+1}}<t+\varepsilon}$$
$$\left\langle C_{t_{j+1}}^{-1}\varphi_{t_{j+1}}^{*-1}B, \int_{t_j}^{t_{j+1}} C_{s\wedge t_{j+1}}\left((\varphi_s^{*-1}d_xA^{-2})ds + (\varphi_s^{*-1}d\rho)dL_s\right)\right\rangle$$

E_2 et E_3 s'en déduisent comme D_2 et D_3 à partir de D_1 à ceci près qu'il faut dans E_3 remplacer $\varphi_{t_{j+1}}$ par φ_{t_j}.

Étude de E_1.

Remarquons tout d'abord que E_1 est borné dans L^q uniformément en ε. En effet puisque $\gamma_{t+\varepsilon}^{-1} - \gamma_t^{-1} \leqslant K\varepsilon$, et puisque $\rho(x) \geqslant \rho > 0$, on a

$$L_{t_{j+1}} - L_{t_j} \leqslant (1/\rho)(\gamma_{t_{j+1}} - \gamma_{t_j})$$

et donc

$$E^{P_u^b}[\,|E_1|^q] \leqslant CE^{P_u^b}[(\,|f|\,|C_{\gamma_t^{-1}}^{-1}|\sup_{0\leqslant s\leqslant T_0}|\varphi_s^{*-1}|^2|C_s|B|\,|d_xA^{-2}+d\rho\,|)^q$$
$$\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} 1_{t\leqslant\gamma_{t_j}<\gamma_{t_{j+1}}<t+\varepsilon}((t_{j+1} - t_j/\varepsilon) + (\gamma_{t_{j+1}} - \gamma_{t_j}/\rho\varepsilon))\right)^q \leqslant \text{Cte}.$$

On en déduit

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E^{P_u^b}\Big[h(u_{\gamma_t^{-1}})\Big\{E_1 + f(\varphi_{\gamma_t^{-1}}) < C_{\gamma_t^{-1}}^{-1}\varphi_{\gamma_t^{-1}}^{*-1}B, \sum_{j\in\mathbb{N}} 1_{t\leqslant\gamma_{t_j}<\gamma_{t_{j+1}}<t+\varepsilon}(1/\varepsilon)C_{\gamma_t^{-1}}$$
$$\left((\varphi_{\gamma_t^{-1}}^{*-1}d_xA^{-2})(t_{j+1} - t_j) + (\varphi_{\gamma_t^{-1}}^{*-1}d\rho)(L_{t_{j+1}} - L_{t_j})\right)\Big\}\Big] = 0.$$

On montre grâce à (4.19) que

$$(6.22)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(1/\varepsilon)\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} 1_{t\leqslant\gamma_{t_j}<\gamma_{t_{j+1}}<t+\varepsilon}(t_{j+1} - t_j) = 1_{(u_{\gamma_t^{-1}}>0)}A^2(u_{\gamma_t^{-1}}, \varphi_{\gamma_t^{-1}}) \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(1/\varepsilon)\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} 1_{t\leqslant\gamma_{t_j}<\gamma_{t_{j+1}}<t+\varepsilon}(L_{t_{j+1}} - L_{t_j}) = 1_{(u_{\gamma_t^{-1}}=0)}(1/\rho(\varphi_{\gamma_t^{-1}})) \end{cases}$$

où les limites sont prises dans L^q pour $1 \leqslant q < +\infty$

D'où

$$(6.23)\quad \lim_{\varepsilon\to 0} E^{P_u^b}[h(u_{\gamma_t^{-1}})E_1] = -E^{P_u^b}[h(u_{\gamma_t^{-1}})f(\varphi_{\gamma_t^{-1}}) < C_{\gamma_t^{-1}}^{-1}\varphi_{\gamma_t^{-1}}^{*-1}B,$$
$$1(u_{\gamma_t^{-1}} > 0)A^2(u_{\gamma_t^{-1}}, \varphi_{\gamma_t^{-1}})C_{\gamma_t^{-1}}(\varphi_{\gamma_t^{-1}}^{*-1}d_xA^{-2})$$
$$+ (1(u_{\gamma_t^{-1}} = 0)(1/\rho(\varphi_{\gamma_t^{-1}}))C_{\gamma_t^{-1}}(\varphi_{\gamma_t^{-1}}^{*-1}d\rho)]$$

Étude de $E_2 + E_3$.

En choisissant $\mu > 3$ i. e. $\delta \ll \varepsilon^5$ on vérifie aisément que

$$(6.24)\quad \lim_{\varepsilon\to 0} E^{P_u^b}[\{(E_2+E_3) - (1/\varepsilon)(M_{t+\varepsilon} - M_t)\}\, h(u_{\gamma_t^{-1}})] = 0$$

$$\text{où}\quad M_t = f(\varphi_{\gamma_t^{-1}})\left\langle C_{\gamma_t^{-1}}^{-1}\varphi_{\gamma_t^{-1}}^{*-1}B, \int_0^{\gamma_t^{-1}} C_s((\varphi_s^{*-1}d_xA^{-2})ds + (\varphi_s^{*-1}d\rho)dL_s)\right\rangle.$$

Puis à l'aide de (6.22) on montre que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E^{P_u^b}[(1/\varepsilon)(M_{t+\varepsilon}-M_t)h(u_{\gamma_t^{-1}})] = -\lim_{\varepsilon\to 0} E^{P_u^b}[hE_1] + \lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon$$

$$(6.25)\quad H_\varepsilon = E^{P_u^b}[h(u_{\gamma_t^{-1}})(1/\varepsilon)$$
$$\Big\langle C_{\gamma_t^{-1}}^{-1} f(\varphi_{\gamma_{t+\varepsilon}^{-1}})\varphi_{\gamma_{t+\varepsilon}^{-1}}^{*-1}B - f(\varphi_{\gamma_t^{-1}})\varphi_{\gamma_t^{-1}}^{*-1}B, \int_0^{\gamma_t^{-1}} C_s((\varphi_s^{*-1}d_xA^{-2})ds +$$
$$+ (\varphi_s^{*-1}d\rho)dL_s)\Big\rangle].$$

Soit $\overline{X}_0$ et $\overline{S}_0$ les termes de dérive de l'équation de Ito associée à (6.1). On obtient par la formule de Ito

$$(6.26)\quad f(\varphi_{\gamma_{t+\varepsilon}^{-1}})\varphi_{\gamma_{t+\varepsilon}^{-1}}^{*-1}B - f(\varphi_{\gamma_t^{-1}})\varphi_{\gamma_t^{-1}}^{*-1}B$$
$$= \int_{\gamma_t^{-1}}^{\gamma_{t+\varepsilon}^{-1}} \big(\langle df, \overline{X}_0\rangle(\varphi_s)\varphi_s^{*-1}B - f(\varphi_s)[\varphi_s^{*-1}B, \varphi_s^{*-1}\overline{X}_0]$$
$$+1/2\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant m} {}^tX_i\frac{d^2f}{dx^2}X_i\varphi_s^{*-1}B + f(\varphi_s)\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}{}_s\Big)^{-1}{}^tX_i\frac{d^2B}{dx^2}X_i\Big)\Big)ds$$
$$+ \big(\langle df, \overline{S}_0\rangle(\varphi_s)\varphi_s^{*-1}B - f(\varphi_s)[\varphi_s^{*-1}B, \varphi_s^{*-1}\overline{S}_0]$$
$$+1/2\Big(\sum_{1\leqslant l\leqslant r} {}^tS_l\frac{d^2f}{dx^2}S_l\varphi_s^{*-1}B + f(\varphi_s)\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}{}_s\Big)^{-1}S_l\frac{d^2B}{dx^2}S_l\Big)\Big)dL_s$$
$$+\text{Martingale}\,(\gamma_t^{-1}, \gamma_{t+\varepsilon}^{-1}).$$

Le terme martingale disparaît dans (6.25) en conditionnant au temps γ_t^{-1}; on a ainsi

$$(6.27)\quad \lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon$$
$$= E^{P_u^b}\Big[h(u_{\gamma_t^{-1}})\Big\langle \int_0^{\gamma_t^{-1}} C_s(\varphi_s^{*-1}d_xA^{-2})ds + (\varphi_s^{*-1}d\rho)dL_s, C_{\gamma_t^{-1}}^{-1}\Psi\Big\rangle\Big]$$

et

$$\Psi = 1(u_{\gamma_t^{-1}} > 0)A^2(u_{\gamma_t^{-1}}, \varphi_{\gamma_t^{-1}})(H_1) + 1(u_{\gamma_t^{-1}} = 0)(1/\rho(\varphi_{\gamma_t^{-1}}))(H_2)$$

où H_1 et H_2 sont respectivement les intégrandes en temps et par rapport au temps local de (6.26) prises au temps γ_t^{-1}.

A ce point de nos calculs il est bon de se rappeler que notre but est d'obtenir une formule analogue à (6.4) *iii*). La combinaison de (6.14) (6.15) (6.23) (6.27) n'est de ce point de vue pas satisfaisante à cause des termes df et $d^2 f$ qui apparaissent dans Ψ. Cependant *si on prend* $h(u) = 1_{u=0}$, ces termes gênants disparaissent dans les deux cas suivants :

i) $A(y) = 1$; et $\rho(x) = \rho$ (i. e. le cas particulier étudié au § 6A)

ii) $S_l(y) = 0 \quad 0 \leqslant l \leqslant r$ (i. e. réflexion normale).

Dans ces deux cas on vérifie aisément que tous les termes qui apparaissent peuvent être à nouveau soumis au calcul des variations partiel à temps fixe, puis au procédé d'approximation que nous avons décrit dans ce paragraphe. On a alors

THÉORÈME (6.28). — *On suppose* $H\partial$ *et* $H(\alpha)$ *vérifiées en* $y=(u,x)\in\overline{D}$ *pour tout* α *avec* $0 < \alpha \leqslant \alpha_0$. *On suppose de plus que* $\rho(x) \geqslant \rho > 0$, *et* $S_l(x)=0$ $0 \leqslant l \leqslant r$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}^{d-1}$.

Alors pour tout multiindice θ, *tout* $t > 0$, *il existe une variable aléatoire* D_t^θ $D_t^\theta \in \bigcap_{1 \leqslant q < +\infty} \underline{L^q(P_u)}$ *telle que pour tout* $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{d-1}, \mathbb{R})$ *on a*

$$E^{P_u^b}\left[\frac{\partial^\theta}{\partial x^\theta} f(\varphi_{\gamma_t^{-1}}(\omega, x)) 1_{u_{\gamma_t^{-1}}=0}\right] = E^{P_u^b}[f(\varphi_{\gamma_t^{-1}}(\omega, x)) 1_{u_{\gamma_t^{-1}}=0} D_t^\theta]$$

En conséquence le semi-groupe $\overline{P}(t, y, .)$ *admet une densité* $q_t(y, .) \in C_b^\infty(\partial D)$.

REMARQUE (6.29). — On peut localiser ce résultat comme en (6.5). Nous allons étendre (6.28) au cas général d'une condition d'ordre 1 sur le bord.

PROPOSITION (6.30). — Sous l'une des deux hypothèses suivantes

i) $A(y) = 1$ pour tout $y \in \overline{D}$.

ii) H est uniformément vérifiée sur $\{0 \leqslant y^1 \leqslant \beta\}$ pour un $\beta > 0$.

Alors $H(\alpha)$ est vérifiée en tout $y \in \overline{D}$ pour tout $\alpha > 0$.

Preuve. — *i*) Si $A(y) = 1$, alors y^1 est un brownien réfléchi avec un terme de dérive, le résultat est immédiat.

ii) Provient du théorème (1.15). □

THÉORÈME (6.31). — *On suppose*

i) *Lie* $\{Y_1(y), \ldots, Y_m(y)\}$ *engendre* $\mathbb{R}^d$ *en tout* $y \in \partial D$.

ii) $V_l = 0$ *pour* $1 \leqslant l \leqslant r$.

iii) $\rho(x) \geqslant \rho > 0$ *pour tout* $x \in \mathrm{R}^{d-1}$

Alors le semi-groupe $\overline{\mathrm{P}}(t, y, .)$ *admet une densité* $q_t(y, .) \in \mathrm{C}^\infty(\partial \mathrm{D})$, *pour tout* $t > 0$ *et tout* $y \in \overline{\mathrm{D}}$.

Preuve. — On définit $f : \mathrm{R}^d \to \mathrm{R}^d$

$$y = (y^1, \ldots, y^d) \to f(y) = (y^1, y^2 + y^1 \mathrm{V}_0^2(y), \ldots, y^d + y^1 \mathrm{V}_0^d(y))$$

où $\mathrm{V}_0 = (1, \mathrm{V}_0^2, \ldots, \mathrm{V}_0^d)$. Il est facile de voir que f est un difféomorphisme local C^∞ sur toute bande $\{ 0 \leqslant y^1 \leqslant \beta \}$ avec

$$\text{(6.33)} \qquad \beta \sup_{2 \leqslant j \leqslant d} \left| \frac{\partial \mathrm{V}_0^j}{\partial \bar{y}} \right| \leqslant 1, \qquad \text{où} \quad \bar{y} = (0, y^2, \ldots, y^d)$$

et que f est l'identité sur $\partial \mathrm{D}$.

On prolonge f de façon C^∞ en dehors d'une telle bande, et on définit

$$\mathrm{Z}_i(y) = f^{*-1} \mathrm{Y}_i(y) \qquad 0 \leqslant i \leqslant m$$

On voit alors à l'aide de la formule de Ito que $y_t = f(z_t)$ où z_t est la solution de

$$\begin{cases} dz_t = \mathrm{Z}_0(z_t) 1_{\mathrm{D}}(z_t) dt + \mathrm{Z}_i(z_t) 1_{\mathrm{D}}(z_t) dw_t^i + e d\mathrm{L}_t \\ z_0 = f^{-1}(y) ; \; \rho(z_t) d\mathrm{L}_t = 1_{\partial \mathrm{D}}(z_t) dt ; \; e = (1, 0, \ldots, 0) \end{cases}$$

avant le premier temps de sortie de la bande en question. L'hypothèse (6.31) *i*) étant invariante par le pull-back, Lie $\{ \mathrm{Z}_1(y), \ldots, \mathrm{Z}_m(y) \}$ engendre R^d sur cette bande, on sait alors par (6.28), (6.30) et le fait que cette hypothèse est plus forte que H et H∂ à la fois ; que la loi de z_t admet pour tout $t > 0$ une densité C^∞ sur $\partial \mathrm{D}$, densité sur laquelle on peut obtenir des estimations analogues à celles du § 1. On utilise alors à nouveau la méthode de localisation pour conclure. □

§ 6C. Hypoellipticité conditionnelle sur ∂D.

Nous revenons maintenant au système (2.1) du § 2, ainsi qu'au système (3.12) du § 3. La difficulté par rapport à 6 A et B est de voir à quelles conditions on peut se ramener à un système analogue à (4.3) pour effectuer le calcul des variations partiel sur $w^2, \ldots, w^m$. Le cas le plus facile à traiter est celui de (3.12) i. e. celui où l'observation est standard. On peut évidemment travailler sur le processus x_t sans toucher au processus $z.$, on obtient donc immédiatement □

THÉORÈME (6.37). — *On suppose que Lie* $\{X_1(x), \ldots, X_p(x)\}$ *engendre* R^n *en tout* $x \in \partial R^n_+$; *et que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :*

i) $\rho =$ constante

ii) $\rho(x) \geqslant \rho > 0$ *pour tout* $x \in \partial R^n_+$; *et* $S_l = 0 \quad 1 \leqslant l \leqslant r$.

Alors pour tout $y \in \overline{D}$, *il existe un* $\overline{Q}^g_y$ *négligeable* Γ *tel que si* $z. \notin \Gamma$ *pour tous* t, $T > 0$ *la loi de* $\tau_x y_t$ *pour la mesure* $\overline{\tau}^z_{T,y}$ *restreinte à* ∂R^n_+ *admet une densité* $\overline{q}_{t,T}(y,.)$ *appartenant à* $C^\infty(R^n_+)$, *pour le système* (3.12).

Revenons au système (2.1). Si on suppose $\tilde{X}^1_j = 0 \quad 1 \leqslant j \leqslant p'$, on peut effectuer la rotation sur le seul $w.$; puis le changement de coordonnées donné par (6.6), en remarquant que celui-ci ne modifie que la première coordonnée des champs. La rotation nous oblige à faire des hypothèses plus restrictives qu'au § 2. □

THÉORÈME (6.38). — *On suppose*

i) $\tilde{X}^1_j = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant p'$

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} (X^1_i(y))^2 \geqslant c > 0$ pour tout $y \in \partial D$

iii) Lie $\{Y_1(y), \ldots, Y_p(y)\}$ engendre R^n en tout $y \in \partial D$

iv) $\rho(y) =$ constante

Alors la conclusion de (6.37) *est valable pour le système* (2.1).

On veut maintenant obtenir l'analogue de (6.31). Pour cela on peut obtenir l'analogue de (6.28) si $S_l = 0$ et $S^i_0 = 0$ pour $1 \leqslant l \leqslant r$ et $2 \leqslant i \leqslant n$; on fait ensuite le changement de coordonnées

$$y = (x, z) \to \left(x^1, x^2 + x^1 S^2_0(y), \ldots, x^1 + x^n S^n_0(y), z\right)$$

qui laisse invariant les champs Z et R pour obtenir

THÉORÈME (6.39). — *On suppose*

i) $\tilde{X}^1_j = 0 \quad 1 \leqslant j \leqslant p'$

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} (X^1_i(y))^2 \geqslant c > 0$ pour tout $y \in \partial D$

iii) $\rho(y) \geqslant c > 0$ pour tout $y \in \partial D$

iv) $S_l = 0$ pour $1 \leqslant l \leqslant r$

v) Lie $\{Y_1(y), \ldots, Y_p(y)\}$ engendre R^n en tout $y \in \partial D$.

Alors la conclusion de (6.37) *est valable pour le système* (2.1).

Remarque. — On obtient en particulier des résultats C^∞ pour le lissage sur ∂D, alors qu'on n'a pas *a priori* de résultats C^∞ dans D dans ce cas.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. I. ARNOLD, *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. MIR/Moscou, 1975.

[2] G. BEN AROUS, S. KUSUOKA, D. STROOCK, *The Poisson kernel for certain degenerate elliptic operators*, (à paraître).

[3] J. M. BISMUT, Mécanique aléatoire. *Lect. Notes in Math.*, **866**, Springer/Berlin, 1981.

[4] J. M. BISMUT, A generalized formula of Ito and others properties of stochastic flows. *Z. Wahrsch.*, t. **55**, 1981, p. 331-350.

[5] J. M. BISMUT, Martingales, the Malliavin's calculus and hypoellipticity under general Hörmander's conditions. *Z. Wahrsch.*, t. **56**, 1981, p. 469-505.

[6] J. M. BISMUT, *The calculus of boundary processes*, (à paraître).

[7] J. M. BISMUT, *Last exit decompositions and regularity at the boundary of transition probabilities*, (à paraître).

[8] J. M. BISMUT, D. MICHEL, Diffusions conditionnelles. *J. Funct. Anal.*, part 1, t. **44**, 1981, p. 174-211 ; part 2, t. **45**, 1982, p. 274-292.

[9] J. M. BISMUT and M. YOR, An inequality for processes which... *J. Funct. Anal.*, t. **51**, 1983, p. 166-173.

[10] A. BONAMI, N. EL KAROUI, H. REINHARD and B. ROYNETTE, Processus de diffusion associé à un opérateur elliptique dégénéré. *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **7**, 1971, p. 31-80.

[11] J. M. BONY, P. COURRÈGE and P. PRIOURET, Semi-groupe de Feller sur une variété à bord compact et... *Ann. Inst. Fourier*, t. **18**, 1968, p. 369-521.

[12] P. CATTIAUX, * *Thèse de 3e cycle*. Orsay, 1984.
* *Diffusions avec une condition frontière de type Wentzell : Régularité du semi-groupe associé, conditionnement et filtrage. Informes de Matematica.* Série A-017, Publication I. M. P. A., 1983.

[13] M. CHALEYAT-MAUREL and D. MICHEL, Hypoellipticity theorems and conditionnal laws. *Z. Wahrsch.*, t. **65**, 1984, p. 573-598.

[14] C. DELLACHERIE and P. A. MEYER, *Probabilités et potentiels*, chap. 1 à 4, Hermann/Paris, 1975.

[15] N. EL KAROUI, Processus de diffusion associé à un opérateur elliptique dégénéré et à une condition frontière. *Thèse d'état*. Paris 6, 1971.

[16] L. HÖRMANDER, Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math.*, t. **119**, 1967, p. 147-171.

[17] K. ICHIHARA and H. KUNITA, A classification of second order degenerate elliptic operators... *Z. Wahrsch.*, t. **30**, 1974, p. 235-254.

[18] N. IKEDA and S. WATANABE, *Stochastic differential equations and diffusion processes*. North Holland/Amsterdam, 1981.

[19] H. KUNITA, On the decomposition of solutions of stochastic differential equations. In Stochastic Integrals, D. Williams ed. *Lect. Notes in Math.*, **851**, Springer/Berlin, 1981, p. 213-255.

[20] H. KUNITA, Some extensions of Ito's formula. *Sem. Proba.*, t. **15**. *Lect. Notes in Math.*, **850**, 1981, p. 118-141.

[21] H. KUNITA, *Stochastic differential equations and stochastic flows of diffeomorphisms*. Cours de l'école d'été de Probabilités de Saint-Flour, 1982.

[22] H. KUNITA, Stochastic partial differential equations connected with non linear filtering. in Non linear filtering and stochastic control, K. S. Mitter and A. Moro ed. *Lect. Notes in Math.*, **972**, 1982, p. 100-169.

[23] H. KUNITA, Densities of a measure valued process governed by a stochastic partial differential equation. *Syst. and Control letters*, t. **1**, 1981, p. 100-104.

[24] S. KUSUOKA and D. STROOCK, The partial Malliavin calculus and its application to non linear filtering, (à paraître dans *Stochastics*).

[25[P. MALLIAVIN, * *Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators*. Proc. Intern. Symp. SDE of Kyoto. K. Ito ed., 1976, p. 195-263.
* C^k hypoellipticity with degeneracy. In *Stochastic Analysis*. A. Friedman and M. Pinsky ed. Academic Press/New York, 1978, p. 199-214.

[26] P. A. MEYER, Flot d'une équation différentielle stochastique. *Sem. Proba.*, t. **15**, *Lect. Notes in Math.*, **850**, 1981, p. 103-117.

[27] P. A. MEYER, Sur les désintégrations régulières de L. Schwartz. *Sem. Proba.*, t. **7**, *Lect. Notes in Math.*, **321**, 1973, p. 217-222.

[28] D. MICHEL, Régularité des lois conditionnelles... *J. Funct. Anal.*, t. **41**, 1981, p. 8-36.

[29[P. A. MOKOBODZKI dans Meyer, Limites médiales d'après Mokobdzki. *Sem. Proba.*, t. **7**, *Lect. Notes in Math.*, **321**, 1973, p. 198-204.

[30] K. NISHIOKA, The degenerate Neumann problem... *Ann. of Proba.*, t. **9**, 1980, p. 103-118.

[31] Y. OSHIMA, Some singular diffusion processes and... *Z. Wahrsch.*, t. **59**, 1982, p. 249-276.

[32] E. PARDOUX, Équations du filtrage non linéaire de la prédiction et du lissage. *Stochastics*, t. **6**, 1982, p. 193-232.

[33] E. PARDOUX, Stochastic partial differential equation for the density of the conditionnal law of a diffusion process with boundary, in *Stochastic Analysis*. A. Friedman and M. Pinsky ed. Academic Press/New York, 1978, p. 239-269.

[34] B. I. ROSOVSKII and A. SHIMIZU, Smoothness of solutions of stochastic evolution equations and... *Nagoya Math. J.*, t. **84**.

[35] I. SHIGEKAWA, Derivatives of Wiener functionals and... *J. Math. of Kyoto Univ.*, t. **20**, 1980, p. 263-289.

[36] L. STRICKER and M. YOR, Calcul stochastique dépendant d'un paramètre. *Z. Wahrsch.*, t. **45**, 1978, p. 109-133.

[37] D. STROOCK, The Malliavin calculus and its application to second order parabolic equations. *Math. Syst. Theory*, t. **14**, 1981, p. 25-65 et 141-171.

[38] D. STROOCK, Some applications of stochastic calculus to partial differential equations. École d'été de Probabilités de Saint-Flour. *Lect. Notes in Math.*, t. **976**, 1983, p. 267-382.

[39] D. STROOCK and S. R. S. VARADHAN, Multidimensionnal diffusion processes. *Grund. der Math. Wissen. Band*, **233**, Springer/Berlin, 1979.

[40] K. TAIRA, Sur l'existence de processus de diffusion... *Ann. Inst. Fourier*, t. **29**, 1979, p. 99-126.

[41] S. WATANABE, Construction of diffusion processes with Wentzell's boundary conditions by means of Poisson point processes of brownian excursions. *Prob. Theory Banach center Pub.*, t. **5**, Varsovie Polisch Sci. Publ., 1979, p. 255-271.

[42] P. CATTIAUX, *Régularité au bord pour les densités et les densités conditionnelles d'une diffusion réfléchie hypoelliptique*. Preprint.

(Manuscrit reçu le 25 janvier 1985)

(révisé le 28 août 1985)