ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

RAYMOND RECOULES

Approximation d'un mouvement brownien et d'un pont brownien par un processus stationnaire

Annales de l'I. H. P., section B, tome 22, nº 1 (1986), p. 113-125
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1986__22_1_113_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 22, n° 1, 1986, p. 113-125. *Probabilités et Statistiques*

Approximation d'un mouvement brownien et d'un pont brownien par un processus stationnaire

by

Raymond RECOULES
Laboratoire de Statistique et Probabilités,
Université Paul Sabatier, U. A., C. N. R. S., n° 745, Toulouse

RÉSUMÉ. — On montre que le processus de Ornstein Uhlenbeck est le processus stationnaire le plus proche, au sens de l'information de Kullback, d'un mouvement brownien standard. On traite aussi le problème analogue sur le cercle ; la solution est alors un processus introduit par Pitt, cas particulier de processus réciproque. On utilise une équation différentielle stochastique vérifiée par ce processus.

ABSTRACT. — We show that Ornstein Uhlenback process is, among the stationary processes, the closest, in the sense of Kullback information, of a standard brownian motion. We also treat the analogeous problem on the circle. The solution is in this case a process introduced by Pitt, a particular case of reciprocal process. We use a stochastic differential equation verified by this process.

INTRODUCTION

La notion d'information entre deux probabilités est appliquée d'habitude à des probabilités sur des ensembles finis ou sur $\mathbb{R}^n$. Donnons un exemple classique :

On suppose donnée une table de contingence $n \times m$ (c'est-à-dire une probabilité sur $\{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$) $\pi^0 = (\pi^0_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$. Si on impose à une table $n \times m$ d'avoir des marges données (différentes de celles de π^0), alors parmi les tables π admissibles, celle qui minimise l'information $\mathrm{I}(\pi, \pi^0)$ est la table (si elle existe) biproportionnelle à π^0, c'est-à-dire telle que :

$$\pi_{ij} = a_i b_j \pi^0_{ij}$$

où a_i et b_j sont ajustés (par un algorithme classique) pour que π soit admissible. En référence, citons simplement [*2*], où on montre l'utilité de la notion d'information dans ce cas.

Le but de cet article est de montrer qu'on peut s'intéresser à des problèmes analogues portant sur des processus et d'illustrer la démarche par deux exemples pour lesquels il est possible d'expliciter la solution.

Commençons par quelques rappels sur l'information de Kullback. On renvoie à [*5*] pour plus de détails.

Si P_1 et P_2 sont deux probabilités sur un espace mesurable $(\Omega, \mathscr{A})$, on définit

$$\mathrm{I}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2) = \begin{cases} \mathbb{E}_{p_1}\left(\mathrm{Log}\,\dfrac{dp_1}{dp_2}\right) & \text{si} \quad \mathrm{P}_1 \ll \mathrm{P}_2 \quad (\text{éventuellement } +\infty) \\ +\infty & \text{si} \quad \mathrm{P}_1 \ll \mathrm{P}_2 \end{cases}$$

où $\mathbb{E}_{p_1}$ désigne l'espérance par rapport à P_1.

On montre :

$$\mathrm{I}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{I}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_2$$

I joue donc le rôle d'une « pseudo distance » entre probabilités. On se pose donc naturellement ([*5*]) le problème de minimisation de I sous certaines contraintes. Plus précisément, une probabilité P_0 étant donnée ainsi qu'une contrainte (c'est-à-dire un ensemble $\mathscr{F}$ de probabilités admissibles).

On cherche si le problème

$$\inf_{\mathrm{P} \in \mathscr{F}} \mathrm{I}(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0)$$

a une solution.

Dans le cas où $\mathscr{F}$ est convexe nous avons donné dans [*10*] un théorème à ce sujet, généralisant celui de [*5*] (voir aussi [*2*]). En voici un énoncé simplifié qui nous suffira dans cet article.

THÉORÈME 1. — *Soit* P_0 *une probabilité donnée sur un espace* $(\Omega, \mathscr{A})$. *Soit* $\mathscr{F}$ *un ensemble convexe de probabilités sur* $(\Omega, \mathscr{A})$ *et* $\mathscr{F}_1 = \{ \mathrm{P} \in \mathscr{F} ;$ $\mathrm{I}(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) < +\infty \}$. *S'il existe* P^* *dans* $\mathscr{F}$ *telle que* $\mathbb{E}_p\left(\mathrm{Log}\,\dfrac{d\mathrm{P}^*}{d\mathrm{P}_0}\right)$ *soit fini,* *constant quand* P *varie dans* $\mathscr{F}_1$, *alors* P *est solution unique du problème :*

$$\inf_{P \in \mathscr{F}} I(P, P_0)$$

plus : $\forall P \in \mathscr{F}$, $I(P, P_0) = I(P, P^*) + I(P^*, P_0)$.

La démonstration est donnée en annexe.

On se propose ici d'appliquer ce résultat à certains processus. Un processus est une collection $X = (X_t)_{t \in [0,T]}$, $T \in \overline{\mathbb{R}}^+$, de variables aléatoires réelles définies sur un certain espace mesurable $(\Omega, \mathscr{A})$. Dans cet article on prendra toujours $T < +\infty$. En effet si $T = +\infty$ et si l'on considère deux processus X^1 et X^2 sur $(\Omega, \mathscr{A})$, les lois de probabilités associées P_1 et P_2 ne vérifient la plupart du temps ni $P_1 \ll P_2$, ni $P_2 \ll P_1$ (et même le plus souvent $P_1 \perp P_2$) ; l'information $I(P_1, P_2)$ est alors infinie.

D'autre part l'information est fonction uniquement des lois de probabilité des processus, quel que soit l'espace sous-jacent $(\Omega, \mathscr{A})$. On se limitera à prendre pour ce dernier l'espace canonique $\mathbb{R}^{[0,T]}$, muni de la tribu engendrée par les ensembles cylindriques de Ω. Par exemple pour des processus de diffusion (c'est le cas de tous les processus étudiés dans cet article) on prendra $\Omega = C = \mathscr{C}([0, T], \mathbb{R})$.

On s'autorisera l'abus de langage consistant à confondre processus et lois de probabilité associée. Par exemple on parlera de l'information entre deux processus, ou encore de probabilité stationnaire.

« Équation différentielle stochastique » sera abrégé en e. d. s.

1. PROCESSUS STATIONNAIRE LE PLUS PROCHE D'UN BROWNIEN STANDARD

Dans ce paragraphe P_0 sera un brownien standard avec distribution initiale $N(0, a^2)$ $a > 0$. Ici Ω est l'espace de Wiener $(C, \mathscr{A}(C))$, où $\mathscr{A}(C)$ est la complétée par rapport à P_0 de $\mathscr{B}(C)$ (boréliens du Banach C) ; c'est aussi la tribu engendrée par les ensembles cylindriques de C ; P_0 est la mesure de Wiener sur cet espace (avec distribution initiale $N(0, a^2)$, $a > 0$).

On cherche le processus stationnaire (au sens strict) le plus proche (c'est-à-dire tel que l'information soit minimum) de P_0.

Remarques. — On prend une valeur initiale aléatoire, car il est clair que ceci est nécessaire pour qu'il existe un processus stationnaire dominé par P_0.

— Un processus $X = (X_t)_{t \in [0,T]}$ est dit stationnaire (au sens strict) si :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (t_1, \ldots, t_n) \in [0, T]^n$, $\forall s \in \mathbb{R}$ tel que $(t_1 + s, \ldots, t_{n+s}) \in [0, T]^n$, les lois conjointes de $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ et $(X_{t_1+s}, \ldots, X_{t_n+s})$ sont identiques. Il est clair que l'ensemble des processus stationnaires sur $[0, T]$ est convexe.

On va montrer que la solution du problème posé existe et qu'il s'agit d'un processus de Ornstein Uhlenbeck.

Soit donc P^λ le processus de Ornstein Uhlenbeck de paramètre λ ($\lambda > 0$).

C'est un processus gaussien, centré, de covariance $\frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda(t-s)} (s \leq t)$.

C'est la solution ([*3*]) de l'e. d. s. (avec condition initiale) :

$$\begin{cases} dX_t = -\lambda X_t dt + dB_t \\ X_0 : N\left(0, \dfrac{1}{2\lambda}\right) \end{cases}$$

Le théorème de Girsanov donne $\dfrac{dP^\lambda}{dP_0}$

$$\frac{dP^\lambda}{dP_0}(X) = \frac{dP^\lambda}{dP_0}(X_0) \exp \left\{ \int_0^T - \lambda X_t dX_t - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda^2 X_t^2 dt \right\}$$

La loi de X_0 est $N\left(0, \frac{1}{2\lambda}\right)$ pour P^λ et $N(0, a^2)$ pour P_0. Par suite :

$$\operatorname{Log} \frac{dP^\lambda}{dP_0}(X) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} 2\lambda a^2 - X_0^2 \left(\lambda - \frac{1}{2a^2} \right) - \int_0^T \lambda X_t dX_t - \frac{1}{2} \lambda^2 \int_0^T X_t^2 dt.$$

La formule de Ito donne : $\displaystyle\int_0^T X_t dX_t = \left[\frac{1}{2} X_t^2 \right]_0^T - \frac{T}{2}.$

Par suite, si P est une probabilité stationnaire quelconque dominée par P_0 :

$$\mathbb{E}_p \left(\operatorname{Log} \frac{dP^\lambda}{dP_0}(X) \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} 2\lambda a^2 + \frac{1}{2} \lambda T - \left[\lambda - \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2} \lambda^2 T \right] \mathbb{E}_p(X_0^2).$$

Pour que cette expression ne dépende pas de P admissible, il suffit de choisir λ tel que $\lambda - \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2}\lambda^2 T$ soit nul. Il vient ($\lambda > 0$) :

$$\lambda = \frac{\sqrt{1 + \dfrac{T}{a^2}} - 1}{T}.$$

On a donc montré (cf. Théorème 1) le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *Le processus stationnaire le plus proche, au sens de l'information, d'un Brownien standard, observé sur* $[0, T]$ $(0 < T < +\infty)$, *de loi initiale* $N(0, a^2)$ $(a > 0)$, *est le processus de Ornstein Uhlenbeck de paramètre*

$$\frac{\sqrt{1 + \frac{T}{a^2}} - 1}{T}.$$

2. PROCESSUS STATIONNAIRE LE PLUS PROCHE D'UN PONT BROWNIEN

2.1. Introduction.

On se propose de traiter le problème analogue au précédent pour des processus définis sur le cercle ($= \mathbb{R} \pmod 1$), autrement dit des processus $X = (X_t)_{t \in [0,1]}$ tels que $X_0 = X_1$.

P_0 sera un pont brownien standard, avec état initial aléatoire $N(0, a^2)$, $a > 0$. C'est un processus gaussien, centré, de covariance $a^2 + s(1-t)$ $(s \leq t)$. On cherche le processus défini sur le cercle, stationnaire, le plus proche (au sens de l'information) de P_0. On va montrer que la solution est l'analogue pour le cercle du processus de Ornstein Uhlenbeck. Plus précisément, il s'agit d'un processus gaussien, centré, de covariance :

$$\Gamma_{(s,t)} = \lambda \operatorname{ch} \frac{\frac{1}{2} - t + s}{\mu} \qquad 0 \leq s \leq t \leq 1, \qquad \lambda \geq 0, \qquad \mu > 0 .$$

Ces processus sont en fait les seuls gaussiens, centrés, stationnaires, markoviens sur le cercle ([*8*]), exactement comme les processus de Ornstein Uhlenbeck sont les seuls gaussiens, centrés, stationnaires, markoviens sur $\mathbb{R}$. Ces processus ont été considérés par Pitt [*8*]. Ce sont les processus stationnaires « réciproques » ([*1*]) définis sur le cercle.

Pour montrer que la solution est l'un de ces processus, il faudra calculer la densité par rapport à P_0, ce qui se fera avec le théorème de Girsanov. Il faut donc auparavant donner les e. d. s. correspondantes. Les e. d. s. intervenant ici sont linéaires mais, comme les processus sont définis sur le cercle, ils ne sont bien sûr pas Markoviens sur R ; cela se traduira par la présence dans le « drift » d'un terme en X_0. Résumons dans un paragraphe ce qui nous sera utile concernant ces équations.

2.2. **Étude des équations :** $\begin{cases} dX_t = (f_t X_0 + g_t X_t)dt + \sigma_t dB_t \\ X_0 : N(0, a^2),\ a > 0 . \end{cases}$

où f, g, σ sont des fonctions déterministes, continues, définies sur $[0, T[$, avec $\sigma_t > 0$. On n'impose pas pour le moment que la solution de cette équation soit un processus sur le cercle.

PROPOSITION. — 1) *Soient f, g, σ des fonctions réelles, définies et continues sur $[0, T[$, avec $\sigma > 0$.*

L'équation
$$\begin{cases} dX_t = (f_t X_0 + g_t X_t)dt + dB_t \\ X_0 : N(0, a^2),\ a > 0 \end{cases} \tag{1}$$

a une solution unique. Elle définit un processus gaussien, centré, de covariance

$$\Gamma_{(s,t)} = \alpha_s \varphi_s \alpha_t + \beta_s \beta_t, \qquad s \leq t$$

avec

$$\alpha_t = e^{\int_0^t g_u du}, \qquad \beta_t = a e^{\int_0^t g_u du}\left[1 + \int_0^t f_u e^{-\int_0^u g_v dv} du\right],$$

$$\varphi_t = \int_0^t \sigma_u^2 e^{-2\int_0^u g_v dv} du$$

On a la représentation : $X_t = \alpha_t B^1_{\varphi_t} + \beta_t Z$ *où* Z *est une variable aléatoire* N(0, 1) *et* B^1 *un brownien standard, indépendant de* Z, *donné par :*

$$B_t^1 = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(\varphi^{-1})'_u}} d(B_{\varphi_u^{-1}}) = \int_0^{\varphi_t^{-1}} \sqrt{\varphi'_u} dB_u$$

2) *Réciproquement, si α, β, φ sont des fonctions réelles définies sur $[0, T[$, continument dérivables, avec :*

$\forall t \in [0, T[\qquad \alpha_t \neq 0, \qquad \beta_0 \neq 0, \qquad \varphi_0 = 0, \qquad$ *φ strictement croissante.*

Alors $\Gamma_{(s,t)} = \alpha_s \varphi_s \alpha_t + \beta_s \beta_t$ $(s \leq t)$ est la covariance du processus gaussien solution de (1) *avec $a^2 = \Gamma(0, 0)$, où f, g, σ sont déterminés* (*de manière unique*) *par :*

$$f = \frac{1}{\beta_0} \alpha \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)', \qquad g = \frac{\alpha'}{\alpha}, \qquad \sigma = \alpha\sqrt{\varphi'}.$$

Démonstration. — On pourrait se ramener aux e. d. s. linéaires classiques (cas de $f = 0$). Pour cela on considère $Y_t = X_t - A_t X_0$ qui, pour A_t bien choisi, vérifie une e. d. s. linéaire classique dont on connaît la solution (voir par exemple [*4*] ou [*7*]). On vérifierait que la solution est un gaussien, centré, avec la covariance indiquée. On peut aussi retrouver rapidement ce résultat en considérant le processus X défini par :

$$X_t = \alpha_t B^1_{\varphi_t} + \beta_t Z$$

(avec les conditions indiquées dans le 2) de la proposition). Il est clair que X est gaussien, centré, de covariance $\alpha_s \varphi_s \alpha_t + \beta_s \beta_t$ $(s \leq t)$.
On définit alors B_t par :

$$B_t = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\varphi'_u}} d(B^1_{\varphi_u}) = \int_0^{\varphi_t} \sqrt{(\varphi^{-1})'_u} dB^1_u.$$

B_t est un Brownien standard $\left(\text{martingale de crochet } \langle B \rangle_t = \int_0^{\varphi_t} (\varphi^{-1})'_u du = t\right)$.
On a d'ailleurs inversement :

$$B^1_t = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(\varphi^{-1})'_u}} d(B_{\varphi_u^{-1}}) = \int_0^{\varphi_t^{-1}} \sqrt{\varphi'_u} dB_u.$$

Il est clair que :

$$B^1_{\varphi^t} = \int_0^t \sqrt{\varphi'_u} dB_u$$

Et par suite :

$$\begin{aligned} dX_t &= \alpha'_t B^1_{\varphi_t} dt + \alpha_t d(B^1_{\varphi_t}) + \beta'_t Z dt = \alpha'_t B^1_{\varphi_t} + \alpha_t \sqrt{\varphi'_t} dB_t + \frac{\beta'_t}{\beta_0} X_0 dt \\ &= \left[\frac{1}{\beta_0}\alpha_t\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)'_t X_0 + \frac{\alpha'_t}{\alpha_t} X_t\right] dt + \alpha_t \sqrt{\varphi'_t} dB_t \end{aligned}$$

X est donc solution de (1) avec :

$$f = \frac{1}{\beta_0}\alpha\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)', \qquad g = \frac{\alpha'}{\alpha}, \qquad \sigma = \alpha\sqrt{\varphi'}, \qquad a = \beta_0$$

Ces relations s'inversent facilement :

$$\alpha_t = Ce^{\int_0^t g_u du}, \qquad \beta_t = ae^{\int_0^t g_u du}\left[1 + \int_0^t f_u e^{-\int_0^u g_v dv} du\right],$$

$$\varphi_t = \frac{1}{C^2}\int_0^t \sigma_u^2 e^{-2\int_0^u g_v dv} du$$

où C est une constante non nulle quelconque.

On peut remarquer que la décomposition d'une covariance sous la forme (si elle existe) $\alpha_s \varphi_s \alpha_t + \beta_s \beta_t$ (avec les conditions indiquées) n'est pas unique (à cause de la constante C), mais f, g, σ sont eux déterminés de manière unique.

Remarquons que, si dans l'égalité $X_t = \alpha_t B^1_{\varphi_t} + \beta_t Z$, on écrit B^1 en fonction de B, et α, β, φ en fonction de f, g, σ on obtient explicitement X_t en fonction de B.

COROLLAIRE. — *Soit $\Gamma(s, t)$ une fonction symétrique* ($\Gamma(s, t) = \Gamma(t, s)$) *de deux variables s et t sur le cercle telle que :*

$$\Gamma(s, t) = a_s b_t + c_s d_t, \qquad 0 \leq s \leq t \leq 1, \qquad \Gamma(0, 0) > 0$$

où a, b, c, d sont continûment dérivables, non négatives, telles que $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont croissantes.

Alors Γ peut s'écrire $\alpha_s \varphi_s \alpha_t + \beta_s \beta_t$ (où α, β, φ vérifient les conditions données dans la proposition précédente).

Γ est donc la covariance d'un processus gaussien, défini sur le cercle, solution d'une e. d. s. donnée par la proposition précédente.

Démonstration. — Le fait que Γ soit définie sur le cercle se traduit par :

$$\forall t \in [0, 1], \qquad \Gamma(0, t) = \Gamma(t, 1), \qquad \text{c'est-à-dire} \quad a_0 b_t + c_0 d_t = a_t b_1 + c_t d_1$$

On peut alors vérifier que $\Gamma(s, t)$ s'écrit $\alpha_s \varphi_s \alpha_t + \beta_s \beta_t$ avec :

$$\alpha_t = b_t d_1 - b_1 d_t, \qquad \beta_t = \frac{a_0 b_t + c_0 d_t}{\sqrt{a_0 b_0 + c_0 d_0}}, \qquad \varphi_t = \frac{1}{a_0 b_0 + c_0 d_0} \frac{a_t c_0 - a_0 c_t}{b_t d_1 - b_1 d_t}$$

on peut vérifier que φ est croissante.

2.3. Solution du problème de minimisation.

Retrouvons tout d'abord, à l'aide de ce qui précède, une e. d. s. vérifiée le pont brownien P_0. La covariance Γ^0 est donnée par :

$$\Gamma^0(s, t) = s(1 - t) + a^2, \qquad 0 \leq s \leq t \leq 1$$

On peut l'écrire :

$$\Gamma^0(s, t) = \alpha^0_s \varphi^0_s \alpha^0_t + \beta^0_s \beta^0_t, \qquad \text{avec} \qquad \alpha^0_t = 1 - t, \quad \beta^0_t = a, \quad \varphi^0_t = \frac{t}{1 - t}$$

P_0 est donc solution de l'e. d. s. :

$$\begin{cases} dX_t = \dfrac{X_0 - X_t}{1 - t} dt + dB_t \\ X_0 : N(0, a^2) \end{cases}$$

Cherchons de même une e. d. s. vérifiée par un processus de Pitt, gaussien centré de covariance :

$$\Gamma(s,t) = \lambda \operatorname{ch} \frac{\frac{1}{2} - t + s}{\mu} = \frac{\lambda}{2} e^{\frac{s}{\mu}} e^{\frac{\frac{1}{2}-t}{\mu}} + \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{s}{\mu}} e^{\frac{-\frac{1}{2}+t}{\mu}}$$

D'après le corollaire, elle s'écrit encore $\alpha_s \varphi_s \alpha_t + \beta_s \beta_t$ avec :

$$\alpha_t = 2 \operatorname{sh} \frac{1-t}{\mu}, \qquad \beta_t = \sqrt{\frac{\lambda}{\operatorname{ch} \frac{1}{2\mu}}} \operatorname{ch} \frac{\frac{1}{2} - t}{\mu}, \qquad \varphi_t = \frac{\lambda}{4 \operatorname{ch} \frac{1}{2\mu}} \, \frac{\operatorname{sh} \frac{t}{\mu}}{\operatorname{sh} \frac{1-t}{\mu}}.$$

La proposition montre alors (après quelques calculs) que le processus de Pitt (de paramètres λ, μ) est solution de l'e. d. s.

$$\begin{cases} dX_t = \dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{X_0}{\operatorname{sh} \frac{1-t}{\mu}} - \dfrac{X_t}{\operatorname{th} \frac{1-t}{\mu}}\right) dt + 2 \dfrac{\lambda}{\mu} \operatorname{sh} \dfrac{1}{2\mu} \, dB_t \\ X_0 : N\left(0, \lambda \operatorname{ch} \dfrac{1}{2\mu}\right) \end{cases}$$

Remarques. — Le coefficient de diffusion est constant, ce qui était prévisible, le processus étant gaussien stationnaire.

— Cette équation met en évidence le fait que le processus est défini sur le cercle : la singularité en $t = 1$ du « drift » est bien sûr nécessaire pour forcer le processus à vérifier $X_1 = X_0$.

La solution P* au problème posé est en fait l'un de ces processus. P* doit être dominée par P_0 ; il faut donc que les coefficients de diffusion soient les mêmes. On impose par conséquent : $\lambda = \dfrac{\mu}{2 \operatorname{sh} \frac{1}{2\mu}}$.

Notons P^μ la probabilité correspondante ; les coefficients de X_0 et X_t dans l'e. d. s. vérifiée par P^μ seront notés f^μ et g^μ.

Calculons alors $\dfrac{dP^\mu}{dP_0}$.

Il faut prendre quelques précautions à cause de la singularité du « drift » pour $t = 1$. On doit en fait appliquer le théorème de Girsanov pour les restrictions des processus à $[0, t_0]$, $t_0 < 1$. Notons P_{0t_0} et $P^\mu_{t_0}$ les probabilités correspondantes.

$$\frac{dP^\mu_{t_0}}{dP_{0t_0}}(X) = \frac{dP^\mu_{t_0}}{dP_{0t_0}}(X_0)\exp\left\{\int_0^{t_0}\left[\left(f_t^\mu - \frac{1}{1-t}\right)X_0 + \left(g_t^\mu + \frac{1}{1-t}\right)X_t\right]dX_t \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\int_0^{t_0}\left[(f_t^\mu X_0 + g_t^\mu X_t)^2 - \left(\frac{X_0}{1-t} - \frac{X_0}{1-t}\right)^2\right]dt\right\}.$$

Les distributions initiales pour P^μ et P_0 sont normales centrées, de variances respectives $\frac{\mu}{2}\coth\frac{1}{2\mu}$ et a^2.

On transforme l'intégrale stochastique à l'aide de la formule de Ito. Il vient

$$\frac{dP^\mu_{t_0}}{dP_{0t_0}}(X) = \sqrt{2\frac{a^2}{\mu}\operatorname{th}\frac{1}{2\mu}}\exp(A+B+C+D+E+F+G),$$

avec :

$$A = \frac{1}{2}X_0^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{2}{\mu}\operatorname{th}\frac{1}{2\mu}\right), \qquad B = X_0\left[\left(f_t^\mu - \frac{1}{1-t}\right)X_t\right]_0^{t_0},$$

$$C = \left[-\frac{1}{2}\left(g_t^\mu + \frac{1}{1-t}\right)X_t^2\right]_0^{t_0}, \qquad D = -\frac{1}{2}X_0^2\int_0^{t_0}\left[(f_t^\mu)^2 - \frac{1}{(1-t)^2}\right]dt$$

$$E = -\frac{1}{2}\int_0^{t_0}\left(g_t^\mu + \frac{1}{1-t}\right)dt, \qquad F = -\frac{1}{2}\int_{00}^{t_0}[(g_t^\mu)' + (g_t^\mu)^2]X_t^2\,dt,$$

$$G = -X_0\int_0^{t_0}[(f_t^\mu)' + f_t^\mu g_t^\mu]X_t\,dt.$$

On fait alors tendre t_0 vers 1 et on vérifie successivement :

$$f_{t_0}^\mu - \frac{1}{1-t_0} \xrightarrow[t_0\to 1]{} 0, \qquad g_{t_0}^\mu + \frac{1}{1-t_0} \xrightarrow[t_0\to 1]{} 0$$

$$\int_0^{t_0}\left[(f_t^\mu)^2 - \frac{1}{(1-t)^2}\right]dt \xrightarrow[t_0\to 1]{} -\frac{1}{\mu}\coth\frac{1}{\mu},$$

$$\int_0^{t_0}\left(g_t^\mu + \frac{1}{1-t}\right)dt \xrightarrow[t_0\to 1]{} -\operatorname{Log}\left(\mu\operatorname{sh}\frac{1}{\mu}\right), (g^\mu)' + (g^\mu)^2 = \frac{1}{\mu^2}, (f^\mu)' + f^\mu g^\mu = 0$$

Les deux premières limites sont obtenues par des développements limités élémentaires au voisinage de 1. Les deux suivantes s'obtiennent en calculant les intégrales. Enfin les deux égalités sont immédiates. Un calcul facile montre alors :

$$\frac{dP^\mu_{t_0}}{dP_{0t_0}}(X) \xrightarrow[t_0\to 1]{} \frac{dP^\mu}{dP_0}(X) = 2a\operatorname{sh}\frac{1}{2\mu}\exp\left\{\frac{1}{2a^2}X_0^2 - \frac{1}{2\mu^2}\int_0^1 X_t^2\,dt\right\}$$

Pour que $\mathbb{E}\left(\frac{dP^{\mu}}{dP_0}\right)$ soit constant, quand P varie dans l'ensemble des probabilités stationnaires dominées par P_0, il est clair qu'il suffit de prendre $\mu = a$. Le théorème 1 permet alors de conclure :

THÉORÈME 3. — *Soit* P_0 *le pont brownien de loi initiale* $N(0, a^2)$. *Le processus* P^*, *stationnaire sur le cercle, le plus proche (au sens de l'information) de* P_0 *est le processus gaussien, centré, de covariance :*

$$\frac{a}{2\,\mathrm{sh}\frac{1}{2a}}\,\mathrm{ch}\,\frac{\frac{1}{2} - t + s}{a}, \qquad 0 \leq s \leq t \leq 1 .$$

On peut aussi le définir par sa densité par rapport à P_0 :

$$\frac{dP^*}{dP_0}(X) = 2a\,\mathrm{sh}\frac{1}{2a}\exp\left\{\frac{1}{2a^2}\left(X_0^2 - \int_0^1 X_t^2 dt\right)\right\}$$

C'est aussi la solution unique de l'équation :

$$\begin{cases} dX_t = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{X_0}{\mathrm{sh}\dfrac{1-t}{a}} - \dfrac{X_t}{\mathrm{th}\dfrac{1-t}{a}}\right)dt + dB_t \\ X_0 : N\left(0, \dfrac{a}{2}\coth\dfrac{1}{2a}\right). \end{cases}$$

Remarque. — Dans la démonstration donnée on a simplement vérifié que le processus de Pitt était solution du problème. En fait nous sommes initialement arrivés à ce résultat par une autre méthode, plus constructive, ne nécessitant pas l'intuition de la solution. Expliquons en brièvement le principe.

Nous avons montré dans [*10*] (voir aussi [*9*]) que, si θ est une bijection mesurable de Ω dans lui-même, la probabilité invariante par θ la plus proche (information minimum) d'une probabilité P^0 donnée est (si elle existe) :

$$P^* = C \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{p^0 p_\theta^0 \ldots P_{\theta^{n-1}}^0}$$

où C est une constante de normalisation et P_θ^0 désigne la probabilité image par θ de P^0. Ce résultat se généralise de manière naturelle si la contrainte est l'invariance par un groupe $(\theta^u)_{u \in \mathbb{R}}$. La solution est alors (si elle existe).

$$P^* = C \exp\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{Log}\,\frac{dP_{\theta^u}^0}{d\lambda}\,du\right).\lambda$$

où λ est une mesure de référence telle que : $\forall u' \in \mathbb{R}$, $P^0_{\theta^u} \ll \lambda$. P^* est indépendante du choix de λ.

On remarque d'autre part que la stationnarité d'un processus sur le cercle se traduit par l'invariance par le groupe des rotations. Après avoir trouvé l'e. d. s. vérifiée par $P^0_{\theta^u}$, on calcule $\frac{dP^0_{\theta^u}}{dP^0}$. Prenant alors $\lambda = P^0$, on arrive après calculs à

$$P^* = 2a \operatorname{sh} \frac{1}{2a} \exp \left\{ \frac{1}{2a^2} \left(X_0^2 - \int_0^1 X_t^2 dt \right) \right\} . P^0 .$$

On peut à partir de là trouver une e. d. s. dont P^* est solution, et vérifier qu'il s'agit d'un gaussien, centré, de covariance $\dfrac{a}{2 \operatorname{sh} \frac{1}{2a}} \operatorname{ch} \dfrac{\frac{1}{2} - t + s}{a}$, $0 \leq s \leq t \leq 1$.

ANNEXE

Si P* vérifie la condition donnée, il résulte d'abord de $\mathbb{E}_p\left(\operatorname{Log}\frac{dP^*}{dP_0}\right) < +\infty$ que l'on a :

$$\forall P \in \mathscr{F}_1, \qquad P \ll P^*$$

On peut alors écrire :

$$\forall P \in \mathscr{F}_1 : \quad I(P, P_0) = \mathbb{E}_p\left(\operatorname{Log}\frac{dP}{dP_0}\right) = \mathbb{E}_p\left(\operatorname{Log}\frac{dP}{dP^*}\right) + \mathbb{E}_p\left(\operatorname{Log}\frac{dP^*}{dP_0}\right).$$

Or par définition de P* : $\mathbb{E}_p\left(\operatorname{Log}\frac{dP^*}{dP_0}\right) = \mathbb{E}_{p^*}\left(\operatorname{Log}\frac{dP^*}{dP_0}\right) = I(P^*, P_0)$.
Il vient alors :

$$\forall P \in \mathscr{F}_1 : I(P, P_0) = I(P, P^*) + I(P^*, P_0).$$

Le résultat énoncé s'en déduit facilement.

REFERENCES

[1] J. P. Carmichael, J. C. Masse et R. Theodorescu, Processus gaussiens stationnaires réciproques sur un intervalle. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **295**, série I, 1982, p. 291-294.
[2] I. Csiszar, I divergence geometry of probability distributions and minimisation problems. *Ann. Prob.*, t. **3**, n° 1, 1975.
[3] N. Ikeda et S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes.* North Holland, Kodansha, 1981.
[4] G. Kalliampur, *Stochastic filtering theory*, Springer Verlag, 1980.
[5] S. Kullback, *Information theory and statistics*, J. Wiley, 1959.
[6] S. Kullback et O. V. Gokhale, The information in contingency tables, *Statistics text book and monographs*, n° 23, Dekker, 1978.
[7] S. Liptser et A. N. Shiryayev, *Statistics of Random processes*, Springer Verlag, New York, 1977.
[8] L. D. Pitt, A markov property for gaussian processes with a multidimensional parameter, *Math for rat mech and anal*, t. **43**, 1971, p. 367-391.
[9] R. Recoules, Une généralisation d'un théorème de Kullbach, *C. R. Acad. Sc., Paris*, t. **284**, 1977, p. 691-694.
[10] R. Recoules, Contributions à la théorie de l'information, *Thèse de 3e cycle*, Toulouse, 1978.

(Manuscrit reçu le 21 février 1985)