ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

S. FERENCZI

Systèmes de rang un gauche

Annales de l'I. H. P., section B, tome 21, nº 2 (1985), p. 177-186
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1985__21_2_177_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 21, n° 2, 1985, p. 177-186. *Probabilités et Statistiques*

Systèmes de rang un gauche

par

S. FERENCZI (*)

RÉSUMÉ. — Théorie ergodique : un système dynamique est dit de rang un gauche s'il peut être approché arbitrairement bien par des tours de Rokhlin suivant des suites d'entiers. Nous utilisons cette propriété pour construire un système à spectre simple qui n'est pas lâchement de Bernoulli, et donc pas de rang fini.

ABSTRACT. — Ergodic theory: we say that a dynamical system is funny rank one if it can be approximated arbitrarily well by Rokhlin towers along sequences of integers. We use this property to produce a system with simple spectrum which is not loosely Bernoulli, and therefore not of finite rank.

Key-words: Ergodic theory. Simple spectrum. Funny rank one. Loosely Bernouilli.

Un système dynamique $(X, \mathscr{A}, T, \mu)$ est de rang un gauche si pour toute partition P mesurable, pour tout ε strictement positif, il existe un sous-ensemble F de X, une suite croissante d'entiers naturels $K_1, \ldots, K_h$ et une partition P' vérifiant

(1) $\{ T^{K_i}F, 1 \leqslant i \leqslant h \}$ sont des ensembles disjoints,

(2) $| P - P' | < \varepsilon,$

(*) Université Paris VI. Laboratoire de Probabilités. Tour 56, 3[e] étage, 4 place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

(3) P′ est moins fine que la partition

$$\left\{ T^{K_1}F, T^{K_2}F, \ldots, T^{K_h}F, X - \bigcup_{i=1}^{h} T^{K_i}F \right\}.$$

Cette notion, due à Jean-Paul Thouvenot, généralise la notion de rang un (même définition mais avec $K_i = i$, $1 \leqslant i \leqslant h$). Un système de rang un a un spectre simple (L^2), d'après Chacon [*1*] (voir aussi Katok et Stepin [*5*]). Le même raisonnement montre qu'un système de rang un gauche a un spectre simple. On connaît un système à spectre simple qui n'est pas de rang un (la substitution de Morse, voir Del Junco [*2*]), mais ce système reste de rang fini (toute partition P s'approche par une partition du type $\left\{ T^iF_j,\ 1 \leqslant j \leqslant r,\ 1 \leqslant i \leqslant h_j, X - \bigcup_{\substack{1 \leqslant j \leqslant r \\ 1 \leqslant i \leqslant h_j}} T^iF_j \right\}$, en l'occurrence ici r vaut 2).

Feldman [*6*] a introduit la distance $\bar{f}$, entre deux suites $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_p)$ prises dans un même alphabet fini $\{1, \ldots, q\}$, $\bar{f}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p) = 1 - \dfrac{2}{n+p} \operatorname{Max}\{k;$ il existe des sous-suites $i_1 < \ldots < i_k$, $j_1 < \ldots < j_k$ telles que $x_{i_1} = y_{j_1}, \ldots, x_{i_k} = y_{j_k}\}$. Un processus (P, T) d'entropie nulle est dit lâchement de Bernoulli si pour tout ε strictement positif, il existe un entier N tel que pour tout n supérieur à N, il existe un ensemble E d'atomes de $\bigvee_{i=1}^{n} T^{-i}P$, de mesure supérieure à $1 - \varepsilon$, sur lequel $\bar{f}(PN(A), PN(A')) < \varepsilon$, pour tout couple (A, A′) d'atomes de E, avec

$$PN\left(\bigcap_{i=1}^{n} T^{-i}P_{m_i} \right) = (m_1, \ldots, m_n).$$

Les systèmes de rang fini ou de rang un gauche sont d'entropie nulle, et les systèmes de rang fini sont lâchement de Bernoulli (voir [*3*] ou [*7*]). Nous allons construire un système de rang un gauche, donc à spectre simple, qui n'est pas lâchement de Bernoulli, donc pas de rang fini. L'idée de la construction est due à Jean-Paul Thouvenot, à qui j'adresse tous mes remerciements.

CONSTRUCTION DE SYSTÈMES DE RANG UN GAUCHE

On définit un processus (P, T) à l'aide d'une structure de blocs : on se donne un alphabet fini $[1, \ldots, q]$ et un bloc est une suite finie de symboles de cet alphabet. Une tour est une famille finie de blocs de même longueur. On construit de proche en proche une suite de tours, $\tau_n = \{ A_i^n, 1 \leqslant i \leqslant q_n \}$, pour $n = 0, 1, 2 \ldots$; dans la construction, chaque bloc A_i^n est une juxtaposition de blocs A_j^{n-1}, et la fréquence d'apparition d'un bloc A_j^{n-1} dans un bloc A_i^n est la même pour tout i et j. On note L_n la longueur commune des blocs A_i^n.

A l'aide des tours τ_n, on va définir T et P ; soit X l'intervalle $[0, 1]$, muni de la mesure de Lebesgue μ.

Au stade 0, on partitionne X en intervalles $H_{i,j}^0$, $1 \leqslant i \leqslant q_0$, $1 \leqslant j \leqslant L_0$, de même mesure. On définit P en mettant dans P_α, $1 \leqslant \alpha \leqslant q$, les intervalles $H_{i,j}^0$ tels que α soit la j-ème lettre de A_i^0. On définit T sur $X - \bigcup_{i=1}^{q_0} H_{i,L_0}^0$ par : T envoie de manière affine $H_{i,j}^0$ sur $H_{i,j+1}^0$, $1 \leqslant i \leqslant q_0$, $1 \leqslant j < L_0$. Au stade n, on a partitionné X en intervalles $H_{i,j}^n$, $1 \leqslant i \leqslant q_n$, $1 \leqslant j \leqslant L_n$, de même mesure ; $H_{i,j}^n$ est dans P_α si α est la j-ème lettre de A_i^n et T envoie de manière affine $H_{i,j}^n$ sur $H_{i,j+1}^n$, $1 \leqslant i \leqslant q_n$, $1 \leqslant j \leqslant L_n - 1$. T est donc définie sur $X - \bigcup_{i=1}^{q_n} H_{i,L_n}^n$.

Pour passer du stade n au stade $n + 1$, on découpe chaque $H_{i,1}^n$, $1 \leqslant i \leqslant q_n$, en $\dfrac{q_{n+1}L_{n+1}}{q_n L_n}$ sous-intervalles de même mesure ($q_n L_n$ divise $q_{n+1}L_{n+1}$ par construction). On associe à chaque sous-intervalle de $H_{i,1}^n$ une lettre de la tour τ_{n+1} choisie de sorte qu'elle soit la première lettre d'un bloc A_i^n apparaissant dans l'un des différents blocs A_k^{n+1}, $1 \leqslant k \leqslant q_{n+1}$; on numérote $H_{k,j'}^{n+1}$ le sous-intervalle dont la lettre associée est la j'-ème lettre du bloc A_k^{n+1} ; on a pu procéder de sorte qu'à deux sous-intervalles différents soient associés des couples (k, j') différents. L'application de la relation $TH_{k,j'}^{n+1} = H_{k,j'+1}^{n+1}$ partout où T est déjà définie, permet de reporter ce découpage sur tous les $H_{i,2}^n, H_{i,3}^n, \ldots, H_{i,L_n}^n$, $1 \leqslant i \leqslant q_n$. On a ainsi défini tous les $H_{k,j'}^{n+1}$, et chaque nouvel intervalle tombe automatiquement dans l'atome de P voulu. On peut alors définir T sur certains sous-intervalles des H_{i,L_n}^n, en l'occurrence ceux qui sont des $H_{k,j'}^{n+1}$ avec $j' \leqslant L_{n+1} - 1$: on définit T comme envoyant de manière affine $H_{k,j'}^{n+1}$ sur $H_{k,j'+1}^{n+1}$. T est alors définie sur un ensemble de mesure $1 - \dfrac{1}{L_{n+1}}$.

Pourvu que $L_n \to +\infty$, T est définie sur presque tout X. On considère le système dynamique $(X, (P)_T, T, \mu)$ où $(P)_T$ est la σ-algèbre engendrée par $\bigvee_{-\infty}^{+\infty} T^i P$: c'est le processus (P, T), donnant à tous les points des P-noms qui sont des enchaînements de blocs A_i^n.

(P, T) est ergodique d'après [3]. La construction qui précède étant sous-entendue, on connaît (P, T) si on peut décrire les tours τ_n ; (P, T) est donc déterminé par la tour τ_0 et les formules donnant les A_i^n en fonction des A_j^{n-1}. Une approche plus théorique de telles constructions se trouve dans Rothstein [4].

DÉFINITION. — Soient, pour tout n entier naturel, q_n, p_n, d_n, s_n des entiers positifs, $(j_1^n, \ldots, j_{p_n}^n)$ des p_n-uples d'entiers compris entre 1 et q_n,

$$\left(u_\alpha^n(1), \ldots, u_\alpha^n(d_n), 1 \leqslant \alpha \leqslant q_{n+1}\right)$$

des d_n-uples d'entiers positifs vérifiant

$$\frac{p_n}{q_n} \to +\infty \quad \text{si} \quad n \to +\infty, \tag{4}$$

$$\frac{d_n}{p_n} \to 0 \quad \text{si} \quad n \to +\infty, \tag{5}$$

$$\frac{s_n}{p_n} \to 1 \quad \text{si} \quad n \to +\infty, \tag{6}$$

$$\text{si} \quad m_n = \sup_{\alpha, i} u_\alpha^n(i), \frac{m_n}{s_n} \to 0 \quad \text{si} \quad n \to +\infty, \tag{7}$$

$$m_n + s_n \leqslant p_n \quad \text{pour tout } n, \tag{8}$$

$$\operatorname{card}\{1 \leqslant l \leqslant p_n, j_l^n = i\} = \frac{p_n}{q_n}, \tag{9}$$

$i = 1, \ldots, q_n$, pour tout n.

On se donne un alphabet fini $\{1, \ldots, q\}$. Soient $B_1, \ldots, B_{q_0}$ q_0 blocs de même longueur dans cet alphabet. On appelle processus défini par les mots d'ordre $(j_1^n, \ldots, j_{p_n}^n)$, les suites $(u_\alpha^n(1), \ldots, u_\alpha^n(d_n))$ et les blocs initiaux $B_1, \ldots, B_{q_0}$, le processus (P, T) construit avec des tours τ_n formées de q_n blocs $A_1^n, \ldots, A_{q_n}^n$ définis par les règles suivantes

$$A_0^i = B_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant q_0.$$

$$A_\alpha^{n+1} = \prod_{t=0}^{s_n} \left(A_{j_{u_\alpha^n(1)+t}}^n A_{j_{u_\alpha^n(2)+t}}^n \ldots A_{j_{u_\alpha^n(d_n)+t}}^n\right), \qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant q_{n+1}$$

où la multiplication note la juxtaposition des blocs.

On appellera encore mot d'ordre le mot $A^n_{j_1} \dots A^n_{j_{p_n}}$ considéré comme mot dans l'alphabet $(A^n_i, 1 \leqslant i \leqslant q_n)$. La suite s_n n'est pas mentionnée dans la définition, car ses valeurs importent peu tant que (6), (7), (8) sont vérifiées.

PROPOSITION 1. — Si le processus (P, T) est défini dans les conditions ci-dessus le système $(X, (P)_T, T, \mu)$ est de rang un gauche.

Démonstration. — Soit L_n la longueur commune des n-blocs. Au stade $n + 1$, l'espace est partitionné en

$$\{ T^i H^{n+1}_\alpha, 0 \leqslant i \leqslant L_{n+1} - 1, 1 \leqslant \alpha \leqslant q_{n+1} \}$$

où $T^{l-1}H^{n+1}_\alpha$ est dans P_k si A^{n+1}_α a un k comme $l^{\text{ème}}$ lettre.

La partition P, par définition, est un générateur pour T.

Pour $\left\{ \begin{array}{l} 1 \leqslant \alpha \leqslant q_{n+1} \\ 1 \leqslant j \leqslant d_n \end{array} \right\}$, soient $\beta(\alpha, j) = \inf \{ t \geqslant 0, u^n_\alpha(j) + t = m_n \}$,

$$F_{n+1} = \bigcup_{\substack{1 \leqslant \alpha \leqslant q_{n+1} \\ 1 \leqslant j \leqslant d_n}} T^{\beta(\alpha,j)d_nL_n + (j-1)L_n} H^{n+1}_\alpha .$$

F_{n+1} sera l'ensemble vérifiant (1), pour la suite

$$\begin{array}{ll} K^{n+1}_1 = 0, & K^{n+1}_2 = 1, \dots, K^{n+1}_{L_n} = L_n - 1, \\ K^{n+1}_{L_n+1} = d_nL_n, & K^{n+1}_{L_n+2} = d_nL_n + 1, \dots, K^{n+1}_{2L_n} = (d_n + 1)L_n - 1, \\ \dots & \\ K^{n+1}_{rL_n+1} = rd_nL_n, & \dots, K^{n+1}_{(r+1)L_n} = rd_nL_n + L_n - 1, \quad 0 \leqslant r \leqslant s_n - m_n - 1. \end{array}$$

Par construction, dans chaque colonne $\bigcup_{i=0}^{L_{n+1}-1} T^iH^{n+1}_\alpha$, les étages correspondant à $T^{K^{n+1}_{rL_n+1}}F_{n+1}, \dots, T^{K^{n+1}_{rL_n+L_n}}F_{n+1}$ sont exactement ceux dont les P-noms forment le mot $A^n_{j_r}$, pour $0 \leqslant r \leqslant s_n - m_n - 1$.

On en déduit (1) ; de plus, les $T^{K^{n+1}_i}F_{n+1}$ remplissent une proportion de l'espace supérieure à $\dfrac{s_n - m_n}{s_n + m_n}$. Et si x et y sont dans $T^{K^{n+1}_i}F_{n+1}$, T^jx et T^jy sont dans le même atome de P pour tout entier j tel que $K^{n+1}_j + j$ soit un des K^{n+1}_l. On en déduit qu'il existe $\beta_n \to 0$ et $c_n \to +\infty$ tels que la partition $(T^{K^{n+1}_i}F_{n+1}, 1 \leqslant i \leqslant L_n(s_n - m_n))$ raffine $\bigvee_{-c_n}^{c_n} T^iP$ sur une partie de l'espace de mesure supérieure à $\frac{s_n - m_n}{s_n + m_n} - \beta_n$. Ce qui permet de réaliser (2) et (3) pour toute partition $\overline{\mathrm{P}}$ si n est pris assez grand. C.Q.F.D.

UN EXEMPLE NON LÂCHEMENT DE BERNOULLI

Soit q un entier, S_q le groupe des substitutions de $[1, \ldots, q]$. On note, pour deux éléments de S_q, $\bar{f}(\mathrm{G}, \mathrm{G}') = \bar{f}(\mathrm{G}(1), \ldots, \mathrm{G}(q), \mathrm{G}'(1), \ldots, \mathrm{G}'(q))$, prise pour des suites dans l'alphabet $(1, \ldots, q)$, et π la substitution circulaire $(1, \ldots, q) \to (2, \ldots, q, 1)$.

LEMME. — Soit v un nombre strictement positif tel que qv soit entier. Il existe un nombre $\mathrm{A}(q, v)$ tel qu'on puisse trouver au moins $\mathrm{A}(q, v)$ substitutions G_i de S_q telles que

(10) $\bar{f}(\mathrm{G}_i, \pi^k \mathrm{G}_j) > 1 - v$, pour tout $i \neq j$, $k \in [1, \ldots, q]$.

Et il existe des nombres C, N_1, N_2, N_3, N_4, strictement positifs, tels que

(11) $q > \mathrm{N}_1, \quad qv > \mathrm{N}_2, \quad qv^3 > \mathrm{N}_4, v < \frac{1}{\mathrm{N}_3} \Rightarrow \mathrm{A}(q, v) \geqslant \frac{\mathrm{C}}{q^2} e^{qv \log v^3 q}$.

Démonstration. — Une substitution G est $(1-v)$-proche de G′ si et seulement si il existe deux suites croissantes de longueur vq vérifiant $\mathrm{G}(j_i) = \mathrm{G}'(j_i')$, pour $j = 1, \ldots, vq$. Le nombre maximum de $(1-v)$-voisins de G est donc

$$[\mathrm{C}_q^{vq}]^2 \,.\, [q(1 - v)]\,!\,.$$

On choisit donc G_1 quelconque, et on enlève de $\mathrm{S}_q\mathrm{G}_1$, tous ses $(1-v)$-voisins, et leurs composés par π^k, $1 \leqslant k \leqslant q$. On choisit G_2 dans l'ensemble qui reste et on recommence l'opération. On peut le faire A fois, avec

$$\mathrm{A}(q, v) = \frac{q\,!}{q\,.(\mathrm{C}_q^{vq})^2\,.(q(1-v))\,!} = \frac{qv\,!}{q\mathrm{C}_q^{vq}}.$$

Pour p assez grand,

$$\frac{\mathrm{C}_1}{\sqrt{p}} p^p e^{-p} \leqslant p\,! \leqslant \frac{\mathrm{C}_2}{\sqrt{p}} p^p e^{-p}.$$

L'application de cette formule à q, qv, et $q(1-v)$, donne l'estimation annoncée.

On se donne maintenant deux suites q_n et v_n vérifiant

(12) $$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n < \frac{1}{30}$$

(13) $q_n v_n$ est un entier strictement positif, pour tout n,

(14) $$q_{n+1} \leqslant A(q_n, v_n) \quad \text{pour tout } n.$$

D'après (11), on peut prendre par exemple $v_n = \frac{1}{n^3}$, $q_n = n^{10}$, ou $v_n = 2^{-n}$, $q_n = 2^{4n}$, en partant d'un n_0 assez grand.

D'après le lemme, on peut choisir, dans S_{q_n}, q_{n+1} substitutions, notées $G_1^n, \ldots, G_{q_{n+1}}^n$, vérifiant (10) avec $v = v_n$ et $\pi = \pi_n$, la substitution circulaire.

Soit M_n une suite vérifiant

(15) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{M_n}} < \frac{1}{30}.$$

On prend comme alphabet $[1, 2, \ldots, q_0]$. Soient $d_n = q_n$, $p_n = (M_n + 1)q_n$, $B_i = \{ i \}$, $1 \leqslant i \leqslant q_0$.

Soit (P, T) le processus défini par le mot d'ordre $(A_1^n A_2^n, \ldots, A_{q_n}^n)^{M_n+1}$, les suites $(G_\alpha^n(1), \ldots, G_\alpha^n(q_n)$, $1 \leqslant \alpha \leqslant q_{n+1})$, les blocs initiaux B_i. Les conditions (6) à (9) sont bien vérifiées, avec $m_n = q_n$, si on prend $s_n = M_n q_n - 1$.

PROPOSITION 2. — Le processus (P, T) n'est pas lâchement de Bernoulli.

Démonstration. — Le processus (P, T) est d'entropie nulle puisqu'il est de rang un gauche. La lecture du mot d'ordre donne la formule

$$A_\alpha^{n+1} = \prod_{t=0}^{M_n q_n - 1} [A^n_{\pi_n^t G_\alpha^n(1)} A^n_{\pi_n^t G_\alpha^n(2)}, \ldots, A^n_{\pi_n^t G_\alpha^n(q)}].$$

On note L_n la longueur commune des A_n^i.

Soit $a_n = \sup \{ 1 - \bar{f}(B, B')$, où B (resp. B') est un segment de A_j^n (resp. $A_{j'}^n$) de longueur supérieure à $\frac{L_n}{\sqrt{M_{n-1}}}$, avec $j \neq j' \}$. Si on montre que $\overline{\lim}\, a_n$ est strictement inférieure à 1, on conclut comme dans [*3*] que (P, T) n'est pas lâchement de Bernoulli.

Nous allons estimer a_{n+1} en fonction de a_n. Soit donc B un segment de A_j^{n+1}, de longueur supérieure à $\frac{L_{n+1}}{\sqrt{M_n}}$; de même pour B' et $A_{j'}^{n+1}$.

Pour abréger, je note $G = G_j^n$, $G' = G_{j'}^n$, $\pi = \pi_n$. J'appelle cycle un segment de la forme

$$A^n_{\pi^i G(1)}, \ldots, A^n_{\pi^i G(q_n)}.$$

En enlevant une portion de B de longueur relative inférieure à

$$2\frac{L_{n+1}}{M_n}\frac{\sqrt{M_n}}{L_{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{M_n}},$$

on peut supposer que B est entièrement composé de cycles. On se donne un couplage entre B et B′ réalisant la distance $\bar{f}(B, B')$. A chaque n-bloc A de B, on associe un segment $\bar{A}$ de B′ tel que

$$\bar{f}(B, B') \geqslant -\frac{2}{\sqrt{M_n}} + \sum_{A\,n\text{-bloc de } B} \bar{f}(A, \bar{A})\frac{l(A) + l(\bar{A})}{l(B) + l(B')},$$

où l désigne la longueur.

Chaque $\bar{A}$ est unique si l'on convient de mettre sous le bloc de gauche les signes non couplés situés entre deux blocs. Un cycle C est couplé de la même manière à $\bar{C} = \bigcup_{A\,n\text{-bloc contenu dans } C} \bar{A}$.

Pour les cycles C tels que

$$l(C) < \frac{2}{3}\,l(\bar{C}) \quad \text{ou} \quad l(\bar{C}) < \frac{2}{3}\,l(C),$$

on majore $1 - \bar{f}(C, \bar{C})$ par $\frac{2}{3}$.

Soit C un des cycles restant. On le divise en n-blocs A et on regarde $\bar{A}$.

a) Pour les blocs tels que $\frac{l(A)}{l(\bar{A})} < \frac{2}{3}$ ou $\frac{l(A)}{l(\bar{A})} > \frac{3}{2}$, on majore $1-\bar{f}(A, \bar{A})$ par $\frac{2}{3}$.

b) Pour les autres, $\bar{A}$ s'écrit $\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3$, où $\tilde{A}_i$ est un segment (éventuellement vide) d'un n-bloc de B′. Ceux de ces A_i dont la longueur est inférieure à $\frac{L_n}{\sqrt{M_{n-1}}}$ représentent une portion de $\bar{A}$ de longueur relative inférieure à $\frac{2}{\sqrt{M_{n-1}}}$.

On y majore $1 - \bar{f}$ par 1.

c) Sur ce qui reste, par hypothèse, dès que $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$ et $\tilde{A}_3$ ne sont pas tirés du n-bloc A, $1 - \bar{f}(A, \bar{A}) < a_n$.

d) Si $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$ ou $\tilde{A}_3$ est un segment de A, on majore $1-\bar{f}(A, \bar{A})$ par 1.

On ne risque pas d'utiliser deux fois un même n-bloc de $\bar{A}$, sauf si deux blocs consécutifs de B sont identiques ; cela pourrait arriver seulement aux extrémités des cycles, soit une proportion $\frac{2}{q_n}$ de B.

La portion de C couplée en d) a une longueur relative égale à la proportion de points communs (au sens de $\bar{f}$) entre la suite, correspondant à C, $(\pi^a G(0), \ldots, \pi^a G(q_n))$ et une suite correspondant à C′ du type

$$(\pi^b G'(j), \ldots, \pi^b G'(q_n), \pi^{b+1} G'(0), \ldots, \pi^{b+1} G'(q_n), \pi^{b+2} G'(0), \ldots, \pi^{b+2} G'(k))$$

ou une sous-suite de la suite ci-dessus, de longueur comprise entre $\frac{2}{3} q_n$ et $\frac{3}{2} q_n$.

On déduit de (10) que ces points communs sont au plus au nombre de $3v_n q_n$.

e) On en déduit que $\alpha_{n+1} < \dfrac{2}{\sqrt{M_n}} + \dfrac{2}{\sqrt{M_{n+1}}} + \dfrac{2}{q_n} + \left(\alpha_n \vee \dfrac{2}{3}\right) + 3v_n$.

On déduit de $\alpha_0 = 1$, (12), (13) et (15), que $\overline{\lim}\, \alpha_n < 1$. CQFD.

Questions :

— Peut-on construire, à l'aide du critère de rang un gauche, des transformations abstraites dont on contrôle les propriétés spectrales (absolue continuité, spectre de Lebesgue...) ?

— Le rang un gauche est-il équivalent à la simplicité du spectre ? En particulier la substitution de Morse, évoquée au début, et les gaussiens à mesure spectrale concentrée sur un ensemble de Kroneker sont-ils de rang un gauche ?

— La catégorie des systèmes équivalents (au sens de Kakutani) à un système de rang un gauche est contenue dans celle des systèmes d'entropie nulle et strictement plus vaste que celle des lâchement Bernoulli. Que contient-elle ? Tout système d'entropie nulle peut-il induire un système à spectre simple ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. V. CHACON, *Spectral properties of measure-preserving transformations.* Functional Analysis, proceedings of a symposium held at Monterrey, 1969, p. 93-107.

[2] A. DEL JUNCO, A transformation with simple spectrum which is not rank one. *Canadian Journal of Mathematics*, t. **29**, 1977, p. 655-663.

[3] D. ORNSTEIN, D. RUDOLPH et B. WEISS, Equivalence of measure-preserving transformations, *Memoirs of the American Mathematical Society*, t. **262**, 1982.

[4] A. ROTHSTEIN, Vershik processes, First steps, *Israël Journal of Mathematics*, t. **36**, n° 3-4, 1980, p. 205-223.

[5] A. B. KATOK et A. M. STEPIN, Approximations in ergodic theory. *Uspekhi Math. Nauk. SSSR.*, t. **22**, n° 5, 1967, p. 81-106, traduit dans *Russian Mathematical Surveys*, t. **22**, n° 5, 1967, p. 77-102.

[6] J. FELDMAN, New K-automorphisms and a problem of Kakutani. *Israël Journal of Mathematics*, t. **24**, n° 1, 1976, p. 16-38.

[7] A. B. KATOK et E. A. SATAEV, Standardness of automorphisms of transposition of intervals and fluxes on surfaces. *Matematicheskie Zametki*, t. **20**, n° 4, 1976, p. 479-488, traduit dans *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the U. S. S. R.*, 1977, p. 826-831.

(Manuscrit reçu le 13 septembre 1984)

(Manuscrit révisé le 9 janvier 1985)