R. LÉANDRE

Régularité de processus de sauts dégénérés

Annales de l'I. H. P., section B, tome 21, nº 2 (1985), p. 125-146
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1985__21_2_125_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 21, n° 2, 1985, p. 125-146. *Probabilités et Statistiques*

Régularité de processus de sauts dégénérés

par

R. LÉANDRE

Faculté des Sciences,
Route de Gray, 25000 Besançon

RÉSUMÉ. — Nous proposons des conditions d'existence et de régularité pour les densités du semi-groupe d'un processus de Markov dans $\mathbb{R}^d$, « de saut pur » (i. e., son générateur est de type intégral, plus éventuellement un opérateur différentiel du premier ordre). Nous supposons de plus la mesure de Lévy « dégénérée », au sens où elle est portée par un nombre fini d'arcs paramétrés. Nos conditions portent bien sûr sur la régularité du générateur, mais aussi sur la concentration à l'origine de la mesure de Lévy et sur la géométrie des arcs supports de cette mesure.

ABSTRACT. — We propose some conditions for existence and regularity of the densities of the semi-group of an $\mathbb{R}^d$-valued Markov process which is of « pure jump » type (i. e., its generator is an integral operator, plus possibly a first order differential operator). We suppose further that the Lévy measure is supported by a finite number of parametrized curves in $\mathbb{R}^d$. Our conditions of course concern the regularity of the generator, also the concentration of the Lévy measure around the origin, and also the geometry of the curves supporting the Lévy measure.

Key-words: Calcul de Malliavin. Densité pour des processus de Markov.
Classification : STMA : 11.080-11.100
AMS : 60.J 25-60.J 75

0. INTRODUCTION

Dans [10] et [11], Malliavin retrouve le théorème de Hörmander concernant l'hypoellipticité de l'opérateur :

$$\mathscr{L}' = \frac{\partial}{\partial t} + X_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} X_i^2 \tag{0.1}$$

où $X_0, X_1, \ldots, X_m$ sont des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$.

Ses techniques sont reprises par Stroock [13] [14], Kusuoka-Stroock [8] et enfin, par Ikeda-Watanabe [6].

Bismut, dans [4], utilise une transformation de Girsanov et l'existence d'un flot stochastique pour retrouver le résultat de Hörmander.

Dans [1] et [2], il généralise sa méthode au cas de processus de sauts, dans le cas où la mesure de Lévy a pour support une réunion d'espaces vectoriels engendrant l'espace (hypothèse d'ellipticité).

Nous nous proposons d'examiner la régularité de la loi de processus de sauts dans le cas où leur mesure de Lévy est dégénérée, la situation extrême étant celle où leur support est constitué d'arcs paramétrés. Nous étudions donc l'opérateur défini par :

$$\mathscr{L}f(x) = \langle D(x), \operatorname{grad} f(x) \rangle + \sum_{j=1}^{m} \int [f(x+\gamma_j(z)) - f(x) - 1_{[0,1]}(\| \gamma_j(z) \|) \langle \gamma_j(z), \operatorname{grad} f(x) \rangle] g_j(z)dz \tag{0.2}$$

où X_0 est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$, et les $\gamma_j m$ arcs paramétrés.

Dans la partie II, nous mettons en évidence l'influence de la structure géométrique des arcs sur la régularité du processus.

Ensuite, nous étudions la possibilité d'interactions entre un champ de vecteurs et des mesures de Lévy. Mais, pour obtenir des résultats concernant la régularité des densités du semi-groupe, nous avons dû imposer des conditions très fortes sur les concentrations des mesures de Lévy en l'origine et donner des conditions globales d'interactions entre les arcs et le champ.

Les techniques sont celles développées dans [1] : nous tenons à remercier Monsieur J.-M. Bismut pour le soutien constant qu'il a bien voulu accorder à notre travail.

1. GÉNÉRALITÉS

Dans cette partie, nous construisons d'abord le semi-groupe sur lequel nous travaillerons, et donnerons, d'après [*1*], l'expression de la forme quadratique qui permet d'étudier la régularité du semi-groupe.

Soient $z \to g_j(z)$ m fonctions de classe C^1, définies sur $\mathbb{R}^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telles que :

$$(1.1) \qquad \int (z^2 \wedge 1) g_j(z) dz < \infty$$

$$(1.2) \qquad \int_{|z| > \varepsilon} \frac{|g_j'(z)|^2}{g_j(z)} dz < \infty$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Sur l'espace $\mathbb{D}[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m]$ des fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^m$, continues à droite et limitées à gauche, muni de la filtration engendrée par le processus canonique $(z_1, \ldots, z_m)$, on construit l'unique probabilité P qui fasse des z_j des processus à accroissements indépendants stationnaires (P. A. I. S.), indépendants entre eux, et de fonction caractéristique :

$$(1.3) \qquad \overline{\psi}_j(\alpha) = \exp\left[\int (e^{i\alpha z} - 1 - i 1_{[0,1]}(|z|)\alpha z) g_j(z) dz\right].$$

On augmente suivant [*5*] la filtration engendrée par les processus z_j.

Ensuite, on considère m arcs paramétrés, $z \to \gamma_j(z)$, de classe C^∞, de source $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, dont toutes les dérivées sont bornées, avec $\gamma_j(0) = 0$.

Soient *alors les m* P. A. I. S. $Y_1, \ldots, Y_m$, *indépendants entre eux, définis par :*

$$(1.4) \quad Y_j(t) = \sum_{s \le t}^{c} \gamma_j(\Delta z_j(s)) 1_{[0,1]}(\| \gamma_j(\Delta z_j(s)) \|) + \sum_{s \le t} \gamma_j(\Delta z_j(s)) 1_{]1,\infty[}(\| \gamma_j(\Delta z_j(s)) \|)$$

où $\sum^{c}$ désigne l'opérateur de somme compensée [*7*] et où la deuxième somme se réduit à une série ordinaire.

La mesure de Lévy de Y_j est alors d'après [*7*] et [*9*] définie par :

$$(1.5) \qquad \int f(z) d\mu(z) = \int f(\gamma_j(z)) 1_{\{\gamma_j(z) \neq 0\}} g_j(z) dz$$

et l'on peut calculer sa fonction caractéristique $\psi_j(\alpha)$:

$$(1.6)\quad \psi_j(\alpha)=\exp\left[\int (e^{i\langle \alpha, \gamma_j(z)\rangle} - 1 - i1_{[0,1]}(\| \gamma_j(z) \|)\langle \alpha, \gamma_j(z)\rangle) g_j(z)dz\right]$$

Le semi-groupe P_t dont le générateur agit sur $C_k^\infty(\mathbb{R}^n)$ par (0.2) se réalise, suivant [*7*] et [*12*] par l'intermédiaire de l'équation différentielle stochastique (1.7) :

$$(1.7)\quad \begin{aligned} dX_t^x &= D(X_t^x)dt + dY_1 + \ldots + dY_m \\ X_0^x &= x. \end{aligned}$$

De plus, d'après [*1*], (1.7) possède un flot stochastique : il existe un ensemble de probabilité 1, tel que sur cet ensemble, $x \to X_t^x$ soit un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ noté ϕ_t. De plus, si on pose :

$$(1.8)\quad \frac{\partial \phi_t}{\partial x}(x) = \phi_t^*(x),$$

ϕ_t^* et ϕ_t^{*-1} vérifient l'équation (1.9) :

$$(1.9)\quad \begin{aligned} &d\phi_t^* = \frac{\partial D}{\partial x}(X_t^x)\phi_t^* dt\,; \qquad d\phi_t^{*-1} = -\,\phi_t^{*-1}\frac{\partial D}{\partial x}(X_t^x)dt \\ &\phi_0^* = \phi_0^{*-1} = Id. \end{aligned}$$

Enfin, si ω est l'élément générique de $\mathbb{D}[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n]$, on peut définir sa translatée ω_t par :

$$(1.10)\quad z_j(s)(\omega_t) = z_j(s+t)(\omega) - z_j(t)(\omega).$$

On a alors :

$$(1.11)\quad \phi_{t+s}(\omega, x) = \phi_t(\omega_s, \phi_s(\omega, x)) \quad \text{P. p. s.}$$

Soient alors m applications de classe C^1, $z \to v_j(z)$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ telles que :

$$(1.12)\quad \begin{gathered} v_j(z) \le Cz^2 \\ \int_{|z|\le 1} \frac{\left|\frac{d}{dz}(v_j(.)g_j(.))(z)\right|^2}{g_j(z)} dz < \infty. \end{gathered}$$

Soit alors $t \to K_t^x$, le processus croissant optionnel de formes quadratiques positives définies par :

$$(1.13)\quad K_t^x(f) = \sum_{j=1}^m \sum_{s\le t} v_j(\Delta z_j(s))\langle f, \phi_s^{*-1}\gamma_j'(\Delta z_j(s))\rangle^2$$

Rappelons alors le résultat principal de [*1*], p. 224 qui, dans une situation voisine, va nous permettre de déterminer la régularité de P_t.

THÉORÈME I.1. — *a) Si pour tout x, K_t^x est inversible, le semi-groupe possède une densité.*

b) Soit $p > 2$. S'il existe $T > 0$, tel que :

$$(1.14)\qquad \operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}^n \| f \| = 1} E\left[\frac{1}{(K_T^x(f))^p}\right] < \infty$$

alors pour tout $k > 1$, il existe $t_k > 0$ tel que P_t possède une densité de classe C^k pour $t > t_k$.

c) Si pour tout $T > 0$, on a pour tout $p > 2$:

$$(1.15)\qquad \operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}^n \| f \| = 1} E\left[\frac{1}{(K_T^x(f))^p}\right] < \infty$$

alors pour tout t, P_t possède une densité C^∞.

Pour inverser K_T, les martingales exponentielles de [*7*] [*9*] et [*12*] vont nous permettre d'obtenir les critères suivants :

PROPOSITION I.2. — *Si pour tout temps d'arrêt $\tilde{T}$, presque sûrement non nul pour tout x, pour tout vecteur B non nul $\mathbb{R}^n$, on a :*

$$(1.16)\qquad \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\tilde{T}} ds \int_{|z|<1} 1_{]0,\infty[}(v_j(z)) 1_{]0,\infty[}\left(\left|\langle f, \phi_s^{*-1}\gamma_j'(z)\rangle\right|\right) g_j(z)dz = \infty$$

sur un ensemble $\Omega_{\tilde{T},X}$ de probabilité 1, alors K_T est presque sûrement inversible.

La preuve de cette proposition, après utilisation de la loi du 0.1 de Blumenthal, comme dans le cas brownien [*4*], est analogue à celle du théorème 4.7 de [*1*].

DÉFINITION I.3. — *Soit $\beta > 0$, x un vecteur de $\mathbb{R}^n$, f un autre vecteur de $\mathbb{R}^n$. Définissons le processus $t \to U_t(x, f, \beta)$ par :*

$$(1.17)\qquad U_t(x, f, \beta) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^t ds \int_{|z|<1} \left(\exp\left[-\beta v_j(z) \langle f, \phi_s^{*-1}\gamma_j'(z)\rangle^2\right] - 1\right) g_j(z)dz$$

On a alors, si $\Gamma(p)$ désigne la fonction Gamma d'Euler :

PROPOSITION I.4.

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{(\mathrm{K}_{\mathrm{T}}^{x}(f))^{p}}\right] \leq \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{0}^{\infty} \beta^{p-1} [\mathrm{E}\ [\exp(\mathrm{U}_{\mathrm{T}}(x, f, 2\beta))]]^{\frac{1}{2}} d\beta .$$

Preuve. — Soit :

$$\tilde{\mathrm{K}}_{t}(f) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s \leq t} 1_{]0,1[}(\mid \Delta z_{j}(s) \mid) v_{j}(\Delta z_{j}(s)) \langle f, \phi_{s}^{*-1} \gamma_{j}'(\Delta z_{j}(s)) \rangle^{2}$$

$\tilde{\mathrm{K}}_{\mathrm{T}}(f)$ est inférieure à $\mathrm{K}_{\mathrm{T}}(f)$ et donc :

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{(\mathrm{K}_{\mathrm{T}}(f))^{p}}\right] \leq \mathrm{E}\left[\frac{1}{(\tilde{\mathrm{K}}_{\mathrm{T}}(f))^{p}}\right] = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{0}^{\infty} \beta^{p-1} \mathrm{E}\ [\exp\ [-\ \beta \tilde{\mathrm{K}}_{\mathrm{T}}(f)]] d\beta$$

Rappelons que le processus

$$\mathrm{Z}_{t}(2\beta) = \exp\ [-\ 2\beta \tilde{\mathrm{K}}_{t}(f) - \mathrm{U}_{t}(x, f, 2\beta)]$$

est une martingale de carré intégrable. Il ne reste plus alors qu'à appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

II. RÉGULARITÉ DU SEMI-GROUPE ET STRUCTURE LOCALE DES ARCS

Dans cette partie, nous déterminons la régularité du semi-groupe P_t en fonction de la structure géométrique des arcs γ_j en l'origine.

THÉORÈME II.1. — *Supposons que l'on puisse trouver une fonction $v_j(z)$ qui vérifie (1.12) et qui soit égale à z^{2p} sur un voisinage de $0(p \in \mathbb{N}^*)$, et dont toutes les dérivées sont bornées. Supposons que $\mathbb{R}^n$ est engendré par les vecteurs $\gamma_j^{(k)}(0)$ $j = 1, \ldots, m,$ $k \in \mathbb{N}$.*

a) Si pour tout j, $\underline{\lim}_{z \to 0} \mid z \mid g_j(z) > 0$ alors pour tout k, il existe t_k tel que pour $t > t_k$, P_t possède une densité de classe C^k.

b) Si pour tout j, $\underline{\lim}_{z \to 0} \mid z \mid g_j(z) = \infty$, alors pour tout $t > 0$ P_t possède une densité C^∞.

Preuve (de la partie *a*). — Par le théorème I.1 et la proposition I.4, il suffit, en reprenant la définition I.3, de démontrer que l'on peut trouver un T et un $p > 2$ tel que :

$$(2.1) \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}^n \, ||f|| = 1} \int_{0}^{\infty} \beta^{p-1} [\mathrm{E}\ [\exp\ [\mathrm{U}_{\mathrm{T}}(x, f, 2\beta]]]^{1/2} d\beta < \infty$$

Soit $z \to f_j(x, f, s, \omega)(z)$ la famille de fonctions C^∞ définies par :

$$(2.2) \qquad z \to \langle f, \phi_s^{*-1}\gamma_j'(z) \rangle^2 v_j(z).$$

Sur $[0, T]$ du fait de (1.9), on a :

$$(2.3) \quad f_j(x, f, s, \omega)(z) \geq \frac{1}{C(T)} f_j(x, \tilde{f}_s, 0, \omega)(z) \quad \text{avec} \quad \tilde{f}_s = \frac{{}^t\phi_s^{*-1} f}{\| {}^t\phi_s^{*-1} f \|}.$$

$\tilde{f}_s$ est de norme 1 ; $\mathbb{R}^n$ est engendré par la famille de vecteurs $\gamma_j^{(k)}(0)$ ($j = 1, \ldots, m$ $k \in \mathbb{N}$). On peut donc trouver $\lambda > 0$ et un entier $\tilde{N}$ tel que, pour tout x, f, s, ω, il existe un entier $j \leq m$ et un entier $k \leq \tilde{N}$ tel que :

$$(2.4) \qquad | f_j^{(k)}(x, \tilde{f}_s, 0, \omega)(0) | \geq \lambda.$$

Utilisons les notations de l'appendice, en particulier la fonction $\tau_{j, f_j(x, \tilde{f}_s, 0\omega)}(\,.\,)$ définie par $(a.6)$ (relativement à g_0).

1) La famille de fonctions $z \to f_j(x, \tilde{f}_s, 0, \omega)(z)$ satisfait la condition $(a.4)$ de l'appendice ; en effet ϕ_s^{*-1} est borné, $v_j(z)$ a toutes ses dérivées bornées, ainsi que $\gamma_j'(z)$. En raison de (2.4), $(a.5)$ est aussi vérifiée. On peut donc appliquer le théorème A.2 de l'appendice. On peut donc trouver un β_0, indépendant de x, de f, de s et de ω, tel que pour $\beta > \beta_0$:

$$(2.5) \qquad \sum_{j=1}^{m} \tau_{j, f_j(x, \tilde{f}_s, 0, \omega)}(\beta) \leq -C_1 \operatorname{Log}(\beta) \qquad (C_1 > 0).$$

(1.17) et (2.3) impliquent :

$$U_T(x, f, 2\beta) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^T \tau_{j, f_j(x, f, s, \omega)}(2\beta) ds$$
$$\leq \sum_{j=1}^{m} \int_0^T \tau_{j, f_j(x, \tilde{f}_s, 0, \omega)}\left(\frac{2\beta}{C(T)}\right) ds \leq -C_1 T \operatorname{Log}\left(\frac{2\beta}{C(T)}\right)$$

pour $\frac{2\beta}{C(T)} > \beta_0$. Et donc, l'on a, pour $p > 2$:

$$(2.7) \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}^n \| f \| = 1} \int_0^\infty \beta^{p-1} [E [\exp [U_T(x, f, 2\beta)]]]^{1/2} d\beta$$
$$\leq C_T \int_{\beta_0}^\infty \beta^{(p-1-C_2T)} d\beta + C_T'.$$

Remarques. — A l'aide de la proposition I.2, on peut montrer qu'il

Remarques. — A l'aide de la proposition I.2, on peut montrer qu'il suffit que $\int_{-1}^{+1} g_j(z)dz = \infty$ et que les vecteurs $\gamma_j^{(k)}(0)$ engendrent $\mathbb{R}^n$ pour que le semi-groupe P_t possède une densité.

L'hypothèse géométrique du théorème est remplie s'il y a un seul arc dans $\mathbb{R}^3$ dont la torsion et la courbure en l'origine sont non nulles.

III. INTERACTIONS ENTRE LE CHAMP DE VECTEURS ET LE NOYAU DE LÉVY

Le calcul de Malliavin ([*3*] [*5*] [*9*] [*10*] [*12*] [*13*]) met en évidence des *interactions* entre un champ de vecteurs et une partie brownienne *dégénérée* qui rendent C^∞ la loi d'une diffusion *dégénérée.*

Bismut ([*2*] [*3*]) retrouve un phénomène analogue dans des semi-groupes associés à des processus de sauts construits à partir de diffusions.

Dans cette partie, nous retrouvons une situation semblable mais il nous a été impossible, comme dans [*2*] et [*3*], de localiser la régularité de P_t car on ne contrôle pas assez bien le temps de sortie du processus X_t *discontinu* de sa région de régularisation.

Considérons le cas où $\gamma_j(z) = zf_j$ (f_j vecteur de $\mathbb{R}^n$ de norme 1).

DÉFINITION III.1. — *Soit f un vecteur de $\mathbb{R}^n$. $V_j(t, x, f)$ est le processus continu, dérivable à droite :*

$$t \to \langle f, \phi_t^{*-1} f_j \rangle \tag{3.1}$$

dont la dérivée à droite en t $W_j(t, x, f)$ s'écrit :

$$t \to -\left\langle f, \phi_t^{*-1} \frac{\partial D(X_t)}{\partial x} f_j \right\rangle \tag{3.2}$$

Avec cette définition, la formule (1.16) s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{m} \int_0^{\tilde{T}} ds \int_{|z|<1} 1_{]0,\infty[}(v_j(z)) 1_{]0,\infty[}(|V_j(s, x, f)|) g_j(z)dz = \infty \tag{3.3}$$

et la formule 1.17 devient :

$$U_t(x, f, \beta) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^t ds \int_{|z|<1} (\exp[-\beta V_j^2(s, x, f) v_j(z)] - 1) g_j(z)dz. \tag{3.4}$$

THÉORÈME III.2. — *Supposons que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des vecteurs $f_j j = 1, \ldots, m$ et des vecteurs $\dfrac{\partial^k D(x)}{\partial f_j^k}$, $j = 1, \ldots, m$, $k \in \mathbb{N}^*$ engendre $\mathbb{R}^n$.*

On suppose que $\gamma_j(z) = z f_j$, et qu'on puisse trouver des fonctions vérifiant (1.12) et (3.5)

$$(3.5) \qquad \int_{v_j(z)>0} g_j(z)dz = \infty$$

Alors le semi-groupe P_t possède une densité.

Preuve. — Appliquons la proposition I.2 et (3.3).

Dans une première étape, supposons que f ne soit pas orthogonal à l'espace engendré par les f_j. Alors il existe j_0 tel que $V_{j_0}(0, x, f)$ ne soit pas nul, et donc par continuité, il existe un temps d'arrêt $T_1 > 0$, tel que sur $[\![0, T_1[\![$, $V_{j_0}(0, x, f)$ ne soit pas nul.

Il s'ensuit que :

$$\infty = \int_0^{\tilde{T} \wedge T_1} ds \int_{|z| \leq 1} 1_{]0,\infty[}(v_{j_0}(z)) 1_{]0,\infty[}(V_{j_0}(s, x, f)) g_{j_0}(z)dz$$
$$\leq \int_0^{\tilde{T}} ds \int_{|z|<1} \sum_{j=1}^{m} 1_{]0,\infty[}(v_j(z)) 1_{]0,\infty[}(V_j(s, x, f)) g_j(z)dz .$$

Si maintenant f est orthogonal à l'espace engendré par les f_j, il suffit de montrer que le temps d'arrêt T_2 définit par :

$$T_2 = \inf \left\{ t > 0 : \sum_{j=1}^{m} |\, V_j(t, x, f) \,| \neq 0 \right\}$$

est presque sûrement nul et ensuite d'appliquer la première étape.

Sur $[\![0, T_2]\!]$, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} |\, W_j(t, x, f) \,| = 0$, et donc sur $[\![0, T_2[\![$, aucun des processeurs W_j ne possède de sauts.

Or, sur $[\![0, T_2]\!]$, la mesure de Lévy $d\tilde{\mu}_j(t)$ du processus $W_j(t, x, f)$ est l'image de la mesure de Lévy du processus X_t par l'application F_j :

$$z \overset{F_j}{\rightarrow} - \left\langle f, \phi_t^{*-1} \frac{\partial D}{\partial x} (X_{t^-} + z) f_j \right\rangle \qquad z \in \mathbb{R}^n .$$

Remarquons que F_j dépend de ω et t.

On a donc :

$$(3.6) \qquad \sum_{j=1}^{m} \int_{|z|<1} d\tilde{\mu}_j(t)(z) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \int_{0<|F_j(z'f_l)|<1} g_l(z')dz' .$$

Puisque la famille $\left\{ f_j, \frac{\partial^k D(x)}{\partial f_j^k}, j = 1, \ldots, m, k \in \mathbb{N}^* \right\}$ engendre $\mathbb{R}^n$, on peut trouver j', k' et l' qui dépendent de (ω, t) tels que :

$$\frac{d^{k'}}{dz^{k'}} [F_{j'}(z' f_{l'})]_{z'=0} \neq 0$$

car ${}^t\phi_t^{*-1}$ est orthogonal à l'espace engendré par $f_1, \ldots, f_m$ sur $[\![0, T_2[\![$.
Donc sur $[\![0, T_2[\![$, $z \to |F_{j'}(z_{l'})|$ est non nul sur un voisinage de 0 et donc $\sum_{j=1}^{m} \int_{|z|<1} d\tilde{\mu}_j(t) = \infty$ sur $[\![0, T_2[\![$. Donc il y a au moins un des processus $W_j(t, x, f)$ qui saute une infinité de fois sur $[\![0, T_2]\!]$, si T_2 n'est pas presque sûrement nul : et donc, il sauterait au moins une fois sur $[\![0, T_2[\![$ si T_2 n'était pas presque sûrement nul.

La remarque (triviale) suivante va nous permettre d'effectuer des estimations plus fines sur K_T^{-1} :

Soit g une fonction monotone sur $[t_1, t_2]$ *telle que* $|g'_d| > \lambda > 0$ *sur* $[t_1, t_2]$. *Alors :*

$$(3.7) \qquad \int_{t_1}^{t_2} 1_{[0,\varepsilon]}(|g(s)|)ds \leq \frac{2\varepsilon}{\lambda}$$

Dans un premier temps, faisons l'hypothèse « géométrique » suivante :
Il existe $C > 0$ *tel que :*

$$(3.8) \qquad \operatorname*{Inf}_{x \in \mathbb{R}^n ||f||=1} \sum_{j=1}^{m} \left(|\langle f, f_j \rangle| + |\langle f, \frac{\partial D}{\partial x}(x) f_j \rangle| \right) \geq C .$$

Sous ces conditions, on a :

THÉORÈME III.3. — *Supposons (3.8) et que l'on puisse trouver v_j pour que la mesure image $\mu_j(dz)$ par $g_j(z)dz$ par $z \to zv_j(z)$ vérifie, pour tout j :*

$$(3.9) \qquad \varliminf_{z \to 0} \frac{\mu_j\{\,]z, 1]\,\}}{\operatorname{Log}\left(\frac{1}{z}\right)} > 0$$

alors pour tout entier k, il existe t_k tel que pour $t > t_k$, P_t possède une densité de classe C^k.

Si de plus, on a pour tout j :

$$\underline{\lim}_{z \to 0} \frac{\mu_j \{]z, 1] \}}{\operatorname{Log}\left(\frac{1}{z}\right)} = \infty \tag{3.10}$$

alors le semi-groupe P_t est C^∞. □

Preuve. — Appliquons la proposition I.4. Considérons la fonction :

$$U_T(x, f, \beta) = \int_0^T ds \sum_{j=1}^m \int (\exp[-\beta V_j^2(s, x, f) z] - 1) d\mu_j(z). \tag{3.11}$$

Soit alors une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, notée $H(\beta)$, telle que :

$$\lim_{\beta \to \infty} \beta H^2(\beta) = \infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\beta \to \infty} H(\beta) = 0$$

Lorsque $| V_j(s, x, f) | \geq H(\beta)$, on a, d'après le théorème A.1 de l'appendice

$$\int (\exp[-\beta V_j^2(s, x, f) z] - 1) d\mu_j(z) \leq -C \operatorname{Log}(\beta H^2(\beta)),$$

pour $\beta > \beta_0$ *indépendant* de x, f, ω et s.

Reportant ceci dans (3.11) on a, pour $\beta > \beta_0$:

$$U_T(x, f, \beta) \leq -C \operatorname{Log}(\beta H^2(\beta)) \int_0^T \left(\sum_{j=1}^m 1_{]H(\beta), \infty[}(| V_j(s, x, f) |) \right) ds. \tag{3.12}$$

Divisons alors $[0, T]$ en $K(\beta)$ intervalles $[t_k, t_{k+1}]$ de longueur égale : supposons que $K(\beta)$ soit un entier pair tendant vers l'infini quand $\beta \to +\infty$. Posons alors :

$$T_k = t_{k+1} \wedge \inf \{ t > t_k, \| Y_t - Y_{t_k} \| > \delta \} \qquad \delta > 0.$$

$\left(Y \text{ est le PAIS } \sum_{j=1}^m Y_j \text{ défini en } (1.4) \right)$.

Or les dérivées de D sont bornées; de plus :

$$\| {}^t\phi_t^{*-1} - {}^t\phi_{t'}^{*-1} \| \leq C | t - t' |$$

et la famille de vecteurs constituée par les f_j et les $\dfrac{\partial D(x)}{\partial f}$ vérifie (3.8). On peut donc trouver un δ qui ne dépend pas de T, une fonction $\tilde{j}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\{1, 2, \ldots, m\}$ un réel $\lambda > 0$ possédant la propriété (*) :

* Soit $\tilde{j}(k)$ la variable aléatoire $\omega \to \tilde{j}(X_{t_k})$. Ou bien sur $[\![t_k, T_k[\![$, $V_{\tilde{j}(k)}(s, x, f)$ est en module supérieur à $\lambda > 0$, ou bien sur $[\![t_k, T_k[\![$, le processus $W_{\tilde{j}(k)}(s, x, f)$ reste de signe constant et est en module supérieur à $\lambda > 0$*.

Appliquons alors (3.7) sur $[\![t_k, T_k[\![$:

$$\sum_{j=1}^{m} \int_0^T 1_{]H(\beta),\infty[}(|V_j(s, x, f)|)ds \geq \sum_{k=1}^{K(\beta)} \left(T_k - t_k - \frac{2H(\beta)}{\lambda}\right).$$

On considère alors l'événement $\tilde{E}(\beta)$ définit par :

Il existe au moins $\frac{K(\beta)}{2}$ entiers (aléatoires) k tels que T_k soit égal à t_{k+1}.

Pour un β_1 qui ne dépend que de H de T, on a si $\beta \geq \beta_1$:

$$\sum_{j=1}^{m} \int_0^T 1_{]H(\beta),\infty[}(|V_j(s, x, f)|)ds \geq 1_{\{\tilde{E}(\beta)\}}(\omega)\frac{T}{3} \tag{3.14}$$

dès que $H(\beta) = o\left(\frac{1}{K(\beta)}\right)$ quand $\beta \to \infty$.

Soit A un sous-ensemble à $\frac{K(\beta)}{2}$ éléments de $\{1, 2, \ldots, K(\beta)\}$. Soit $F(\omega)$ l'ensemble des entiers k tels que T_k soit égal à t_{k+1}. Comme Y est un PAIS, on a :

$$P\{A \subset F(\omega)\} \leq \left(P\left\{T_1 < \frac{T}{K(\beta)}\right\}\right)^{\frac{K(\beta)}{2}}$$

or il y a $C_{K(\beta)}^{\frac{K(\beta)}{2}}$ sous-ensembles à $\frac{K(\beta)}{2}$ éléments de $\{1, 2, \ldots, K(\beta)\}$. On a donc :

$$P\{\tilde{E}(\beta)^c\} \leq C_{K(\beta)}^{\frac{K(\beta)}{2}}\left(P\left\{T_1 < \frac{T}{K(\beta)}\right\}\right)^{\frac{K(\beta)}{2}}. \tag{3.15}$$

Or la formule (1.4) nous permet de décomposer Y en une martingale PAIS, à sauts bornés dont la mesure *de Lévy $\tilde{\mu}$ vérifie* :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^2 d\tilde{\mu}(x) < \infty.$$

(donc M_t est de carré intégrable), et d'un processus de sauts $A_{t'}$ à *variation finie à sauts en module* $> \varepsilon$. Ceci implique que :

$$P\left\{ T_1 \leq \frac{T}{k(\beta)} \right\} \leq P\left\{ A_t \text{ possède au moins un saut entre 0 et } \frac{T}{K(\beta)} \right\} + P\left\{ \sup_{t \leq \frac{T}{K(\beta)}} \| M_t \| > \delta \right\}.$$

Le premier terme est inférieur à $1 - \exp\left[- \frac{C_0}{K(\beta)} \right]$ (C_0 se calculerait en fonction des g_j). Comme M_t est de carré intégrable, le second terme est inférieur à $\frac{C_0}{K(\beta)}$.

Reportons ceci dans (3.15) :

$$P\{ \tilde{E}(\beta)^c \} \leq C_{k(\beta)}^{\frac{K(\beta)}{2}} \left(\frac{C_1}{K(\beta)} \right)^{\frac{K(\beta)}{2}}.$$

Utilisons (3.12) et (3.14), on obtient :

$$(3.16) \quad E[\exp[U_T(x, f, \beta)]] \leq \exp[-C_1 T \operatorname{Log}(\beta H^2(\beta))] + C_{K(\beta)}^{\frac{K(\beta)}{2}} \left(\frac{C_1}{K(\beta)} \right)^{\frac{K(\beta)}{2}} = J_1(\beta) + J_2(\beta)$$

pour $\beta > \beta_1$ déterminé en (3.14).

Prenons $K(\beta) \sim 2 \operatorname{Log} \beta$ quand $\beta \to \infty$. Par la formule de Stirling

$$C_{K(\beta)}^{\frac{K(\beta)}{2}} \simeq C \frac{e^{-K(\beta)} K(\beta)^{K(\beta) + \frac{1}{2}}}{\left(e^{-\frac{K(\beta)}{2}} \left(\frac{K(\beta)}{2} \right)^{\frac{K(\beta)+1}{2}} \right)^2} \simeq C \frac{2^{K(\beta)}}{C}.$$

Donc $J_2(\beta)$ est négligeable devant $\beta^{-p'}$ si $p' > 2$.

Si $H(\beta) = \beta^{-\frac{1}{4}}$, on peut trouver T tel que $J_1(\beta)$ est négligeable devant $\beta^{-p'}$ quand $\beta \to \infty$.

Le reste découle du théorème I.1 et la proposition I.4.

Nous donnons maintenant un exemple d'interactions entre le champ et les arcs faisant jouer toutes les dérivées du champ.

Par convention $\frac{\partial^0 D(x)}{\partial f_j^0} = f_j$.

THÉORÈME III.4. — *Supposons qu'il existe un entier* K *et un réel* $C > 0$, *indépendants de* x *élément de* $\mathbb{R}^n$ *et de* $f \in \mathbb{R}^n$ *de norme 1 tel que :*

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{K} \left| \left\langle f, \frac{\partial^i}{\partial f_j^i} D(x) \right\rangle \right| \geq C. \tag{3.17}$$

S'il existe α *élément de* $]1, 3[$ *tel que, pour tout* j,

$$\varliminf_{r \to 0} | z |^\alpha g_j(z) > 0 \tag{3.18}$$

alors le semi-groupe est C^∞.

Preuve.

Première étape : Divisons l'intervalle $[0, T]$ en $K(\beta)$ intervalles $[t_k, t_{k+1}]$, de longueur égale : $K(\beta) \to \infty$ quand $\beta \to \infty$.

De plus, il existe $\tilde{m}$ et $\tilde{M}$ non nuls, tels que, si $\| f \| = 1$, on ait :

$$\tilde{m} < \| {}^t\phi_s^{*-1}(f) \| < \tilde{M}, \qquad s \in [0, T].$$

Soit alors $S(\tilde{m}, \tilde{M})$ l'ensemble des vecteurs de norme comprise entre $\tilde{m}$ et $\tilde{M}$. Grâce à (3.17), et *par un théorème de section mesurable* ([*15*]), on peut trouver une application mesurable, ψ, de $\mathbb{R}^n \times S(\tilde{m}, \tilde{M})$ dans $\{ 1, \ldots, m \} \times \{ 0, 1, \ldots, K \}$ telle que si :

$$\psi(x, f) = (j(x, f),\ i(x, f)) \tag{3.19}$$

on ait :

$$\left| \left\langle f, \frac{\partial^{i(x,f)} D(x)}{\partial f_{j(x,f)}^{i(x,f)}} \right\rangle \right| \geq \lambda' > 0. \tag{3.20}$$

Soit alors les variables aléatoires $\psi(k) = (j(k), i(k))$ où

$$(j(k), i(k)) = (j(X_{t_k}, {}^t\phi_{t_k}^{*-1} f), i(X_{t_k}, {}^t\phi_{t_k}^{*-1} f))$$

définies pour $\| f \| = 1$.

Vu que $\| {}^t\phi_t^{*-1} - {}^t\phi_s^{*-1} \| \leq C(t - s)$, que les dérivées de D sont bornées, on a, d'après (3.17), pour deux réels δ, λ bien choisis non nuls, la propriété (**).

(**) Soit :

$$T_k = t_{k+1} \wedge \inf \{ t > t_k ; \| Y_t - Y_{t_k} \| > \delta \} \quad \text{où Y a été défini en (1.4)}.$$

Alors sur $[\![t_k, T_k [\![$, $\left\langle {}^t\phi_t^{*-1} f, \dfrac{\partial^{i(k)} D(X_t)}{\partial f_{j(k)}^{i(k)}} \right\rangle$ reste de signe constant et de module supérieur à λ (**).

Deuxième étape : Soit $G(\beta)$, $L(\beta)$, $H(\beta)$ trois fonctions qui tendent vers zéro quand $\beta \to \infty$. Soit $\overline{T}_k$, et $\tilde{T}_k$ les temps d'arrêts suivants :

$$\overline{T}_k = T_k \wedge \inf\{ t > t_k ; | W_{j(k)}(t, x, f) | > G(\beta) \} \tag{3.21}$$

$$\tilde{T}_k = T_k \wedge \inf\left\{ t > \overline{T}_k : | W_{j(k)}(t, x, f) - W_{j(k)}(\overline{T}_k, x, f) | > \frac{G(\beta)}{2} \right\} \tag{3.22}$$

Sur $[\![\overline{T}_k, \tilde{T}_k[\![$, le processus aléatoire $W_{j(k)}(t, x, f)$ reste de signe constant et de module supérieur à $\frac{G(\beta)}{2}$.

Soit alors $\tilde{E}_1(\beta)$ l'événement défini par :
ω appartient à $\tilde{E}_1(\beta)$ s'il existe k tel que $i(k) \geq 1$ et tel que :

$$| T_k(\omega) - t_k | > \frac{T}{2K(\beta)} \tag{3.23}$$

$$| \overline{T}_k(\omega) - t_k | < \frac{T}{4K(\beta)} \tag{3.24}$$

$$| \tilde{T}_k(\omega) - \overline{T}_k(\omega) | > L(\beta) . \tag{3.25}$$

D'après (3.25), si ω appartient à $\tilde{E}_1(\beta)$, il existe un k tel que l'intervalle $[\![\overline{T}_k, \tilde{T}_k[\![$ ait une longueur supérieure à $L(\beta)$. Si on applique la remarque (3.7), on a, si ω appartient à $\tilde{E}_1(\beta)$:

$$\int_0^T \sum_{j=1}^m 1_{]H(\beta),\infty[}(| V_j(s, x, f) |) ds \geq \left(L(\beta) - \frac{4H(\beta)}{G(\beta)} \right). \tag{3.26}$$

Soit alors $\tilde{E}_2(\beta)$:

$$\tilde{E}_2(\beta) = \{ \omega / | \exists k < K(\beta) ; i(k) = 0 \quad \text{et} \quad T_k = t_{k+1} \} . \tag{3.27}$$

Sur $\tilde{E}_2(\beta)$, on a :

$$\int_0^T \sum_{j=1}^m 1_{]H(\beta),\infty[}(| V_j(s, x, f) |) ds \geq \frac{\lambda T}{K(\beta)}. \tag{3.28}$$

Posons $\tilde{E}(\beta) = \tilde{E}_1(\beta) \cup \tilde{E}_2(\beta)$.

Par la même méthode que pour obtenir (3.12) et (3.14), on a, pour $\beta > \beta_0$ indépendant de x et f

$$E [\exp [U_T(x, f, \beta)]] \leq \exp [- CF(\beta)(\beta H^2(\beta))^{\alpha-1}] + P\{ \tilde{E}(\beta)^c \}$$

si

$$F(\beta)=\left(\frac{\lambda T}{K(\beta)}\right)\wedge\left(L(\beta)-\frac{4H(\beta)}{G(\beta)}\right).$$

On peut donc trouver $\alpha'>0$ tel que :

(3.29) $E\,[\exp\,[U_T(x,f,\beta)]\leq\exp\,[-\,CF(\beta)\beta^{\alpha'}]+P\{\,\tilde{E}(\beta)^c\,\}$

dès que $\beta^{-\frac{1}{3}}=o(H(\beta))$.

Troisième étape : Majorons uniformément $P\{\,\tilde{E}(\beta)^c\,\}$. *La fonction* ψ *est mesurable ;* on peut donc utiliser la propriété de Markov pour estimer $P\{\,\tilde{E}(\beta)^c\,\}$, et remarquer que :

$$P\{\,E(\beta)^c\,\}\leq(J_1+J_2+J_3+J_4)^{K(\beta)},\tag{3.30}$$

où

$$J_1=\sup_{x\in\mathbb{R}^n;\,f\in S(\tilde{m},\tilde{M});\,i(x,f)=0}P\left\{T_0<\frac{T}{K(\beta)}\right\}$$

$$J_2=\sup_{x\in\mathbb{R}^n;\,f\in S(\tilde{m},\tilde{M});\,i(x,f)>0}P\left\{T_0<\frac{T}{2K(\beta)}\right\}$$

$$J_3=\sup_{x\in\mathbb{R}^n;\,f\in S(\tilde{m},\tilde{M});\,i(x,f)>0}P\left\{T_0>\frac{T}{2K(\beta)}\ \text{ et }\ \overline{T}_0>\frac{T}{4K(\beta)}\right\}\tag{3.31}$$

$$J_4=\sup_{x\in\mathbb{R}^n;\,f\in S(\tilde{m},\tilde{M});\,i(x,f)>0}P\left\{T_0>\frac{T}{2K(\beta)}\ \text{ et }\ \overline{T}_0<\frac{T}{4K(\beta)}\ \text{ et }\ \tilde{T}_0-\overline{T}_0<L(\beta)\right\}.$$

On a une majoration analogue à celle du théorème III.3 pour J_1+J_2 :

$$J_1+J_2\leq\frac{C}{K(\beta)}\tag{3.32}$$

Pour les majorations de J_3 et J_4, nous n'écrirons pas l'ensemble sur lequel on prend la borne supérieure de certaines quantités, *afin d'alléger* les formules.

Majoration de J_3 : Avec l'abus de notation signalé ci-dessus, on a :

$$J_3\leq\sup_{(\ldots)}P\left\{W_{j(0)}(t)\text{ ne possède pas de sauts en module }>2G(\beta)\quad\text{sur}\quad\left[0,\frac{T}{4K(\beta)}\right[\ \text{ et }\ T_0>\frac{T}{2K(\beta)}\right\}.$$

Utilisons les martingales exponentielles de [*6*] [*8*] et [*11*], en particulier la martingale de carré intégrable :

$$\exp\left[-\sum_{s\leq t} 1_{]2G(\beta),+\infty[}(|\Delta W_{j(0)}(s,x,f)|)\right] \times \exp\left[\left(1-\frac{1}{e}\right)\int_0^t ds\int_{2G(\beta)}^{\infty} d\tilde{\mu}(s,j(0))(z)\right]$$

où $\tilde{\mu}(t,j(0))$ est le noyau de Lévy du processus $W_{j(0)}(s,x,f)$.

On obtient :

$$(3.34)\quad J_3 \leq \sup_{(\ldots)}\left[E\left[\exp\left[-2\left(1-\frac{1}{e}\right)\int_0^{\frac{T}{4K(\beta)}} ds \int_{2G(\beta)<|r|} d\tilde{\mu}(s,j(0))(z)\right] 1_{\left]\frac{T}{2K(\beta)},\infty\right[}(T_0)\right]\right]^{\frac{1}{2}}$$

Soit $F_j^0(t,\omega,x,f)$ la fonction définie par :

$$z \to \left\langle {}^t\phi_{t-}^{*-1}f, \frac{\partial D(X_{t-}+zf_j)}{\partial x} f_{j(0)}\right\rangle - \left\langle {}^t\phi_{t-}^{*-1}f, \frac{\partial D(X_{t-})}{\partial x} f_{j(0)}\right\rangle$$

$\tilde{\mu}(t,j(0))$ est aussi la somme des transformées des mesures $g_j(r)dr$ par les applications $F_j^0(t,\omega,x,f)$. Lorsque x décrit $\mathbb{R}^n$ et lorsque f décrit $S(\tilde{m},\tilde{M})$ avec $i(x,f)=0$, lorsque ω décrit $\left\{\omega/T_0(\omega) > \frac{T}{4K(\beta)}\right\}$ et t décrit $\left[1, \frac{T}{2K(\beta)}\right]$, on peut appliquer le théorème A.2 du fait de (**).

On obtient alors :

$$(3.35)\qquad \int_{2G(\beta)<|z|} d\tilde{\mu}(s,j(0)(z)) \geq \frac{C}{G(\beta)^{\alpha_1}} \qquad \beta > \beta_1.$$

(3.34) implique alors :

$$(3.36)\qquad J_3 \leq \exp\left[-\frac{C_2}{K(\beta)G(\beta)^{\alpha_1}}\right].$$

Majoration de J_4 : Supposons que $L(\beta) = o(G(\beta)) = o\left(\frac{1}{K(\beta)}\right)$.

Décomposons $W_{j(0)}(t,x,f)$ en $M_t + A_t + B_t$. M_t est une martingale totalement discontinue, dont le processus croissant est uniformément majoré par $C_3 t$. A_t est un processus dérivable à dérivée bornée et :

$$B_t = \sum_{s\leq t} \Delta W_{j(0)}(s,x,f) 1_{]1,\infty[}(|\Delta W_{j(0)}(s,x,f)|).$$

Avec l'abus de notation déjà signalé, on a :

$$J_4 \leq L_1 + L_2 + L_3$$

$$(3.37) \qquad \begin{aligned} L_1 &= \sup_{(\ldots)} P\left\{ \sup_{\bar{T}_0 < t < \bar{T}_0 + L(\beta)} \| M_t - M_{\bar{T}_0} \| > \frac{G(\beta)}{6} \right\} \\ L_2 &= \sup_{(\ldots)} P\left\{ \sup_{\bar{T}_0 < t < \bar{T}_0 + L(\beta)} \| A_t - A_{\bar{T}_0} \| > \frac{G(\beta)}{6} \right\} \\ L_3 &= \sup_{(\ldots)} P\left\{ \sup_{\bar{T}_0 < t < \bar{T}_0 + L(\beta)} \| B_t - B_{T_0} \| > \frac{G(\beta)}{6} \right\} \end{aligned}$$

$L_2 = 0$ car $L(\beta) = o(G(\beta))$ et car A_t est à dérivée bornée.

$L_1 \leq C_5 \dfrac{L(\beta)}{G(\beta)}$ par l'inégalité de Doob, et $L_3 \leq C_6 \dfrac{L(\beta)}{G(\beta)}$ comme pour l'estimation de $P\{\tilde{E}(\beta)^c\}$ dans le théorème III.3.

On a donc :

$$(3.38) \qquad J_4 \leq C_7 \frac{L(\beta)}{G(\beta)}.$$

Conclusion : Il suffit de prendre $K(\beta) \sim \operatorname{Log} \beta$ quand $\beta \to \infty$, $G(\beta) = (\operatorname{Log}(\beta))^{-\frac{2}{\alpha_1}}$, $L(\beta) = \dfrac{G(\beta)}{\operatorname{Log}(\beta)}$ et $H(\beta) = (L(\beta))^2$, pour que (3.26), (3.29), (3.32) et (3.34) nous montrent que :

$$E[\exp U_T(x, f, \beta)] = o\left(\frac{1}{\beta^p}\right) \qquad \text{pour} \quad p > 2.$$

Remarque. — Les théorèmes précédents nous permettent de déterminer la régularité de $\int_0^t f(Y_s)ds$, si f est une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et si Y_s est un PAIS à valeur dans $\mathbb{R}$.

Il suffit d'introduire l'équation stochastique sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$dX_1 = dY_1 \,; \qquad dX_2 = f(X_1)dt.$$

APPENDICE

THÉORÈMES TAUBÉRIENS UNIFORMES

Le théorème suivant est classique ([*1*], p. 207-209).

THÉORÈME A.1. — *Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}^+$, telle que $\mu\{[1, +\infty[\} < \infty$. Supposons qu'il existe $\alpha \in]0, 2[$ tel que :*

$$(a.1) \qquad \underline{\lim}_{z \to 0^+} \frac{\mu\{]z, 1]\}}{z^{-\alpha}} > 0 \qquad (\text{resp.} = +\infty)$$

alors

$$(a.2) \qquad \overline{\lim}_{\beta \to +\infty} \frac{\int_0^\infty (e^{-\beta z} - 1) d\mu(z)}{\beta^\alpha} < 0 \qquad (\text{resp.} = -\infty)$$

Si dans (a.1) *on remplace la fonction $z \to z^{-\alpha}$ par $z \to (-\operatorname{Log} z)$, on a :*

$$(a.2)' \qquad \overline{\lim}_{\beta \to +\infty} \frac{\int_0^\infty (e^{-\beta z} - 1) d\mu(z)}{(\operatorname{Log} \beta)} < 0 \qquad (\text{resp.} = -\infty)$$

Mais nous avons utilisé les résultats « uniformes » suivants :

Soit g une fonction de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$(a.3) \qquad \int (z^2 \wedge 1) g(z) dz < \infty .$$

Soit F un ensemble d'applications f, C^∞, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ nulles en zéro, telles que :

$$(a.4) \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \sup_{f \in F, z \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(z)| < \infty$$

$$(a.5)(K) \qquad \exists K \in \mathbb{N}^*, \quad \exists \lambda > 0, \quad \operatorname{Inf}_{f \in F} (\sup_{k \leq K} |f^{(k)}(0)|) > \lambda$$

Définissons τ_f par :

$$(a.6) \qquad \tau_f(\beta) = \int (\exp[-\beta |f(z)|] - 1) g(z) dz .$$

On a alors, si $\mu(dz) = g(z)dz$.

THÉORÈME A.2. — *Supposons que pour un $\alpha \in [0, 2[$, on ait :*

$$(a.7) \qquad \underline{\lim}_{r \to 0} |z|^{1+\alpha} g(z) > 0 \qquad (\text{resp.} = +\infty) .$$

Si $\alpha > 0$, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que :

$$(a.8) \qquad \overline{\lim}_{\beta \to \infty} \left(\sup_{f \in F} \frac{\tau_f(\beta)}{(\beta)^{\alpha_1}} \right) < 0 \qquad (\text{resp.} = -\infty) .$$

Si $\alpha = 0$, *on a :*

(a.9) $$\overline{\lim_{\beta\to\infty}}\left(\sup_{f\in F}\frac{\tau_f(\beta)}{\operatorname{Log}(\beta)}\right) < 0 \qquad (\text{resp.} = -\infty).$$

Preuve. — Nous ne démontrons que (a.9). (a.8) se démontrerait de façon analogue. Posons :

$$G_f(z) = \mu\{ z \leq |f| \}.$$

Nous avons, en suivant la méthode de [*1*], p. 209 :

$$\tau_f(\beta) = -\beta\int_0^\infty e^{-\beta z}G_f(z)dz = -\int_0^\infty e^{-z}G_f\left(\frac{z}{\beta}\right)dz.$$

Par le théorème de Lebesgue, on obtient alors (a.9) si :

(a.10) $$\underline{\lim}_{z\to 0^+}\inf_{f\in F}\frac{G_f(z)}{-\operatorname{Log} z} > 0 \qquad (\text{resp.} = +\infty).$$

Il suffit alors de montrer qu'il existe $l > 1$, indépendant de $f \in F$ tel que :

(a.11) $$\underline{\lim}_{z\to 0^+}\left(\operatorname{Inf}_{f\in F}\frac{\mu\{ z^l \leq |f| \leq z\}}{-\operatorname{Log}(z)}\right) > 0 \qquad (\text{resp.} = +\infty).$$

(a.11) résulte de P(K) : *pour toute famille* F *qui vérifie les hypothèses du théorème* A.2, *il existe un entier* N[K] > K *qui ne dépend que de* K *tel que :*

(a.12)(K) $$\underline{\lim}_{z\to 0^+}\left(\operatorname{Inf}_{f\in F}\frac{\mu\{ z^{N[K]}+C|z'|^q<|f(z')|\,;|z'|<z\}}{-\operatorname{Log}(z)}\right) > 0 \qquad (\text{resp.} = +\infty)$$

pour tout $C > 0$ *et* $q > K$, *dès que* (a.5)(K) *est vérifiée.*

La présence de la constante C dans (a.12) est nécessaire dans la démonstration de P(K) par récurrence (on ne peut pas annuler C dans l'hypothèse de récurrence).

N[*1*] = 2 convient, par utilisation du théorème des accroissements finis et par le fait que $f(0) = 0$.

Supposons que P(K − 1) *est vraie : alors* P(K) *est encore vraie.*

Ceci se démontre en trois étapes. A cette fin, posons, si $f \in F$:

(a.13) $$\|f\| = \sup_{k\leq K-1}|f^{(k)}(0)|$$

Première étape : On élimine tout de suite le cas où $\|f\| = 0$, car si $f \in F$ et si $\|f\| = 0$, il existe r_1, C_1 indépendants de f tels que $|f(r')| \leq C_1|r'|^K$ dès que $|r'| < r_1$.

Soit alors un entier $\tilde{K}$, une suite f_n d'éléments de F, une suite z_n de réels positifs tendant vers zéro, tels que :

(a.14) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu\{ z_n^{\tilde{K}} + C|z'|^q \leq |f_n(z')|, |z'| < z_n\}}{-\operatorname{Log}(z_n)} = 0.$$

Si $\tilde{K} \geq N[K-1]$, $\|f_n\| \to 0$ par application de P(K − 1) à la famille de fonctions constituée par les f_n.

Deuxième étape : Si $\tilde{K} \geq N[K-1]$, *si* $\tilde{K} > 2K$ *et si* $\|f_n\| = o(z_n^{2K-1})$, *alors* (a.14) *est impossible.*

$\|f_n\| \to 0$ et $\sup_{k\leq K}|f^{(k)}(0)| > \lambda$. Appliquons la formule de Taylor à l'ordre K + 1. Vu (a.4), il existe C_1, $\bar{r}$ tels que :

(a.15) $$|f_n(z')| \geq C_1 |z'|^K - K \|f_n\| |z'| \geq C_1 |z'|^K - K \|f_n\| z_n$$

dès que $|z'| \leq z_n \wedge \bar{z}$.

Si (a.14) était réalisée, (a.15) impliquerait l'existence de C_2, C_3 tels que :

(a.16) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu\{(C_2 z_n^{\tilde{K}} + C_3 \|f_n\| z_n)^{1/K} \leq |z'| \leq z_n\}}{-\operatorname{Log}(z_n)} = 0 .$$

Si $\tilde{K} > 2K$, si $\|f_n\| = o(z_n^{2K-1})$, on a :

(a.17) $$(C_2 z_n^{\tilde{K}} + C \|f_n\| z_n)^{1/K} = o(z_n^2)$$

ce qui rendrait (a.16) impossible du fait de (a.7).

Troisième étape : Supposons que $\tilde{K} \geq 4(K-1)N[K-1]+2K$, *si* $\overline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{\|f_n\|}{z_n^{2K-1}} \neq 0$, (a.14) *est impossible.*

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que :

(a.18) $$\|f_n\| > C_1 z_n^{2K-1} \qquad C_1 > 0 .$$

Appliquons la formule de Taylor à l'ordre K + 1 ; si $J_n(z') = \sum_{l=0}^{K} \frac{f_n^{(l)}(0)}{l!} z'^l$, on a pour $|z'| \leq z_1$:

(a.19) $$|f_n(z')| \geq |J_n(z')| - C_2 |z'|^K .$$

(a.14) impliquerait alors :

(a.20) $$\lim_{z\to\infty} \frac{\mu\left\{ |\tilde{f}_n(z')| \geq \dfrac{z_n^{\tilde{K}}}{\|f_n\|} + C_3 \dfrac{|z'|^K}{\|f_n\|} ; |z'| \leq z_n \right\}}{-\operatorname{Log}(z_n)} = 0$$

où $$\tilde{f}_n(z') = \frac{J_n(z')}{\|f_n\|} \quad \text{sur} \quad [-1, +1] .$$

Posons $\tilde{z}_n = z_n^{4(K-1)}$. ($a$.18) impliquerait alors que :

(a.21) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\{|\tilde{f}_n(z')| \geq \tilde{z}_n^{N[K-1]} + C_4 |z'|^{K-1/2} ; |z'| \leq \tilde{z}_n\}}{-\operatorname{Log}(z_n)} = 0 .$$

Il ne reste plus qu'à appliquer P(K − 1) à la famille des $\tilde{f}_n$, après les avoir convenablement prolongées sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : On peut prendre $N[K] = 4(K-1)N[K-1] + 2K$.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] J. M. Bismut, Calcul des variations stochastiques et processus de sauts. *Z. Wahrsch.*, t. **63**, 1983, p. 147-235.

[*2*] J. M. Bismut, *Jump processes and boundary processes*. A paraître in the proceedings of Kyoto conference in probability, 1982.

[*3*] J. M. Bismut, *The calculus of boundary processes*. Prépublication de l'Université Paris XI. Orsay, 1982.

[4] J. M. BISMUT, Martingales, the Malliavin calculus and hypoellipticity under general Hörmander's conditions. *Z. Wahrsch.*, t. **56**, 1981, p. 469-505.
[5] C. DELLACHERIE, P. A. MEYER, *Probabilités et potentiels*. Ch. I. IV., Paris, Hermann, 1975, Ch. V. VIII., Paris, Hermann, 1980.
[6] N. IKEDA, S. WATANABE, *Stochastic differential equations and diffusions processes*. Amsterdam, North-Holland, 1981.
[7] J. JACOD, Calcul stochastique et problèmes de martingales. *Lecture Notes in Math.*, n° 714, Berlin, Springer-Verlag, 1979.
[8] S. KUSUOKA, D. W. STROOCK, *Applications of the Malliavin calculus*, Part I. Proc., Int. Conf. Katata, Tokyo Kinokuyina.
[9] J. P. LEPELTIER, M. MARCHAL, Problèmes de martingales et équations différentielles stochastiques associées à un opérateur intégrodifférentiel. *Ann. I. H. P. (B)*, t. **12**, 1976, p. 43-103.
[10] P. MALLIAVIN, *C^k hypoellipticity with degeneracy. Stochastic analysis*. Ed. A. Friedmann and M. Pinsky. New York and London. Academic Press, 1978, p. 199-214.
[11] P. MALLIAVIN, *Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators*. Proc. Inter. Conf. on stochastic differential equations of Kyoto 1976. Tokyo Kinokuyina and New York Wiley, 1978, p. 195-263.
[12] D. W. STROOCK, Diffusion processes associated with Lévy generators. *Z. Wahrsch.*, t. **32**, 1975, p. 209-244.
[13] D. W. STROOCK, The Malliavin calculus and its applications. In Stochastic integrals, Ed. D. Williams. *Lecture Notes in Math.*, 851, Berlin, Springer-Verlag, 1981, p. 394-432.
[14] D. W. STROOCK, Some applications of stochastic calculus to partial differential equation, In « École d'Été de probabilités de Saint-Flour XI ». Ed. P. L. Hennequin. *Lecture Notes in Math.*, 976. Berlin, Springer-Verlag, 1981, p. 267-382.
[15] D. W. STROOCK, S. R. S. VARADHAN, *Multidimensional diffusion processes*. Grundlehren Math. Wissenschaften Band, 233. Berlin, Springer-Verlag, 1979.

(Manuscrit reçu le 15 mai 1984)
(Manuscrit révisé le 11 janvier 1985)