ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

M. YOR

À propos de l'inverse du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n (n \geqq 3)$

Annales de l'I. H. P., section B, tome 21, nº 1 (1985), p. 27-38

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1985__21_1_27_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 21, n° 1, 1984, p. 27-38. *Probabilités et Statistiques*

A propos de l'inverse du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geqq 3$)

par

M. YOR
Laboratoire de Probabilités, 4, Place Jussieu,
F. 75230 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — On étudie la relation existant entre l'inverse du mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geqq 3$), issu de $x \neq 0$, et le pont Brownien. On étend ensuite cette étude en remplaçant l'inversion $\Phi_2(x) = x/|x|^2$ par $\Phi_p(x) = x/|x|^p$ ($p > 1$; $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$).

ABSTRACT. — A relationship is established between the inverse of Brownian motion in $\mathbb{R}^n$ ($n \geqq 3$), starting from $x \neq 0$, and the Brownian bridge. The study is then extended to the case when the inversion map $\Phi_2(x) = x/|x|^2$ is replaced by $\Phi_p(x) = x/|x|^p$ ($p > 1$; $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$).

1) INTRODUCTION

Dans tout ce travail, $(B_t, 0 \leqq t < \infty)$ désigne un mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geqq 3$), issu de $a \neq 0$.

Soit $S_n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}^n$, muni de sa structure différentielle ordinaire. L. Schwartz [*10*] montre que $(B_t, t < \infty)$, considéré comme prenant ses valeurs dans S_n, est une semimartingale jusqu'en $t = \infty$; ainsi : « dans S_n, $n \geqq 3$, B ressemble à un pont Brownien indexé par $t \in [0, \infty]$, issu de a en $t = 0$, et se terminant en $\infty(\in S_n)$ au temps $t = \infty$ ».

L'objet principal de ce travail, résumé dans le théorème ci-dessous, est de préciser cette phrase.

On se ramène à $\mathbb{R}^n$ en considérant l'inverse du mouvement Brownien, soit $(\Phi_2(B_t), 0 \leqq t < \infty)$, avec $\Phi_2(x) = x/|x|^2$. On a le

THÉORÈME. — *Notons* $A_t = \int_0^t ds/|B_s|^4$, $T_0 = A_\infty\,(<\infty, \text{Pp.s.})$, *et* $\tau_t = \inf\{u : A_u > t\}\,(t < T_0)$. *Alors, la loi du processus* $\{Y_t = \Phi_2(B_{\tau_t})$, *si* $t < T_0$; $= 0$, si $t = T_0\}$ *est caractérisée par* :

i) $P(T_0 \in dt) = \left(\frac{|b|^2}{2}\right)^\nu [\Gamma(\nu) t^{\nu+1}]^{-1} \exp\left(-\frac{|b|^2}{2t}\right) dt$, *où* $b = \Phi_2(a)$, *et* $\nu = \frac{n}{2} - 1$.

ii) Conditionnellement à $T_0 = u$, *le processus* $(Y_t, t \leqq u)$ *est un pont Brownien pendant l'intervalle de temps* $[0, u]$, *issu de* $b = \Phi_2(a)$ *en* $t = 0$, *et valant* 0 *en* $t = u$.

D'autres propriétés remarquables du processus $(\Phi_2(B_t), t \geqq 0)$ sont rassemblées, avec ce théorème, dans le paragraphe 3.

On donne, au paragraphe 4, deux démonstrations du théorème, la première s'appuyant sur les h-processus de Doob, et la seconde sur le conditionnement par le dernier temps de passage en un point d'un processus de Bessel.

On étend, au paragraphe 5, le théorème dans deux directions, en considérant les processus $\Phi_p(X.)$, où $\Phi_p(x) = x/|x|^p\ (p \neq 1)$, et (X_t) est solution de l'équation stochastique :

$$dX_t = dB_t + \lambda \frac{X_t dt}{|X_t|^2} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \tag{1.a}$$

Soulignons enfin que, au cours de cet article, certains champs de matrices introduits par N. Krylov [*8*] jouent un rôle important. La définition de ces champs est donnée au paragraphe 2 ; ils permettent aussi d'obtenir très simplement la décomposition en skew-product des processus vérifiant (1.*a*), et du mouvement Brownien en particulier, sans passer par la factorisation du Laplacien par l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère (voir Itô-Mc Kean [*4*], p. 270, pour cette dernière approche, et D. Stroock [*12*] pour la première).

2) REMARQUES SUR CERTAINS CHAMPS DE MATRICES

$\mathcal{M}_{n\times n}$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients réels. Pour tout $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$, N. Krylov ([*8*], p. 21) introduit le champ de matrices :

$$\sigma^{\mu,\nu} : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathcal{M}_{n\times n}$$

caractérisé par :

$$(2.a) \qquad \sigma^{\mu,\nu}(x).x = \mu x\,; \qquad \sigma^{\mu,\nu}(x).y = \nu y, \qquad \text{si} \qquad (x, y) = 0$$

Les coefficients de $\sigma^{\mu,\nu}(x)$ sont donc :

$$(2.b) \qquad \sigma_{i,j}^{\mu,\nu}(x) = \nu\delta_{i,j} + (\mu - \nu)\frac{x_i x_j}{|x|^2}$$

La définition $(2.a)$ entraîne immédiatement :

$$(2.c) \qquad \sigma^{\mu,\nu}(x)\sigma^{\mu',\nu'}(x) = \sigma^{\mu\mu',\nu\nu'}(x),$$

pour tous couples (μ, ν) et (μ', ν').

En conséquence, si l'on pose :

$$(2.d) \qquad \sigma^{(p)}(x) = \sigma^{1,\frac{1}{1-p}}(x) \qquad (p \neq 1),$$

on a :

$$(2.e) \qquad (\sigma^{(p)}(x))^{-1} = \sigma^{(q)}(x), \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Notons encore la relation :

$$(2.f) \qquad \operatorname{tr}(\sigma^{\mu,\nu}(x)) = \mu + (n-1)\nu.$$

Introduisons maintenant les fonctions :

$$\Phi_p(x) = x/|x|^p \quad (x \neq 0), \qquad \text{et} \qquad h_r(x) = |x|^r \quad (x \neq 0),$$

et remarquons que la matrice de Jacobi associée à Φ_p, et la matrice Hessienne associée à h_r s'expriment en fonction de certaines matrices $\sigma^{\mu,\nu}$. De façon précise :

$$(2.g) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\Phi_p)_i(x)\right) = \frac{1}{|x|^p}\sigma^{1-p,1}(x)\,; \qquad \left(\frac{\partial^2 h_r(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right) = |x|^{r-2}\sigma^{r(r-1),r}(x).$$

3) ÉNONCÉS DES PRINCIPAUX RÉSULTATS

Dans tout ce paragraphe, (B_t) désigne un mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $n \geqq 3$, issu de $a \neq 0$.

On a rassemblé ici quelques propriétés remarquables de l'inverse du mouvement Brownien, soit $\Phi_2(B_t) = B_t / |B_t|^2$ $(t \geqq 0)$.

Pour simplifier l'écriture, on note simplement Φ pour Φ_2.

L'inversion étant bijective sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on obtient facilement la

PROPOSITION A. — *L'inverse du mouvement Brownien* $(\Phi(B_t), t \geqq 0)$ *est une diffusion à valeurs dans* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, *qui admet pour semi-groupe* :

$$Q_t(x\,; dy) = \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t\,|x|^2\,|y|^2}\right)\frac{dy}{(2\pi t)^{n/2} y^{2n}}.$$

D'autre part, $(\Phi(B_t), t \geqq 0)$ est une semimartingale (dans la filtration Brownienne), qui a pour décomposition canonique :

$$(3.a) \qquad \Phi(B_t) = \Phi(B_0) - \int_0^t \frac{1}{|B_s|^2}\sigma^{(2)}(B_s).dB_s - (n-2)\int_0^t \frac{ds}{|B_s|^2}\Phi(B_s)$$

$$(3.a') \qquad = \Phi(B_0) - \int_0^t \frac{1}{|B_s|^2}\,d\hat{B}_s - (n-2)\int_0^t \frac{ds}{|B_s|^2}\Phi(B_s)$$

où $\hat{B}_t \overset{\text{def}}{=} \int_0^t \sigma^{(2)}(B_s)\,.\,dB_s$ est un nouveau mouvement Brownien (d'après $(2.e)$, $\sigma^{(2)}(x)$ est sa propre inverse). La formule $(3.a)$ résulte de $(2.g)$, et de ce que :

$$\Delta\Phi(x) = -2(n-2)\frac{\Phi(x)}{|x|^2}.$$

On déduit de $(3.a')$ que, si l'on fait subir au processus $(\Phi(B_t), t \geqq 0)$ le changement de temps $(\tau_h, h < H_\infty)$, inverse de $H_t = \int_0^t \frac{ds}{|B_s|^4}$, le processus $(Y_t = \Phi(B_{\tau_t}), t < H_\infty\,;\ = 0,\ \text{si}\ t = H_\infty)$ satisfait :

$$(3.b) \qquad Y_t = Y_0 + \beta_t - (n-2)\int_0^t ds\,\frac{Y_s}{|Y_s|^2} \qquad (t < H_\infty)$$

où (β_t) désigne un nouveau mouvement Brownien (arrêté en H_∞), et $H_\infty = \inf\{t : Y_t = 0\}$. Par souci de clarté, on écrit désormais T_0 pour H_∞. Les deux énoncés suivants découlent, pour l'essentiel, de l'identité $(3.b)$.

PROPOSITION B. — *Le processus* $(Y_t, t < T_0)$ *est une diffusion à valeurs* *dans* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, *dont le générateur infinitésimal, restreint aux fonctions de* $C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, *coïncide avec l'opérateur* : $\frac{1}{2}\Delta f - (n-2)\left(\frac{y}{|y|^2}; \nabla f\right)$. *C'est le h-processus de Doob associé au mouvement Brownien dans* $\mathbb{R}^n$, *avec* $h(x) \equiv h_{2-n}(x) = 1/|x|^{n-2}$.

THÉORÈME C. — *La loi de* $(Y_t, t \leqq T_0)$ *peut être caractérisée comme suit* :

i) $P(T_0 \in dt) = [\Gamma(\nu)(2|a|^2)^\nu t^{\nu+1}]^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2t|a|^2}\right)dt$, *où* $\nu = \frac{n}{2} - 1$.

ii) Conditionnellement à $T_0 = u$, *le processus* $(Y_t, t \leqq u)$ *est un pont Brownien pendant l'intervalle de temps* $[0, u]$, *issu de* $a/|a|^2$ *en* $t = 0$, *et valant* 0 *en* $t = u$.

REMARQUE 1. — En dimension $n = 2$, on a $H_\infty = \infty$ p.s., et le processus $(Y_t, t \geqq 0)$ est un mouvement Brownien. Plus généralement, en [*1*], les auteurs étudient les fonctions $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ telles que $(f(B_t), t \geqq 0)$ soit, à un changement de temps près, un mouvement Brownien.

4) DÉMONSTRATIONS DES RÉSULTATS PRINCIPAUX

Les parties A, B, C de ce paragraphe correspondent aux énoncés A, B, C. On donne deux démonstrations (C.1) et (C.2) du théorème C.

A) L'inversion étant bijective sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, le semi-groupe $Q_t(x; dy)$ est donné par :

$$Q_t(x; dy) = p_t(\Phi(x), \Phi(y))\gamma(y)dy,$$

avec $p_t(u, v)$ la densité Brownienne, et $\gamma(y)$ le Jacobien de Φ.

On a donc : $Q_t(x, dy) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2t}\frac{|x-y|^2}{|x|^2|y|^2}\right)\gamma(y)dy$.

On montre ensuite aisément la formule : $\gamma(y) = 1/|y|^{2n}$, en utilisant la propriété d'involution de Φ, soit : $\Phi(\Phi(x)) = x$.

B) La première partie de l'énoncé découle immédiatement de la décomposition (3.*b*). Pour la seconde partie, il suffit de remarquer que :

si $$Lf = \frac{1}{2}\Delta f - (n-2)\left(\frac{y}{|y|^2}; \nabla f\right) \qquad (f \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$$

alors : $$Lf(x) = \frac{1}{2h(x)}\Delta(fh)(x).$$

C.1) [Esquissée] Les deux parties du théorème découlent aisément de la proposition B, et de la relation d'absolue continuité entre un processus de Markov (X_t), et son h-processus :

$$E_x^h[F_t\,;\, t < T_0] = \frac{1}{h(x)}\, E_x[F_t h(X_t)]\,,$$

relation satisfaite pour toute v.a. $F_t \geqq 0$, mesurable par rapport à la tribu du passé de X jusqu'en t, convenablement complétée.

C.2) [Détaillée] 1) Remarquons tout d'abord, par une nouvelle application de la formule d'Itô à partir de $(3.b)$ que le processus $R_t = |\,Y_t\,|$ $(t \leqq T_0)$ satisfait :

$$(4.a) \qquad R_t = R_0 + \gamma_t + \frac{(4-n)-1}{2}\int_0^t \frac{ds}{R_s},$$

où $(\gamma_t,\, t \leqq T_0)$ désigne un mouvement Brownien réel (arrêté en T_0) défini par:

$$(4.b) \qquad \gamma_t = \int_0^t \frac{1}{|\,Y_s\,|}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_s^i d\beta_s^i\right) \qquad (t \leqq T_0)$$

Le processus $(R_t,\, t \leqq T_0)$ est donc, d'après $(4.a)$, un processus de Bessel de « dimension » $(4 - n)$, issu de R_0, et considéré jusqu'à son premier temps d'atteinte de 0.

2) Rappelons maintenant l'application aux processus de Bessel (cf. : Getoor-Sharpe [*3*]) d'un résultat général de retournement du temps obtenu par M. Sharpe [*11*] :

si P_r^ν désigne la loi du processus de Bessel d'indice ν (correspondant à la dimension $d_\nu = 2(\nu + 1)$) issu de r, on a, pour $\nu > 0$ et $r > 0$:

$$(4.c) \qquad [(R_t,\, t \leqq T_0)\,;\, P_r^{-\nu}] \overset{(d)}{=} [(R_{(L_r - t)},\, t \leqq L_r)\,;\, P_0^\nu]$$

où $T_0 = \inf\{\, t : R_t = 0 \,\}$, et $L_r = \sup\{\, t : R_t = r \,\}$.

En particulier, on a :

$$(4.d) \qquad (T_0\,;\, P_r^{-\nu}) \overset{(d)}{=} (L_r,\, P_0^\nu)\,.$$

D'autre part, on a, d'après Getoor [*2*] :

$$(4.e) \qquad P_0^\nu(L_r \in dt) = \left(\frac{r^2}{2}\right)^{\nu} [\Gamma(\nu) t^{\nu+1}]^{-1} \exp\left(-\frac{r^2}{2t}\right) dt\,.$$

L'assertion (i) du théorème découle alors de $(4.d)$ et $(4.e)$, car, si ν est l'indice associé à la dimension n, la dimension $d_\nu^- = 2((-\nu) + 1)$ est précisément $(4 - n)$, c'est-à-dire la dimension du processus de Bessel considéré en $(4.a)$.

3) Notre seconde démonstration de la partie (*ii*) du théorème repose sur la remarque suivante :

soit $(B_t, t \geqq 0)$ mouvement Brownien issu de $b = a/|a|^2$; (Y_t) a toujours la même signification. Nous montrerons ci-dessous que ces deux processus peuvent être décomposés en skew-product:

$$X_t = |X_t|\,\theta\left(\int_0^t \frac{ds}{|X_s|^2}\right), \tag{4.f}$$

où $\theta(.)$ désigne un mouvement Brownien standard sur la sphère S_n, indépendant de $|X|$. Ainsi, pour montrer que :

$$(Y_u, u \leqq T_0), \quad \textit{conditionné par } T_0 \equiv \inf\{u : Y_u = 0\} = t, \tag{4.g}$$

a même loi que $(B_u, u \leqq t)$, *conditionné par* $B_t = 0$, il suffit de montrer cette identité en loi pour les parties radiales.

4) On a déjà remarqué que ces parties radiales sont deux processus de Bessel, ayant pour indices respectifs $-\nu$, et $\nu = \frac{n}{2} - 1$. On a alors, à l'aide de $(4.c)$:

pour tout $m \in \mathbb{N}$, pour toute fonction borélienne $f : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}_+$, et tous réels $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < t$:

$$\begin{aligned} E_r^{-\nu}[f(R_{t_1}, \ldots, R_{t_m}) \mid T_0 = t] &= E_0^\nu[f(R_{t-t_1}, \ldots, R_{t-t_m}) \mid L_r = t] \\ &= E_0^\nu[f(R_{t-t_1}, \ldots, R_{t-t_m}) \mid R_t = r] && (4.h) \\ &= E_r^\nu[f(R_{t_1}, \ldots, R_{t_m}) \mid R_t = 0] && (4.i) \end{aligned}$$

ce qui entraîne $(4.g)$ à l'aide des arguments ci-dessus.

$(4.h)$ découle aisément de ce que la projection duale prévisible de $(1_{(L_r \leqq t)}\,;\, t \geqq 0)$ est proportionnelle au temps local en r du processus (R_t) [cf. : Pitman-Yor [*9*], section 6, et Jeulin-Yor [*6*], proposition (3.13)].

$(4.i)$ découle des propriétés de symétrie du semi-groupe du processus de Bessel (R_t).

5) Il reste à démontrer la décomposition en skew-product $(4.f)$. Nous montrons en fait qu'une telle décomposition a lieu pour tout processus (X_t) défini comme solution de :

$$X_t = X_0 + B_t + \lambda \int_0^t ds \frac{X_s}{|X_s|^2}\,; \qquad X_0 = b \neq 0$$

jusqu'en son premier temps d'atteinte de 0((B_t) désigne ici un mouvement Brownien issu de 0).

Remarquons que ($|X_t|$) est un processus de Bessel de dimension $(1+2\lambda)$. Désormais, pour simplifier la démonstration, on suppose $\lambda > \frac{1}{2}$, et donc (X_t) est défini sur tout $\mathbb{R}_+$ (dans le cas général, il faudrait, au cours de la démonstration, compléter les mouvements Browniens arrêtés en T_0 en se plaçant sur des espaces plus gros...).

Par application de la formule d'Itô, d'une part à ($|X_t|$), et d'autre part à $\varphi_t \equiv X_t/|X_t|$. on démontre :

a) que ($|X_t|$) est adapté à la filtration du mouvement Brownien

$$\gamma_t \equiv \int_0^t (\varphi_s, dB_s)$$

b) que (φ_t) satisfait l'équation stochastique :

$$\varphi_t \equiv \varphi_0 + \int_0^t \frac{1}{|X_s|} \sigma^{0,1}(\varphi_s).dB_s - \frac{n-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{|X_s|^2} \varphi_s .$$

On peut remplacer ici le mouvement Brownien (B_t) par un nouveau *mouvement Brownien* :

$$\tilde{B}_t = \int_0^t (\sigma^{0,1}(\varphi_s).dB_s + \sigma^{1,0}(\varphi_s).du_s),$$

où (u_t) est un mouvement Brownien indépendant de (B_t).

Alors, les mouvements Browniens (γ_t) et ($\tilde{B}_t$) sont indépendants, et d'après le théorème de Knight sur les martingales orthogonales [*7*], (γ_t) est donc indépendant du mouvement Brownien ($\hat{B}_t$) obtenu par changement de temps de $\left(\int_0^t \frac{1}{|X_s|} d\tilde{B}_s\right)$ avec l'inverse de $\int_0^t \frac{ds}{|X_s|^2}$. Enfin, le processus ($\theta_t$) obtenu à partir de ($\varphi_t$) par le même changement de temps satisfait :

$$(4.j) \qquad \theta_t = \theta_0 + \int_0^t \sigma^{0,1}(\theta_s).d\hat{B}_s - \frac{n-1}{2} \int_0^t ds\, \theta_s ,$$

et est donc mesurable par rapport à $\hat{B}$, ce qui termine la démonstration de (4.*f*).

L'équation (4.*j*) définit bien le mouvement Brownien standard sur la sphère ; cf. D. Stroock [*12*].

REMARQUE 2. — On peut encore donner une troisième démonstration de la partie (*ii*) du théorème en grossissant la filtration naturelle du processus (Y_t) défini en (3.*b*) avec la variable T_0 (voir Jeulin [5]).

On montre alors qu'il existe un mouvement Brownien n-dimensionnel $(\tilde{\beta}_t)$, indépendant de T_0, tel que :

$$Y_t = Y_0 + \tilde{\beta}_t - \int_0^t ds \frac{Y_s}{T_0 - s} \qquad (t < T_0)$$

Conditionnellement à $T_0 = u$, $(Y_t, t \leqq u)$ satisfait donc l'équation stochastique du pont Brownien pendant l'intervalle de temps $[0, u]$, issu de $\Phi(a)$ en $t = 0$, et valant 0 en $t = u$: l'assertion (*ii*) est démontrée.

5) GÉNÉRALISATIONS

(5.1) On étend les résultats du paragraphe 3 dans deux directions, en remplaçant d'une part le mouvement Brownien (B_t) par la solution (X_t) de l'équation

$$(5.a) \quad X_t = X_0 + B_t + \lambda \int_0^t ds X_s / |X_s|^2 \, ; \qquad X_0 = b \neq 0, \quad B_0 = 0,$$

et la fonction $\Phi_2(x) \equiv x/|x|^2$ par $\Phi_p(x) \equiv x/|x|^p$ $(p \neq 1)$.

A nouveau, pour simplifier l'écriture, on note quelquefois Φ pour Φ_p. On a, à l'aide de la formule d'Itô :

$$\Phi(X_t) = \Phi(X_0) + \int_0^t \frac{1}{|X_s|^p} \sigma^{1-p,1}(X_s) \, . \, dB_s + \frac{p(p-n)+2\lambda(1-p)}{2} \int_0^t \frac{ds}{|X_s|^2} \Phi(X_s)$$

D'autre part, $\sigma^{1-p,1}(x) = (1-p)\sigma^{(p)}(x)$, par définition de $\sigma^{(p)}$ (cf. : (2.*d*)). Posons $H_t^{(p)} = (p-1)^2 \int_0^t \frac{ds}{|X_s|^{2p}}$, et notons $(\tau_h^{(p)}, h < H_\infty^{(p)})$ l'inverse de $H^{(p)}$. On note (β_t) le nouveau mouvement Brownien obtenu en transformant le processus $(1-p) \int_0^t \frac{dB_s}{|X_s|^p}$ au moyen du changement de temps $(\tau_t^{(p)})$. On obtient alors, en posant : $Y_t = \Phi(B_{\tau_t^{(p)}}) (t < H_\infty^{(p)})$:

$$(5.b) \qquad Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma^{(p)}(Y_s) \, . \, d\beta_s + k \int_0^t ds \frac{Y_s}{|Y_s|^2},$$

avec

$$(5.c) \qquad k = \frac{p(p-n) + 2\lambda(1-p)}{2(p-1)^2}.$$

Pour tout $p \neq 1$, et $k \in \mathbb{R}$, on désigne désormais par $\mathrm{MB}_n(p, k)$ le processus de diffusion défini comme solution de l'équation (5.b), jusqu'en T_0, son premier temps d'atteinte de 0.

D'après la formule d'Itô, $(|Y_t|, t \leqq T_0)$ est un processus de Bessel de dimension

$$(5.d) \qquad d_{p,k} = \frac{n-1}{(p-1)^2} + 2k + 1$$

$\left(\text{Il est intéressant, pour la suite, d'introduire également l'indice } \nu_k = \frac{d_{p,k}}{2} - 1\right)$.

En particulier, si $d_{p,k} \geqq 2$, ou bien : $\nu_k \geqq 0$, (Y_t) n'atteint jamais 0, et l'équation (5.b) admet donc une unique solution définie pour tout $t \geqq 0$. p étant fixé, posons :

$$(5.e) \qquad \tilde{k} = 1 - k - \frac{(n-1)}{(1-p)^2}.$$

C'est l'unique réel $\tilde{k}$ tel que : $\nu_{\tilde{k}} = -\nu_k$.

On a : $d_{p,\tilde{k}} \geqq 2$ si, et seulement si : $k \leqq \frac{1}{2}\left[1 - \frac{(n-1)}{(p-1)^2}\right]$.

On peut maintenant énoncer les extensions suivantes de la proposition B et du théorème C, *sous les conditions* : $p \neq 1$, et $k < \frac{1}{2}\left[1 - \frac{n-1}{(p-1)^2}\right]$.

PROPOSITION $\mathrm{B}_{p,k}$. — *Le processus* $\mathrm{MB}_n(p, k)$ *est le h-processus de Doob associé au processus* $\mathrm{MB}_n(p, \tilde{k})$, *avec* : $h(x) \equiv h_{k-\tilde{k}}(x) \equiv |x|^{k-\tilde{k}}$.

THÉORÈME $\mathrm{C}_{p,k}$. — $(Y_u, u \leqq T_0)$, *resp.* : $(Z_u, u \geqq 0)$, *désigne le processus* $\mathrm{MB}_n(p, k)$, *resp.* : $\mathrm{MB}_n(p, \tilde{k})$, *issu de* $b \neq 0$.

Alors : $\{(Y_u ; u \leqq T_0)/T_0 = t\} \stackrel{(d)}{=} \{(Z_u, u \leqq t)/Z_t = 0\}$.

Il existe au moins deux familles d'exemples particulièrement intéressants :

a) $p = 2$; $\lambda > \frac{1}{2}[2 - n]$. Alors : $k = 2 - (n + \lambda)$; $\tilde{k} = \lambda$.

Sous ces hypothèses, on a donc montré qu'une solution de (5.a) est transformée par inversion, puis changement de temps, en une autre solution de (5.a), elle-même h-processus d'une troisième solution de (5.a).

b) $p > 1$; $\lambda = 0$. On étudie les processus $\Phi_p(B.)$.

Alors : $k \equiv k_p(n) = \frac{p(p-n)}{2(p-1)^2}$; $\tilde{k} \equiv \tilde{k}_{p,n} = k_p(n) + \frac{2\nu}{(p-1)^2} = \frac{(p-2)(2\nu+p)}{2(p-1)^2}$.

Remarquons encore la relation : $\tilde{k}_p(n) = k_{\bar{p}}(n)$, avec $\bar{p} = 2 - p$.

Ainsi, on a le diagramme récapitulatif suivant, avec les notations définies en cours de texte :

$$\begin{array}{ccc} \Phi_p(\mathrm{B}.) & \xrightarrow{\text{changement de temps } \tau_\cdot^{(p)}} & \mathrm{MB}_n(p,\, k_p(n)) \\ & & \Big\uparrow \; h\text{-processus, avec } h(x) = |x|^{-\frac{n-2}{(p-1)^2}} \\ \Phi_{\bar{p}}(\mathrm{B}.) & \xrightarrow{\text{changement de temps } \tau_\cdot^{(\bar{p})}} & \mathrm{MB}_n(p,\, \tilde{k}_p(n)) \end{array}$$

Les démonstrations de la proposition $\mathrm{B}_{p,k}$ et du théorème $\mathrm{C}_{p,k}$ sont tout à fait analogues à celles de la proposition B et du théorème C. En particulier, on peut déduire le théorème $\mathrm{C}_{p,k}$ de la proposition $\mathrm{B}_{p,k}$, ou bien le démontrer directement, par exemple à l'aide de la démonstration (C.2), en utilisant la représentation en skew-product de $\mathrm{MB}_n(p, k)$ comme :

$$\mathrm{Y}_t = |\,\mathrm{Y}_t\,|\,\theta\!\left(\frac{1}{(p-1)^2}\int_0^t \frac{ds}{|\,\mathrm{Y}_s\,|^2}\right), \tag{5.f}$$

avec $(\theta_t, t \geqq 0)$ mouvement Brownien standard sur la sphère, indépendant de $(\,|\,\mathrm{Y}_t\,|\,)$. Ce dernier résultat découle par exemple de ce que, comme on vient de le remarquer, le processus (Y_t) peut être construit par composition avec Φ_p, puis changement de temps, à partir d'un processus satisfaisant (5.a); or, on a vu, dans la démonstration (C.2) que ces processus admettent une représentation en skew-product, ce qui implique (5.f).

(5.2) On a vu, au cours de ce travail, consacré à l'étude des transformés du mouvement Brownien par Φ_p $(p > 1)$, que les processus solutions de :

$$\mathrm{X}_t = \mathrm{X}_0 + \int_0^t \sigma^{\mu,\nu}(\mathrm{X}_s)\,.\,d\mathrm{B}_s + \lambda\int_0^t ds\,\frac{\mathrm{X}_s}{|\,\mathrm{X}_s\,|^2}$$

interviennent de façon naturelle, voire indispensable.

(μ, ν, λ désignent trois réels, et X est définie jusqu'à son premier temps d'atteinte de 0).

Nous décrivons maintenant quelques propriétés fondamentales de ces processus.

a) Nous écartons la situation déterministe $\mu = \nu = 0$; on peut alors se ramener par homothétie, quitte à modifier λ, au cas où l'un des paramètres μ ou ν vaut 1. Remarquons également, à l'aide de la formule d'Itô, que lorsque $\mu = 1$, $(\,|\,\mathrm{X}_t\,|\,)$ est un processus de Bessel de dimension $1 + (n-1)\nu^2 + 2\lambda$.

b) $\mu = 1 ; \nu \neq 0 ; \lambda$ *quelconque.*

On peut donc écrire : $\nu = \dfrac{1}{1-p}$. D'après (5.1), le processus (X_t) peut alors être obtenu par composition d'une solution de $(5.a)$ avec Φ_p, puis changement de temps.

c) $\mu = 1 ; \nu = 0 ; \lambda$ *quelconque.*

Par application de la formule d'Itô, on a : $\Phi_1(X_t) = \Phi_1(X_0)$, si bien que $X_t = \dfrac{x_0}{|x_0|} |X_t|$, et $(|X_t|)$ est un processus de Bessel de dimension $1+2\lambda$.

d) $\mu = 0 ; \nu = 1 ; \lambda$ *quelconque.*

La partie radiale de (X_t) est déterministe, car, d'après la formule d'Itô, on a : $|X_t|^2 = |X_0|^2 + (2\lambda+n-1)t$ (en utilisant : $\sigma^{0,1}(x).x = 0$), et on peut écrire :

$$X_t = |X_t| \theta\left(\int_0^t \frac{ds}{|X_s|^2}\right),$$

avec $(\theta_t, t \geqq 0)$ mouvement Brownien standard sur la sphère.

RÉFÉRENCES

[*1*] A. BERNARD, E. A. CAMPBELL and A. M. DAVIE, Brownian motion and generalized analytic and inner functions. *Ann. Inst. Fourier*, t. **29**, 1, 1979, p. 207-228.

[*2*] R. K. GETOOR, The Brownian espace process. *Annals of Proba.*, n° 5, t. **7**, 1979, p. 864-867.

[*3*] R. K. GETOOR, M. J. SHARPE, Excursions of Brownian motion and Bessel processes. *Zeitschrift für Wahr*, t. **47**, 1979, p. 83-106.

[*4*] K. ITÔ, H. P. MC KEAN, *Diffusion processes and their sample paths*. Springer, 1965.

[*5*] T. JEULIN, Semi-martingales et grossissement d'une filtration. *Lect. Notes in Maths.*, 833, Springer, 1980.

[*6*] T. JEULIN, M. YOR, Sur les distributions de certaines fonctionnelles du mouvement Brownien. Sém. Proba. XV. *Lect. Notes in Maths.*, 850, Springer, 1981.

[*7*] F. B. KNIGHT, A reduction of continuous square integrable martingales to Brownian motion. *Lect. Notes in Maths.*, 190, Springer, 1971.

[*8*] N. V. KRYLOV, *Controlled Diffusion Processes*, Springer-Verlag, 1980.

[*9*] J. W. PITMAN, M. YOR, Bessel processes and infinitely divisible laws. In: Stochastic Integrals, ed.: D. Williams. *Lect. Notes*, 851, 1981.

[*10*] L. SCHWARTZ, Article précédent dans ce volume.

[*11*] M. SHARPE, Some transformations of diffusion by time-reversal. *Annals of Proba.*, t. **8**, 1980, p. 1157-1162.

[*12*] D. W. STROOCK, On the growth of stochastic integrals. *Zeitschrift für Wahr.*, t. **18**, 1971, p. 340-344.

(Manuscrit reçu le 17 Septembre 1984)