Annales de l'I. H. P., section B

Michel Métivier

Convergence faible et principe d'invariance pour des martingales à valeurs dans des espaces de Sobolev

Annales de l'I. H. P., section B, tome 20, nº 4 (1984), p. 329-348

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1984__20_4_329_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 20, n° 4, 1984, p. 329-348. *Probabilités et Statistiques*

Convergence faible et principe d'invariance pour des martingales à valeurs dans des espaces de Sobolev

par

Michel MÉTIVIER (*)

Centre de Mathématiques Appliquées, École Polytechnique,
91128 Palaiseau Cedex, France

RÉSUMÉ. — $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de martingales à valeurs dans un espace de Hilbert $\mathbb{H}$, on donne une condition suffisante de tension de la suite des lois des M^n dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+ ; \mathbb{H})$. Cette condition s'exprime uniquement à l'aide du processus $\ll M^n \gg$ dont la définition est rappelée au début du paragraphe 1.

Le paragraphe 2 applique ce critère à l'étude de la suite $(M^N)_{N\geq\mathbb{N}}$ lorsque M^N est la « martingale accompagnatrice » d'un processus X^N à valeurs dans $\mathbb{H}$ tel que

$$X_t^N = X_0^N + \int_0^t b^N(X_s^N)ds + M_t^N$$

où
$$\ll M^N \gg_t = \int_0^t a^N(X_s^N)ds \qquad a^N(X_s^N) \in \mathscr{L}_1(\mathbb{V} ; \mathbb{V}')$$

et où $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{H} \hookrightarrow \mathbb{V}'$ est un triplet de Gelfand d'espaces de Hilbert. Lorsque la suite (X^N) converge en probabilité vers une fonction déterministe f et pour des hypothèses convenables sur a^N et la suite $\varepsilon_N \downarrow 0$, les martingales

(*) Les résultats de ce travail ont été en grande partie obtenus pendant un séjour de l'auteur au « Center for Stochastic Processes » de l'Université de North-Carolina à Chapel Hill, dans l'été 1983, que l'auteur tient à remercier.

$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_N}} M^N$ convergent faiblement dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+ ; \mathbb{V}')$ vers un processus gaussien.

Ce théorème est appliqué à des processus considérés par L. Arnold, M. Theodosopulu et P. Kotelenez.

ABSTRACT. — $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ being a sequence of martingales with values in a Hilbert space $\mathbb{H}$ a sufficient condition for the tightness in $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+ ; \mathbb{H})$ of the laws of the M^n's is given in terms of the processes $\ll M^n \gg$ $n \in \mathbb{N}$ only. (Their definition is recalled in 1).

This is applied to the study of the accompagnying martingales M^N of H-valued processes X^N solution of a stochastic equation

$$X_t^N = X_0^N + \int_0^t b^N(X_s^N)ds + M_t^N,$$

where M^N is a martingale such that

$$\ll M^N \gg_t = \int_0^t a^N(X_s^N)ds \qquad a^N(X_s^N) \in \mathscr{L}_1(\mathbb{V}, \mathbb{V}')$$

where $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{H} \hookrightarrow \mathbb{V}'$ is a Gelfand-tripel. The martingales $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_N}} M^N$ for a suitable $\varepsilon_N \downarrow 0$ are shown to converge weakly in $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+ ; \mathbb{V}')$ to a gaussian process.

The results is applied to processes considered by L. Arnold, M. Theodosopulu and P. Kotelenez.

Key-words: Hilbert valued martingales. Weak convergence. Invariance principle. Stochastic partial differential equation. Martingale problems.

---

1. UNE CONDITION SUFFISANTE DE COMPACITÉ FAIBLE

Nous considérons une suite $(M^n)_{n \geq 0}$ de processus à valeurs dans un espace de Hilbert séparable $\mathbb{H}$. Chacun de ces processus est défini sur un espace probabilisé $(\Omega^n, \mathscr{A}^n, P^n)$ muni d'une filtration $(\mathscr{F}_t^n)_{t \geq 0}$. On suppose que M^n est pour $(\mathscr{F}^n, P^n)$ localement une martingale cad.lag de carré intégrable. On note $\tilde{P}^n$ la loi de M^n, sur l'espace de Skorokhod $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+ ; \mathbb{H})$.

On note $\ll \tilde{M}^n \gg$ l'unique processus prévisible à valeurs dans $\mathscr{L}_1(\mathbb{H}' ; \mathbb{H})$

(espace des opérateurs nucléaires du dual $\mathbb{H}'$ de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$) possédant la propriété : pour tout g, $h \in \mathbb{H}'$, le processus $Y^{f,g}$ défini par

$$Y_t^{f,g} := (M_t^n ; h)(M_t^n ; g) - (M_0^n ; h)(M_0^n ; g) - (h; \ll \tilde{M}^n \gg_t g)$$

est une martingale locale. (cf. [*6*]) [1].

L'opérateur $\ll \tilde{M}^n \gg (t, \omega)$ étant positif pour tout (t, ω) on peut définir l'opérateur de Hilbert-Schmidt $\ll \tilde{M}^n \gg^{\frac{1}{2}} (t, \omega)$. (On note $\mathscr{L}_2(\mathbb{H} ; \mathbb{H})$ l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt et $\| \quad \|_2$ sa norme). On rappelle la définition suivante (cf. [*1*]) :

$\prec M^n \succ = \operatorname{trace} \ll \tilde{M}^n \gg$. ($\| M^n \|^2 - \prec M^n \succ$ est une martingale locale) (cf. [*6*]).

1.1. DÉFINITION. — *Une suite de processus $(X^n)_{n \geqslant 0}$, cad.lag, définis sur les $(\Omega^n, \mathscr{A}^n, \mathscr{F}^n, P^n)$ à valeurs dans un espace métrique (E, d) est dit satisfaire la condition de Aldous si, pour tout $N > 0$, $\varepsilon, \eta > 0$ existe $\delta > 0$ tel que pour toute suite (τ^n) de temps d'arrêts (où τ^n est défini sur Ω^n et relatif à la filtration $\mathscr{F}^n$) tels que $\tau^n \leqslant N$ on a*

$$[A] \qquad \limsup_{n \to \infty} \sup_{0 < \theta < \delta} P^n \{ d(X_{\tau^n + \theta}^n, X_{\tau^n}^n) > \eta \} \leqslant \varepsilon$$

1.2. DÉFINITION. — *On dira que la suite $(X^n)_{n \geqslant 0}$ de processus satisfait la condition $[T_t]$ pour $t \in \mathbb{R}^+$ si la suite des lois $(\tilde{P}_t^n)_{n \geqslant 0}$ des variables aléatoires $(X_t^n)_{n \geqslant 0}$ (à valeurs dans E) est tendue.*

On rappelle que si $(X^n)_{n \geqslant 0}$ possède la propriété [A] et la propriété $[T_t]$ pour tout t appartenant à un ensemble D_0 dense dans $\mathbb{R}^+$, la suite $(\tilde{P}^n)_{n \geqslant 0}$ est tendue dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+ ; \mathbb{H})$ (cf. [1]).

On rappelle également la propriété suivante :

1.3. PROPOSITION. — *Soit $\mathbb{G}$ un espace de Hilbert et $(\mathbb{G}_k)_{k \geqslant 0}$ une suite croissante d'espaces de dimension finie de $\mathbb{G}$, telle que pour tout $h \in \mathbb{G}$*

$$\lim_k \Pi_{G_h^h} = h .$$

[1] On rappelle que tout élément $\tilde{a}$ de $\mathscr{L}_1(\mathbb{H}' ; \mathbb{H})$ s'identifie à un élément a de $\mathbb{H} \hat{\otimes}_1 \mathbb{H}$ (produit tensoriel nucléaire de $\mathbb{H}$ par $\mathbb{H}$) qui est en quelque sorte la « matrice » associée à $\tilde{a}$. Le processus à valeurs dans $\mathbb{H} \hat{\otimes}_1 \mathbb{H}$ associé à $\ll \tilde{M} \gg$ est noté $\ll M \gg$ dans [*6*]. De la même façon tout élément $\tilde{a}$ de $\mathscr{L}_2(\mathbb{H}' ; \mathbb{H})$ s'identifie à un élément a de $\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}$: dans une base orthonormée (h_i) de $\mathbb{H}$, a s'écrit $\sum_{i,j} \xi_{i,j} h_i \otimes h_j$ les $(h_i \otimes h_j)_{i,j}$ constituant eux-mêmes une base orthonormée de l'espace de Hilbert $\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}$. On a alors $\tilde{a}(h) = \sum_{i,j} \xi_{i,j} (h_i ; h)_{\mathbb{H}} h_j$.

Une suite μ_n de lois de probabilité dans $\mathbb{G}$ est tendue si et seulement si pour tout ε et η existent un $\rho_\varepsilon > 0$ et un sous-espace $\mathbb{G}_{\varepsilon,\eta}$ de la suite $(\mathbb{G}_k)_{k\geq 0}$ tels que

$$\sup_n \mu_n\{ g : \| g \| > \rho_\varepsilon \} \leqslant \varepsilon \tag{1.3.1}$$

et

$$\sup_n \mu_n\{ g : d(g, \mathbb{G}_{\varepsilon,\eta}) > \eta \} \leqslant \varepsilon \tag{1.3.2}$$

où $d(g, \mathbb{G}_{\varepsilon,\eta})$ désigne la distance de g à $\mathbb{G}_{\varepsilon,\eta}$.

Démonstration. — Cette proposition résulte en effet de la condition suivante de compacité dans $\mathbb{G}$. Un ensemble $C \subset \mathbb{G}$ a une fermeture compacte si et seulement si il est borné et pour tout η existe un sous-espace G_k de dimension finie, tel que

$$\sup_{g\in C} d(g, G_k) < \eta .$$

Les deux conditions de la proposition sont donc trivialement nécessaires pour que tout ε existe un compact C_ε tel que

$$\sup_n \mu_n(\mathbb{G} - C_\varepsilon) \leqslant \varepsilon .$$

Réciproquement, si elles sont satisfaites et si ε est donné, on obtient un compact C_ε en prenant l'adhérence de l'ensemble C'_ε suivant :

$$C'_\varepsilon := \mathbb{G} - \bigcup_{k\geqslant 1}\left(\{ g : \| g \| > \rho_\varepsilon \} \cup \left\{ g : d(g, \mathbb{G}_{\varepsilon/2^k, \frac{1}{k}}) > \frac{1}{k} \right\}\right)$$

et on a pour tout n

$$\mu(\mathbb{G} - C_\varepsilon) \leqslant 2\varepsilon .$$

On a le résultat suivant :

1.4. THÉORÈME. — *Si la suite $(\ll \tilde{M}^n \gg^{\frac{1}{2}})_{n\geq 0}$ de processus à valeurs dans $\mathscr{L}_2(\mathbb{H} ; \mathbb{H})$ satisfait $[T_t]$ et si $(M^n)_{n\geq 0}$ satisfait $[T_0]$ la suite $(M^n)_{n\geq 0}$ satisfait $[T_s]$ pour tout $s \leqslant t$.*

Démonstration. — La démonstration se ramène évidemment au cas $M_0^n = 0$ pour tout n. Par hypothèse, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, existe un compact $\hat{C}$ de $\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}$ tel que

$$\sup_n P^n\{ \ll M^n \gg_t^{\frac{1}{2}} \notin \hat{C} \} \leqslant \varepsilon/2 . \tag{1.4.1}$$

Remarquons (en considérant par exemple une base orthonormée) que l'on peut construire une suite croissante $(\mathbb{H}_n)$ de sous-espaces de dimension finie de $\mathbb{H}$, telle que $\bigcup_n \mathbb{H}_n \otimes \mathbb{H}_n$ soit dense dans $\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}$. L'ensemble $\hat{C}$ dans (1.4.1) est donc borné, puisque compact, et pour tout $\rho > 0$ existe un sous-espace $\mathbb{H}_\rho$ de dimension finie de $\mathbb{H}$ tel que

$$\sup_{y \in \hat{C}} \| y - \Pi_{\mathbb{H}_\rho \otimes \mathbb{H}_\rho}(y) \| \leqslant \rho \tag{1.4.3}$$

Nous montrons maintenant que pour tout $\varepsilon > 0$ et $\beta > 0$ on peut trouver $\alpha > 0$ et un espace de dimension finie $\mathbb{H}_\rho$ tel que

$$\sup_n P^n \{ \sup_{s \leqslant t} \| M_s^n \| > \alpha \} \leqslant \varepsilon \tag{1.4.4}$$

et

$$\sup_n P^n \{ \sup_{s \leqslant t} \| M_s^n - \Pi_{H_\rho} M_s^n \| > \beta \} \leqslant \varepsilon . \tag{1.4.5}$$

Ce sont les conditions de la proposition 1.3 qui impliqueront la compacité des lois des variables $\{ M_s^n, n \in \mathbb{N} \}$. Pour démontrer (1.4.4), nous utilisons un lemme de Lenglart (cf. [5]) qui nous donne pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ (rappelons qu'on a supposé $M_0^n = 0$) :

$$\begin{aligned} P^b \{ \sup_{s \leqslant t} \| M_t^n \| > \alpha \} &\leqslant \frac{b}{\alpha^2} + \text{Prob} \{ \text{Trace} \ll M^n \gg_t > b \} \\ &= \frac{b}{\alpha^2} + \text{Prob} \{ \| \ll M^n \gg_t^{\frac{1}{2}} \|_{\text{H.S}}^2 > b \}. \end{aligned}$$

En prenant $b := \sup_{y \in \hat{C}} \| y \|_{\text{H.S}}^2$ on a donc

$$P^n \{ \sup_{s \leqslant t} \| M_s^n \| > \alpha \} \leqslant \frac{b}{\alpha^2} + \varepsilon/2 . \tag{1.4.6}$$

On peut alors choisir α de telle sorte qu'on ait l'inégalité (1.4.4).

Pour montrer (1.4.5) choisissons $\rho \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \beta^2$ et considérons l'espace de dimension finie $\hat{\mathbb{F}}_\rho = \mathbb{H}_\rho \otimes \mathbb{H}_\rho$ défini ci-dessus, pour lequel (1.4.3) est vraie. Soit $\mathbb{G}_\rho$ le sous-espace orthogonal à $\mathbb{H}_\rho$ dans $\mathbb{H}$ et appelons Π_1 (resp. Π_2) la projection orthogonale sur $\mathbb{G}_\rho$ (resp. $\mathbb{H}_\rho$). Écrivons pour simplifier $Q := \ll M^n \gg_t$.

Supposons que nous puissions démontrer

$$\prec \Pi_1 M^n \succ_t \leqslant \| Q^{\frac{1}{2}} - \Pi_{\mathbb{H}_\rho \otimes \mathbb{H}_\rho} Q^{\frac{1}{2}} \|_{\text{H.S}}^2 . \tag{1.4.7}$$

Alors, en utilisant l'hypothèse que

$$P^n \{ \| Q^{\frac{1}{2}} - \Pi_{\mathbb{H}_\rho \otimes \mathbb{H}_\rho} Q^{\frac{1}{2}} \|_{\text{H.S}}^2 > \rho \} \leqslant \varepsilon/2$$

et réutilisant le lemme de Lenglart, on obtient que

$$P^n \{ \sup_{s \leqslant t} \| \Pi_1 M_s^n \| > \beta \} \leqslant \frac{\rho}{\beta^2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le choix fait de ρ montre que

$$P^n \{ \sup_{s \leqslant t} \| \Pi_1 M_s^n \| > \beta \} \leqslant \varepsilon$$

ce qui est l'inégalité à démontrer (1.4.5).

La démonstration du théorème repose donc maintenant uniquement sur la preuve de (1.4.7). Or cette dernière inégalité résulte du lemme suivant.

LEMME. — *Soit* $Q := \langle\!\langle M \rangle\!\rangle_t$. *Soit* $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_2$ *une décomposition orthogonale de* $\mathbb{H}$ *et soit* $\Pi_{\mathbb{H}_2 \otimes \mathbb{H}_2} Q^{\frac{1}{2}}$ *la projection orthogonale de* $Q^{\frac{1}{2}}$ *sur* $\mathbb{H}_2 \hat{\otimes} \mathbb{H}_2$. *Soit* Π_i *la projection orthogonale sur* $\mathbb{H}_i$, $i = 1, 2$. *Alors*

$$\langle\!\langle \Pi_1 M \rangle\!\rangle_t \leqslant \| Q^{\frac{1}{2}} - \Pi_{\mathbb{H}_2 \otimes \mathbb{H}_2} Q^{\frac{1}{2}} \|_{H.S}^2 .$$

Démonstration du lemme. — Soit $\tilde{Q}$ l'opérateur dans $\mathscr{L}_1(\mathbb{H} ; \mathbb{H})$ associé à Q. On a :

$$\overbrace{\mathrm{Proj}_{\mathbb{H}_i \hat{\otimes} \mathbb{H}_j} Q^{\frac{1}{2}}} = \Pi_j \circ \tilde{Q}^{\frac{1}{2}} \circ \Pi_i \qquad i, j = 1, 2 \ldots \tag{1.4.8}$$

Remarquons d'abord que :

$$\langle\!\langle \Pi_2 M \rangle\!\rangle_t = \mathrm{trace}\, (\Pi_2 \circ \tilde{Q} \circ \Pi_2) . \tag{1.4.9}$$

Alors

$$\begin{aligned} \| \Pi_2 \circ \tilde{Q}^{\frac{1}{2}} \circ \Pi_2 \|_{H.S}^2 \leqslant \| \Pi_2 \circ \tilde{Q}^{\frac{1}{2}} \|_{H.S}^2 &= \mathrm{trace}\, (\Pi_2 \circ \tilde{Q}^{\frac{1}{2}} \circ \tilde{Q}^{\frac{1}{2}} \circ \Pi_2) \\ &= \mathrm{trace}\, (\Pi_2 \circ \tilde{Q} \circ \Pi_2) . \end{aligned}$$

On déduit donc de (1.4.9) que

$$\| \Pi_2 \circ \tilde{Q}^{\frac{1}{2}} \circ \Pi_2 \|_{H.S}^2 \leqslant \langle\!\langle \Pi_2 M \rangle\!\rangle_t . \tag{1.4.10}$$

Mais, puisque $\| M_t \|^2 = \| \Pi_1 M_t \|^2 + \| \Pi_2 M_t \|^2$, on a

$$\langle\!\langle M \rangle\!\rangle_t = \langle\!\langle \Pi_1 M_t \rangle\!\rangle + \langle\!\langle \Pi_2 M_t \rangle\!\rangle . \tag{1.4.11}$$

La décomposition orthogonale

$$\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}_2 \oplus \mathbb{H}_2 \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_2 \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}_2$$

montre que

$$\langle\!\langle M \rangle\!\rangle_t = \| Q^{\frac{1}{2}} \|_{H.S}^2 = \sum_{i,j=1}^{2} \| \Pi_i \circ \tilde{Q}^{\frac{1}{2}} \circ \Pi_j \|_{H.S}^2 . \tag{1.4.12}$$

Des égalités (1.4.10), (1.4.11) et (1.4.12) on conclut donc :

$$\begin{aligned}\not< \Pi_1 M_t \not> &\leqslant \not< M \not>_t - \| \Pi_2 \circ \tilde{Q}^{\frac{1}{2}} \circ \Pi_2 \|_{H.S}^2 \\ &\leqslant \| Q^{\frac{1}{2}} \|_{H.S}^2 - \| \Pi_{\mathbb{H}_2 \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}_2} Q^{\frac{1}{2}} \|_{H.S}^2 \\ &\leqslant \| Q^{\frac{1}{2}} - \Pi_{\mathbb{H}_2 \otimes \mathbb{H}_2} Q^{\frac{1}{2}} \|_{H.S}^2 .\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du lemme et du théorème. ■

1.5. COROLLAIRE. — *Supposons qu'existe une base orthonormale* $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{H}$ *telle que pour tout* $\eta > 0$,

$$i) \qquad \lim_{m \to \infty} \sup_n P^n \left\{ \sum_{k=m}^{\infty} < h_k, \ll \tilde{M}^n \gg_t h_k \gg \eta \right\} = 0$$

$$ii) \qquad \lim_{\rho \to \infty} \sup_n P^n \{ \not< M^n \not>_t > \rho \} = 0 .$$

Alors la suite $(M^n)_{n \geqslant 0}$ *vérifie* $[T_s]$ *pour tout* $s \leqslant t$, *dès que* $[T_0]$ *est vraie.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que (i) et (ii) impliquent $[T_t]$ pour la suite de processus $(\ll \tilde{M}^n \gg^{\frac{1}{2}})_{n \geqslant 0}$.

Si Π_m est l'opérateur de projection sur l'espace $\mathbb{H}^m$ de dimension finie engendrée par $\{ h_1, \ldots, h_m \}$ on a

$$\| \ll \tilde{M}^n \gg^{\frac{1}{2}} - \Pi_m \ll \tilde{M}^n \gg^{\frac{1}{2}} \Pi_m \|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \| \ll \tilde{M}^n \gg^{\frac{1}{2}} h_k - \Pi_m \ll \tilde{M}^n \gg^{\frac{1}{2}} \Pi_m h_k \|^2$$

$$= \sum_{k=m+1}^{\infty} \| \ll \tilde{M}^n \gg^{\frac{1}{2}} h_k \|^2 + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{\infty} (h_j ; \ll M^n \gg^{\frac{1}{2}} h_k)^2_{\mathbb{H}} .$$

En raison de la symétrie de $\ll \tilde{M}^n \gg^{\frac{1}{2}}$ on peut écrire

$$\| \ll \tilde{M}^n \gg^{\frac{1}{2}} - \Pi_m \ll \tilde{M}^n \gg^{\frac{1}{2}} \Pi_m \|_2^2$$

$$= \sum_{k=m+1}^{\infty} \| \ll \tilde{M}^n \gg^{\frac{1}{2}} h_k \|^2 + \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} (h_k ; \ll \tilde{M}^n \gg^{\frac{1}{2}} h_j)^2_{\mathbb{H}}$$

$$\leqslant 2 \sum_{k=m+1}^{\infty} \| \ll \tilde{M}^n \gg^{\frac{1}{2}} h_k \|^2 = 2 \sum_{k=m+1}^{\infty} < h_k ; \ll \tilde{M}^n \gg_t h_k > .$$

Si $\mathscr{L}_2^m(\mathbb{H})$ est le sous-espace de dimension finie des applications linéaires de $\mathbb{H}^m$ la condition (i) implique pour tout $\eta > 0$ et $\varepsilon > 0$, l'existence d'un m tel que

$$(1.5.1) \qquad \sup_n P^n \{ \| \ll \tilde{M}^n \gg_t^{\frac{1}{2}} - \Pi_m \ll \tilde{M}^n \gg^{\frac{1}{2}} \Pi_m \|_2 > \eta \} \leqslant \varepsilon .$$

La condition (*ii*) implique pour tout ε l'existence d'un $\rho > 0$ tel que

$$\sup_n \mathrm{P}^n \{ \| \ll \tilde{\mathrm{M}}^n \gg_t^{\frac{1}{2}} \|_2 > \rho \} \leqslant \varepsilon . \tag{1.5.2}$$

Les conditions (1.3.1) et (1.3.2) impliquent que pour tout t, les lois des variables $\ll \tilde{\mathrm{M}}^n \gg_t^{\frac{1}{2}}$ à valeurs dans $\mathscr{L}_2(\mathbb{H} ; \mathbb{H})$ vérifient les conditions de la proposition 1.3. D'où le corollaire. ■

1.6. THÉORÈME. — *On suppose que la suite* $(\mathrm{M}^n)_{n\geqslant 0}$ *de martingales vérifie l'hypothèse du théorème* 1.4 *ou du corollaire* 1.5, *pour une suite* (t_k) ; $t_k \uparrow \infty$ *et que la suite de processus croissants* $(\prec \mathrm{M}^n \succ)_{n\geqslant 0}$ *vérifie la condition* [A] *de la définition* 1.1.

Alors la suite $(\tilde{\mathrm{P}}^n)_{n\geqslant 0}$ *des lois des* (M^n) *est équitendue dans* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+ ; \mathbb{H})$.

Démonstration. — Une extension immédiate d'un résultat de R. Rebolledo (cf. [*7*] et aussi [*6*] pour une exposition) montre que si les processus $\prec \mathrm{M}^n \succ$ vérifient la condition [A], il en est de même pour les processus M^n. Le théorème de Aldous [*1*] rappelé au début donne donc immédiatement la propriété d'équitension pour la suite $(\tilde{\mathrm{P}}^n)_{n\geqslant 0}$. ■

2. UN PRINCIPE D'INVARIANCE POUR MARTINGALES

2.1. CADRE ET NOTATIONS.

Nous considérons un « triplet de Gelfand » d'espaces de Hilbert : $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{H} \hookrightarrow \mathbb{V}'$, l'espace $\mathbb{H}$ étant identifié à son dual $\mathbb{H}'$.

En plus de ce triplet, nous considérons un espace de Banach $\mathbb{W}$ tel qu'on ait les injections continues $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W} \hookrightarrow \mathbb{V}'$.

Nous noterons $(.\,;.)_{\mathbb{V}}$ (resp. $(;)_{\mathbb{H}}$) le produit scalaire dans $\mathbb{V}$ (resp. $\mathbb{H}$), réservant le crochet $<,>$ pour la dualité entre un espace et son dual.

Nous considérons une suite $\{ (\mathrm{X}_t^{\mathrm{N}})_{t\geqslant 0} : \mathrm{N} \in \mathbb{N} \}$ de processus définis respectivement sur des bases stochastiques $(\Omega^{\mathrm{N}}, (\mathscr{F}_t^{\mathrm{N}})_{t\geqslant 0}, \mathrm{P}^{\mathrm{N}})$ tels que

$$1_{[0,\mathrm{T}]}\mathrm{X}^{\mathrm{N}}(\omega) \in \mathrm{L}^\infty([0, \mathrm{T}] ; \mathrm{W}) \cap \mathbb{D}[0, \mathrm{T} ; \mathbb{V}] \tag{2.1.1}$$

pour tout $\mathrm{T} \geqslant 0$ et tout $\omega \in \Omega^{\mathrm{N}}$.

On suppose que pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ et $g \in \mathrm{W}$, $b^{\mathrm{N}}(g)$ est un élément de $\mathbb{V}'$ tel que

$$\mathrm{X}_t^{\mathrm{N}} = \mathrm{X}_0^{\mathrm{N}} + \int_0^t b^{\mathrm{N}}(\mathrm{X}_s^{\mathrm{N}})ds + \mathrm{M}_t^{\mathrm{N}} \tag{2.1.2}$$

Le processus M^N étant une martingale de carré intégrable cad-lag à valeurs dans $\mathbb{H}$ (pour la filtration $(\mathscr{F}^N, P^N)$) et le processus $\left(\int_0^t b^N(X_s^N)ds\right)_{t\geq 0}$ étant à trajectoires dans $C(\mathbb{R}^+ ; \mathbb{V}')$.

2.2. On formule les hypothèses suivantes sur X^N et sur la martingale M^N : $(\varepsilon_N)_{N\geq 0}$ est une suite de nombres positifs décroissants avec $\lim_{N\to\infty} \varepsilon_N = 0$

(H_1) *i*) Pour tout $T \geq 0$ et $\varepsilon > 0$ existe $\rho_T > 0$ tel que

$$\limsup_N E^N \{ \sup_{s\leq T} \| X_s^N \|_W) < \infty$$

ii) Pour tout $T \geq 0$ $\rho > 0$

$$\lim_N P^N \left\{ \sup_{t\leq T} \left\| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_N}} \Delta X_t^N \right\|_{\mathbb{V}'} > \rho \right\} = 0$$

iii)
$$\sup_N \sup_t \left\| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_N}} \Delta X_t^N \right\|_{\mathbb{V}'} < \infty$$

(H_2) Pour tout $g \in W$, $a^N(g)$ est un élément de $\mathscr{L}_1(\mathbb{V} ; \mathbb{V}')$ tel que

i) $\ll \tilde{M}^N \gg = \left(\int_0^t a^N(X_s^N)ds\right)_{t\geq 0}$ à trajectoires dans $C(\mathbb{R}^+ ; \mathscr{L}_1(\mathbb{V} ; \mathbb{V}'))$.

ii) Pour toute base (v_k) orthonormée de $\mathbb{V}$ existe une famille positive (α_k) avec $\Sigma\alpha_k < \infty$ et quels que soient N et g : $< v_k, a^N(g)v_k > \leq \varepsilon_N \| g \|_W \alpha_k$ (noter que ceci implique : $a^N(g) \in \mathscr{L}_1(\mathbb{V} ; \mathbb{V}')$).

(H_3) Pour tout $g \in W$, $u \in \mathbb{V}$

$$\lim_N < u, \left(\frac{1}{\varepsilon_N} a^N(g) - a(g)\right) u > = 0, \qquad \text{avec} \quad a(g) \in \mathscr{L}_1(\mathbb{V} ; \mathbb{V}').$$

(H_4) Il existe $f \in C(\mathbb{R}^+ ; \mathbb{H}) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+ ; \mathbb{W})$ avec pour tout T

$$\sup_{t<T} \| f(s) \|_{\mathbb{W}} \leq \rho_T,$$

telle que

$$\forall u, \quad v \in \mathbb{V} \quad \lim_{N\to\infty} E\left(< u, \left[\frac{1}{\varepsilon_N} a^N(X_s^N) - \frac{1}{\varepsilon_N} a^N(f(s))\right] v > \right) = 0$$

pour presque tout $s \in \mathbb{R}^+$.

2.3. THÉORÈME. — *Sous les hypothèses* (H_1) *à* (H_4) *la suite* $\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_N}} M^N\right)_{N\geq 0}$ *de martingales converge faiblement dans* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+ ; \mathbb{V}')$ *vers le processus gaussien* *continu à accroissements indépendants centrés de covariance* $C(t) \in \mathscr{L}_1(\mathbb{V}\,;\mathbb{V}')$ *définie par*

$$\forall u, \quad v \in \mathbb{V} < u\,; C(t)v > \;=\; \int_0^t < u\,; a(f(s))v > ds$$

Démonstration.

1) *Compacité faible de la suite des lois des* M^N.

L'hypothèse (H_2) entraîne avec (H_1) pour tout $t \leqslant T$ et $\varepsilon > 0$ l'existence de $\rho_T > 0$ tel que :

$$\limsup_N P^N \left\{ \int_0^t \frac{1}{\varepsilon_N} \| a^N(X_s^N) \|_{\mathscr{L}_1(\mathbb{V}\,;\,\mathbb{V}')} ds > \rho_T C \right\} \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad C = T \sum_k a_k\,.$$

La condition (*ii*) du corollaire (1.5) est donc vérifiée pour la martingale $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_N}} M^N$ à valeurs dans $\mathbb{V}'$.

Si maintenant (u_k) est une base orthonormée de $\mathbb{W}$ les conditions (H_1) et (H_2) impliquent pour tout $t \leqslant T$, $\varepsilon > 0$:

$$\limsup_{N \to \infty} P^N \left\{ \sum_{k=m}^{\infty} < u_k\,; \frac{1}{\varepsilon_N} \ll M^N \gg_t u_k > \; > T\rho_T(\varepsilon) \sum_{k \geqslant m} a_k \right\} \leqslant \varepsilon$$

ce qui fournit immédiatement la condition (*i*) du corollaire 1.5.

En outre la condition de Aldous résulte immédiatement de la majoration

$$P^N \left\{ \int_{\tau_N}^{\tau_N + \delta} \| a^N(X_s^N) \|_{\mathscr{L}_1(\mathbb{V},\,\mathbb{V}')} ds > \rho_T \delta C \right\} \leqslant \varepsilon$$

2) *Convergence faible.*

Notons $\tilde{P}^N$ la loi de la martingale $Y_N = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_N}} M^N$.

Nous avons seulement à prouver que pour toute suite convergente extraite de $(\tilde{P}^N)_{N \in \mathbb{N}}$ (que nous noterons encore $(\tilde{P}^N)_{n \in \mathbb{N}}$ pour simplifier) la limite $\tilde{P}$ est solution sur $C(\mathbb{R}^+\,; \mathbb{V}')$ du problème de martingale suivant : $(\xi_t)_{t \geqslant 0}$ désignant le processus canonique dans $C(\mathbb{R}^+\,; \mathbb{V}')$ pour tout $v \in \mathbb{V}$ le processus réel $(< v, \xi_t >)_{t \geqslant 0}$ est une $\tilde{P}$-martingale locale et

$$< v, \xi_t >^2 - \int_0^t < v\,; a(f(s))v > ds \tag{2.3.1}$$

est également une $\tilde{P}$-martingale locale.

Notons que $(H_1)(ii)$ implique pour la limite $\tilde{P}$ d'être portée par $C(\mathbb{R}^+ ; \mathbb{V}')$.

La formule de Ito appliquée à la martingale réelle $< v ; Y^N >$ et à la fonction $\varphi \in C_K^\infty$ donne

$$(2.3.2) \qquad \varphi(< v, Y_t^N >) = \frac{1}{2}\int_0^t \varphi''(< v, Y_{s-}^N >) < v, \frac{a^N}{\varepsilon_N}(X^N(s))v > ds$$
$$+ \sum_{s \leqslant t} \Big[\varphi(< v, Y_s^N >) - \varphi(< v, Y_{s-}^N >)$$
$$- < v ; \Delta_s Y^N > \varphi'(< v, Y_{s-}^N >)$$
$$- \frac{1}{2} < v ; \Delta_s Y^N >^2 \varphi''(< v, Y_{s-}^N >)\Big] + M_t^{N,\varphi}$$

où $M^{N,\varphi}$ est une martingale sur $(\Omega^N, \mathscr{F}^N, P^N)$.

Sur l'espace canonique $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+ ; \mathbb{V}')$ définissons le temps d'arrêt τ_α pour $\alpha > 0$ par

$$\tau_\alpha := \inf \{ t ; \| \xi_t \|_{\mathbb{V}'} > \alpha \}$$

et considérons une fonction $\varphi_\alpha \in C_K^\infty$ telle que

$$\varphi_\alpha(x) = x \qquad \text{si} \qquad | x | \leqslant \| v \| (\alpha + r)$$

avec

$$r := \sup_N \sup_t \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_N}} \| \Delta X_t^N \|_{\mathbb{V}'}$$

Si τ_α^N est le temps d'arrêt sur $(\Omega^N, \mathscr{F}^N, P^N)$ défini par

$$\tau_\alpha^N := \inf \{ t ; \| Y_t^N \|_{\mathbb{V}'} > \alpha \}$$

on a, pour $F \in \mathscr{D}_s$, $F^N := (Y^N)^{-1}(F) \in \mathscr{F}_s^N$

$$\tilde{E}^N \{ 1_F(< v, \xi_{t \wedge \tau_\alpha} > - < v, \xi_{s \wedge \tau_\alpha} >) \}$$
$$= \tilde{E}^N \{ 1_F [\varphi_\alpha(< v, \xi_{t \wedge \tau_\alpha} >) - \varphi(< v, \xi_{s \wedge T_\alpha} >)] \} .$$

Or :

$$E^N \{ 1_{F^N}(< v, Y_{t \wedge \tau_\alpha^N}^N > - < v, Y_{s \wedge \tau_\alpha^N}^N >) = 0$$

(puisque, pour $t < \tau_\alpha^N$, $\varphi_\alpha''(< v, Y_{t-}^N > = 0)$ et

$$\varphi_\alpha(< v, Y_t^N >) - \varphi(< v, Y_{t-}^N >) - < v, \Delta_t Y^N > \varphi_\alpha'(< v, Y_{t-}^N >) = 0 .$$

Comme $\tilde{\omega} \curvearrowright \varphi_\alpha(< v, \xi_{t \wedge \tau_\alpha} >)$ est $\tilde{P}$-p. s. continue, on a, puisque $\tilde{P}^N$ converge vers $\tilde{P}$:

$$\tilde{E} \{ 1_F(< v, \xi_{t \wedge \tau_\alpha} > - < v, \xi_{s \wedge \tau_\alpha} >) \} = 0 .$$

et $\lim_{\alpha \uparrow \infty} \tilde{P} \{ \tau_\alpha \geqslant T \} \leqslant \lim_{\alpha \uparrow \infty} \sup_N \tilde{P}^N \{ \tau_\alpha \geqslant T \} = 0$ pour tout $T > 0$.

Donc : $(< v, \xi_t >)_{t \geqslant 0}$ est une martingale locale.
Remplaçons maintenant φ_α par $\psi_\alpha \in C_K^\infty$ telle que :

$$\psi_\alpha(x) = x^2 \qquad \text{si} \qquad |x| \leqslant \|v\|(\alpha + r).$$

On a cette fois

$$\tilde{E}^N\left\{ 1_F\left[< v, \xi_{t\wedge\tau_\alpha} >^2 - < v, \xi_{s\wedge\tau_\alpha} >^2 - \int_{s\wedge\tau_\alpha}^{t\wedge\tau_\alpha} < v, a(f(\tau))v > d\tau \right]\right\}$$
$$= E^N\left\{ 1_F\left[< v, Y^N_{t\wedge\tau^N_\alpha} >^2 - < v, Y^N_{s\wedge\tau^N_\alpha} >^2 - \int_{s\wedge\tau^N_\alpha}^{t\wedge\tau^N_\alpha} < v, \frac{a^N}{\varepsilon_N}(X^N_\tau)v > d\tau \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_{s\wedge\tau^N_\alpha}^{t\wedge\tau^N_\alpha}\left[< v, \frac{a^N}{\varepsilon_N}(X^N_\tau)v > - < v, a(f(\tau))v > \right]d\tau\right]\right\},$$

d'où

$$(2.3.3) \quad \tilde{E}^N\left\{ 1_F\left[< v, \xi_{t\wedge\tau_\alpha} >^2 - < v, \xi_{s\wedge\tau_\alpha} >^2 - \int_{s\wedge\tau_\alpha}^{t\wedge\tau_\alpha} < v, a(f(\tau))v > d\tau \right]\right\}$$
$$\leqslant \int_0^t E^N\left| < v, \left[\frac{a^N}{\varepsilon^N}(X^N_\tau) - \frac{a^N}{\varepsilon_N}(f(\tau))\right]v > \right| d\tau$$
$$+ \int_0^t < v, \left[\frac{a^N}{\varepsilon_N}(f(\tau)) - a(f(\tau))\right]v > d\tau .$$

D'après (H_2) (ii), (H_1) (i) et (H_4)

$$E^N\left| < v, \left[\frac{a^N}{\varepsilon_N}(X^N_\tau) - \frac{a^N}{\varepsilon_N}(f(\tau))\right]v > \right| \leqslant 2C\|v\|^2 E^N(\sup_{s\leqslant T}\|X^N_s\|_W) < \infty$$

et
$$\lim_{N\to\infty} E^N\left| < v, \left[\frac{a^N}{\varepsilon_N}(X^N_\tau) - \frac{a^N}{\varepsilon_N}(f(\tau))\right]v > \right| = 0$$

donc

$$(2.3.4) \qquad \int_0^t E^N\left| v, \left[\frac{a^N}{\varepsilon_N}(X^N_\tau) - \frac{a^N}{\varepsilon_N}(f(\tau))\right]v > \right| d\tau = 0$$

Enfin (H_3) implique

$$(2.3.5) \qquad \int_0^t < v, \left[\frac{a^N}{\varepsilon_N}(f(\tau) - a(f(\tau))\right]v > d\tau = 0 .$$

Les inégalités (2.3.3), (2.3.4), (2.3.5) impliquent (2.3.1).

3. EXEMPLES

3.1. On se place dans la situation considérée par L. Arnold et M. Theodosopulu [3] et P. Kotelenez [4]. L'espace $\mathbb{H}$ sera l'espace $(L^2(S))'$ évidemment identifié à $L^2(S))$, où $S := [0, 1]$. L'espace $\mathbb{V}$ sera un sous-espace H_q où H_q est le sous-espace suivant de l'espace de Sobolev H^q :

$$H_q := \{ u : u \in H^q, D^k u(0) = D^k u(1) = 0 \quad \text{pour} \quad k = 1 \dots q-1 \}.$$

Pour $q = 0$, on pose $H_0 := L^2(S)$.

Pour chaque valeur de N I_i^N est l'intervalle $\left]\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}\right]$ et h_i^N est la fonction indicatrice : $h_i^N = 1_{]i/N, i+1/N]} \in \mathbb{H}$.

On note $\mathbb{H}_0^N$ le sous-espace de dimension finie de $\mathbb{H}$ engendré par $h_1^N, \dots, h_N^N$.

La suite de processus considérée $(X^N)_{N \geq 0}$ est une suite de processus de Markov de sauts purs, X^N, prenant leurs valeurs dans $\mathbb{H}_0^N$. On a donc :

$$X_t^N = \sum_{i=1}^{N} X_t^{N,i} h_i^N \tag{3.1.1}$$

$X^{N,i}$ $i = 1 \dots N$ étant les coordonnées d'un processus de Markov dans $\mathbb{R}^N$.

Cette suite de processus de Markov à valeurs dans $\mathbb{H}_0$ considérée dans [3] et [4] a l'interprétation suivante : $X^{N,i}$ est la masse moyenne par unité de volume (densité) de l'ensemble des particules d'un certain type (chacune de masse ε_N « très petite ») présentes dans la cellule I_i^N à l'instant t. Chaque arrivée ou départ d'une particule dans la cellule I_i^N à l'instant t (soit par naissance ou mort ou provenance d'une cellule voisine ou départ vers une cellule voisine) se traduit par un saut de $X^{N,i}$ d'amplitude $N\varepsilon_N$. On étudie le modèle « limite » du modèle fourni pour N « grand » et ε_N « petit », c'est-à-dire pour $N \to \infty$ et $\varepsilon_N \downarrow 0$ dans des conditions de normalisation données.

Comme pour tout processus de Markov la loi P^N de X^N est solution d'un problème de martingale : pour toute $\varphi \in C_K^\infty(\mathbb{H}_0^N)$

$$\varphi(X_t^N) = \varphi(X_0^N) + \int_0^t L^N \varphi(X_s^N) ds + M_t^{N,\varphi} \tag{3.1.2}$$

où $M^{N,\varphi}$ est une martingale.

Le générateur L^N s'écrit pour $g \in \mathbb{H}_0^N$, $\varphi \in C_K^\infty(\mathbb{H}_0^N)$

$$\text{(3.1.3)} \quad L^N\varphi(g) = \langle b^N(g), D\varphi(g) \rangle + \operatorname{Trace} a^N(g) \circ D^2\varphi(g) + \sum_m R^2\varphi(g, m)\gamma^N(g, m)$$

où $b^N(g) \in \mathbb{H}_0^N$, $D\varphi(g)$: dérivée de φ en $g \in (\mathbb{H}_0^N)'$, $a^N(g) \in \mathscr{L}((\mathbb{H}_0^N)\,;\mathbb{H}_0^N)$, $D^2\varphi(g)$: dérivée seconde de φ en g est un élément de $\mathscr{L}(\mathbb{H}_0^N; (H_0^N|')$, $R_2\varphi(g, m)$ est le reste de Taylor d'ordre 2 de φ en g pour un accroissement m et $\gamma^N(g, m)$ est la probabilité instantanée d'un saut d'amplitude m quand le processus X_t^N est en g (2).

On déduit facilement de (3.1.3), suivant une démarche traditionnelle que le processus X^N satisfait également la formulation suivante du problème de martingale (non équivalente en raison des sauts) :

$$\text{(3.1.4)} \qquad X_t^N = X_0^N + \int_0^t b^N(X_s^N)ds + M_t^N,$$

M^N étant une martingale locale à valeurs dans $\mathbb{H}_0$ telle que

$$\text{(3.1.5)} \qquad \langle\!\langle M^N \rangle\!\rangle_t = \int_0^t a^N(X_s^N)ds,$$

le processus $\langle\!\langle M^N \rangle\!\rangle$ prenant ses valeurs dans $\mathscr{L}(\mathbb{H}_0^N\,; \mathbb{H}_0^N)$.

Arnold et Theodosopulu donnent des conditions pour que la suite (X^N) converge dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+\,; \mathbb{H}_{-2})$ ou $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+\,; \mathbb{H}_0)$ vers une fonction déterministe f à valeurs dans $\mathbb{H}_0$. Ils abordent ensuite le problème de la convergence faible de $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_N}} M^N$. C'est ce problème que nous traitons ici.

Dans le cas considéré par Arnold-Theodosopulu [*3*] et Kotelenez [*4*] on a pour $g := \sum_{i=1}^N g^{N,i}h_i^N$

$$\text{(3.1.6)} \qquad b^N(g) = \sum_{i=1}^N \mathscr{C}(g^{N,i})h_i^N + D\Delta^N g$$

(2) On a d'ailleurs $\gamma^N(g, m) = \dfrac{1}{N\varepsilon_N}\lambda(g^{N,i})$ si $m = \varepsilon_N N h_i^N$, $\gamma^N(g, m) = \dfrac{1}{N\varepsilon_N}\mu(g^{N,i})$ si $m = -\varepsilon_N N h_i^N$, $\gamma^N(g, m) = \dfrac{DN^2}{2N\varepsilon_N}(g^{N,i})$ si $m = \varepsilon_N N(h_{i+1}^N - h_i^N)$ ou $m = \varepsilon_N N(h_{i-1}^N - h_i^N)$ les fonctions λ, μ étant des fonctions positives.

où D est une *constante*, $\mathscr{C}$ est une *fonction uniformément Lipschitzienne* de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ de la forme suivante :

(3.1.7) $\mathscr{C}(u) = \lambda(u) - \mu(u)$ λ et μ étant deux applications uniformément lipschitziennes de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ avec en outre $\mu(0) = 0$ et où Δ^N est le *Laplacien approché d'ordre* N défini par :

(3.1.8)
$$\Delta^N g(x) := \begin{cases} N^2\left(g\left(x + \frac{1}{N}\right) + g\left(x - \frac{1}{N}\right) - 2g(x)\right) & \text{si } \frac{1}{N} \leqslant x \leqslant 1 - \frac{1}{N} \\ N^2\left(g\left(x + \frac{1}{N}\right) - g(x)\right) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{N} \\ N^2\left[g\left(x - \frac{1}{N}\right) - g(x)\right] & \text{si } 1 - \frac{1}{N} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

On définit par ailleurs :

(3.1.9) $$|\mathscr{C}|(u) = \lambda(u) + \mu(u).$$

On remarque que (3.1.6) s'écrit pour tout $g \in \mathbb{H}_0^N$

(3.1.10) $$(u\,; b^N(g)) = (u\,; \mathscr{C}(g)) + D(\Delta^N u\,; g).$$

La fonction $a^N(g)$ est définie pour $u, v \in \mathbb{H}_0^N$

(3.1.11) $$(a^N(g)u\,; v)_{\mathbb{H}_0} := (a_1^N(g)u\,; v)_{\mathbb{H}_0} + (a_2^N(g)u\,; v)_{\mathbb{H}_0}$$

avec

$$(a_1^N(g)u\,; v)_{\mathbb{H}_0} = N\varepsilon_N \sum_{i=1}^{N} |\mathscr{C}|(g^{N,i})(h_i^N\,; u)_{\mathbb{H}_0}(h_i^N\,; v)_{\mathbb{H}_0},$$

soit

(3.1.12) $$(a_1^N(g)u\,; v)_{\mathbb{H}_0} = \varepsilon_N(|\mathscr{C}|(g)u\,; v)_{\mathbb{H}_0}$$

(en notant que $\sqrt{N}h_i^N$, $i = 1 \ldots N$ est une base orthonormée de $\mathbb{H}_0^N$), et, en notant $(;)_0$ au lieu de $(;)_{\mathbb{H}_0}$, pour simplifier,

$$(a_2^N(g)u\,; v)_0 = DN^3\varepsilon_N\left[\sum_{i=1}^{N-1} g^{N,i}(u\,; h_{i+1}^N - h_i^N)_0(v\,; h_{i+1}^N - h_i^N)_0 + \sum_{i=2}^{N} g^{N,i}(u\,; h_{i-1}^N - h_i^N)_0(v\,; h_{i-1}^N - h_i^N)_0\right].$$

Si on note ∇_+^N et ∇_-^N les « gradients approchés à droite et à gauche d'ordre N » définis par

(3.1.13)
$$\nabla_+^N u(x) := \begin{cases} N\left[u\left(x+\frac{1}{N}\right)-u(x)\right] & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1-\frac{1}{N} \\ 0 & \text{si } 1-\frac{1}{N} < x \leqslant 1 \end{cases}$$
$$\nabla_-^N u(x) := \begin{cases} N\left[u\left(x-\frac{1}{N}\right)-u(x)\right] & \text{si } \frac{1}{N} \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leqslant x < \frac{1}{N} \end{cases}$$

on peut écrire

(3.1.14) $(a_2^N(g)u\,;v) = D\varepsilon_N[(g\nabla_-^N u\,;\nabla_-^N v)_0 + (g\nabla_+^N u\,;\nabla_+^N v)_0]$.

On remarque que les formules (3.1.10) à (3.1.14) gardent un sens pour tout $g \in \mathbb{H}_0$, et que, par conséquent, *le processus* X^N *considéré comme processus à valeurs dans* $\mathbb{H}_0$ *(ou* $\mathbb{H}_0'$ *!) est solution du problème de martingale défini par* (3.1.4) (3.1.5), *les coefficients* b^N *et* a^N *étant définis par* (3.1.10) *à* (3.1.14).

3.2. CAS 1 : $\mathbb{V} = \mathbb{H}_2$, $W = L^\infty$.

Cette situation correspond au cas considéré par L. Arnold et M. Theodosopulu [*3*] dans laquelle on considère non pas les processus X^N mais les processus $\overline{X}^N$ arrêtés de la façon suivante :

(3.2.1)
$$\begin{cases} \tau_N : \inf\{\, t : \|X_t\|_\infty \geqslant \rho(t)\,\} \\ \overline{X}_t^N = X_{t\wedge\tau_N}^N \end{cases}$$

où ρ est une fonction croissante telle que l'équation d'évolution

(3.2.2)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,q) = D\dfrac{\partial^2 f}{\partial q^2}(t,q) + \mathscr{C}(f(t,q)) \\ \dfrac{\partial f}{\partial q}(t,0) = \dfrac{\partial f}{\partial q}(t,1) = 0 \\ f(0,q) \in \mathbb{H}_2 \end{cases}$$

a une solution unique $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{H}_0) \cap C(\mathbb{R}^+, \mathbb{H}_2)$ telle que

$$\sup_{t\leqslant T} \|f(t)\|_\infty \leqslant \rho(T) - 1\,.$$

(Dans les hypothèses sur $\mathscr{C}$ faites dans [*3*], une telle solution f et une telle fonction ρ existent).

La suite de processus $(\overline{X}^N)_{N\geqslant 0}$ satisfait trivialement (H_1).

L'hypothèse (H_2) (i) est exprimée par (3.1.5), tandis que (3.1.12) et (3.1.14) impliquent pour tout $u, v \in \mathbb{H}_2$ et $g \in L_\infty$

(3.2.3) $$(a^N(g)u\,;v)_0 \leqslant K\varepsilon_N \| g \|_\infty \ \| u \|_1 \ \| v \|_1$$

pour une constante convenable K.

Le fait que $H_2 \curvearrowright \mathbb{H}_1$ soit de Hilbert Schmidt implique immédiatement $(H_2)\,(ii)$ avec $\alpha_k = \| v_k \|_1^2$.

Définissons maintenant pour tout $u, v \in \mathbb{H}_1$:

(3.2.4) $$(a(g)u\,;v)_0 := (\,|\mathscr{C}|\,(g)u\,;v)_0 + 2D(g\nabla u\,;\nabla v)_0\,.$$

Pour tout $g \in \mathbb{H}_0$ on a

$$(a(g)u\,;v)_0 \leqslant K \| g \|_\infty \ \| u \|_1 \ \| v \|_1$$

ce qui implique que $a(g) \in \mathscr{L}_1(\mathbb{V}\,;\mathbb{V}')$.

En outre

$$\left(u\,;\left[\frac{1}{\varepsilon_N}a^N(g) - a(g)\right]u\right)_0 = D\big(g(\nabla_+^N u - \nabla u)\,;u\big)_0 + D\big(g(\nabla_-^N u - \nabla u)\,;u\big)_0$$

d'où

$$\left|\left(u\,;\frac{1}{\varepsilon_N}a^N(g) - a(g)u\right)_0\right| \leqslant \frac{2D}{N}\| g \|_\infty \ \| u \|_1 \ \| u \|_2\,.$$

(On utilise la propriété

$$\left(\| u(\nabla_+^N u - \nabla u) \|_0 \leqslant \| u \|_1 \ \| \nabla_+^N u - \nabla u \|_0 \leqslant \| u_1 \| \frac{1}{N} \| u \|_2\right)$$

Ceci implique la condition (H_3).

Il est montré par ailleurs dans [*3*] que, si on fait les hypothèses suivantes :

$$[\Lambda.T.1] \quad \lim_{N\to\infty} N\varepsilon_N = 0\,,$$
$$[\Lambda.T.2] \quad \lim_{N\to\infty} \| \overline{X}_0^N - f(0) \|_{\mathbb{H}_0} = 0\,,$$

la suite $(\overline{X}^N)_{N\in\mathbb{N}}$ considérée dans [*3*] est telle que pour tout $T > 0$, tout $u \in \mathbb{H}_1$ et tout $\delta > 0$

(3.2.5) $$\lim_{N\to\infty} P^N\{ \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |(\,|\overline{X}_t^N - f(t)\,|\,;u)_0| \geqslant \delta \} = 0\,.$$

(cf. aussi [*4*], page 12).

On a donc pour tout $u, v \in \mathbb{H}_2$ et $s \leqslant T$

$$\left| E < u, \left[\frac{1}{\varepsilon_N} a^N(\overline{X}_s^N) - \frac{1}{\varepsilon_N} a^N(f(s)) \right] v > \right| \leqslant$$

$$E(K | (| \overline{X}_s^N - f(s) | ; v)_0 \| u_1 \| |) + D \; E(| \overline{X}_s^N - f(s) | ; \; v)_0 [\| \nabla_+^N u \|_0 + \| \; \nabla_-^N u \; \|_0] |$$

K désignant une constante de Lipschitz pour $|\mathscr{C}|$. Comme $\| \nabla_+^N u \|_0 \leqslant \| u \|_1$ l'inégalité précédente et la convergente vers zéro de $E(| \overline{X}_s^N - f(s) | ; v_0)$ (comme conséquence (3.2.5) et de $| \overline{X}_s^N - f(s) | \leqslant 2\rho(T)$ pour $s \leqslant T$) impliquent la propriété (H_4).

On peut donc appliquer le théorème 2.3. On retrouve ainsi le résultat de [*4*].

PROPOSITION. — *Dans les hypothèses de* [*4*] *les lois des martingales* $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_N}} \overline{M}^N$ *convergent faiblement dans* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+ ; \mathbb{H}_{-2})$ *lorsque* $N \to \infty$ *vers le processus gaussien continu à accroissements indépendants centrés de* covariance $\mathbb{C}(t) \in \mathscr{L}_1(\mathbb{H}_2 ; \mathbb{H}_{-2})$ *où* $\mathbb{C}(t) = \int_0^t af(s)ds$, *a étant défini par* (3.2.4).

Remarque. — Nous avons montré la convergence faible des lois des martingales $\overline{M}^N$ sous l'hypothèse $N\varepsilon_N \to 0$ et sans l'hypothèse $N^2\varepsilon_N \to \infty$ comme dans [*4*], page 49.

3.3. CAS 2 : $\mathbb{V} = \mathbb{H}_4$, $W = \mathbb{H}_{-2}$.

Cette situation correspond au cas étudié dans Kotelenez [*4*]. Sous l'hypothèse $\lim_N N\varepsilon_N = 0$ et $\lim_N \| X_0^N - f(0) \|_{-2} = 0$ en probabilité on a, pour tout $T > 0$ et $\delta > 0$:

$$\lim_{N \to \infty} P^N \{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \| X_t^N - f(t) \|_{-2} > \delta \} = 0 \tag{3.3.1}$$

Dans ces conditions les hypothèses (H_1) et (H_2)(i) sont vérifiées. On peut écrire maintenant pour tout $u, v \in \mathbb{H}_3$ et $g \in \mathbb{H}_0$

$$(a^N(g)u ; v)_0 \leqslant K\varepsilon_N \| g \|_0 [\| u \, . \, v \|_0 + \| \nabla^N u \, . \, \nabla^N v \|_0] \leqslant K\varepsilon_N \| g \|_0 \| u \|_2 \| v \|_2 .$$

Comme $\mathbb{H}_3 \curvearrowright \mathbb{H}_2$ est de Hilbert Schmidt, on voit que (H_2) (ii) est vérifiée avec $\alpha_k = \| v_k \|_2^2$.

(H_3) est vérifiée comme ci-dessus pour le cas 1 ([3]).

([3]) On a d'ailleurs $a^N(g) \in \mathscr{L}_1(\mathbb{H}_3 ; \mathbb{H}_{-3})$ et de même pour $a(g)$.

Enfin, pour la propriété (H_4), on a pour tout $u, v \in \mathbb{H}_4$:

$$\left| E < u, \left[\frac{1}{\varepsilon_N} a^N(X_s^N) - \frac{1}{\varepsilon_N} a^N(f(s)) \right] v > \right| \leqslant$$
$$\leqslant K'E(\| X_s^N - f(s) \|_{-2})(\| uv \|_2 + \| \nabla_+^N u \nabla_+^N v \|_2 + \| \nabla_-^N u \nabla_-^N v \|_2)$$
$$\leqslant 3K'E(\| X_s^N - f(s) \|_{-2}) \| u \|_4 \; \| v \|_4$$

pour une constante K'.

La relation (3.3.1) et la majoration

$$\sup_{t \leqslant T} \| X_s^N - f(s) \|_{-2} \leqslant 2\rho_T$$

impliquent

$$\lim_N E \| X_s^N - f(s) \|_{-2} = 0$$

et la propriété (H_4).

Le théorème 2.3 redonne ainsi le résultat de [*3*] (théorème 2.1) sans d'ailleurs utiliser la condition $\lim_N N^2 \varepsilon_N \to \infty$.

3.4. Cas 3 : $\mathbb{V} = \mathbb{H}_3$; $\mathbb{W} = \mathbb{H}_0$.

Nous nous plaçons dans les hypothèses du théorème 11 de Kotelenez [*4*]. On suppose non seulement $\lim_N N\varepsilon_N = 0$ mais $\lim_{N \to \infty} N^3 \varepsilon_N = 0$. Dans ces conditions lorsque $\lim_{N \to \infty} \| X_0^N - f(0) \|_0 = 0$ on a, pour tout $T > 0$ et $\delta > 0$:

$$\lim_N P^N \{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \| X_t^N - f(t) \|_0 > \delta \} = 0 \tag{3.4.1}$$

En raisonnant comme dans le cas 2 ci-dessus, on obtient facilement les propriétés (H_2) (*ii*) et (H_3) pour $\mathbb{V} = \mathbb{H}_3$ et la propriété (H_4) résulte de :

$$E < u, \left[\frac{1}{\varepsilon_N} a^N(X_s^N) - \frac{1}{\varepsilon_N} a^N(f(s)) \right] v > \leqslant 3K'E(\| X_s^N - f(s) \|_0) \| u \|_2 \| v \|_2 .$$

On obtient donc la proposition suivante non démontrée dans [*4*].

Proposition. — *Pour la fonction $\mathscr{C}$ considérée par Arnold et Theodosopulu et avec les hypothèses suivantes :*

$$\lim_{N \to \infty} N^3 \varepsilon_N = 0$$
$$\lim_{N \to \infty} \| X_0^N - f(0) \|_0 = 0$$

les lois des martingales $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_N}} M^N$ *convergent faiblement dans* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+ ; \mathbb{H}_{-3})$, *lorsque* $\mathrm{N} \to \infty$ *vers le processus gaussien continu à accroissements indépendants centrés de covariance* $\mathrm{C}(t) \in \mathscr{L}_1(\mathbb{H}_2\,;\,\mathbb{H}_{-2})$ *où, pour tout* u, $v \in \mathbb{H}$

$$(u\,;\,\mathrm{C}(t)v)_0 := \int_0^t [(\,|\mathscr{C}|\,(f(s))u\,;\,v)_0 + 2\mathrm{D}(f(s)\nabla u\,;\,\nabla v)_0\,]ds\,.$$

RÉFÉRENCES

[1] D. ALDOUS, Stopping times and tightness, *Ann. of Prob.*, t. **6**, n° 2, 1978, p. 335-340.

[2] L. ARNOLD, *Mathematical models of chemical reactions.* In: *Stochastic Systems.* M. Hazewinkel, J. Willems, ed., Dordrecht, 1981.

[3] L. ARNOLD, M. THEODOSOPULU, Deterministic limit of the stochastic model of chemical reactions with diffusion. *Adv. Appl. Prob.*, t. **12**, 1980, p. 363-329.

[4] P. KOTELENEZ, *Law of large numbers and central limit theorem for chemical reactions with diffusions.* Universitat Bremen, 1982.

[5] E. LENGLART, Relations de domination entre deux processus. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **B XIII**, 1977, p. 171-179.

[6] M. MÉTIVIER, *Semimartingales.* De Gruyter. Berlin, New York, 1982.

[7] R. REBOLLEDO, La méthode des martingales appliquée à la convergence en loi des processus. *Mémoires de la S. M. F.*, t. **62**, 1979.

(Manuscrit reçu le 13 mars 1984)